

Obsah

Prolog	3
Fibonacciův králík a jejich modifikace	3
Leslieho model růstu populace	6
Vektory, matice a operace s nimi	16
1 Konstrukce modelů	21
2 Modely s konstantní projekční maticí	23
3 Identifikace parametrů modelu	25
4 Modely s externí variabilitou	27
5 Modely s interní variabilitou	29
6 Modely dvojpohlavní populace	31

Prolog

Fibonacciův králík a jejich modifikace

Leonardo Pisánský, známější jako Fibonacci, se narodil kolem roku 1170 v italské Pise a zemřel roku 1250. Vzdělání získal v severní Africe, kde jeho otec Guilielmo Bonacci působil jako diplomat. Svoje vědomosti sepsal do knihy *Liber abaci*. Toto dílo publikované roku 1202 má hlavní zásluhu na tom, že v Evropě byl přijat poziční systém zápisu čísel (pomocí indických symbolů, kterým dnes říkáme arabské číslice). Ve třetí části knihy Fibonacci zformuloval a řešil úlohu:

Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.¹

Tuto úlohu a její řešení lze považovat za jeden z prvních matematických modelů růstu populace. Budeme ji řešit s použitím současné symboliky.

Ze zadání úlohy plyne, že králíky můžeme rozdělit do dvou kategorií (tříd) — na ty, kteří jsou mladší než dva měsíce a tedy dosud „nerodí“ potomky, a na ty staré aspoň dva měsíce a tedy plodné. Označme $x(t)$, resp. $y(t)$, počet párů juvenilních (mladých, dosud neplodných), resp. dospělých (plodných), králíků v t -tém měsíci. Z poněkud vágního Fibonacciova popisu však není jasné, co přesně má vyjadřovat „počet párů králíků v t -tém měsíci“. Budeme si tedy představovat, že každý měsíc v určený den proběhne sčítání králíků, kterým získáme hodnoty $x(t)$ a $y(t)$. Nyní je potřeba vyjasnit, kdy se nové páry rodí. Jedna z možností je, že také k porodům dochází určitý den v měsíci. Abychom úvahy dále zjednodušili (a zreprodukovali Fibonacciův výsledek) budeme předpokládat, že králíci se rodí první den a jejich sčítání provádíme poslední den měsíce. Při sčítání mají tedy novorození králíci věk již jeden měsíc. Při sčítání následujícího měsíce mají tito králíci již věk dva měsíce a patří tedy mezi plodné. Poněvadž pár plodných králíků „zrodí“ (tj. zplodí a porodí) jeden pár mladých, bude počet párů mladých v t -tém měsíci stejný jako počet párů plodných v měsíci předchozím,

$$x(t) = y(t - 1). \tag{1}$$

Králíci jsou na místě ohrazeném zdí. Tomu můžeme rozumět tak, že jsou chráněni před predátory a tedy neumírají, a také, že nemohou nikam utéci. Proto bude počet plodných v t -tém měsíci roven jejich počtu v předchozím měsíci zvětšenému o počet mladých, kteří se v předchozím měsíci narodili a během měsíce dospěli,

$$y(t) = y(t - 1) + x(t - 1). \tag{2}$$

¹Překlad E. Čecha. Citováno dle J. Bečvář a kol., *Matematika ve středověké Evropě*. Praha: Prometheus 2001, str. 277.

měsíc	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
počet juvenilních párů	$x(t)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
počet plodných párů	$y(t)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
celkový počet párů	$z(t)$	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Tabulka 1: Řešení Fibonacciovy úlohy o králících za předpokladu, že k rození dochází na začátku měsíce, počty zjišťujeme na konci měsíce, tj. používáme model (3).

Rovnice (1) a (2) můžeme považovat za model růstu populace králíků; její aktuální velikost počítáme z velikosti v minulosti. Při matematickém modelování nějakých procesů je ovšem obvyklé usuzovat na budoucnost z přítomnosti. V rovnicích (1) a (2) budeme psát $t+1$ místo t , rovnice tedy přepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned}x(t+1) &= y(t), \\y(t+1) &= x(t) + y(t),\end{aligned}$$

nebo ve vektorovém zápisu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (t+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (t). \quad (3)$$

Měsíc, ve kterém „kdośi umístil pár králíků na určitém místě“, budeme považovat za nultý, onen „umístěný pár“ za dospělé. Máme tedy počáteční podmínku $x(0) = 0$, $y(0) = 1$. Odtud již můžeme postupně počítat počty $x(t)$ a $y(t)$ pro libovolné $t = 1, 2, 3, \dots$ a z nich celkový počet párů $z(t) = x(t) + y(t)$. Výpočet je shrnut v tabulce 1. Výsledek 377 párů odpovídá výsledku v *Liber abaci*.²

Jiná z možností, jak zadání porozumět, je mírně realističtější představa, že králíci se rodí kdykoliv, ale opět je sčítáme v určitý den měsíce. Při sčítání tedy mohou mít novorozenci, tj. králíci narození od předchozího sčítání, věk z intervalu $[0, 1)$ a starší, ale dosud neplodní králíci věk z intervalu $[1, 2)$. Při této interpretaci rozdělíme třídu juvenilních párů na dvě a označíme $x_0(t)$ počet novorozenců a $x_1(t)$ počet neplodných párů věku alespoň jeden měsíc, ale méně než dva měsíce. Poněvadž novorozenci jsou bezprostředními potomky plodných párů, mladí jsou ti, kteří se v předchozím měsíci narodili, a počet plodných je počtem plodných z předchozího měsíce zvětšeným o počet mladých, kteří dosáhli věku aspoň dva měsíce, dostaneme model

$$\begin{aligned}x_0(t+1) &= y(t) \\x_1(t+1) &= x_0(t) \\y(t+1) &= x_1(t) + y(t),\end{aligned}$$

který opět můžeme přepsat do vektorového tvaru

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y \end{pmatrix} (t+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y \end{pmatrix} (t). \quad (4)$$

Při počátečních podmínkách $x_0(0) = 0$, $x_1(0) = 0$, $y(0) = 1$ a označení celkového počtu párů jako $z(t) = x_0(t) + x_1(t) + y(t)$, dostaneme počty králíků, jak je uvedeno v tabulce 2. Výsledný počet párů králíků za rok je při této interpretaci téměř třikrát menší, než původní

²To nemusí znamenat, že by si Fibonacci představoval rození na začátku měsíce a sčítání na jeho konci. Pravděpodobněji je, že si neuměl představit nulový věk a proto jeho novorozenci měli hned věk 1 a v následujícím měsíci tak byli dvuměsíční a tedy již plodní.

měsíc	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
počet novorozených párů	$x_0(t)$	0	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41
počet neplodných párů	$x_1(t)$	0	0	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28
počet plodných párů	$y(t)$	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60
celkový počet párů	$z(t)$	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129

Tabulka 2: Řešení Fibonacciovy úlohy o králících za předpokladu, že k rození dochází kdykoliv v průběhu měsíce a králíky sčítáme v pevně určený den měsíce, tj. používáme model (4).

