

Obsah

I	Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné	3
1	Prekalkulus	5
1.1	Reálná čísla	5
1.2	Funkce a jejich základní vlastnosti	11
1.3	Posloupnosti	15
1.4	Diferenční a sumační počet	23
1.5	Elementární funkce	28
1.6	Limita funkce	38
1.7	Spojité funkce	45
1.8	Cvičení	50
2	Diferenciální počet funkcí jedné proměnné	53
2.1	Derivace	53
2.2	Derivace vyšších řádů, diferenciál	58
2.3	Obecné věty o derivaci	60
2.4	Taylorův vzorec	63
2.5	Průběh funkce	66
2.6	Rovinné křivky	71
2.7	Cvičení	75
3	Integrální počet funkcí jedné proměnné	79
3.1	Primitivní funkce	79
3.2	Určitý integrál	84
3.3	Vlastnosti Riemannova integrálu	92
3.4	Integrál jako funkce horní meze	100
3.5	Nevlastní integrály	102
3.6	Aplikace určitého integrálu	107
3.7	Numerická integrace	108
3.8	Cvičení	110
II	Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných	113
4	Metrické prostory	115
4.1	Pojem metriky	115
4.2	Podmnožiny metrického prostoru	118
4.3	Konvergence	121
4.4	Úplné a kompaktní prostory	123
4.5	Zobrazení metrických prostorů	126
4.6	Cvičení	130

5	Diferenciální počet funkcí více proměnných	131
5.1	Spojitosť a limita	131
5.2	Derivace	133
5.3	Diferenciál	136
5.4	Derivace složené funkce, Taylorův vzorec	139
5.5	Průběh funkce více proměnných	142
5.6	Implicitní funkce	145
5.7	Diferencovatelná zobrazení	147
5.8	Diferencovatelné variety	152
5.9	Vázané extrémy	155
5.10	Vektorové funkce, skalární a vektorová pole	159
5.11	Cvičení	165
6	Integrální počet funkcí více proměnných	167
6.1	Jordanova míra v $\mathbb{R}^2$	167
6.2	Závislost míry na transformaci souřadnic	172
6.3	Jordanova míra v $\mathbb{R}^k$	174
6.4	Riemannův integrál	174
6.5	Vlastnosti Riemannova integrálu	177
6.6	Integrovatelné funkce	181
6.7	Fubiniho věta	183
6.8	Transformace integrálu	186
6.9	Integrály závislé na parametru	189
6.10	Aplikace Riemannova integrálu	192
6.11	Cvičení	198

Část I

Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné

Kapitola 1

Prekalkulus

1.1 Reálná čísla

- Přirozená čísla: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ Dospějeme k nim při počítání prvků nějaké množiny. Lze na nich definovat základní početní operace, uspořádání.
- Celá čísla: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ Doplnění množiny $\mathbb{N}$ tak, aby operace odčítání měla vždy výsledek.
- Racionální čísla: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ Doplnění množiny $\mathbb{Z}$ tak, aby operace dělení měla vždy výsledek.
- Iracionální čísla: $\mathbb{I}$ Čísla, která není možno vyjádřit ve tvaru $\frac{m}{n}$, kde $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

Iracionální čísla potřebujeme. Např. $\log_{10} 3 \in \mathbb{I}$.

D.: Sporem. Pripusťme, že $\log_{10} 3 = \frac{m}{n}$. Pak

$$\begin{aligned} 10^{\frac{m}{n}} &= 3 \\ 10^m &= 3^n \\ 2^m 5^m &= 3^n \end{aligned}$$

Dostali jsme dva různé rozklady jednoho čísla na prvočinitele. To je spor. $\square$

Nebo $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$.

D.: Sporem. Pripusťme, že $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Pak

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{m^2}{n^2} \\ 2n^2 &= m^2 \end{aligned}$$

V rozkladu na prvočinitele čísla stojícího na levé straně rovnosti je 2 v liché mocnině, v rozkladu na prvočinitele čísla stojícího na pravé straně rovnosti (tedy téhož čísla) je 2 v sudé mocnině. To je spor. $\square$

1.1.1 Definice

Buď M množina, na níž je definováno uspořádání $\leq$. (Uspořádání je binární relace, která je

- (i) reflexivní: $(\forall a \in M) (a \leq a)$
- (ii) antisymetrická: $(\forall a, b \in M) (a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b)$
- (iii) transitivní: $(\forall a, b, c \in M) (a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c)$

Buď $a \in M$, $A \subseteq M$. Řekneme, že a je *horní* (resp. *dolní*) *závora množiny A v množině M*, jestliže $x \leq a$ (resp. $a \leq x$) pro každé $x \in A$. Řekneme, že množina A je *ohraničená shora* (resp. *zdola*), jestliže existuje její horní (resp. dolní) závora. Řekneme, že množina A je *ohraničená*, je-li ohraničená shora i zdola.

1.1.2 Příklady

- Množina $A = \{1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots\}$ je ohraničená zdola (dolní závora je např. 1) a není ohraničená shora: Při označení $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ je

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{2}{2} \\ a_8 &= a_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + \frac{2}{2} + \frac{4}{8} = 1 + \frac{3}{2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Indukcí lze dokázat, že $a_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$ a číslo $1 + \frac{n}{2}$ může být libovolně velké.

- Množina $B = \{1, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}, \dots\}$ je ohraničená shora, $b \leq \frac{\pi^2}{6}$ pro každé $b \in B$. (Bude dokázáno později.)

1.1.3 Definice

Buď $A \subseteq M$, kde M je množina, na níž je definováno uspořádání $\leq$. Řekneme, že $a \in A$ je *maximum* nebo *největší prvek* (*minimum* nebo *nejmenší prvek*) a píšeme $a = \max A$ ($a = \min A$), jestliže pro každé $x \in A$ platí $x \leq a$ ($a \leq x$).

1.1.4 Definice

Buď M množina, na níž je definováno uspořádání $\leq$ a buď $A \subseteq M$. Řekneme, že $a \in M$ je *supremum* množiny A , jestliže je nejmenší horní závorou množiny A , t.j. jestliže platí

- (s1) $(\forall x \in A) (x \leq a)$,
(s2) $((\forall x \in A) (x \leq b)) \Rightarrow a \leq b$.

Píšeme $a = \sup A$.

1.1.5 Definice

Buď M množina, na níž je definováno uspořádání $\leq$ a buď $A \subseteq M$. Řekneme, že $a \in M$ je *infimum* množiny A , jestliže je největší dolní závorou množiny A , t.j. jestliže platí

- (i1) $(\forall x \in A) (a \leq x)$,
(i2) $((\forall x \in A) (b \leq x)) \Rightarrow b \leq a$.

Píšeme $a = \inf A$.

1.1.6 Poznámky

- Podmínku (s2) v 1.1.4 lze nahradit podmínkou

$$(s2^*) (p \in M, p < a) \Rightarrow (\exists x \in A) (p < x).$$

($p < a$ je definováno jako $p \leq a$ a současně $p \neq a$; v dalším budeme používat i symboly $\geq, >$.)

D.: Nechť $a \in M$ splňuje (s2) a nechť $p \in M, p < a$. Pak p není horní závora množiny A (jinak by podle (s2) bylo $a \leq p$). Odtud plyne, že existuje $x \in A$ takové, že $x > p$, tedy platí (s2*).

Nechť $a \in M$ splňuje (s2*) a buď $b \in M$ horní závora množiny A . Kdyby $b < a$, pak by existovalo $x \in A$ takové, že $b < x$ a tedy b by nebyla horní závora množiny A . Je tedy $a \leq b$. $\square$

- Analogicky lze dokázat, že podmínku (i2) v 1.1.5 lze nahradit podmínkou

$$(i2^*) (p \in M, p > a) \Rightarrow (\exists x \in A) (p > x).$$

- Libovolná $A \subseteq M$ má nejvýše jedno supremum a nejvýše jedno infimum.

D.: Necht $a = \sup A$, $b = \sup A$. b je podle (s1) horní závora množiny A , tedy $a \leq b$ podle (s2). Analogicky a je horní závora A , tedy $b \leq a$. Z antisymetrie relace $\leq$ plyne $a = b$. Analogicky se ukáže platnost tvrzení pro infimum. $\square$

4. Jestliže existuje $\max A$ ($\min A$), pak existuje také $\sup A$ ($\inf A$) a platí $\sup A = \max A$ ($\inf A = \min A$).

D.: Necht $a = \max A$.

a splňuje (s1) přímo podle definice maxima 1.1.3

Necht b je horní závora množiny A . Pak $b \geq x$ pro každé $x \in A$, zejména tedy $b \geq a \in A$. Což znamená, že platí (s2).

Tvrzení pro infimum a minimum se dokáže analogicky. $\square$

1.1.7 Definice

Množina reálných čísel je množina $\mathbb{R}$, na níž jsou definovány dvě binární operace $+$ (sčítání), $\cdot$ (násobení) a jedna binární relace $<$ (menší než), které splňují podmínky

- (R1) pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí $a + b = b + a$ (komutativní zákon pro sčítání)
- (R2) pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $(a + b) + c = a + (b + c)$ (asociativní zákon pro sčítání)
- (R3) existuje prvek $0 \in \mathbb{R}$ takový, že pro všechna $a \in \mathbb{R}$ platí $a + 0 = a$ (existence neutrálního prvku vzhledem ke sčítání)
- (R4) ke každému $a \in \mathbb{R}$ existuje prvek $-a \in \mathbb{R}$ takový, že $a + (-a) = 0$ (existence opačného prvku)
- (R5) pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí $a \cdot b = b \cdot a$ (komutativní zákon pro násobení)
- (R6) pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (asociativní zákon pro násobení)
- (R7) existuje prvek $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$ takový, že pro všechna $a \in \mathbb{R}$ platí $a \cdot 1 = a$ (existence neutrálního prvku vzhledem k násobení)
- (R8) ke každému $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ existuje prvek $a^{-1} \in \mathbb{R}$ takový, že $a \cdot a^{-1} = 1$ (existence inverzního prvku)
- (R9) pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (distributivní zákon)
- (R10) každé dva prvky z množiny $\mathbb{R}$ jsou srovnatelné, podrobněji: každá dvojice prvků $a, b \in \mathbb{R}$ splňuje právě jeden ze vztahů $a < b$, $a = b$, $b < a$ (zákon trichotomie)
- (R11) jestliže pro $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $a < b$ a $b < c$, pak také $a < c$ (transitivita relace $<$)
- (R12) jestliže pro $a, b \in \mathbb{R}$ platí $a < b$, pak pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $a + c < b + c$ (monotonie vzhledem ke sčítání)
- (R13) jestliže pro $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $a < b$ a $0 < c$, pak $a \cdot c < b \cdot c$ (monotonie vzhledem k násobení)
- (R14) je-li M neprázdná shora (zdola) ohraničená podmnožina množiny $\mathbb{R}$, pak existuje $\sup M \in \mathbb{R}$ ($\inf M \in \mathbb{R}$)

1.1.8 Poznámky

1. (R1) – (R4) a (R5) – (R8) jsou axiomy komutativní grupy

(R1) – (R9) jsou axiomy pole

(R1) – (R13) jsou axiomy uspořádaného pole

(R1) – (R14) jsou axiomy spojitě uspořádaného pole

Existuje jediné (až na isomorfismus) uspořádané pole. Axiom (R14) se nazývá axiom spojitosti.

2. Přímka, na níž je zvolen počátek (obraz reálného čísla 0), jednotková délka a orientace (obraz čísla 1) se nazývá *číselná osa*. Existuje prosté a vzájemně jednoznačné zobrazení množiny reálných čísel na číselnou osu.

3. Druhá část axiomu (R14) (existence infima) je důsledkem první části a ostatních axiomů.

D.: Nejdříve ukážeme, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ je $-(-a) = a$. Vyjdeme z (R4):

$$\begin{array}{rcll} (-a) + (-(-a)) & = & 0 & / \text{ přičteme } a \text{ zleva} \\ a + ((-a) + (-(-a))) & = & a + 0 & / \text{ (R2), (R3)} \\ (a + (-a)) + (-(-a)) & = & a & / \text{ (R4)} \\ 0 + (-(-a)) & = & a & / \text{ (R1), (R3)} \\ -(-a) & = & a & \end{array}$$

Dále ukážeme, že jestliže $a < b$ pak $-b < -a$:

$$\begin{array}{rcll} a & < & b & / +(-a) \text{ zprava} \\ a + (-a) & < & b + (-a) & / \text{ (R4)} \\ 0 & < & b + (-a) & / +(-b) \text{ zleva} \\ (-b) + 0 & < & (-b) + (b + (-a)) & / \text{ (R3), (R2)} \\ -b & < & ((-b) + b) + (-a) & / \text{ (R1), (R4)} \\ -b & < & 0 + (-a) & / \text{ (R1), (R3)} \\ -b & < & -a & \end{array}$$

Nechť nyní je $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ zdola ohraničená, b její dolní závora. Položme $M' = \{-x : x \in M\}$. Pak pro každé $x \in M$ platí $b \leq x$ a tedy podle druhého kroku důkazu je $-x \leq -b$ pro každé $-x \in M'$. To znamená, že M' je shora ohraničená a podle první části (R14) existuje $\sup M' = s \in \mathbb{R}$. Podle (R4) je $-s \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že $-s = \inf M$:

Buď $x \in M$ libovolné. Pak podle (s1) je $-x \leq s$ a podle pomocných tvrzení na začátku důkazu je $-s \leq x$. Poněvadž x bylo libovolné, je podmínka (i1) splněna.

Buď $c \in \mathbb{R}$ takové, že $c \leq x$ pro každé $x \in M$. Pak $-x \leq -c$ pro každé $-x \in M'$ a podle (s2) je $s \leq -c$, tedy $-(-c) \leq -s$. Podle prvního kroku důkazu je $c \leq -s$, což znamená, že i podmínka (i2) je splněna. $\square$

1.1.9 Příklad

Nechť $M = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}, m < n\}$. Ukažte, že $\sup M = 1$, $\inf M = 0$.

Ř.: Platnost podmínky (s1): $\frac{m}{n} \leq 1$ pro $m \leq n$.

Platnost podmínky (s2*): Buď $p \in M$, $p < 1$. Je-li $p \leq 0$, pak např. pro $\frac{1}{2} \in M$ platí $p < \frac{1}{2}$. Nechť tedy $p > 0$. Položme $n = 1 + [\frac{1}{1-p}]$. (Přitom $[x]$ označuje celou část z čísla x , t.j. celé číslo z takové, že $x \leq z < x + 1$. Např. $[\pi] = 3$, $[\frac{3}{2}] = 1$, $[-3.5] = -4$ a p.) Pak

$$\begin{array}{rcl} n & > & \frac{1}{1-p} \\ n - np & > & 1 \\ n - 1 & > & np \\ \frac{n-1}{n} & > & p \end{array}$$

a zřejmě $\frac{n-1}{n} \in M$.

Platnost podmínky (i1): $\frac{m}{n} > 0$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$.

Platnost podmínky (i2*): Buď $p \in M$, $p > 0$. Je-li $p \geq 1$, pak např. pro $\frac{1}{2} \in M$ platí $\frac{1}{2} < p$. Nechť tedy $p < 1$. Položme $n = 1 + [\frac{1}{p}]$. Pak $n > \frac{1}{p}$ a tedy $p > \frac{1}{n} \in M$. $\square$

1.1.10 Definice

Množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ nazýváme *rozšířená množina reálných čísel*, symboly $-\infty, \infty$ nazýváme *nevlastní reálná čísla* (*nevlastní body číselné osy*). Klademe $-\infty < a < \infty$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Symboly $-\infty, \infty$ nejsou čísla, nedefinujeme pro ně početní operace.

1.1.11 Definice

Budte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Uzavřeným intervalem o krajních (koncových, hraničních) bodech a, b* rozumíme množinu

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

otevřeným intervalem množinu

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

polouzavřenými intervaly zprava (resp. zleva) množiny

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

Nekonečné intervaly definujeme jako množiny

$$\begin{aligned} [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \\ (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \\ (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}, \\ (-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}, \\ (-\infty, \infty) &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Je-li J interval jakéhokoliv typu a $x_0 \in J$, x_0 není krajní, řekneme, že x_0 je vnitřní bod intervalu J .

1.1.12 Definice

Okolím (podrobněji (*symetrickým*) δ -*okolím*, $\delta > 0$) *bodu* $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Okolím bodu ∞ rozumíme interval (a, ∞) , kde $a \in \mathbb{R}$.

Okolím bodu $-\infty$ rozumíme interval $(-\infty, a)$, kde $a \in \mathbb{R}$.

δ -okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ budeme označovat symbolem $\mathcal{O}_\delta(x_0)$, stručně $\mathcal{O}(x_0)$.

1.1.13 Věta

Okolí bodů z množiny $\mathbb{R}$ mají tyto vlastnosti:

(o1) Jsou-li $\mathcal{O}_1(x_0)$ a $\mathcal{O}_2(x_0)$ dvě okolí téhož bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$, pak $\mathcal{O}_1(x_0) \cap \mathcal{O}_2(x_0)$ je okolí bodu x_0 .

(o2) Jsou-li $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$, $x_1 \neq x_2$, pak existují $\mathcal{O}(x_1)$ a $\mathcal{O}(x_2)$ taková, že $\mathcal{O}(x_1) \cap \mathcal{O}(x_2) = \emptyset$.

D.:

- $x_0 \in \mathbb{R}$, $\mathcal{O}_1(x_0) = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, $\mathcal{O}_2(x_0) = (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$. Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pak $\mathcal{O}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \mathcal{O}_1(x_0) \cap \mathcal{O}_2(x_0)$ je okolí bodu x_0 .
 - $x_0 = \infty$, $\mathcal{O}_1(x_0) = (a_1, \infty)$, $\mathcal{O}_2(x_0) = (a_2, \infty)$. Položme $a = \max\{a_1, a_2\}$. Pak $\mathcal{O}(x_0) = (a, \infty) = \mathcal{O}_1(x_0) \cap \mathcal{O}_2(x_0)$ je okolí bodu ∞ .
 - $x_0 = -\infty$. Platnost tvrzení ukážeme analogicky jako v předchozím případě.
- Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $x_1 < x_2$.
 - $-\infty < x_1 < x_2 < \infty$. Položme $\delta = \frac{1}{4}(x_2 - x_1)$. Pak $\mathcal{O}(x_1) = (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$, $\mathcal{O}(x_2) = (x_2 - \delta, x_2 + \delta)$ jsou okolí bodů x_1, x_2 s požadovanou vlastností. (Volba $\delta = \frac{1}{4}(x_2 - x_1)$ samozřejmě není jediná možná. Stačí volit $\delta = r(x_2 - x_1)$, kde $r \leq \frac{1}{2}$.)
 - $-\infty < x_1 < x_2 = \infty$. Nechť $\delta > 0$ je libovolné a položme $a = x_1 + 2\delta$. Pak $\mathcal{O}(x_1) = (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$, $\mathcal{O}(x_2) = (a, \infty)$ mají požadovanou vlastnost.
 - Analogicky ukážeme platnost tvrzení v ostatních případech.

□

1.1.14 Definice

Buď $x_0 \in \mathbb{R}$. *Ryzím okolím* bodu x_0 rozumíme množinu $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Okolí nevlastního bodu je vždy ryzí.

Ryzí okolí bodu x_0 budeme označovat $\mathcal{O}'(x_0)$.

1.1.15 Definice

Buď $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. *Pravým* (resp. *levým*) δ -*okolím* bodu x_0 rozumíme interval $[x_0, x_0 + \delta)$ ($(x_0 - \delta, x_0]$). *Ryzím pravým* (resp. *levým*) δ -*okolím* bodu x_0 rozumíme otevřený interval $(x_0, x_0 + \delta)$ ($(x_0 - \delta, x_0)$).

Pravé (resp. levé) δ -okolí bodu x_0 budeme označovat $\mathcal{P}_\delta(x_0)$, stručně $\mathcal{P}(x_0)$ (resp. $\mathcal{L}_\delta(x_0)$, stručně $\mathcal{L}(x_0)$).

Ryzí pravé (resp. levé) δ -okolí bodu x_0 budeme označovat $\mathcal{P}'_\delta(x_0)$, stručně $\mathcal{P}'(x_0)$ (resp. $\mathcal{L}'_\delta(x_0)$, stručně $\mathcal{L}'(x_0)$).

1.1.16 Poznámky

1. Také pravá a levá okolí, ryzí okolí mají vlastnosti (o1), (o2) z věty 1.1.13.

D.: Snadnou modifikací důkazu 1.1.13. $\square$

2. Buď $J \subseteq \mathbb{R}$ interval a buď x_0 vnitřní bod intervalu J . Pak existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $\mathcal{O}(x_0) \subseteq J$.

D.: Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$ jsou krajní body intervalu J .

- Jsou-li $a, b \in \mathbb{R}$, položíme $\delta = \frac{1}{2} \min\{x_0 - a, b - x_0\}$. Pak $\delta > 0$ a $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je požadované okolí.
- Jsou-li $a \in \mathbb{R}$ a $b = \infty$, položíme $\delta = \frac{1}{2}(x_0 - a)$. Pak $\delta > 0$ a $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je opět požadované okolí.
- Analogicky ukážeme platnost tvrzení v ostatních případech.

$\square$

1.1.17 Věta

1. Mezi dvěma libovolnými reálnými čísly x_1, x_2 , $x_1 < x_2$ leží racionální i iracionální číslo.
2. V libovolném okolí libovolného čísla $x_0 \in \mathbb{R}$ leží racionální i iracionální číslo.

(Stručně: Množina $\mathbb{Q}$ i množina $\mathbb{I}$ je hustá v množině $\mathbb{R}$.)

D.:

1. • Položme $n = \lceil \frac{1}{x_2 - x_1} \rceil + 1$, $m = \lfloor nx_1 \rfloor + 1$. Pak $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ a tedy $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Dále platí

$$\begin{array}{lll} m > nx_1 & m \leq nx_1 + 1 & n > \frac{1}{x_2 - x_1} \\ x_1 < \frac{m}{n} & & nx_2 - nx_1 > 1 \\ & & nx_2 > nx_1 + 1 \end{array}$$

Odtud $x_1 < \frac{m}{n} \leq \frac{nx_1 + 1}{n} < \frac{nx_2}{n} = x_2$, což znamená, že q je racionální číslo mezi čísly x_1 a x_2 .

- Položme $s = \lceil \frac{\sqrt{2}}{x_2 - x_1} \rceil + 1$, $r = \lfloor \frac{s}{\sqrt{2}} x_1 \rfloor + 1$. Pak $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$ a $w = \frac{\sqrt{2} r}{s} \in \mathbb{I}$, neboť v opačném případě by $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, což by byl spor s tvrzením dokázaným v úvodu tohoto odstavce. Dále platí

$$\begin{array}{lll} r > \frac{s}{\sqrt{2}} x_1 & r \leq \frac{s}{\sqrt{2}} x_1 + 1 & s > \frac{\sqrt{2}}{x_2 - x_1} \\ x_1 < \frac{\sqrt{2} r}{s} & & \frac{s}{\sqrt{2}} x_2 > \frac{s}{\sqrt{2}} x_1 + 1 \end{array}$$

Odtud $x_1 < \frac{\sqrt{2} r}{s} \leq \frac{\sqrt{2} (\frac{s}{\sqrt{2}} x_1 + 1)}{s} < \frac{\sqrt{2} \frac{s}{\sqrt{2}} x_2}{s} = x_2$, což znamená, že w je iracionální číslo mezi čísly x_1 a x_2 .

2. je důsledkem 1., neboť mezi čísly $x_0 - \delta$ a $x_0 + \delta$ leží racionální i iracionální číslo.

$\square$

1.2 Funkce a jejich základní vlastnosti

1.2.1 Definice

Funkce f (podrobněji *reálná funkce jedné reálné proměnné*) je zobrazení z množiny $\mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}$.

Množina $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} : (\exists y \in \mathbb{R})((x, y) \in f)\}$ se nazývá *definiční obor funkce* f . (Domain)

Množina $\text{Im } f = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in \mathbb{R})((x, y) \in f)\}$ se nazývá *obor hodnot funkce* f . (Image)

Je-li f funkce, pak zobrazení $f : \text{Dom } f \rightarrow \text{Im } f$ je surjekce (zobrazení na).

Je-li $(x, y) \in f$, píšeme $y = f(x)$, $x \mapsto y$, $x \overset{f}{\mapsto} y$.

Prvky z $\text{Dom } f$ se nazývají hodnoty nezávisle proměnné, argument.

Prvky z $\text{Im } f$ se nazývají hodnoty závisle proměnné, funkční hodnota.

Pokud není explicitně uvedeno jinak, definičním oborem rozumíme největší (vzhledem k množinové inklusi) množinu, pro jejíž prvky lze funkční hodnotu vypočítat.

1.2.2 Definice

Grafem funkce f rozumíme množinu $\mathcal{G} = \{(x, f(x)) : x \in \text{Dom } f\}$, kde (x, y) značí orthogonální kartézské souřadnice bodu v rovině.

1.2.3 Příklad

1. $f(x) = |x| = \max\{x, -x\}$, $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, $\text{Im } f = [0, \infty)$.

2. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\text{Dom } f = (-1, 1)$, neboť musí platit $\text{Im } f = \mathbb{R}$, neboť pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ je

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &> 0 \\ 1 &> x^2 \\ 1 &> |x| \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ (1-x^2)r^2 &= x^2 \\ r^2 &= (1+r^2)x^2 \\ x_{1,2} &= \pm \frac{|r|}{\sqrt{1+r^2}} \end{aligned}$$

Znaménko u x musí být stejné jako znaménko u r , tedy $x = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}$

3. $f(x) = [x]$, kde $[x]$ je celá část z čísla x , to jest celé číslo takové, že $[x] \leq x < [x] + 1$.

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$, $\text{Im } f = \mathbb{Z}$.

4. Dirichletova funkce $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$.

$\text{Dom } \chi = \mathbb{R}$, $\text{Im } \chi = \{0, 1\}$.

1.2.4 Definice

Buďte f, g funkce, $\text{Dom } f \cap \text{Dom } g \neq \emptyset$. Pak definujeme

součet funkcí f, g předpisem: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ pro $x \in \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$,

rozdíl funkcí f, g předpisem: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ pro $x \in \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$,

součin funkcí f, g předpisem: $(fg)(x) = f(x)g(x)$ pro $x \in \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$,

podíl funkcí f, g předpisem: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ pro $x \in \text{Dom } f \cap (\text{Dom } g \setminus \{x \in \text{Dom } g : g(x) = 0\})$,

absolutní hodnotu funkce f předpisem $|f|(x) = |f(x)| = \max\{f(x), -f(x)\}$ pro $x \in \text{Dom } f$.

1.2.5 Definice

Funkce f se nazývá *ohraničená* (*shora ohraničená*, *zdola ohraničená*), je-li množina $\text{Im } f$ ohraničená (*shora ohraničená*, *zdola ohraničená*) podmnožina množiny $\mathbb{R}$.

Funkce f je ohraničená právě tehdy, když existují $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $a \leq f(x) \leq b$ pro každé $x \in \text{Dom } f$, což nastane právě tehdy, když existuje $h \in \mathbb{R}$ takové, že $|f(x)| \leq h$ pro každé $x \in \text{Dom } f$. Analogická tvrzení platí pro funkci ohraničenou shora nebo zdola.

1.2.6 Definice

Funkce f se nazývá *sudá*, jestliže $x \in \text{Dom } f \Rightarrow -x \in \text{Dom } f, f(-x) = f(x)$.