Fibonacciův výsledek.

Prvním obecným poučením tedy může být to, že sestavení modelu růstu populace je potřebné věnovat pozornost, přesně formulovat a zdůvodnit předpoklady, za kterých je model sestaven. Různé modely téhož procesu mohou totiž dávat různé výsledky.

Druhým závěrem je pozorování, že vývoj populace králíků můžeme popsat matematickým modelem (3) nebo (4), které jsou zvláštními případy obecného modelu ve tvaru

$$\mathbf{n}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{n}(t); \quad (5)$$

přítom složky vektoru $\mathbf{n}(t)$ vyjadřují časově závislé velikosti jednotlivých tříd, do kterých je populace strukturována (rozdělena) a \mathbf{A} je nějaká matice.

Fibonacciův model je krásný matematicky, není ovšem příliš realistický biologicky. Králíci neumírají, dospívají v přesně určených časech, plodí přesně určený počet potomků v pravidelných intervalech. Fibonacci samozřejmě nepředstíral, že popisuje vývoj populace králíků, vytvořil jakousi umělou skutečnost — jeho králíci žijí a množí se na „místě ohraženém zdí“. Myšlenka modelovat pomocí rovnice (5) vývoj populace rozdělené na několik disjunktních tříd, přičemž čas plyne v diskretních krocích, je však velmi plodná.

Pokusíme se modelovat vývoj populace za realističtějších předpokladů. Ponecháme původní představu času plynoucího v diskretních krocích (nejedná se tedy o čas fyzikální) a zvolíme nějakou časovou jednotku (ve Fibonacciově úloze jí byl jeden měsíc). Populaci si budeme představovat jako tvořenou velkým počtem jedinců (v případě organismů rozmnožujících se pohlavně budeme za „jedince“ považovat páry nebo samice). Každý z jedinců může být jednoho z typů — *juvenilní* (nedospělý, neplodný) nebo *plodný* (dospělý, dospělec, jedinec schopný rozmnožování). Jinak jsou jedinci nerozlišitelní.

Populaci budeme uvažovat jako uzavřenou, tj. takovou, že z ní žádní jedinci neemigrují, ani do ní žádní neimigrují; v tomto užším smyslu tedy interpretujeme Fibonacciův požadavek, že populace se vyvíjí „na místě ohraženém zdí“. V takové populaci probíhají tři procesy — rozmnožování (rození nebo produkce potomků, tj. vznik nových jedinců), dospívání (maturace, přeměna juvenilního jedince na plodného) a umírání (nebo z jiného pohledu přežívání). Narození jedince, jeho přeměnu na plodného a jeho úmrtí považujeme za náhodné jevy. O umírání (přežívání) a dospívání budeme předpokládat, že se jedná o jevy stochasticky nezávislé. Označme

- σ_1 ... pravděpodobnost, že juvenilní jedinec přežije jedno období,
- σ_2 ... pravděpodobnost, že plodný jedinec přežije jedno období,
- γ ... pravděpodobnost, že juvenilní jedinec během období dospěje,
- φ ... střední počet potomků plodného jedince za jedno období.

O pravděpodobnostech přežití σ_1 a σ_2 , pravděpodobnosti maturace γ a fertilitě φ budeme předpokládat

$$0 < \sigma_1 < 1, \quad 0 \leq \sigma_2 < 1, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad 0 < \varphi; \quad (6)$$

v reálně existující populaci totiž musí být možné, že se juvenilní jedinec dožije plodnosti ($\sigma_1 > 0$, $\gamma > 0$) a že se nějací noví jedinci rodí ($\varphi > 0$), přežití nikdy není jisté ($\sigma_1 < 1$, $\sigma_2 < 1$). Nevylučujeme možnost $\sigma_2 = 0$, tj. že jedinci po „produkcii potomků“ (porodu, naklazení vajíček a podobně) hynou; taková populace se nazývá *semelparní*. Nevylučujeme však ani možnost $\sigma_2 > 0$, tj. že dospělí jedinci plodí po delší úsek života; taková populace se nazývá *iteroparní*. Jedinci mohou dospívat bezprostředně po narození, tj. v čase kratším, než je zvolené období. V období po narození tedy takový jedinec, pokud nezemře, jistě dospěje, $\gamma = 1$. Jedinci z populace mohou dospívat i s jistým zpožděním, $\gamma < 1$. Zhruba řečeno, při délce časového kroku jeden rok jsou jednoleté organismy semelparní s bezprostředním dospíváním, drobní ptáci a savci jsou iteroparní s bezprostředním dospíváním, lososi nebo cikády jsou semelparní se zpožděným dospíváním, velcí ptáci a savci (včetně člověka) jsou iteroparní se zpožděným dospíváním. Snažíme se tedy modelovat dosti obecnou populaci.

Označme dále $n_1(t)$, resp. $n_2(t)$, velikost (počet jedinců, populační hustotu, celkovou biomasu a podobně) části populace tvořené juvenilními, resp. plodnými, jedinci v t -tém časovém kroku. Juvenilní část populace je tvořena jedinci, kteří se za poslední období narodili, a jedinci, kteří již tuto třídu populace tvořili, přežili období a nedospěli v něm. Očekávaná velikost juvenilní části populace v následujícím období tedy bude

$$n_1(t+1) = \sigma_1(1-\gamma)n_1(t) + \varphi n_2(t). \quad (7)$$

Plodná část populace bude tvořena jedinci, kteří byli juvenilní, nezemřeli a dospěli, a jedinci, kteří již dospěli byli a přežili. Očekávaná velikost plodné části populace v následujícím období tedy bude

$$n_2(t+1) = \sigma_1\gamma n_1(t) + \sigma_2 n_2(t). \quad (8)$$

Tyto rovnice opět můžeme přepsat ve vektorovém (maticovém) tvaru

$$\mathbf{n}(t+1) = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} (t+1) = \begin{pmatrix} \sigma_1(1-\gamma) & \varphi \\ \sigma_1\gamma & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} (t) = \mathbf{A}\mathbf{n}(t), \quad (9)$$

kde jsme označili

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sigma_1(1-\gamma) & \varphi \\ \sigma_1\gamma & \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Poznamenejme ještě, že kdybychom připustili $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ a položili $\gamma = \varphi = 1$ (jedinci jistě přežívají, tj. neumírají, jistě během období dospějí a dospělí vždy vyprodukují právě jednoho potomka), dostaneme původní Fibonacciův model (3).