Funkce f se nazývá *lichá*, jestliže $x \in \text{Dom } f \Rightarrow -x \in \text{Dom } f, f(-x) = -f(x)$.

Příklady sudé funkce: x^{2n} , kde $n \in \mathbb{N}$, $|x|$, $\cos x$.

Příklady liché funkce: x^{2n+1} , kde $n \in \mathbb{N}$, $\sin x$, $\tan x$.

Buď f sudá funkce, G její graf, $(x, y) \in G$. Pak $(-x, y) \in G$. Body (x, y) a $(-x, y)$ jsou symetrické podle osy y , graf sudé funkce je symetrický podle osy y .

Buď f lichá funkce, G její graf, $(x, y) \in G$. Pak $(-x, -y) \in G$. Body (x, y) a $(-x, -y)$ jsou symetrické podle počátku souřadného systému, graf liché funkce je symetrický podle počátku souřadného systému.

1.2.7 Věta

Má-li funkce f vlastnost: $x \in \text{Dom } f \Rightarrow -x \in \text{Dom } f$, pak ji lze vyjádřit jako součet funkce sudé a liché.

D.: $f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$
 $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)); g(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = g(x); g(x)$ je sudá,
 $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)); h(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = -h(x); h(x)$ je lichá. $\square$

1.2.8 Definice

Buď $p \in \mathbb{R}, p > 0$. Řekneme, že funkce f je *periodická s periodou p* , jestliže $x \in \text{Dom } f \Rightarrow x + p \in \text{Dom } f, f(x + p) = f(x)$.

Příklady: $\sin x, \cos x$ — perioda 2π ,

$\tan x$ — perioda π ,

$\sin \frac{x}{2\pi}$ — perioda 1,

konstantní funkce $f(x) = c \in \mathbb{R}$ — periodou je jakékoliv $p \in (0, \infty)$.

Buď f funkce periodická s periodou $p > 0, n \in \mathbb{N}$. Pak f je periodická s periodou np .

D.: $x \in \text{Dom } f \Rightarrow x + p \in \text{Dom } f \Rightarrow x + p + p = x + 2p \in \text{Dom } f \Rightarrow \dots \Rightarrow x + np \in \text{Dom } f$.
 $f(x + np) = f(x + (n-1)p + p) = f(x + (n-1)p) = f(x + (n-2)p + p) = f(x + (n-2)p) = \dots = f(x)$. $\square$

Množina period periodické funkce f je nekonečná, tedy neprázdná a zdola ohraničená nulou. Podle 1.1.7 (R14) existuje $p_0 = \inf\{p : p \text{ je perioda funkce } f\}$. Pokud p_0 je periodou funkce f , nazýváme ji *nejmenší* nebo *základní* periodou funkce f . Periodická funkce nemusí mít nejmenší periodu. Např. periodou Dirichletovy funkce je každé kladné racionální číslo.

1.2.9 Definice

Funkce f se nazývá *rostoucí v bodě $x_0 \in \text{Dom } f$* , jestliže existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $\mathcal{O}(x_0) \subseteq \text{Dom } f$ a platí

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{O}(x_0), x < x_0 &\Rightarrow f(x) < f(x_0) \\ x \in \mathcal{O}(x_0), x > x_0 &\Rightarrow f(x) > f(x_0), \end{aligned}$$

stručně: jestliže pro $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $(x - x_0)(f(x) - f(x_0)) > 0$.

Funkce f se nazývá *neklesající v bodě* $x_0 \in \text{Dom } f$, jestliže existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $\mathcal{O}(x_0) \subseteq \text{Dom } f$ a platí

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{O}(x_0), x < x_0 &\Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \\ x \in \mathcal{O}(x_0), x > x_0 &\Rightarrow f(x) \geq f(x_0), \end{aligned}$$

stručně: jestliže pro $x \in \mathcal{O}(x_0)$ platí $(x - x_0)(f(x) - f(x_0)) \geq 0$.

Analogicky definujeme funkci *klesající* a *nerostoucí v bodě* $x_0 \in \text{Dom } f$.

Funkce, která je v bodě $x_0 \in \text{Dom } f$ nerostoucí nebo neklesající, se nazývá *monotonní v bodě* $x_0 \in \text{Dom } f$.

Funkce, která je v bodě $x_0 \in \text{Dom } f$ rostoucí nebo klesající, se nazývá *ryze monotonní v bodě* $x_0 \in \text{Dom } f$.

Funkce rostoucí v bodě $x_0 \in \text{Dom } f$ nemusí být rostoucí v žádném jiném bodě z $\text{Dom } f$.

1.2.10 Definice

Řekneme, že funkce je *rostoucí* na intervalu J , jestliže $J \subseteq \text{Dom } f$ a pro libovolná $x_1, x_2 \in J$ platí $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Řekneme, že funkce je *neklesající* na intervalu J , jestliže $J \subseteq \text{Dom } f$ a pro libovolná $x_1, x_2 \in J$ platí $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Analogicky definujeme funkci *klesající* a *nerostoucí* na intervalu J .

Funkce rostoucí nebo klesající na intervalu se nazývá *ryze monotonní na intervalu*, funkce nerostoucí nebo neklesající na intervalu se nazývá *monotonní na intervalu*.

Monotonie v bodě — *lokální vlastnost*

Monotonie na intervalu — *globální vlastnost*

Slova „interval J “ v předchozí definici lze nahradit slovy „množina $M \subseteq \text{Dom } f$ “.

1.2.11 Věta

Funkce f je rostoucí na otevřeném intervalu $J \subseteq \text{Dom } f$ právě tehdy, když je rostoucí v každém bodě tohoto intervalu.

D.: „ $\Rightarrow$ “ Nechť f je rostoucí na J a nechť $x_0 \in J$. J je otevřený $\Rightarrow x_0$ je vnitřní bod $\Rightarrow$ (podle 1.1.16.2) existuje $\mathcal{O}(x_0) \subseteq J$. Tedy $\mathcal{O}(x_0) \subseteq \text{Dom } f$. Je-li $x \in \mathcal{O}(x_0)$, $x < x_0$, je $f(x) < f(x_0)$; je-li $x \in \mathcal{O}(x_0)$, $x > x_0$, je $f(x) > f(x_0)$. Tedy f je rostoucí v bodě x_0 .

„ $\Leftarrow$ “ Nechť f je rostoucí v každém bodě intervalu J . Pripustíme, že f není rostoucí na J . Existují tedy $x_1, x_2 \in J$, že $x_1 < x_2$ a $f(x_1) \geq f(x_2)$. Označme $M = \{x \in [x_1, x_2] : f(x) > f(x_1)\}$. Platí

- $M \neq \emptyset$, neboť f rostoucí v $x_1 \Rightarrow \text{ex. } \mathcal{O}(x_1)$, že pro každé $x > x_1$ je $f(x) > f(x_1)$.
- M je shora ohraničená, neboť x_2 je horní závora M .

Podle 1.1.7 (R14) existuje $x_0 = \sup M \leq x_2$.

- Předpokládejme $x_0 = x_2$. f je rostoucí v bodě $x_2 \Rightarrow$ existuje $\mathcal{O}(x_2) = (x_2 - \delta, x_2 + \delta) \subseteq \text{Dom } f$, že pro $x \in \mathcal{O}(x_2)$, $x < x_2$ platí $f(x) < f(x_2)$.

Podle 1.1.6(s2*) existuje $x \in M$, $x > x_2 - \delta$. Poněvadž $x \in M$, je $x \leq x_2$. Jest $x \in \mathcal{O}(x_2)$. Pokud $x < x_2$, pak $f(x) < f(x_2)$, pokud $x = x_2$, pak $f(x) = f(x_2)$. Tedy $f(x) \leq f(x_2)$.

Současně $x \in M$ a tedy $f(x) > f(x_1) \geq f(x_2)$. Odtud $f(x) > f(x_2)$ — spor.

- Musí tedy být $x_0 < x_2$. Poněvadž f je rostoucí v x_0 , existuje $\mathcal{O}(x_0)$, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $(x - x_0)(f(x) - f(x_0)) > 0$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat $\mathcal{O}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq [x_1, x_2]$. Podle 1.1.6(s2*) existuje $x \in M$, $x > x_0 - \delta$ takové, že $x \leq x_0$. $x \in \mathcal{O}(x_0)$ a tedy $f(x) \leq f(x_0)$. Současně $f(x) > f(x_1)$, neboť $x \in M$. Odtud plyne

$$f(x_1) < f(x_0).$$

Zvolme $x \in \mathcal{O}(x_0)$, $x > x_0$. Pak $f(x) > f(x_0)$. Přitom $x \notin M$, neboť $x > x_0 = \sup M$. Tedy $f(x) \leq f(x_1)$. Odtud plyne

$$f(x_1) > f(x_0).$$

To je spor. $\square$

1.2.12 Poznámky

1. Analogická věta platí pro neklesající, klesající a nerostoucí funkce.
2. Pro uzavřený interval věta neplatí:
Např. $f(x) = \sin(x)$, $J = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. f je rostoucí na celém J , ale není rostoucí v krajních bodech.
3. Ve druhé části důkazu jsme nevyužili předpoklad, že interval J je otevřený. Platí tedy: Je-li funkce f rostoucí v každém bodě libovolného intervalu J , pak je rostoucí na celém intervalu J .

1.2.13 Definice

Buďte f , φ funkce a necht' platí $\text{Im } \varphi \subseteq \text{Dom } f$. Pak

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (\exists u \in \mathbb{R})((x, u) \in \varphi, (u, y) \in f)\}$$

se nazývá *složená funkce*.

Funkce φ se nazývá *vnitřní složka* funkce F , funkce f se nazývá *vnější složka* funkce F .

$$x \mapsto \varphi(x) = u \mapsto f(u) = f(\varphi(x))$$

Podmínka $\text{Im } \varphi \subseteq \text{Dom } f$ je nutná a dostatečná pro existenci složené funkce. Není-li tato podmínka splněna, lze ji někdy dosáhnout vhodným zúžením $\text{Dom } \varphi$.

1.2.14 Příklady

1. $\varphi(x) = x^2$, $\text{Im } \varphi = [0, \infty)$
 $f(u) = \sin(u)$, $\text{Dom } f = (-\infty, \infty)$. Tedy $\text{Im } \varphi \subseteq \text{Dom } f$, $F(x) = f(\varphi(x)) = \sin x^2$
2. $\varphi(x) = 1 - x^2$, definujeme $\text{Dom } f = [-1, 1]$. Pak $\text{Im } \varphi = [0, 1]$.
 $f(u) = \sqrt{u}$, $\text{Dom } f = [0, \infty)$. $[0, 1] \subseteq [0, \infty)$, $F(x) = f(\varphi(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
3. $\varphi(x) = -x^2$, $\text{Im } \varphi = (-\infty, 0]$
 $f(u) = \log u$, $\text{Dom } f = (0, \infty)$. Složená funkce neexistuje.

Proces skládání funkcí lze opakovat a vytvářet funkce vícenásobně složené. Např.:

$$\begin{aligned} y = \log^2 \sqrt{\sin x}: \quad & y = u^2 \\ & u = \log v \\ & v = \sqrt{w} \\ & w = \sin x \end{aligned}$$

1.2.15 Definice

Necht' f je funkce, která je bijekcí. Pak

$$f^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in f\}$$

se nazývá *inversní funkce* k funkci f .

Z definice plyne: $\text{Dom } f = \text{Im } f^{-1}$, $\text{Im } f = \text{Dom } f^{-1}$, $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$.

Zobrazení $f : \text{Dom } f \rightarrow \text{Im } f$ je surjekce. Aby toto zobrazení bylo bijekcí, musí být injekcí (prostým zobrazením), t.j. $x_1, x_2 \in \text{Dom } f$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

1.2.16 Poznámky

1. Graf inversní funkce f^{-1} je symetrický s grafem funkce f podle osy prvního a třetího kvadrantu.
2. Je-li funkce f ryze monotonní, pak je prostá.

D.: Necht' pro určitost je f rostoucí a buďte $x_1, x_2 \in \text{Dom } f$, $x_1 \neq x_2$. Pokud $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) < f(x_2)$, pokud $x_1 > x_2$ pak $f(x_1) > f(x_2)$ a tedy $f(x_1) \neq f(x_2)$. $\square$

1.2.17 Věta

Nechť funkce f je rostoucí (resp. klesající) na množině $\text{Dom } f$. Pak funkce f^{-1} je rostoucí (resp. klesající) na množině $\text{Im } f$.

D.: Nechť f je rostoucí na $\text{Dom } f$ a buďte $y_1, y_2 \in \text{Im } f$, $y_1 < y_2$.

Označme $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$, t.j. $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$.

Jest $x_1 \neq x_2$ podle 1.2.16.2. Kdyby $x_1 > x_2$, pak by $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$, což by byl spor. Platí tedy $x_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) = x_2$. $\square$

1.3 Posloupnosti

1.3.1 Definice

Posloupnost je funkce f , pro niž $\text{Dom } f = \mathbb{N}$. (t.j. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$)

Označení: $f_n = f(n)$, častěji $a_n, b_n, \dots$
 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, stručně $\{a_n\}$ — posloupnost
 a_n — člen posloupnosti

Posloupnosti mohou mít vlastnosti: ohraničenost, monotonie, periodicitu (s periodou $p \in \mathbb{N}$) zavedené v 1.2. Naopak pojmy inverzní nebo složená posloupnost nemají smysl.

Platí: $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je rostoucí $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(a_n < a_{n+1})$
 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je neklesající $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq a_{n+1})$
a podobně.

1.3.2 Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu a a píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, nebo stručněji $\lim a_n = a$, $a_n \rightarrow a$, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$. Posloupnost, která má limitu, se nazývá *konvergentní*.

1.3.3 Věta (o jednoznačnosti limity)

Libovolná posloupnost má nejvýše jednu limitu.

D.: Pripusťme, že pro $\{a_n\}$ platí $\lim a_n = a$, $\lim a_n = b$, $a \neq b$.

Nechť pro určitost $a < b$. Položme $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Pak $\varepsilon > 0$.

Tedy existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že $n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

a existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že $n \geq n_2 \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak pro $n \geq n_0$ platí $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, $b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon$,

tedy $b - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ a poněvadž $b - \varepsilon = b - \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2}$
 $a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$

platí $\frac{b+a}{2} < \frac{b+a}{2}$, což je spor. $\square$

1.3.4 Věta

Konvergentní posloupnost je ohraničená.

D.: Nechť $\lim a_n = a$ a buď $\varepsilon > 0$. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.

Buď $h = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a + \varepsilon\}$, $d = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a - \varepsilon\}$.

Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $d \leq a_n \leq h$. $\square$

1.3.5 Poznámky

1. Budte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ konvergentní posloupnosti, $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Jestliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$, pak $a \leq b$.

D.: Pripustme $a > b$ a položeme $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Pak $\varepsilon > 0$ a existují

$n_1 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_1$ je $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$,

$n_2 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_2$ je $b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$.

Pro $n > n_3 = \max\{n_1, n_2, n_0\}$ nyní je $a - \varepsilon = \frac{a+b}{2} < a_n < b_n < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2}$ — spor. $\square$

Tvrzení zůstane v platnosti i za předpokladu $a_n \leq b_n$ pro $n \geq n_0$.

2. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je *skorostacionární*, jestliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $a_n = a$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je *stacionární*, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = a$. (Skoro)stacionární posloupnost je konvergentní a platí $\lim a_n = a$.

3. Buď $\{a_n\}$ konvergentní posloupnost, $\lim a_n = 0$ a $\{b_n\}$ buď ohraničená posloupnost. Pak $\lim a_n b_n = 0$.

D.: $\{b_n\}$ je ohraničená $\Rightarrow$ existuje $h \in \mathbb{R}$, že $|b_n| < h$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K $\frac{\varepsilon}{h} > 0$ existuje n_0 takové, že pro $n \geq n_0$ je $|a_n| = |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{h}$.

Pro $n \geq n_0$ platí $|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{h} h = \varepsilon$, tedy $\lim a_n b_n = 0$. $\square$

4. Jestliže posloupnost $\{a_n\}$ je monotonní a neohraničená, pak $\lim \frac{1}{a_n} = 0$.

D.: Buď $\{a_n\}$ neklesající a $\varepsilon > 0$ libovolné.

Poněvadž je $\{a_n\}$ neohraničená, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}$.

Poněvadž $\{a_n\}$ je neklesající, pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n \geq a_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon} > 0$.

Odtud plyne, že pro $n \geq n_0$ platí $\left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{a_n} \right| = \frac{1}{a_n} < \varepsilon$, tedy $\lim \frac{1}{a_n} = 0$.

Pro nerostoucí posloupnost se důkaz provede analogicky. $\square$

1.3.6 Věta

Budte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ konvergentní posloupnosti, $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Pak

1. existuje $\lim |a_n|$ a platí $\lim |a_n| = |a|$,
2. existuje $\lim(a_n + b_n)$ a platí $\lim(a_n + b_n) = a + b$,
3. existuje $\lim a_n b_n$ a platí $\lim a_n b_n = ab$,
4. existuje $\lim(a_n - b_n)$ a platí $\lim(a_n - b_n) = a - b$,
5. pokud $b \neq 0$, pak existuje $\lim \frac{a_n}{b_n}$ a platí $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

D.:

1. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$.

Pro $n \geq n_0$ tedy platí $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$, což znamená $\lim |a_n| = |a|$.

2. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_1$ je $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, a existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí $|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
a tedy $\lim(a_n + b_n) = a + b$.

3. Je-li $a = 0$, plyne tvrzení z 1.3.4 a z 1.3.5.3.

Nechť $a \neq 0$ a buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle 1.3.4 existuje $h \in \mathbb{R}$ takové, že $|b_n| < h$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

K $\frac{\varepsilon}{2h} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_1$ je $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2h}$.

K $\frac{\varepsilon}{2|a|} > 0$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}$.

Pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí obě nerovnosti současně, tedy

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab| = |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2h} h + |a| \frac{\varepsilon}{2|a|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

4. Plyne z 2., 3. a 1.3.5.2.

5. Podle 1. je $\lim |b_n| = |b|$ a podle předpokladu $|b| > 0$. Tedy k $\frac{|b|}{2} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_1$ je $||b_n| - |b|| < \frac{|b|}{2}$, neboli $|b_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$. Odtud plyne, že pro $n \geq n_1$ je $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K $\frac{b^2 \varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $|b_n - b| < \frac{b^2 \varepsilon}{2}$.

Pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ je $\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b||b_n|} < \frac{b^2 \varepsilon}{2} \frac{1}{|b|} \frac{2}{|b|} = \varepsilon$ a tedy $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$.

Podle 3. je $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim a_n \lim \frac{1}{b_n} = a \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

□

Poznamenejme, že z 1.3.6.3 a z 1.3.5.2 plyne: Jsou-li $c \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ konvergentní posloupnost s $\lim a_n = a$, pak existuje $\lim(ca_n) = c \lim a_n = ca$.

1.3.7 Věta (o třech posloupnostech, o sevření)

Budte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ posloupnosti takové, že existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_1$ je $a_n \leq b_n \leq c_n$. Jestliže $\lim a_n = \lim c_n = a$, pak také $\lim b_n = a$.

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $|a_n - a| < \varepsilon$, neboli $a_n > a - \varepsilon$.

Dále existuje $n_3 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_3$ je $|c_n - a| < \varepsilon$, neboli $c_n < a + \varepsilon$.

Pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ platí $a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$, neboli $a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$, což znamená $\lim b_n = a$. □

1.3.8 Příklad

Pro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

D.:

- Pro $a = 1$ plyne tvrzení z 1.3.5.2.

- Buď $a > 1$. Pak $\sqrt[n]{a} \geq 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, neboli $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$, kde $\alpha_n \geq 0$.

$$\text{Dále } a = (1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \binom{n}{2} \alpha_n^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} \alpha_n^{n-1} + \alpha_n^n \geq 1 + n\alpha_n.$$

Odtud $\alpha_n \leq \frac{a-1}{n}$. Celkem $0 \leq \alpha_n \leq \frac{a-1}{n}$. Podle 1.3.5.4 je $\lim \frac{a-1}{n} = a \lim \frac{1}{n} - \lim \frac{1}{n} = 0$ a tedy podle 1.3.7 a 1.3.5.2 je $\lim \alpha_n = 0$. Podle 1.3.5.2 a 1.3.6.2 je $\lim \sqrt[n]{a} = 1 + \lim \alpha_n = 1$.

- Buď $0 < a < 1$. Pak $b = \frac{1}{a} > 1$ a tedy $\lim \sqrt[n]{b} = 1$. Avšak podle 1.3.6.5 je $1 = \lim \sqrt[n]{b} = \frac{\lim 1}{\lim \sqrt[n]{a}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{a}}$, z čehož plyne $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

□

1.3.9 Věta (o monotonních posloupnostech)

Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající a shora ohraničená, pak je konvergentní a platí $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
 Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí a zdola ohraničená, pak je konvergentní a platí $\lim a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
 Je-li monotonní posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená, pak je konvergentní.

D.: Buď $\{a_n\}$ neklesající a shora ohraničená posloupnost. Podle 1.1.7(R14) existuje $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$.
 Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak $a - \varepsilon < a$ a podle 1.1.6(s2*) existuje $a_{n_0} \in \{a_n\}$ takové, že $a_{n_0} > a - \varepsilon$. Poněvadž $\{a_n\}$ je neklesající, je $a_n > a - \varepsilon$ pro každé $n \geq n_0$. Tedy pro $n \geq n_0$ je $a - \varepsilon < a_n \leq a < a + \varepsilon$, neboli $\lim a_n = a$.
 Druhé tvrzení se dokáže analogicky, třetí je důsledkem prvního a druhého. $\square$

1.3.10 Příklad

Posloupnost $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a konvergentní.

(Značíme $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, jest $e = 2.71828182846 \dots$)

D.: S využitím binomické věty a vztahu $\frac{l}{n+1} < \frac{l}{n}$, neboli $1 - \frac{l}{n+1} > 1 - \frac{l}{n}$ pro všechna $n, l \in \mathbb{N}$ dostaneme:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} > \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-k+2)}{k!} \frac{1}{(n+1)^k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{k!} \frac{1}{(n+1)^{k-1}} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n+1} \cdots \frac{n-k+2}{n+1} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) > \\ &> \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^{k-1}} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

To znamená, že posloupnost $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí.

Položme $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Pak $a_n \geq 0$ a s využitím nerovnosti $(1+x)^m \geq 1+mx$ pro $x \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$ (viz. 1.3.8) dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right)^{n+2} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+2} = \\ &= \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \geq \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{n+2}{n(n+2)}\right) = \frac{n}{n+1} \frac{n+1}{n} = 1. \end{aligned}$$

Tedy $a_n \geq a_{n+1}$, posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí, zdola ohraničená nulou. Podle 1.3.9 je konvergentní.

Dále podle 1.3.6.2 a 1.3.5.4 platí $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ a tedy podle 1.3.6.5 existuje

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad \square$$

1.3.11 Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *nevlastní limitu* ∞ a píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ (stručněji $\lim a_n = \infty$, $a_n \rightarrow \infty$) jestliže ke každému $h \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n > h$.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *nevlastní limitu* $-\infty$ a píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ (stručněji $\lim a_n = -\infty$, $a_n \rightarrow -\infty$) jestliže ke každému $h \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n < h$.

Má-li posloupnost $\{a_n\}$ nevlastní limitu, řekneme, že je *určitě divergentní*.

Nemá-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu ani nevlastní limitu, řekneme, že je *oscilující*.

Nahradíme-li v tvrzeních 1.3.3, 1.3.5.1, 1.3.7 slovo „limita“ slovem „nevlastní limita“, zůstanou tato tvrzení v platnosti.

1.3.12 Poznámky

1. Buď $\{a_n\}$ konvergentní posloupnost, $\lim a_n = 0$. Jestliže existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_1$ je $a_n > 0$ (resp. $a_n < 0$, resp. $a_n \neq 0$), pak $\lim \frac{1}{a_n} = \infty$ (resp. $\lim \frac{1}{a_n} = -\infty$, resp. $\lim \frac{1}{|a_n|} = \infty$).

D.: Buď $h > 0$ libovolné. Poněvadž $\lim a_n = 0$, existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_2$ je $|a_n| < \frac{1}{h}$.

Pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{|a_n|} > h$, a tedy $\lim \frac{1}{a_n} = \infty$.

Druhé tvrzení se dokáže analogicky, třetí je jejich důsledkem. $\square$

2. Nechť $\lim a_n = \infty$ (resp. $\lim a_n = -\infty$) a nechť posloupnost $\{b_n\}$ je zdola (resp. shora) ohraničená. Pak $\lim(a_n + b_n) = \infty$ (resp. $\lim(a_n + b_n) = -\infty$).

D.: Existuje $k \in \mathbb{R}$, že $b_n > k$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Buď $h \in \mathbb{R}$ libovolné.

Poněvadž $\lim a_n = \infty$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ je $a_n > h - k$. Tedy pro $n \geq n_0$ je $a_n + b_n > h - k + k = h$, což znamená $\lim(a_n + b_n) = \infty$.

Druhé tvrzení se dokáže analogicky. $\square$

3. Nechť $\lim a_n = \infty$ a nechť $\{b_n\}$ je posloupnost taková, že existují $n_1 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ taková, že pro $n \geq n_1$ je $b_n > \delta$ (resp. $b_n < -\delta$). Pak $\lim a_n b_n = \infty$ (resp. $\lim a_n b_n = -\infty$).
Nechť $\lim a_n = -\infty$ a nechť $\{b_n\}$ je posloupnost taková, že existují $n_1 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ taková, že pro $n \geq n_1$ je $b_n > \delta$ (resp. $b_n < -\delta$). Pak $\lim a_n b_n = -\infty$ (resp. $\lim a_n b_n = \infty$).

D.: Buď $h \in \mathbb{R}$ libovolné. Existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $a_n > \frac{h}{\delta}$.

Pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí $a_n b_n > \frac{h}{\delta} \delta = h$, což znamená $\lim a_n b_n = \infty$.

Zbývající tvrzení se dokáží analogicky. $\square$

Předpoklad $b_n > \delta$ pro $n \geq n_1$ nelze zeslabit na $b_n > 0$ pro $n \geq n_1$. Například pro $\{a_n\} = \{n\}$, $\{b_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ je podle 1.3.5.4 $\lim a_n b_n = \lim \frac{1}{n} = 0$.

4. Nechť $\lim |a_n| = \infty$ a $\{b_n\}$ je ohraničená posloupnost. Pak $\lim \frac{1}{a_n} = 0$ a $\lim \frac{b_n}{a_n} = 0$.

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_0$ je $|a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$, tedy $\left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{a_n} \right| = \frac{1}{|a_n|} < \varepsilon$.
Druhé tvrzení nyní plyne z 1.3.5.3. $\square$

5. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ neklesající (resp. nerostoucí) a není ohraničená shora (resp. zdola), pak je určité divergentní a $\lim a_n = \infty$ (resp. $\lim a_n = -\infty$).

D.: Buď $h \in \mathbb{R}$ libovolné.

Poněvadž $\{a_n\}$ není ohraničená shora, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > h$.

Poněvadž $\{a_n\}$ je neklesající, pro $n \geq n_0$ je $a_n \geq a_{n_0} > h$, tedy $\lim a_n = \infty$.

Druhé tvrzení se dokáže analogicky. $\square$

1.3.13 Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost a $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ se nazývá *vybraná* z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$.