Leslieho model růstu populace

Patrick Holt Leslie (1900–1972) absolvoval bakalářské studium fyziologie na Christ Church College oxfordské university. Zdravotní problémy mu však neumožnily dokončit studium medicíny. Několik let pracoval v bakteriologické laboratoři na katedře patologie, pak ale svůj zájem obrátil k matematické statistice a přijal místo v nově založeném Odboru populací živočichů (Bureau of Animal Population). Za druhé světové války se toto centrum zabývalo metodami regulace hlodavců v zásobárnách obilí. Roku 1945 publikoval Leslie v časopisu *Biometrika* svůj nejslavnější článek *On the use of matrices in certain population mathematics*. V něm sestavil a analyzoval model růstu počtu samic v populaci potkanů (*Rattus norvegicus*); jeho model ovšem může být stejně dobře použit pro lidskou populaci.

Za jedinou charakteristiku samice budeme považovat její věk. Ten je při narození nulový a postupně narůstá s plynutím času. Fyzikální čas považujeme za kontinuum, lze ho vyjádřit reálným číslem. Věk ovšem obvykle vyjadřujeme číslem přirozeným; u lidí v novorozeneckém věku počtem dní, poté počtem týdnů, ještě později počtem měsíců, a nakonec počtem let od narození. U praxe vyjadřovat věk přirozeným číslem zůstaneme i při sestavování modelu růstu populace.

Nejprve je tedy potřeba stanovit časovou jednotku. Může to být den, týden, měsíc, rok, pět let nebo desetiletí; záleží na tom, jak přesně (jemně) chceme věkovou strukturu populace popisovat. Spojitou veličinu *věk* rozdělíme na diskrétní *věkové třídy* — v první třídě budou samice ve věku od narození do jedné (časové jednotky), ve druhé samice od věku jedna do věku dvě, atd. Aby bylo přiřazení samic do věkové třídy jednoznačné, dohodneme se, že obecně v i -té věkové třídě jsou zařazeny samice, jejichž věk je aspoň $i - 1$ a méně než i , tj. samice, jejichž věk je z intervalu $[i - 1, i)$.³

Označme nyní $n_i(t)$ množství samic v i -té věkové třídě v čase t (v časovém okamžiku t). Čas vyjadřujeme ve stejných jednotkách jako věk a uvažujeme ho pouze s celočíselnými hodnotami, $t = 0, 1, 2, \dots$. „Množství samic“ může být vyjádřeno počtem jedinců nebo nějakou jinou jednotkou, např. počtem desetitisíců jedinců, počtem jedinců vztaženým na jednotku plochy a podobně.

Ze všech procesů, které probíhají v populaci se omezíme na dva nejdůležitější z hlediska jejího růstu — rození a umírání. Budeme předpokládat, že z hlediska těchto procesů se samice v jedné věkové třídě neliší jedna od druhé.

Označme P_i pravděpodobnost jevu, že samice, která v čase t patřila do i -té věkové třídy, přežije interval jednotkové délky, tedy bude žít i v čase $t + 1$; veličinu P_i stručně nazýváme pravděpodobnost přežití. V dostatečně velké populaci bude tato pravděpodobnost rovna relativní četnosti samic z i -té věkové třídy, které přežily jedno období, tedy

$$P_i = \frac{n_{i+1}(t+1)}{n_i(t)}.$$

Pokud bychom proces umírání považovali za deterministický, lze parametr P_i interpretovat jako podíl samic, které během časového intervalu $(t, t + 1]$ nezemřely, mezi všemi samicemi, které v čase t patřily do i -té věkové třídy. Hodnoty P_i se nazývají *projekční koeficienty* — promítají totiž aktuální množství samic na jejich množství v následujícím časovém období. Budeme předpokládat, že parametr P_i nezávisí na čase, že přežití jednoho období závisí pouze na věku, nikoliv na nějakých vnějších vlivech.

Dále budeme předpokládat, že existuje nějaký maximální možný věk, kterého se lze dožít, ale který není možné překročit. Tedy že existuje přirozené číslo k takové, že $P_i > 0$ pro každé $i = 1, 2, 3, \dots, k - 1$ a $P_k = 0$. To znamená, že uvažujeme právě k věkových tříd. Z předchozí rovnosti nyní vyjádříme

$$n_{i+1}(t+1) = P_i n_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots, k - 1. \quad (10)$$

Poněvadž samice z i -té věkové třídy může (ale nemusí) uhynout během časového intervalu

³Uvedené rozdělení do věkových tříd samozřejmě není jediné možné. Stejně dobře by v první věkové třídě mohly být samice věku z intervalu $[0, 1]$, ve druhé samice věku z intervalu $(1, 2]$; obecně v i -té věkové třídě by byly samice věku z intervalu $(i - 1, i]$, $i = 2, 3, \dots$. Jiná možnost třídění podle věku by mohla být $[0, \frac{1}{2}]$, $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$, atd. Věkové třídy uvažované v t textu mají jistou „estetickou přednost“ — intervaly věku v každé třídě jsou stejného typu, jsou polouzavřené zleva.

jednotkové délky, platí $n_{i+1}(t+1) \leq n_i(t)$. Projekční koeficienty P_i tedy splňují podmínky

$$0 < P_i \leq 1, \quad i = 1, 2, 3, \dots, k-1. \quad (11)$$

O procesu rození budeme předpokládat, že počet dcer, které se narodí samicím z i -té věkové třídy během jednotkového časového intervalu je úměrný počtu těchto samic. Formálněji: počet novorozených samic, tj. samic z první věkové třídy, které se narodí v časovém intervalu $(t, t+1]$ a jejichž matky patřily v čase t do i -té věkové třídy je roven $F_i n_i(t)$, kde F_i je nějaká nezáporná konstanta. Hodnotu F_i lze považovat za očekávaný počet živých dcer jedné typické samice z i -té věkové třídy za jednotkový časový interval; někdy se nazývá *míra reprodukce ve věku i* . Celkový počet novorozených samic v čase $t+1$ tedy bude

$$n_1(t+1) = F_1 n_1(t) + F_2 n_2(t) + \dots + F_k n_k(t) = \sum_{i=1}^k F_i n_i(t). \quad (12)$$

V přirozené populaci nebudou mít potomky samice velmi mladé (nedospělé) a samice po menopauze⁴. Existují tedy jisté hodnoty $m, M \in \{1, 2, \dots, k\}$ takové, že $m \leq M$ a

$$\begin{aligned} 0 &= F_1 = F_2 = \dots = F_{m-1} = F_{M+1} = F_{M+2} = \dots = F_k, \\ F_m &> 0, F_{m+1} > 0, F_{m+2} > 0, \dots, F_{M-1} > 0, F_M > 0; \end{aligned} \quad (13)$$

m označuje věk dosažení pohlavní dospělosti, M věk menopauzy; jsou-li samice plodné celý život, je $M = k$.