Například $\{a_{2n}\} = \{a_2, a_4, a_6, \dots\}$, $\{a_{n^2}\} = \{a_1, a_4, a_9, \dots\}$, $\{a_n\}_{n=m}^\infty = \{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots\}$ jsou posloupnosti vybrané z $\{a_n\}$.

Poznámka: Snadno ověříme, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, ohraničená shora, ohraničená zdola, ohraničená, stacionární právě tehdy, když každá posloupnost $\{a_{n_k}\}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$ má stejnou vlastnost.

1.3.14 Věta

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ vybranou z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

D.:

„ $\Rightarrow$ “ Nechť $a \in \mathbb{R}$ a buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_n - a| < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_0$.
Poněvadž $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k_0} \geq n_0$ a $n_k \geq n_{k_0}$ pro každé $k \geq k_0$. Tedy pro každé $k \geq k_0$ je $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$, což znamená $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$. Pro $a = \infty$ nebo $a = -\infty$ dokážeme tvrzení analogicky.

„ $\Leftarrow$ “ je triviální. Je-li $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ pro každou $\{n_k\}_{k=1}^\infty$, platí to zejména pro $n_k = k$.

$\square$

1.3.15 Definice

Číslo $a \in \mathbb{R}$ nazveme *hromadným bodem posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže ke každému $n_0 \in \mathbb{N}$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje $n \geq n_0$ takové, že $|a_n - a| < \varepsilon$.

a je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$ právě tehdy, když existuje nekonečně mnoho indexů $m \in \mathbb{N}$ takových, že $|a_m - a| < \varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$.

Například posloupnost $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$ má dva hromadné body -1 a 1 .

1.3.16 Věta

Číslo $a \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$ právě tehdy, když existuje posloupnost $\{a_{n_k}\}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$, která konverguje k číslu a .

D.: „ $\Rightarrow$ “ Nechť a je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$.

K $\varepsilon_1 = 1$, $n_0 = 1$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq 1$ takové, že $|a_{n_1} - a| < 1$.

K $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ a k $n_1 + 1 \in \mathbb{N}$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$ takové, že $|a_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$.

K $\varepsilon_3 = \frac{1}{3}$ a k $n_2 + 1 \in \mathbb{N}$ existuje $n_3 \in \mathbb{N}$, $n_3 > n_2$ takové, že $|a_{n_3} - a| < \frac{1}{3}$.

Tímto způsobem postupujeme dále. Výsledkem konstrukce je rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ takových, že $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$.

Poněvadž $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$, ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|\frac{1}{k} - 0| = \frac{1}{k} < \varepsilon$ pro každé $k \geq k_0$.

Tedy pro $k \geq k_0$ platí $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k} < \varepsilon$, což znamená $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

„ $\Leftarrow$ “ Jestliže existuje $\{a_{n_k}\}$ taková, že $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \geq k_0$ — tedy pro nekonečně mnoho indexů k — platí $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$, což znamená, že a je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$. $\square$

Z 1.3.14 plyne: Je-li $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, pak a je jediným hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$.

1.3.17 Lemma

Buď $\{a_n\}$ posloupnost a M množina hromadných bodů této posloupnosti. Nechť $M \neq \emptyset$. Je-li M shora (resp. zdola) ohraničená, pak existuje $\max M$ (resp. $\min M$).

D.: Podle 1.1.7(R14) existuje $a = \sup M$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak $a - \varepsilon < a$ a podle 1.1.6(s2*) existuje hromadný bod $m \in M$ takový, že $m > a - \varepsilon$. Tedy $\varepsilon_1 = m - a + \varepsilon > 0$.

Dále $m - \varepsilon_1 = m - (m - a + \varepsilon) = a - \varepsilon$, $m + \varepsilon_1 = m + (m - a + \varepsilon) \leq a + a - a + \varepsilon = a + \varepsilon$, neboť $a = \sup M \geq m$. Odtud plyne, že $(m - \varepsilon_1, m + \varepsilon_1) \subseteq (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Podle definice hromadného bodu leží v $(m - \varepsilon_1, m + \varepsilon_1)$ nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$, tedy i v $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$, což znamená, že a je hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$, $a \in M$ a tedy podle 1.1.6.4 $a = \max M$.

Druhá část tvrzení se dokáže analogicky. $\square$

1.3.18 Věta (Bolzano [1781 – 1848], Weierstrass [1815 – 1897])

Každá ohraničená posloupnost má alespoň jeden hromadný bod.

D.: Buď $\{a_n\}$ ohraničená posloupnost, $h \leq a_n \leq H$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Položme $M_k = \{a_n : n > k\}$. $M_k \neq \emptyset$, M_k je shora ohraničená (H je její horní závora). Existuje tedy $b_k = \sup M_k$. Zřejmě $b_k \geq h$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a poněvadž $M_k \supseteq M_{k+1}$, platí $b_k \geq b_{k+1}$. Tedy posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^\infty$ je nerostoucí a zdola ohraničená. Podle 1.3.9 je $\{b_k\}_{k=1}^\infty$ konvergentní, $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b$.

Ukážeme, že b je hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Existuje $k_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $k \geq k_0$ jest $|b_k - b| < \varepsilon$, neboli $b_k < b + \varepsilon$. Pro $k \geq k_0$ je také $b_k = \sup\{a_n : n \geq k\} \geq a_k$. Celkem $a_k \leq b_k < b + \varepsilon$.

Připusťme, že b není hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$. Pak v intervalu $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ leží pouze konečný počet členů této posloupnosti. To vzhledem k poslední nerovnosti znamená, že existuje $n_0 \geq k_0$ takové, že pro $k \geq n_0$ je $a_k \leq b - \varepsilon$. Tedy i $b_k = \sup\{a_n : n \geq k\} \leq b - \varepsilon$.

Podle 1.3.5.1 je $b = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k \leq b - \varepsilon$, což je spor. $\square$

1.3.19 Důsledky

1. Z každé ohraničené posloupnosti lze vybrat posloupnost konvergentní.

D.: plyne z 1.3.16. $\square$

2. Je-li množina hromadných bodů posloupnosti prázdná, je posloupnost neohraničená.

1.3.20 Definice

Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost a M množina jejích hromadných bodů.

- Nechť $M \neq \emptyset$. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ ohraničená shora, klademe $\limsup a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \max M$, je-li $\{a_n\}$ ohraničená zdola, klademe $\liminf a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \min M$. Není-li $\{a_n\}$ ohraničená shora, klademe $\limsup a_n = \infty$, není-li $\{a_n\}$ ohraničená zdola, klademe $\liminf a_n = -\infty$.
- Nechť $M = \emptyset$. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ ohraničená shora, klademe $\limsup a_n = \liminf a_n = -\infty$, je-li $\{a_n\}$ ohraničená zdola, klademe $\limsup a_n = \liminf a_n = \infty$. Není-li $\{a_n\}$ ohraničená shora ani zdola, klademe $\limsup a_n = \infty$, $\liminf a_n = -\infty$.

Číslo $\limsup a_n$ se nazývá *limes superior posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, číslo $\liminf a_n$ se nazývá *limes inferior posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Stručně: $\limsup a_n$ je největší hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$, pokud je tato posloupnost ohraničená shora,
 $\liminf a_n$ je nejmenší hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$, pokud je tato posloupnost ohraničená zdola.

1.3.17 ukazuje, že definice je korektní.

Analogickou úvahou jako v důkazu věty **1.3.18** lze ukázat, že

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\sup\{a_n : n > k\}), \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\inf\{a_n : n > k\}).\end{aligned}$$

Zřejmě platí: $\liminf a_n \leq \limsup a_n$. $\liminf a_n = \limsup a_n$ právě tehdy, když existuje vlastní nebo nevlastní limita $\lim a_n$.

1.3.21 Definice

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *cauchyovská*, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ a každé $m \geq n_0$ platí $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

1.3.22 Věta (Cauchyovo – Bolzanovo kritérium konvergence)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní právě tehdy, když je cauchyovská.

D.:

„ $\Rightarrow$ “ Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní, $\lim a_n = a$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné.

K $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ a pro $m \geq n_0$ je $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tedy pro $n \geq n_0$ a $m \geq n_0$ platí $|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

„ $\Leftarrow$ “ Nechť $\{a_n\}$ je cauchyovská. K číslu 1 existuje $\tilde{n}$ takové, že pro $n \geq \tilde{n}$ platí $|a_n - a_{\tilde{n}}| < 1$, tedy $a_{\tilde{n}} - 1 < a_n < a_{\tilde{n}} + 1$.

Položme $h = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{\tilde{n}-1}, a_{\tilde{n}} - 1\}$, $H = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{\tilde{n}-1}, a_{\tilde{n}} + 1\}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $h \leq a_n \leq H$, tedy $\{a_n\}$ je ohraničená a podle **1.3.19.1** existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a \in \mathbb{R}$.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K $\frac{\varepsilon}{2}$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \geq k_0$ je $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Současně existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $m, n \geq n_0$ je $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Buď $n \geq n_0$ libovolné. Zvolme $k_1 \geq k_0$ takové, že $n_{k_1} \geq n_0$. Pak

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_{k_1}} + a_{n_{k_1}} - a| \leq |a_n - a_{n_{k_1}}| + |a_{n_{k_1}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

tedy $\lim a_n = a$.

□

1.4 Diferenční a sumační počet

1.4.1 Definice

Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost. Posloupnost $\{\Delta a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jejíž členy jsou dány vztahem $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ nazýváme (*první*) *diference* (*vpřed*) posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Zřejmě platí: Posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí (klesající) právě tehdy, když všechny členy posloupnosti $\{\Delta a_n\}$ jsou kladné (záporné).

1.4.2 Definice

Řekneme, že $k \in \mathbb{N}$ je *uzel posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže $a_k = 0$ nebo $a_k a_{k-1} < 0$.

1.4.3 Věta

Buď $\{a_n\}$ posloupnost, $k \in \mathbb{N}$. Jestliže $a_k > a_{k-1}$ a $a_k \geq a_{k+1}$, pak k je uzel posloupnosti $\{\Delta a_n\}$; jestliže $a_k < a_{k-1}$ a $a_k \leq a_{k+1}$, pak k je uzel posloupnosti $\{\Delta a_n\}$.

D.: Nechť $a_k > a_{k-1}$, $a_k > a_{k+1}$. Pak $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k < 0$, $\Delta a_{k-1} = a_k - a_{k-1} > 0$, tedy $(\Delta a_k)(\Delta a_{k-1}) < 0$.
Nechť $a_k > a_{k-1}$, $a_k = a_{k+1}$. Pak $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k = 0$.
Analogicky lze ukázat platnost druhého tvrzení. $\square$

1.4.4 Věta

Buďte $\{a_n\}, \{b_n\}$ posloupnosti, $c \in \mathbb{R}$. Pak platí

1. $\Delta(ca_n) = c\Delta a_n$,
2. $\Delta(a_n + b_n) = \Delta a_n + \Delta b_n$,
3. $\Delta(a_n - b_n) = \Delta a_n - \Delta b_n$,
4. $\Delta(a_n b_n) = (\Delta a_n)b_{n+1} + a_n(\Delta b_n) = (\Delta a_n)b_n + a_{n+1}(\Delta b_n)$,
5. Pokud $b_n b_{n+1} \neq 0$, pak $\Delta\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{(\Delta a_n)b_n - a_n(\Delta b_n)}{b_n b_{n+1}}$.

D.:

1. $\Delta(ca_n) = ca_{n+1} - ca_n = c(a_{n+1} - a_n) = c\Delta a_n$.
2. $\Delta(a_n + b_n) = (a_{n+1} + b_{n+1}) - (a_n + b_n) = (a_{n+1} - a_n) + (b_{n+1} - b_n) = \Delta a_n + \Delta b_n$.
3. Plyne z 1. a 2.
4. Platí

$$\begin{aligned}\Delta(a_n b_n) &= a_{n+1}b_{n+1} - a_n b_n = a_{n+1}b_{n+1} - a_n b_{n+1} + a_n b_{n+1} - a_n b_n = \\ &= (a_{n+1} - a_n)b_{n+1} + a_n(b_{n+1} - b_n) = (\Delta a_n)b_{n+1} + a_n(\Delta b_n),\end{aligned}$$

takže první vztah platí. Druhý plyne z prvního a z komutativity násobení.

$$5. \Delta\left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} = \frac{b_n - b_{n+1}}{b_n b_{n+1}} = -\frac{\Delta b_n}{b_n b_{n+1}}.$$

$$\text{Podle 4. nyní je } \Delta\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\Delta a_n}{b_{n+1}} + a_n \Delta\left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{\Delta a_n}{b_{n+1}} - a_n \frac{\Delta b_n}{b_n b_{n+1}} = \frac{(\Delta a_n)b_n - a_n(\Delta b_n)}{b_n b_{n+1}}.$$

$\square$

1.4.5 Definice

Budte $\{a_n\}$ posloupnost, $m, k \in \mathbb{N}$, $m \leq k$. Sumu členů posloupnosti $\{a_n\}$ v mezích od m do k definujeme vztahem

$$\sum_{i=m}^k a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_k.$$

1.4.6 Věta

Budte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ posloupnosti, $c \in \mathbb{R}$, $m, k \in \mathbb{N}$, $m \leq k$. Pak

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^k ca_i &= c \sum_{i=m}^k a_i, \\ \sum_{i=m}^k (a_i \pm b_i) &= \sum_{i=m}^k a_i \pm \sum_{i=m}^k b_i. \end{aligned}$$

D.: Plyne přímo z distributivního a asociativního zákona. $\square$

1.4.7 Věta

Budte $\{a_n\}$ posloupnost, $m, k \in \mathbb{N}$, $m \leq k$. Označme $[a_n]_{n=m}^k = a_k - a_m$. Pak platí

$$\sum_{i=m}^k \Delta a_i = [a_i]_{i=m}^{k+1}.$$

D.: $\sum_{i=m}^k \Delta a_i = (a_{m+1} - a_m) + (a_{m+2} - a_{m+1}) + \cdots + (a_k - a_{k-1}) + (a_{k+1} - a_k) = a_{k+1} - a_m.$ $\square$

Věta ukazuje, že difference a sumace jsou v jistém smyslu inverzní operátory.

1.4.8 Věta (Sumace “per partes”)

Budte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ posloupnosti, $m, k \in \mathbb{N}$, $m \leq k$. Pak platí

$$\sum_{i=m}^k a_i \Delta b_i = [a_n b_n]_{n=m}^{k+1} - \sum_{i=m}^k (\Delta a_i) b_{i+1}.$$

D.: Podle 1.4.7 a 1.4.4.4 platí

$$[a_n b_n]_{n=m}^{k+1} = \sum_{i=m}^k \Delta(a_i b_i) = \sum_{i=m}^k ((\Delta a_i) b_{i+1} + a_i \Delta b_i) = \sum_{i=m}^k (\Delta a_i) b_{i+1} + \sum_{i=m}^k a_i \Delta b_i.$$

$\square$

Příklad: Najděte součet $1 + 4 + 9 + \cdots + n^2$.

Ř.:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i^2 &= \sum_{i=1}^n i^2 ((i+1) - i) = \sum_{i=1}^n i^2 \Delta i = [i^3]_{i=1}^{n+1} - \sum_{i=1}^n (\Delta i^2) (i+1) = \\ &= (n+1)^3 - 1 - \sum_{i=1}^n ((i+1)^2 - i^2) (i+1) = n^3 + 3n^2 + 3n - \sum_{i=1}^n (2i+1)(i+1) = \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n - \sum_{i=1}^n (2i^2 + 3i + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n - \sum_{i=1}^n 1 - 3 \sum_{i=1}^n i - 2 \sum_{i=1}^n i^2 = \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n - n - 3 \frac{n(n+1)}{2} - 2 \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2n^3 + 6n^2 + 4n - 3n^2 - 3n}{2} - 2 \sum_{i=1}^n i^2. \end{aligned}$$

Odtud

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

□

1.4.9 Věta (Sztolc [1842 – 1903])

1. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ryze monotonní posloupnost taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = c \in \mathbb{R}^*$, pak také $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$.

2. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $\{b_n\}$ je neohrazená rostoucí posloupnost. Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = c \in \mathbb{R}^*$, pak také $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$.

D.: 1. Nechť pro určitost je $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající.

- $c \in \mathbb{R}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$ platí

$$c - \varepsilon < \frac{a_{k+1} - a_k}{b_{k+1} - b_k} = \frac{a_k - a_{k+1}}{b_k - b_{k+1}} < c + \varepsilon,$$

a poněvadž $b_{k+1} < b_k$, platí

$$(c - \varepsilon)(b_k - b_{k+1}) < a_k - a_{k+1} < (c + \varepsilon)(b_k - b_{k+1}).$$

Tato nerovnost platí pro každé $k \geq n_0$, tedy pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n > n_0$ platí:

$$\begin{array}{ccccc} (c - \varepsilon)(b_n - b_{n+1}) & < & a_n - a_{n+1} & < & (c + \varepsilon)(b_n - b_{n+1}) \\ (c - \varepsilon)(b_{n+1} - b_{n+2}) & < & a_{n+1} - a_{n+2} & < & (c + \varepsilon)(b_{n+1} - b_{n+2}) \\ & & \vdots & & \vdots \\ (c - \varepsilon)(b_{m-1} - b_m) & < & a_{m-1} - a_m & < & (c + \varepsilon)(b_{m-1} - b_m). \end{array}$$

Seštením těchto nerovností dostaneme

$$(c - \varepsilon)(b_n - b_m) < a_n - a_m < (c + \varepsilon)(b_n - b_m).$$

Podle 1.3.5.2 a 1.3.6 je $\lim_{m \rightarrow \infty} (c - \varepsilon)(b_n - b_m) = (c - \varepsilon)(b_n - \lim_{m \rightarrow \infty} b_m) = (c - \varepsilon)b_n$.

Podobně $\lim_{m \rightarrow \infty} (c + \varepsilon)(b_n - b_m) = (c + \varepsilon)b_n$, $\lim_{m \rightarrow \infty} (a_n - a_m) = a_n$. Tedy podle 1.3.5.1 je

$$(c - \varepsilon)b_n \leq a_n \leq (c + \varepsilon)b_n.$$

Poněvadž $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, je $b_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a tedy

$$c - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq c + \varepsilon.$$

Tato nerovnost platí pro každé $n > n_0$, což znamená, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$.

- $c = \infty$. Buď $K \in \mathbb{R}$ libovolné. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$ platí

$$\frac{a_{k+1} - a_k}{b_{k+1} - b_k} = \frac{a_k - a_{k+1}}{b_k - b_{k+1}} > K.$$

Odtud pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n > n_0$ dostaneme:

$$\begin{array}{ccc} a_k - a_{k+1} & > & K(b_k - b_{k+1}) \\ a_n - a_m & > & K(b_n - b_m) \\ a_n & \geq & Kb_n \\ \frac{a_n}{b_n} & \geq & K, \end{array} \quad \begin{array}{c} / \\ \sum_{k=n}^{m-1} \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \\ 1 \\ b_n \end{array}$$

což znamená, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

- $c = -\infty$. Analogicky jako předchozí případ.

Je-li $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí, provedeme důkaz analogicky.

- Nejprve dokážeme pomocné tvrzení: Jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ reálná čísla a $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ kladná reálná čísla, $m, M \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ platí $m < \frac{\alpha_i}{\beta_i} < M$, pak

$$m < \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k} < M.$$

Důkaz provedem úplnou indukcí vzhledem ke k .

$m < \frac{\alpha_1}{\beta_1} < M$ je splněno triviálně.

Z indukčního předpokladu $m < \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1}}{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{k-1}} < M$, neboli

$$m(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{k-1}) < \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1} < M(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{k-1})$$

a z předpokladu tvrzení

$$m\beta_k < \alpha_k < M\beta_k$$

dostaneme sečtením dokazovanou nerovnost.

- $c \in \mathbb{R}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_1$ platí

$$c - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < c + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Poněvadž $\{b_n\}$ je podle předpokladu neohraničená a rostoucí, lze bez újmy na obecnosti předpokládat $b_{n_1} \geq 0$.

Položme $\alpha_1 = a_{n_1+1} - a_{n_1}$, $\alpha_1 = a_{n_1+2} - a_{n_1+1}, \dots, \alpha_k = a_n - a_{n-1}$,
 $\beta_1 = b_{n_1+1} - b_{n_1}$, $\beta_1 = b_{n_1+2} - b_{n_1+1}, \dots, \beta_k = b_n - b_{n-1}$.

Podle pomocného tvrzení je $c - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}} < c + \frac{\varepsilon}{2}$, neboli

$$\left| \frac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}} - c \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| &= \left| \frac{a_n - a_{n_1}}{b_n} + \frac{a_{n_1}}{b_n} - c \right| = \left| \frac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}} \frac{b_n - b_{n_1}}{b_n} + \frac{a_{n_1}}{b_n} - c \right| = \\ &= \left| \left(\frac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}} - c \right) \frac{b_n - b_{n_1}}{b_n} + \frac{b_n - b_{n_1}}{b_n} c + \frac{a_{n_1}}{b_n} - c \right| = \\ &= \left| \left(\frac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}} - c \right) \frac{b_n - b_{n_1}}{b_n} + \frac{(b_n - b_{n_1})c + a_{n_1} - cb_n}{b_n} \right| = \\ &= \left| \left(\frac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}} - c \right) \left(1 - \frac{b_{n_1}}{b_n} \right) + \frac{a_{n_1} - cb_{n_1}}{b_n} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}} - c \right| \left| 1 - \frac{b_{n_1}}{b_n} \right| + \left| \frac{a_{n_1} - cb_{n_1}}{b_n} \right|. \end{aligned}$$

Poněvadž podle 1.3.12.5 a 1.3.12.4 je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n_1}}{b_n} = 0$ a pro $n > n_1$ je $\frac{b_{n_1}}{b_n} \geq 0$, tak existuje

$n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$ takové, že pro $n \geq n_2$ platí $0 \leq 1 - \frac{b_{n_1}}{b_n} \leq 1$, neboli

$$\left| 1 - \frac{b_{n_1}}{b_n} \right| \leq 1.$$

Poněvadž $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n_1} - cb_{n_1}}{b_n} = 0$, existuje $n_3 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_3$ platí

$$\left| \frac{a_{n_1} - cb_{n_1}}{b_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tedy pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ platí

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

což znamená, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$.

- $c = \infty$. Budťe $h \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolná čísla.

Poněvadž $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \infty$, existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $k \geq n_1$ je

$$\frac{a_{k+1} - a_k}{b_{k+1} - b_k} > 2(h + \varepsilon),$$

neboli vzhledem k tomu, že $b_{k+1} - b_k > 0$

$$a_{k+1} - a_k > 2(h + \varepsilon)(b_{k+1} - b_k).$$

Sečtením těchto nerovnic pro k od n_1 do $n - 1$ dostaneme

$$\begin{aligned} a_n - a_{n_1} &> 2(h + \varepsilon)(b_n - b_{n_1}) \\ \frac{a_n}{b_n} &> 2(h + \varepsilon) \left(1 - \frac{b_{n_1}}{b_n} \right) + \frac{a_{n_1}}{b_n}. \end{aligned}$$

Poněvadž podle 1.3.12.5 a 1.3.12.4 je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n_1}}{b_n} = 0$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n_1}}{b_n} = 0$, existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_2$ platí

$$\left| \frac{b_{n_1}}{b_n} \right| < \frac{1}{2}, \quad \text{neboli} \quad 1 - \frac{b_{n_1}}{b_n} > \frac{1}{2}$$

a existuje $n_3 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_3$ platí

$$\frac{a_{n_1}}{b_n} > -\varepsilon.$$

Tedy pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ platí

$$\frac{a_n}{b_n} > 2(h + \varepsilon) \frac{1}{2} - \varepsilon = h,$$

což znamená, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

- $c = -\infty$. Analogicky jako předchozí případ.

□

Poznámky:

- Předpoklad o ryzi monotonii posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ v první části věty obecně nelze vynechat.

Je-li například $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}}{(-1)^{n+1}(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \frac{n - n - 1}{n + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2n + 1} = 0$ podle 1.3.12.4, avšak

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{n}} = (-1)^n$ a posloupnost $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$ je oscilující.

• Jestliže neexistuje vlastní ani nevlastní $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ a ostatní předpoklady Sztolcovy věty jsou splněny, nelze nic tvrdit o existenci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.

Je-li například $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\{b_n\}$ je klesající a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Přitom

$$\frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{(-1)^n}{n^2}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \frac{(-1)^{n+1} \frac{n^2 + (n+1)^2}{n^2(n+1)^2}}{\frac{n - (n+1)}{n(n+1)}} = (-1)^n \frac{2n^2 + 2n + 1}{n^2 + n}$$

a posloupnost $\left\{ (-1)^n \frac{2n^2 + 2n + 1}{n^2 + n} \right\} = \left\{ -\frac{5}{2}, \frac{13}{6}, -\frac{25}{12}, \frac{41}{20}, -\frac{61}{30}, \frac{85}{42}, \dots \right\}$ nemá limitu. Ale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(-1)^n}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Příklad: Rozhodněte, zda posloupnost $\left\{ \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right\}$ je konvergentní a pokud ano, určete její limitu.

Ř.: Označme $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$ a

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{((n+1)!)^2 (2n)!}{(2(n+1))! (n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{4(n + \frac{1}{2})} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8(n + \frac{1}{2})} \leq \\ &\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8(1 + \frac{1}{2})} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12} < 1, \end{aligned}$$

neboli $a_{n+1} < a_n$. To znamená, že $\{a_n\}$ je klesající, zdola ohraničená posloupnost a tedy podle 1.3.9 existuje $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$.

Posloupnost $\{(2n)!\}$ je rostoucí a neohraničená, tedy

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)!)^2 - (n!)^2}{(2n+2)! - (2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2((n+1)^2 - 1)}{((2n)!)^2((2n+2)(2n+1) - 1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{4n^2 + 6n + 1} = a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{4 + \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}} = a \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

neboli $a = \frac{1}{4}a$. Odtud $a = 0$. $\square$

1.5 Elementární funkce

A. Polynomy

1.5.1 Definice

Budte $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. *Polynom (racionální funkce celistvá)* je funkce tvaru $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

Číslo n se nazývá *stupeň polynomu*, značíme $n = \text{st } P$.

Čísla $a_0, a_1, \dots, a_n$ se nazývají *koefficienty polynomu*.

Je-li $\text{st } P = 1$, polynom se nazývá *lineární*.

Je-li $\text{st } P = 2$, polynom se nazývá *kvadratický*.

Je-li $\text{st } P = 3$, polynom se nazývá *kubický*.

Je-li st $P = 4$, polynom se nazývá *bikvadratický*.
Číslo 0 nazveme *nulovým polynomem*. Nepřičítáme mu stupeň.

$$\text{Dom } P = \mathbb{R}, \text{ Im } P = \begin{cases} (-\infty, \infty), & \text{st } P \text{ je lichý} \\ [a, \infty), & \text{st } P \text{ je sudý, } a_n > 0 \\ (-\infty, a], & \text{st } P \text{ je sudý, } a_n < 0 \end{cases}.$$

Komplexní čísla: $\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$, kde $i^2 = -1$

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_2b_1 + a_1b_2)$$

Je-li $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}$ pak

$\bar{a} = a - ib$ — číslo komplexně sdružené (konjugované)

$|\alpha| = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ — absolutní hodnota (modul) komplexního čísla

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$$

$$\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$$

$$\overline{\alpha^n} = \bar{\alpha}^n \text{ pro } n \in \mathbb{N}$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow \alpha = \bar{\alpha}$$

Množina komplexních čísel s operacemi $+$, $\cdot$ splňuje (R1) – (R9) z 1.1.7. Tvoří tedy pole. Toto pole nelze uspořádat.