Model vývoje populace je tedy dán rovnostmi (10), (12), tj.

$$\begin{aligned} n_1(t+1) &= F_1 n_1(t) + F_2 n_2(t) + F_3 n_3(t) + \dots + F_{k-1} n_{k-1}(t) + F_k n_k(t) \\ n_2(t+1) &= P_1 n_1(t) \\ n_3(t+1) &= P_2 n_2(t) \\ &\vdots \\ n_k(t+1) &= P_{k-1} n_{k-1}(t). \end{aligned} \quad (14)$$

Při označení

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \dots & F_{k-1} & F_k \\ P_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{k-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ \vdots \\ n_{k-1}(t) \\ n_k(t) \end{pmatrix}$$

lze rovnosti (14) zapsat v maticovém tvaru

$$\mathbf{n}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{n}(t),$$

tedy ve tvaru stejném, jako model Fibonacciových králíků (5). Matice \mathbf{A} uvedeného tvaru se nazývá *Leslieho matice*.

Na závěr ještě shrneme předpoklady, za kterých byl model vývoje populace (14) sestaven:

⁴Poznamenejme, že menopauza je známa pouze u lidí, kosatek a primátů chovaných v zajetí

- je adekvátní klasifikovat jedince podle věku,
- informace o věku jedinců uvnitř věkové třídy je irelevantní,
- plodnosti a úmrtnosti závisí pouze na věku.

Ještě poznamenejme, že stejným způsobem lze modelovat nejen populaci savců, ale i populace jiných obratlovců, u nichž plodnost a přežívání závisí především na věku. Vždy je důležité zvolit časové měřítko (u velkých savců roky až desetiletí, u drobných savců měsíce až roky) a vhodnou jednotku velikosti populace (může to být počet jedinců, populační hustota, celková biomasa a podobně).

Příklad

Uvažujme jednoduchý Leslieho model populace strukturované do tří věkových tříd, kde jsou plodní jedinci druhé a třetí věkové třídy. Jedná se tedy o model (14) s $k = M = 3$, $m = 2$. Položme konkrétně $F_2 = 1$, $F_3 = 5$, $P_1 = 0,3$, $P_2 = 0,5$. Budeme předpokládat, že na počátku se populace skládala pouze z jednotkového množství jedinců třetí věkové třídy. Jedná se tedy o model

$$\begin{pmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n_1(0) \\ n_2(0) \\ n_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

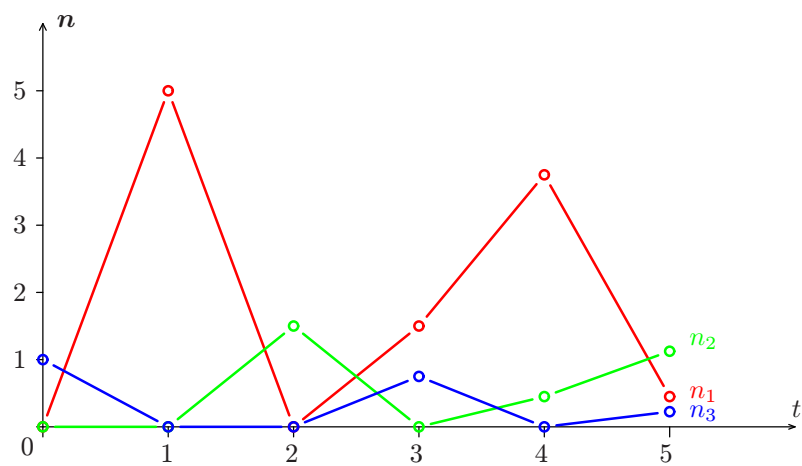
Snadno spočítáme, že

$$\begin{pmatrix} n_1(1) \\ n_2(1) \\ n_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n_1(2) \\ n_2(2) \\ n_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0 \\ 1,5 \\ 0,0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n_1(3) \\ n_2(3) \\ n_3(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,50 \\ 0,00 \\ 0,75 \end{pmatrix},$$

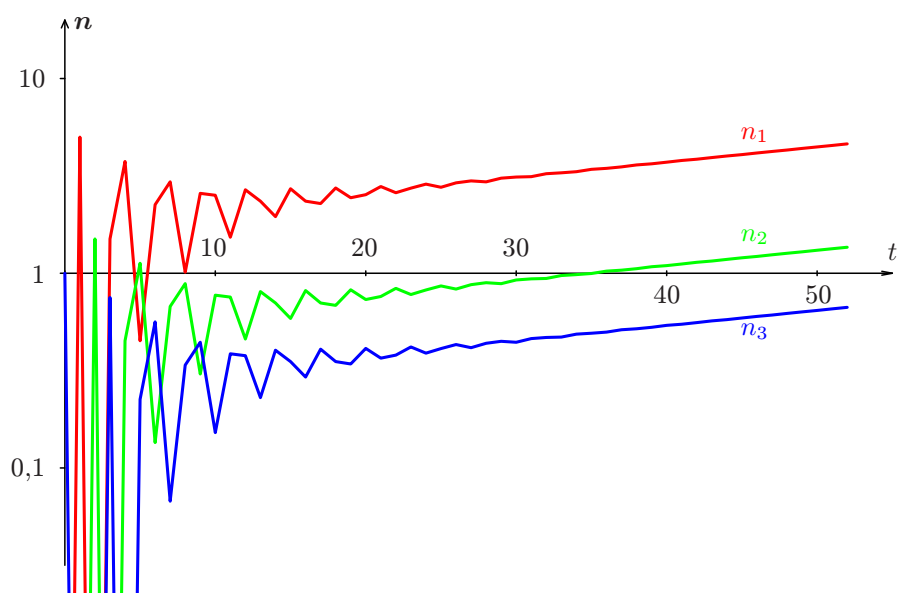
$$\begin{pmatrix} n_1(4) \\ n_2(4) \\ n_3(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,75 \\ 0,40 \\ 0,00 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n_1(5) \\ n_2(5) \\ n_3(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,450 \\ 1,125 \\ 0,225 \end{pmatrix}$$

a tak můžeme pokračovat dále. Tento výsledek nám ovšem neposkytuje žádnou souhrnnou informaci, která by umožnila nějaký vhled do vývoje populace. A to ani v případě, že ho zobrazíme graficky, viz obr. 1.

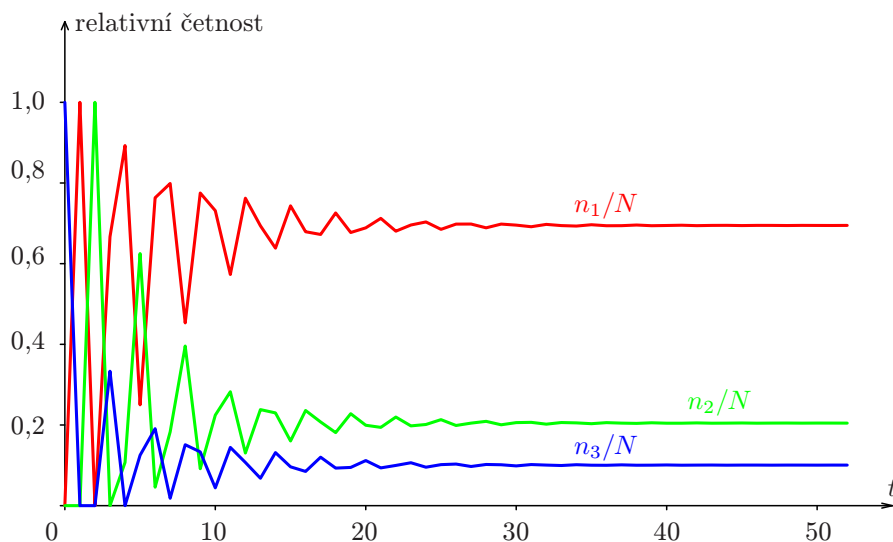
Vypočítáme proto vývoj populace podle modelu (15) na delším časovém úseku. Výsledek je prezentován graficky na obr. 2, na svislé ose (velikosti složek populace) je logaritmická stupnice. Vidíme, že kolísání velikostí jednotlivých věkových tříd se po jisté době (asi po 30 časových jednotkách) ustálí a velikost populace roste exponenciálně, velikosti jednotlivých věkových tříd rostou stejně rychle. To znamená, že po jisté době vývoje se věková struktura populace stabilizuje, relativní zastoupení jednotlivých věkových tříd zůstává konstantní. Tuto úvahu potvrzuje i grafické znázornění vývoje relativních velikostí jednotlivých věkových tříd na obr. 3. Ještě poznamenejme, že velikost populace modelovaná rovnostmi (15) s časem roste. Zastoupení jednotlivých věkových tříd ve věkově stabilizované populaci (tj. v populaci po dostatečně dlouhém vývoji) je takové, že relativní abundance třídy s nejmladšími jedinci je největší, relativní abundance třídy s nejstaršími jedinci je nejmenší.



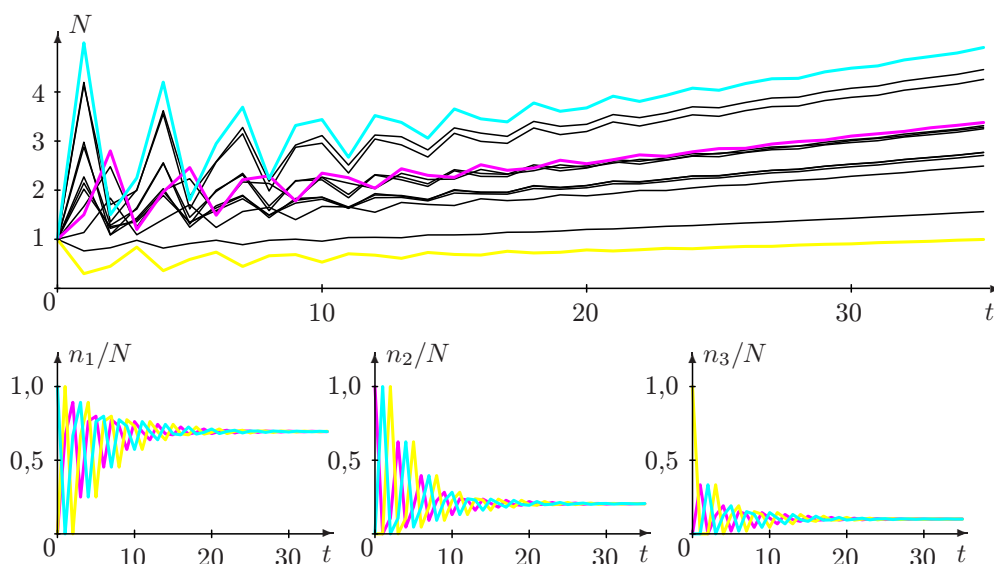
Obrázek 1: Vývoj populace podle modelu (15).



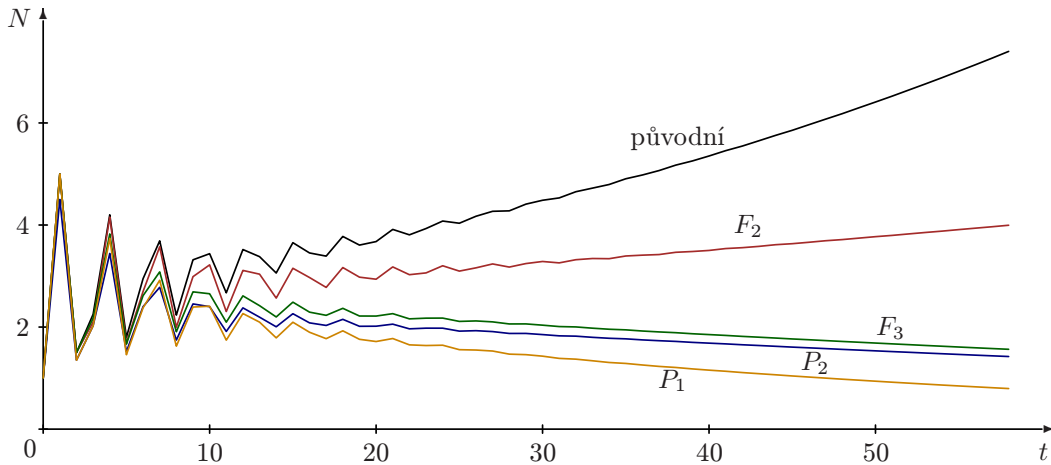
Obrázek 2: Vývoj populace podle modelu (15). Na svislé ose je logaritmická stupnice.



Obrázek 3: Vývoj věkové struktury populace podle modelu (15), $N = n_1 + n_2 + n_3$



Obrázek 4: Vliv počátečních podmínek na vývoj populace. Populace je modelována první rovnicí (15) s některou ze čtyř počátečních podmínek (16). Průběh řešení s první počáteční podmínkou je znázorněn tyrkysově, s druhou fialově a se třetí žlutě. Čtvrtá z počátečních podmínek byla volena náhodně a bylo provedeno 10 simulací, výsledky jsou na horním obrázku zobrazeny černě.



Obrázek 5: Vývoj celkové velikosti populace ($N = n_1 + n_2 + n_3$) podle modelu (15), ve kterém je právě jeden z parametrů zmenšen o 10%.