1.5.2 Definice

Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ se nazývá *kořen* (*nulový bod*) polynomu P , jestliže platí $P(\alpha) = 0$.

Je-li α kořenem polynomu P , pak lineární polynom $x - \alpha$ nazveme *kořenovým faktorem* polynomu P .

1.5.3 Základní věta algebry

Každý polynom stupně $n \geq 1$ s komplexními koeficienty má komplexní kořen.

Tato věta je známá od 17. století. První (chybný) pokus o důkaz publikoval d'Alembert roku 1746, větu dokázal Gauss roku 1799.

1.5.4 Věta

Buď $P(x)$ polynom, st $P = n \geq 1$. Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ je kořenem polynomu P právě tehdy, když existuje polynom Q , st $Q = n - 1$ takový, že $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.

D.:

„ $\Rightarrow$ “ Necht $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, α je kořenem P . Pak

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x) - 0 = P(x) - P(\alpha) = \\ &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 - (a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0) = \\ &= a_n (x^n - \alpha^n) + a_{n-1} (x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \cdots + a_1 (x - \alpha) + a_0 (1 - 1). \end{aligned}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $(x^k - \alpha^k) : (x - \alpha) = x^{k-1} + x^{k-2}\alpha + x^{k-3}\alpha^2 + \dots + x\alpha^{k-2} + \alpha^{k-1}$. Tedy $P(x) = a_n(x - \alpha)(x^{n-1} + x^{n-2}\alpha + \dots + \alpha^{n-1}) + a_{n-1}(x - \alpha)(x^{n-2} + x^{n-3}\alpha + \dots + \alpha^{n-2}) + \dots + a_1(x - \alpha)$. Označíme $Q(x) = a_n(x^{n-1} + x^{n-2}\alpha + \dots + \alpha^{n-1}) + a_{n-1}(x^{n-2} + x^{n-3}\alpha + \dots + \alpha^{n-2}) + \dots + a_1$ a dostaneme tvrzení.

„ $\Leftarrow$ “ je zřejmé.

$P(x)$, st $P = n \geq 1$. Podle 1.5.3 má P kořen α_1 , a tedy $P(x) = (x - \alpha_1)Q_1(x)$.

Je-li $\text{st } Q_1 \geq 1$, pak $Q_1(x) = (x - \alpha_2)Q_2(x)$, tedy $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)Q_2(x)$.

Analogicky pokračujeme a po n krokoch dostaneme $P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$.

Můžeme se stát, že $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k$, $k \leq n$. Pak $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_k) = (x - \alpha_1)^k$. Celkem $P(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_m)^{k_m}$, přičemž $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}$, $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$.

1.5.5 Definice

Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ se nazývá *k-násobný kořen* polynomu $P(x)$, jestliže $P(x) = (x - \alpha)^k Q(x)$, kde $Q(x)$ je polynom nemající kořen α .

(1-násobný kořen se nazývá *jednoduchý*.)

1.5.6 Věta (o rozkladu polynomu na kořenové faktory)

Nechť $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ je polynom, st $P = n \geq 1$. Nechť $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ jsou všechny jeho navzájem různé kořeny, přičemž α_1 je k_1 -násobný, α_2 je k_2 -násobný, $\dots$, α_m je k_m -násobný. Pak

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_m)^{k_m},$$

$$k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_m = n.$$

Důsledek: Polynom stupně n má právě n kořenů, jestliže k -násobný kořen počítáme k krát.

1.5.7 Příklad

$$\begin{aligned} P(x) &= x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 = x^3(x^2 + x + 1) - (x^2 + x + 1) = (x^3 - 1)(x^2 + x + 1) = \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1) = (x - 1) \left(x - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2 \left(x - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2 \end{aligned}$$

1.5.8 Věta

Nechť polynom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ má reálné koeficienty a komplexní kořen α . Pak má také komplexně sdružený kořen $\bar{\alpha}$ a násobnosti kořenů α a $\bar{\alpha}$ jsou stejné.

D.: Pro $x \in \mathbb{R}$ je $\bar{x} = x$ a tedy $\overline{P(x)} = \bar{a}_n \bar{x}^n + \bar{a}_{n-1} \bar{x}^{n-1} + \dots + \bar{a}_0 = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = P(x)$. Podle 1.5.6 je $P(x) = a_n (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_m)^{k_m}$ a tedy $\overline{P(x)} = a_n (x - \bar{\alpha}_1)^{k_1} (x - \bar{\alpha}_2)^{k_2} \dots (x - \bar{\alpha}_m)^{k_m}$. Z rovnosti $\overline{P(x)} = P(x)$ plyne tvrzení. $\square$

Polynom s reálnými koeficienty se nazývá *reálný polynom*.

1.5.9 Věta (o rozkladu reálného polynomu v reálném oboru na ireducibilní polynomy)

Buď $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ reálný polynom, st $P = n \geq 1$. Nechť $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ jsou všechny jeho reálné kořeny, přičemž α_1 je k_1 -násobný, $\dots$, α_m je k_m -násobný. Nechť $a_1 \pm ib_1, a_2 \pm ib_2, \dots, a_r \pm ib_r$ jsou všechny jeho imaginární kořeny, přičemž $a_1 \pm ib_1$ je l_1 -násobný, $\dots$, $a_r \pm ib_r$ je l_r násobný. Pak je

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_m)^{k_m} [(x - a_1)^2 + b_1^2]^{l_1} [(x - a_2)^2 + b_2^2]^{l_2} \dots [(x - a_r)^2 + b_r^2]^{l_r},$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m + 2l_1 + 2l_2 + \dots + 2l_r = n.$$

D.: Podle 1.5.6 a 1.5.8 v rozkladu polynomu $P(x)$ vystupuje součin faktorů $(x - (a_j + ib_j))^{l_j} (x - (a_j - ib_j))^{l_j} = (x^2 - (a_j + ib_j)x - (a_j - ib_j)x + (a_j + ib_j)(a_j - ib_j))^{l_j} = (x^2 - 2a_j x + a_j^2 + b_j^2 + i(a_j b_j - a_j b_j))^{l_j} = (x^2 - 2a_j x + a_j^2 + b_j^2)^{l_j} = [(x - a_j)^2 + b_j^2]^{l_j}$. $\square$

Faktory $(x - a_j)^2 + b_j^2$ se někdy nahrazují kvadratickým polynomem $x^2 + p_j x + q_j$ se záporným diskriminantem $p_j^2 - 4q_j$.

1.5.10 Příklad

Viz též 1.5.7.

$$x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 = (x - 1) \left(x - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2 \left(x - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2 = (x - 1) \left(\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right)^2$$

nebo $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)^2$.

B. Racionální funkce

1.5.11 Definice

Buďte $P(x)$, $Q(x)$ nenulové polynomy. Funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ se nazývá *racionální lomená funkce*.
Je-li $\text{st } P < \text{st } Q$, funkce R se nazývá *ryze lomená*; je-li $\text{st } P \geq \text{st } Q$, funkce R se nazývá *neryze lomená*.

$\text{Dom } R = \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$, kde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ jsou všechny reálné kořeny polynomu $Q(x)$.

Je-li $R(x)$ neryze lomená, lze provést naznačené dělení. Výsledkem je polynom $S(x)$ a zbytek — polynom $T(x)$, který je buď nulový nebo $\text{st } T < \text{st } Q$. Tedy $R(x) = S(x)$ nebo $R(x) = S(x) + \frac{T(x)}{Q(x)}$. Odtud plyne, že platí

1.5.12 Poznámka

Neryze lomená funkce je buď polynomem nebo ji lze vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené funkce.

1.5.13 Lemma

Buď $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ryze lomená racionální funkce a nechtě α je reálný k -násobný kořen polynomu $Q(x)$, tj. $Q(x) = (x - \alpha)^k Q_1(x)$, $Q_1(\alpha) \neq 0$. Pak existují reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_k$ taková, že pro všechna $x \in \text{Dom } R$ platí

$$R(x) = \frac{P(x)}{(x - \alpha)^k Q_1(x)} = \frac{a_k}{(x - \alpha)^k} + \frac{a_{k-1}}{(x - \alpha)^{k-1}} + \dots + \frac{a_2}{(x - \alpha)^2} + \frac{a_1}{x - \alpha} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

kde $P_1(x)$ je buď nulový polynom, nebo $\text{st } P_1 < \text{st } Q_1$.

D.: Pro každé $a \in \mathbb{R}$ je $\frac{P(x)}{(x - \alpha)^k Q_1(x)} = \frac{a}{(x - \alpha)^k} + \frac{P(x) - aQ_1(x)}{(x - \alpha)^k Q_1(x)}$.

Položme $a = a_k = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$. Pak $P(\alpha) - a_k Q_1(\alpha) = 0$.

Je-li $P(x) - a_k Q_1(x)$ nulový polynom, tvrzení platí.

Nechtě $P(x) - a_k Q_1(x)$ není nulový. Pak α je jeho kořen a podle 1.5.4 je $P(x) - a_k Q_1(x) = (x - \alpha)P_k(x)$,

$$\frac{P(x)}{(x - \alpha)^k Q_1(x)} = \frac{a_k}{(x - \alpha)^k} + \frac{P_k(x)}{(x - \alpha)^{k-1} Q_1(x)}.$$

Stejný postup aplikujeme na racionální funkci $\frac{P_k(x)}{(x - \alpha)^{k-1} Q_1(x)}$ a po k krocích dostaneme tvrzení. $\square$

1.5.14 Lemma

Buď $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ryze lomená racionální funkce a nechtě $\alpha = a + ib$ je imaginární r -násobný kořen polynomu $Q(x)$, tj. $Q(x) = [(x - a)^2 + b^2]^r Q_1(x)$, $Q_1(a + ib) \neq 0$. Pak existují reálná čísla $m_1, n_1, m_2, n_2, \dots, m_r, n_r$, taková, že pro všechna $x \in \text{Dom } R$ platí

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{P(x)}{[(x - a)^2 + b^2]^r Q_1(x)} = \\ &= \frac{m_r x + n_r}{[(x - a)^2 + b^2]^r} + \frac{m_{r-1} x + n_{r-1}}{[(x - a)^2 + b^2]^{r-1}} + \dots + \frac{m_2 x + n_2}{[(x - a)^2 + b^2]^2} + \frac{m_1 x + n_1}{(x - a)^2 + b^2} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \end{aligned}$$

kde $P_1(x)$ je buď nulový polynom, nebo $\text{st } P_1 < \text{st } Q_1$.

D.: Pro každá dvě $m, n \in \mathbb{R}$ je $\frac{P(x)}{[(x-a)^2+b^2]^r Q_1(x)} = \frac{mx+n}{[(x-a)^2+b^2]^r} + \frac{P(x) - (mx+n)Q_1(x)}{[(x-a)^2+b^2]^r Q_1(x)}$.

Nechť $\frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} = \frac{P(a+ib)}{Q_1(a+ib)} = p+iq$. Položme $m = m_r = \frac{q}{b}$, $n = n_r = \frac{pb-qa}{b}$. Pak je

$$\begin{aligned} P(\alpha) - (m_r\alpha + n_r)Q_1(\alpha) &= P(\alpha) - \left(\frac{q}{b}\alpha + i\frac{q}{b}b + p - \frac{qa}{b}\right)Q_1(\alpha) = P(\alpha) - (p+iq)Q_1(\alpha) = \\ &= P(\alpha) - \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}Q_1(\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Je-li $P(x) - (m_rx + n_r)Q_1(x)$ nulový polynom, tvrzení platí.

Nechť $P(x) - (m_rx + n_r)Q_1(x)$ není nulový. Pak je číslo α jeho kořenem. Podle 1.5.8 je také $\bar{\alpha}$ jeho kořenem a $P(x) - (m_rx + n_r)Q_1(x) = (x-\alpha)(x-\bar{\alpha})P_r(x) = [(x-a)^2+b^2]P_r(x)$,

$$\frac{P(x)}{[(x-a)^2+b^2]^r Q_1(x)} = \frac{m_rx + n_r}{[(x-a)^2+b^2]^r} + \frac{P_r(x)}{[(x-a)^2+b^2]^{r-1}}.$$

Stejný postup aplikujeme na racionální funkci $\frac{P_r(x)}{[(x-a)^2+b^2]^{r-1}}$ a po r krocích obdržíme tvrzení. $\square$

Zlomky tvaru $\frac{a}{(x-\alpha)^k}$, $\frac{mx+n}{[(x-a)^2+b^2]^r-1}$ nazýváme *parciální zlomky*.

Z 1.5.13 a 1.5.14 plyne

1.5.15 Věta (o rozkladu racionální funkce na parciální zlomky)

Každou ryze lomenou racionální funkci lze rozložit na součet parciálních zlomků. Každému reálnému k -násobnému kořenu α jmenovatele odpovídá skupina zlomků

$$\frac{a_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{a_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{a_1}{x-\alpha}$$

a každému imaginárnímu r -násobnému kořenu $a+ib$ jmenovatele odpovídá skupina zlomků

$$\frac{m_rx + n_r}{[(x-a)^2+b^2]^r} + \frac{m_{r-1}x + n_{r-1}}{[(x-a)^2+b^2]^{r-1}} + \cdots + \frac{m_2x + n_2}{[(x-a)^2+b^2]^2} + \frac{m_1x + n_1}{(x-a)^2+b^2}.$$

1.5.16 Poznámka

Koeficienty v rozkladu racionální funkce lze vypočítat postupem naznačeným v důkazech pomocných vět 1.5.13 a 1.5.14. V praxi se však používá *metoda neurčitých koeficientů*:

Napišeme formální tvar rozkladu se zatím neurčenými konstantami. Celou rovnost vynásobíme polynomem $Q(x)$. Tím obdržíme rovnost mezi polynomy platnou pro všechna x s výjimkou kořenů $Q(x)$. Porovnáním určitých koeficientů na levé straně a neurčitých koeficientů na pravé straně obdržíme rovnice pro neznámé konstanty.