Vliv počátečních podmínek

V modelu (15) budeme měnit počáteční podmínky. Postupně budeme předpokládat, že na počátku se populace skládala z jednotkového množství jedinců právě jedné ze tří věkových tříd, nebo že v populaci jednotkové velikosti mohly být zastoupeny všechna věkové třídy. Uvažujme tedy první rovnost z modelu (15) spolu s některou z počátečních podmínek

$$\begin{pmatrix} n_1(0) \\ n_2(0) \\ n_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n_1(0) \\ n_2(0) \\ n_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n_1(0) \\ n_2(0) \\ n_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n_1(0) \\ n_2(0) \\ n_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

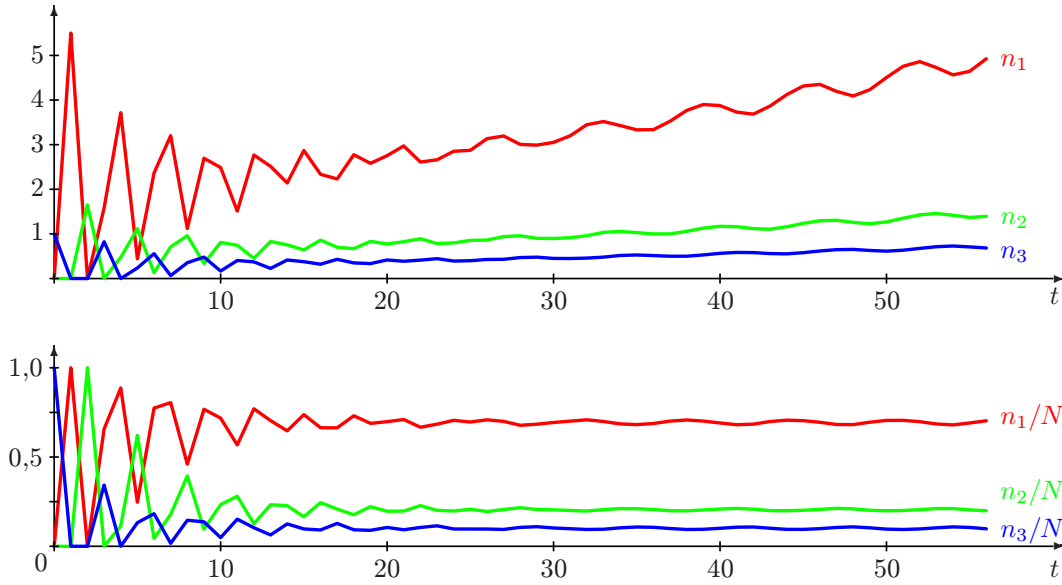
kde $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$, $\xi_3 \geq 0$, $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$.

První tři z počátečních podmínek (16) představují jakési extrémní hodnoty, ve čtvrté z nich můžeme zvolit hodnoty ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 náhodně a výpočet několikrát zopakovat. Výsledky jsou graficky znázorněny na obr. 4. Vidíme, že ve všech případech po asi 25 časových jednotkách velikost populace roste exponenciálně a že relativní velikosti jednotlivých věkových tříd se ustálí na stejných hodnotách. Počáteční struktura populace tedy neovlivňuje ani rychlost růstu populace, ani její stabilizovanou strukturu. Ovlivňuje pouze celkovou velikost populace v daném čase.

Vliv změny parametrů

V modelu (15) postupně zmenšíme každý z parametrů o 10%. Vývoj celkové velikosti populace v takových případech vidíme na obr. 5. Zmenšení plodnosti ve druhé věkové třídě zpomalí růst populace, ale celková velikost populace stále roste exponenciálně. Zmenšení plodnosti nejstarších jedinců nebo zmenšení některé z pravděpodobností přežití však způsobí, že populace bude vymírat; vymírání je nejrychlejší v případě zvětšení úmrtnosti (omezení přežití) nejmladší věkové třídy.

Z těchto výsledků vidíme, že rychlost růstu populace je nejcitlivější na změny novoroze- necké úmrtnosti, nejméně je citlivá na změny plodnosti střední věkové třídy.



Obrázek 6: Vývoj populace podle modelu (17). Nahoře velikosti jednotlivých věkových tříd, dole relativní zastoupení jednotlivých věkových tříd v populaci.

Vliv kolísání velikosti parametrů

Z předchozího výpočtu víme, že zmenšení plodnosti třetí věkové třídy vede k vymření populace, zmenšení plodnosti druhé věkové třídy vede ke zpomalení růstu populace. Podívejme se nyní, jak se bude vyvíjet velikost populace, pokud se plodnosti mění v průběhu času. Uvažujme tedy model

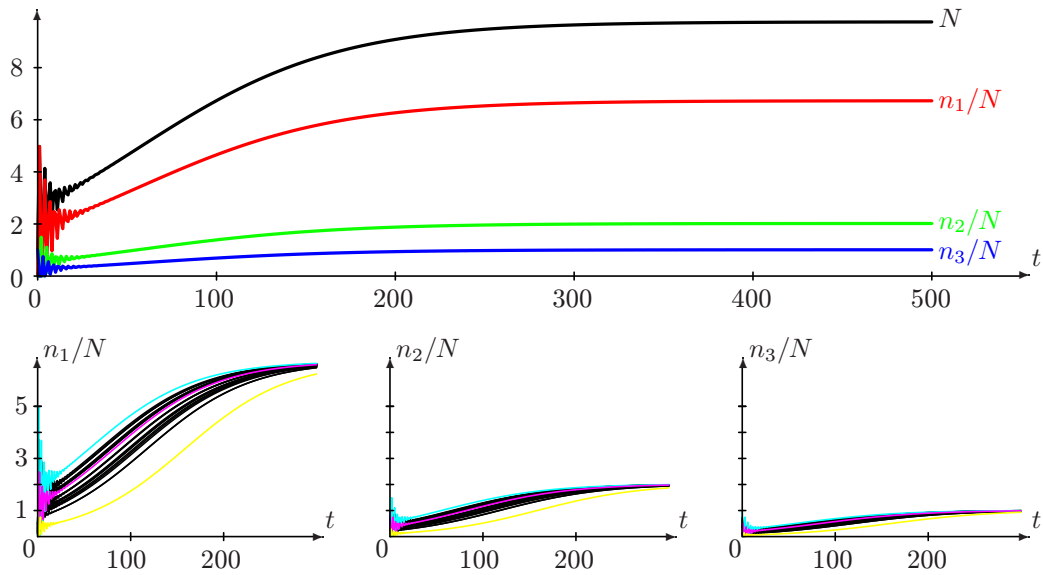
$$\begin{pmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h(t) & 5h(t) \\ 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

kde $h(t) = 1 + \frac{1}{10} \cos t$. Plodnosti tedy kolísají kolem původních hodnot v rozmezí $\pm 10\%$. Vývoj populace budeme opět vyšetřovat pro různé počáteční hodnoty (16). Výsledný růst populace je znázorněn na obr. 6. Nyní vidíme, že struktura populace se neustálí na nějakých hodnotách relativního zastoupení jednotlivých věkových tříd, ale kolem těchto hodnot kolísají.

Populace s parametry závislými na její velikosti

Zdroje všech přirozených populací jsou omezené, a proto žádná nemůže růst neomezeně, dříve či později narazí na horní mez svého růstu. Budeme pro jednoduchost předpokládat, že velká populace spotřebovává více zdrojů a že jejich následný nedostatek způsobí zmenšení plodnosti jednotlivých věkových tříd. Označme tedy $N = n_1 + n_2 + n_3$ a uvažujme model

$$\begin{pmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g(N) & 5g(N) \\ 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n_1(0) \\ n_2(0) \\ n_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$



Obrázek 7: Nahoře: Vývoj populace s interní variabilitou podle modelu (18) s $g(N) = e^{-0,005N}$. Dole: Vývoj velikosti jednotlivých věkových tříd populace podle první rovnosti modelu (18) s různými počátečními podmínkami (16), ty jsou v grafech rozlišeny barvami: — označuje první, — druhou, — třetí a — čtvrtou podmínku, se kterou bylo provedeno 20 simulací.

Přitom funkce g je nezáporná, klesající a taková, že $g(0) = 1$; pokud by tedy nedocházelo k uvažované vnitrodruhové konkurenci, populace by se vyvíjela podle modelu (15).

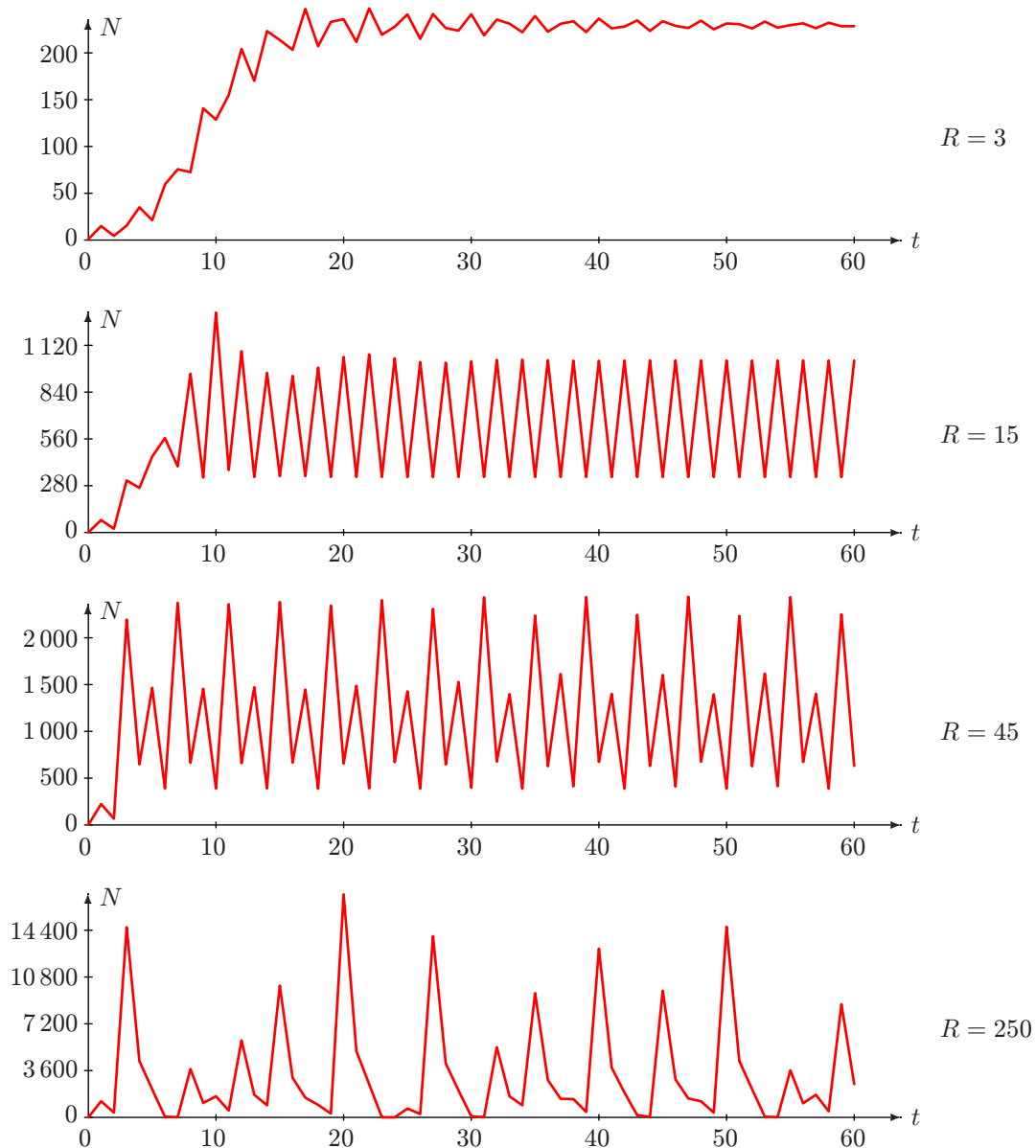
Zvolme pro určitost $g(N) = e^{-bN}$, kde $b > 0$. Vývoj celkové velikosti populace i jejich jednotlivých složek při použití modelu (18) s touto funkcí g a s parametrem $b = 0,005$ je znázorněn na obr. 7 nahoře. Vidíme, že (absolutní) velikosti jednotlivých věkových tříd se ustálí na jistých hodnotách a také celková velikost populace naroste do jisté limitní hodnoty. Tato mezní velikost populace představuje kapacitu (úživnost) prostředí pro modelovanou populaci.

Na obr. 7 dole jsou zobrazeny průběhy velikostí jednotlivých složek takto modelované populace pro různé počáteční podmínky (16). Tento výsledek naznačuje, že limitní velikosti jednotlivých věkových tříd populace nezávisí na počátečních podmínkách. Ty ovlivňují pouze rychlost konvergence.

Uvažujme ještě populaci, v níž plodnost jedinců druhé věkové třídy může být větší než jednotková. Vývoj populace budeme tedy modelovat rovnostmi (18), funkce g však bude dána rovností

$$g(N) = Re^{-bN},$$

kde $R \geq 1$. Vývoj celkové velikosti populace pro různé hodnoty parametru R vidíme na obr. 8. Pro $R = 3$ se velikost populace ustálí na hodnotě kapacity prostředí a velikost populace konverguje k této limitní hodnotě s tlumenými oscilacemi. Pro $R = 15$ a pro $R = 45$ populace po jisté době vývoje začne kolem mezní hodnoty pravidelně oscilovat (velikost populace je od jistého času periodická, v případě $R = 15$ je perioda rovna 2, v případě $R = 45$ je rovna 4), pro $R = 250$ začne kolísat a v tomto kolísání již není žádná pravidelnost vidět.



Obrázek 8: Vývoj populace s interní variabilitou. Populace je modelována rovnicí (18) s funkcí $g(N) = Re^{-0,005N}$ a různými hodnotami parametru R .

Vektory, matice a operace s nimi

Vektory budeme chápat jako sloupcové. Budeme je označovat tučnými malými písmeny, jejich složky budeme převážně značit stejným písmenem jako je označen vektor, doplněným dolním indexem, nebo znakem vektoru v kulaté závorce s dolním indexem. Tedy

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{v})_i = v_i.$$

Symbolem $\mathbf{1}$ označíme vektor, jehož všechny složky jsou rovny jedné, symbolem \mathbf{o} vektor, jehož všechny složky jsou rovny 0,

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matice budeme převážně označovat velkými bezpatkovými písmeny, jejich složky stejným písmenem malým s dvojicí indexů, případně znakem matice v kulatých závorkách s dvojicí indexů; první index je řádkový, druhý sloupcový. Matice typu $m \times n$ je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{A})_{ij} = a_{ij}.$$

Vektor s k složkami (k -rozměrný vektor) je tedy matice typu $k \times 1$. Symboly \mathbf{O} a \mathbf{I} označíme nulovou a jednotkovou matici,

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{O})_{ij} = 0, \quad (\mathbf{I})_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j; \end{cases}$$

přitom δ_{ij} je Kroneckerův symbol. Bude-li potřebné zdůraznit, že nulová nebo jednotková matice je současně čtvercovou maticí dimenze n , budeme psát \mathbf{O}_n nebo \mathbf{I}_n .

Součet matic \mathbf{A} , \mathbf{B} stejného typu je definován po složkách, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Násobek matice skalárem γ je matice $\gamma\mathbf{A}$ stejného typu,

$$\gamma \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma a_{11} & \gamma a_{12} & \dots & \gamma a_{1n} \\ \gamma a_{21} & \gamma a_{22} & \dots & \gamma a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma a_{m1} & \gamma a_{m2} & \dots & \gamma a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (\gamma\mathbf{A})_{ij} = \gamma a_{ij}.$$

Pro lineární kombinaci matic \mathbf{A} , \mathbf{B} stejného typu platí $(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B})_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta b_{ij}$. Také platí $((\alpha + \beta)\mathbf{A})_{ij} = (\alpha + \beta)a_{ij}$.

Násobení matic: Násobením matice \mathbf{A} typu $m \times n$ maticí \mathbf{B} typu $n \times p$ (zprava) dostaneme matici $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ typu $m \times p$, pro jejíž složky platí

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} b_{\ell j}.$$

Pro násobení matice \mathbf{A} typu $m \times n$ vektorem \mathbf{v} o n složkách platí

$$(\mathbf{A}\mathbf{v})_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j.$$

Transpozice matice: Matice transponovaná k matici \mathbf{A} typu $m \times n$ je matice \mathbf{A}^T typu $n \times m$, pro níž platí

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = a_{ji}.$$

Pro násobení matic platí $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$.

Skalární součin vektorů \mathbf{v} , \mathbf{w} o k složkách je definován jako maticový součin

$$\mathbf{v}^T \mathbf{w} = \sum_{i=1}^k v_i w_i.$$

Hadamardův součin matic \mathbf{A} , \mathbf{B} stejného typu je „součin po složkách“, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \dots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \dots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \dots & a_{mn}b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{A} \circ \mathbf{B})_{ij} = a_{ij} b_{ij}.$$

Čtvercovou diagonální matici, která má v diagonále složky vektoru \mathbf{v} značíme $\text{diag } \mathbf{v}$. Je tedy

$$\text{diag } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & v_k \end{pmatrix}.$$

Pro vektory \mathbf{v} , \mathbf{w} stejné dimenze platí

$$\mathbf{v} \circ \mathbf{w} = \mathbf{v} \operatorname{diag} \mathbf{w} = (\operatorname{diag} \mathbf{v}) \mathbf{w}.$$

Kroneckerův součin matic: Nechť matice $\mathbf{X} = (x_{ij})$ je typu $\mu \times \nu$ a matice $\mathbf{Y} = (y_{ij})$ je typu $\kappa \times \lambda$. Jejich Kroneckerův součin $\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$ je matice typu $\mu\kappa \times \nu\lambda$, kterou lze blokově zapsat ve tvaru

$$\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} x_{11}\mathbf{Y} & x_{12}\mathbf{Y} & \dots & x_{1\nu}\mathbf{Y} \\ x_{21}\mathbf{Y} & x_{22}\mathbf{Y} & \dots & x_{2\nu}\mathbf{Y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{\mu 1}\mathbf{Y} & x_{\mu 2}\mathbf{Y} & \dots & x_{\mu\nu}\mathbf{Y} \end{pmatrix}.$$

Například tedy

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operace vec „poskládá sloupce matice nad sebe“, přesněji: z matice \mathbf{A} typu $m \times n$ vytvoří mn -rozměrný vektor $\operatorname{vec} \mathbf{A}$,

$$\operatorname{vec} \mathbf{A} = \operatorname{vec} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (\operatorname{vec} \mathbf{A})_k = a_{ij}$$

kde $i = 1 - \lfloor \frac{k}{m} \rfloor$, $j = \lfloor \frac{k}{m} \rfloor$; přitom $\lfloor \xi \rfloor$ označuje celou část z reálného čísla ξ .

S využitím operací vec a \otimes můžeme přepsat součin matice \mathbf{A} typu $m \times n$ a n -rozměrného vektoru:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{v} &= \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1a_{11} + v_2a_{12} + \cdots + v_na_{1n} \\ v_1a_{21} + v_2a_{22} + \cdots + v_na_{2n} \\ \vdots \\ v_1a_{m1} + v_2a_{m2} + \cdots + v_na_{mn} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots \\
&\quad \cdots + \begin{pmatrix} v_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \\
&= v_1 \mathbf{l}_m \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + v_2 \mathbf{l}_m \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + v_n \mathbf{l}_m \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = (\mathbf{v}^\top \otimes \mathbf{l}_m) \operatorname{vec} \mathbf{A}.
\end{aligned}$$

Symbolem $|\mathbf{A}|$ označíme matici, jejíž složky jsou absolutními hodnotami složek matice \mathbf{A} , $(|\mathbf{A}|)_{ij} = |a_{ij}|$. Podobně $|\mathbf{v}|$ označuje vektor se složkami $(|\mathbf{v}|)_i = |v_i|$.

Euklidovská norma k -rozměrného vektoru \mathbf{v} je definována vztahem

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^k v_i^2} = \sqrt{\mathbf{v}^\top \mathbf{v}},$$

součtová (taxikářská) norma k -rozměrného vektoru \mathbf{v} je definována vztahem

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^k |v_i| = \mathbf{1}^\top |\mathbf{v}|.$$

Kapitola 1

Konstrukce modelů

Kapitola 2

Modely s konstantní projekční maticí

Kapitola 3

Identifikace parametrů modelu

Kapitola 4

Modely s externí variabilitou

Kapitola 5

Modely s interní variabilitou

Kapitola 6

Modely dvojpoohlavní populace