Do zmíněné rovnosti mezi polynomy lze též dosazovat konkrétní reálná nebo komplexní čísla. Výhodné je například dosazování reálných kořenů jmenovatele $Q(x)$.

Příklad: Rozložte na parciální zlomky funkci $\frac{3x^2-5x+8}{x^3-2x^2+x-2}$.

Ř.: Rozklad jmenovatele: $x^3-2x^2+x-2 = x^2(x-2) + x-2 = (x^2+1)(x-2)$

$$\begin{aligned} \text{Formální tvar rozkladu: } \frac{3x^2-5x+8}{x^3-2x^2+x-2} &= \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\ \frac{3x^2-5x+8}{x^3-2x^2+x-2} &= \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\ \frac{3x^2-5x+8}{x^3-2x^2+x-2} &= \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\ &= \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \end{aligned}$$

$$\text{Dosadíme } x=2: 12-10+8 = A \cdot 5 \rightarrow A=2$$

$$\text{Koeficient u } x^0: 8 = A - 2C \rightarrow C = \frac{A-8}{2} = -3$$

$$\text{Koeficient u } x^2: 3 = A + B \rightarrow B = 3 - A = 1.$$

$$\text{Celkem: } \frac{3x^2-5x+8}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{2}{x-2} + \frac{x-3}{x^2+1}. \square$$

C. Funkce exponenciální a logaritmická

Jde o zavedení obecné mocniny a^x pro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x = n \in \mathbb{N} : a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ krát}} & x = \frac{1}{n} \in \mathbb{Q} : a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a} \text{ je číslo splňující } \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a; \\ x = 0 : a^0 &= 1; & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \\ x = -n \in \mathbb{Z} : a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \end{aligned}$$

Pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}$, $a > 0$ platí:

$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= a^{x+y} & a > 1, x < y &\Rightarrow a^x < a^y \\ \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} & 0 < a < 1, x < y &\Rightarrow a^x > a^y \\ (a^x)^y &= a^{xy} \end{aligned}$$

Poznamenejme, že podle 1.1.17 ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje posloupnost racionálních čísel $\{x_n\}$ s $\lim x_n = x$.

1.5.17 Lemma

Buď $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Je-li $\{x_n\}$ libovolná posloupnost racionálních čísel taková, že $\lim x_n = x$, pak existuje $\lim a^{x_n} = \alpha \in \mathbb{R}$. Při tom je $\alpha > 0$ a α nezávisí na volbě posloupnosti $\{x_n\}$.

D: • Necht' $a > 1$. Buď $\{x_n\}$ neklesající posloupnost racionálních čísel s limitou x .

Z $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \dots$ plyne $a^{x_1} \leq a^{x_2} \leq a^{x_3} \dots$ a tedy $\{a^{x_n}\}$ je neklesající.

Buď $t \in \mathbb{Q}$, $t \geq x$. Pak $t \geq x_n$ pro každé n a tedy $a^t \geq a^{x_n}$ pro každé n , což znamená, že $\{a^{x_n}\}$ je shora ohraničená a tedy podle 1.3.4 existuje $\lim a^{x_n} = \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq a^{x_n} > 0$.

Buď $\{y_n\}$ libovolná posloupnost racionálních čísel s limitou x .

Položíme $z_n = y_n - x_n$. Pak $y_n = z_n + x_n$ a podle 1.3.6 je $\lim z_n = \lim y_n - \lim x_n = x - x = 0$,

$a^{y_n} = a^{z_n + x_n} = a^{z_n} a^{x_n}$. Ukážeme, že $\lim a^{z_n} = 1$:

Podle 1.3.8 je $\lim \sqrt[n]{a} = \lim a^{\frac{1}{n}} = 1$. Tedy $\lim a^{-\frac{1}{n}} = \lim \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = 1$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak existuje

$n_1 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_1$ je $1 - \varepsilon < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$, a existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_2$ je $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$.

Tedy pro $m = \max\{n_1, n_2\}$ platí $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{m}} < 1 < a^{\frac{1}{m}} < 1 + \varepsilon$.

Poněvadž $\lim z_n = 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $-\frac{1}{m} < z_n < \frac{1}{m}$ a tedy

$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{m}} < a^{z_n} < a^{\frac{1}{m}} < 1 + \varepsilon$, což znamená, že $\lim a^{z_n} = 1$.

• Necht' $a = 1$. Tvrzení je triviální, neboť $1^{x_n} = 1$ pro každé $x_n \in \mathbb{Q}$.

• Necht' $0 < a < 1$. Pak $b = \frac{1}{a} > 1$. Je-li $\{x_n\}$ libovolná posloupnost racionálních čísel s limitou x , pak podle první části důkazu existuje $\beta = \lim b^{x_n}$, přičemž $\beta > 0$ a β nezávisí na volbě posloupnosti $\{x_n\}$. Podle

1.3.6.5 existuje $\lim a^{x_n} = \lim \frac{1}{b^{x_n}} = \frac{1}{\beta}$. $\square$

1.5.18 Definice

Buď $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Exponenciální funkce $f(x) = a^x$ je definována pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisem $a^x = \lim a^{x_n}$, kde $\{x_n\}$ je libovolná posloupnost racionálních čísel s limitou x .

1.5.19 Věta

Necht' $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Exponenciální funkce $f(x) = a^x$ má vlastnosti:

1. $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, $\text{Im } f \subseteq (0, \infty)$.

2. Pro každá dvě $x, y \in \mathbb{R}$ platí: $a^x a^y = a^{x+y}$,

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

3. Pro $a > 1$ je rostoucí, pro $0 < a < 1$ je klesající.

D: 1. Plyne přímo z definice a z 1.5.17.

2. Tvzení platí pro $x, y \in \mathbb{Q}$. Necht $x, y \in \mathbb{R}$ a $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ takové, že $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$.
 $a^x a^y = \lim a^{x_n} \lim a^{y_n} = \lim a^{x_n} a^{y_n} = \lim a^{x_n + y_n} = a^{x+y}$, neboť $\lim(x_n + y_n) = x + y$.

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \text{ analogicky.}$$

$$y = n \in \mathbb{N}: (a^x)^y = (a^x)^n = \underbrace{a^x \cdot a^x \cdot \dots \cdot a^x}_{n \text{ krát}} = a^{x+x+\dots+x} = a^{nx}$$

$$y = -n \in \mathbb{Z}: (a^x)^y = (a^x)^{-n} = \frac{1}{(a^x)^n} = \frac{1}{a^{nx}} = a^{-nx} = a^{xy}$$

$$y = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}: (a^x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^x)^m} = \sqrt[n]{a^{xm}} \\ \text{současne } (a^{xy})^n = (a^{\frac{m}{n}})^n = a^{xm} \Rightarrow \sqrt[n]{a^{xm}} = a^{xy}, \\ \text{takze } a^{xy} = (a^x)^{\frac{m}{n}} = (a^x)^y.$$

$$y \in \mathbb{I}: \text{ zvolme } \{y_n\} \subseteq \mathbb{Q}, y_n \rightarrow y. \text{ Pak } (a^x)^y = \lim (a^x)^{y_n} = \lim a^{xy_n} = a^{xy}$$

podle 1.5.20 (tuto poznámku totiž můžeme považovat v této chvíli již za dokázanou, neboť v jejím důkazu je využit pouze první vztah z části 2., který je již dokázán), neboť $\lim xy_n = x \lim y_n = xy$.

3. Necht $a > 1$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Zvolme $u, v \in \mathbb{Q}$, $x \leq u < v \leq y$. Platí $a^u < a^v$.

Bud $\{x_n\}$ neklesající posloupnost racionálních čísel s limitou x a bud $\{y_n\}$ nerostoucí posloupnost racionálních čísel s limitou y . Pak

$$x_n \leq x \leq u, \text{ což znamená, že } a^{x_n} \leq a^u \text{ a tedy } \lim a^{x_n} = a^x \leq u.$$

$$v \leq y \leq y_n, \text{ což znamená, že } a^{y_n} \geq a^v \text{ a tedy } \lim a^{y_n} = a^y \geq v.$$

Z nerovnosti $a^u < a^v$ plyne $a^x < a^y$.

Případ $0 < a < 1$ analogicky. $\square$

Později (1.7.17) bude dokázáno, že $\text{Im } f = (0, \infty)$.

1.5.20 Poznámky

1. Je-li $x = \frac{m}{p} \in \mathbb{Q}$, definice 1.5.18 souhlasí s definicí $a^{\frac{m}{p}}$. (Stačí volit $x_n = \frac{m}{p}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.)

2. Je-li $\{x_n\}$ libovolná posloupnost reálných čísel s $\lim x_n = x$, pak $\lim a^{x_n} = a^x$.

D.: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolíme $y_n \in \mathbb{Q}$ tak, aby $x_n - \frac{1}{n} < y_n \leq x_n$ (to lze podle 1.1.17).

Podle 1.3.7 je $\lim y_n = x$. Tedy $\lim a^{y_n} = a^x$ a dále

$$\lim a^{x_n} = \lim a^{y_n + x_n - y_n} = \lim a^{y_n} \lim a^{x_n - y_n} = a^x \lim a^{x_n - y_n}$$

a analogicky jako v důkazu 1.5.17 ukážeme, že $\lim a^{x_n - y_n} = 1$. $\square$

Z exponenciálních funkcí má největší význam funkce $f(x) = e^x$, kde $e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Někdy se označuje $e^x = \exp x$. Tuto funkci nazýváme *přirozená exponenciální funkce*.

1.5.21 Definice

Bud $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Inversní funkce k funkci $f(x) = a^x$ se nazývá *logaritmická funkce*. Značíme ji $\log_a x$.

1.5.22 Věta

Buď $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Funkce $f(x) = \log_a x$ má vlastnosti:

1. $\text{Dom } f = (0, \infty)$, $\text{Im } f = (-\infty, \infty)$.
2. Pro každá dvě $x, y \in (0, \infty)$ platí: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$,
 $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$,
pro $x \in (0, \infty)$ a $y \in \mathbb{R}$ platí: $\log_a x^y = y \log_a x$.
3. Je rostoucí pro $a > 1$ a klesající pro $0 < a < 1$.

D: 1., 3. Plyne z 1.5.19 a obecných vlastností inverzních funkcí.

2. Označme $\log_a x = u$, $\log_a y = v$. Pak $a^u = x$, $a^v = y$ a
 $xy = a^u a^v = a^{u+v}$, tedy $\log_a(xy) = u + v = \log_a x + \log_a y$,
 $\frac{x}{y} = \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$, tedy $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = u - v = \log_a x - \log_a y$,
 $x^y = (a^u)^y = a^{uy}$, tedy $\log_a x^y = uy = y \log_a x$. $\square$

1.5.23 Poznámka

Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1 \neq b$. Pro každé $x \in (0, \infty)$ platí $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

D.: $y = \log_b x$. Pak $b^y = x$ a tedy $y \log_a b = \log_a b^y = \log_a x$. Odtud $y = \frac{\log_a x}{\log_a b}$. $\square$

Podobně jako u exponenciální funkce má největší význam logaritmická funkce $\log_e x$. Značí se $\ln x$ a nazývá *přirozená* nebo *přirozený logaritmus*.

Libovolný logaritmus lze převést na přirozený: $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Také obecnou exponenciální funkci lze převést na přirozenou, neboť pro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ platí

$$e^{x \ln a} = (e^{\ln a})^x = a^x.$$

D. Mocninná funkce

1.5.24 Definice

Buď $a \in \mathbb{R}$. Funkce $f(x) = x^a$ definovaná vztahem $x^a = e^{a \ln x}$ se nazývá *obecná mocninná funkce*.

1.5.25 Věta

Buď $a \in \mathbb{R}$. Mocninná funkce $f(x) = x^a$ má vlastnosti:

1. $\text{Dom } f = (0, \infty)$, $\text{Im } f = (0, \infty)$.
2. Pro každá dvě $x, y \in (0, \infty)$ platí: $(xy)^a = x^a y^a$, $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$.
3. Je rostoucí pro $a > 0$ a klesající pro $a < 0$.

D: 1. Plyne z 1.5.19.1 a z 1.5.22.1.

$$2. (xy)^a = e^{a \ln xy} = e^{a(\ln x + \ln y)} = e^{a \ln x} e^{a \ln y} = x^a y^a.$$

Druhý vztah analogicky.

$$3. \text{ Buď } a > 0, 0 < x < y. \text{ Pak podle 1.5.22.3 je } \ln x < \ln y \text{ a tedy } a \ln x < a \ln y. \text{ Podle 1.5.19.3 je také } e^{a \ln x} < e^{a \ln y}, \text{ tj. } x^a < y^a.$$

Pro $a < 0$ analogicky. $\square$

1.5.26 Poznámka

Mocninná funkce $f(x) = x^a$ má v některých speciálních případech definiční obor širší než $(0, \infty)$. Zejména:

Je-li $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pak $\text{Dom } f = (-\infty, \infty)$.

Je-li $a \in \mathbb{Z}$, $a < 0$, pak $\text{Dom } f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Je-li $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, m, n nesoudělná a n liché, pak pro

$$a \geq 0 \text{ je } \text{Dom } f = (-\infty, \infty),$$

$$a < 0 \text{ je } \text{Dom } f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

E. Funkce goniometrické a cyklometrické

Na jednotkovou kružnici se středem v počátku nanese od bodu $A = (1, 0)$ oblouk délky $|x|$ v kladném smyslu pro $x \geq 0$ a v záporném smyslu pro $x < 0$. Obdržíme bod B , jehož první souřadnici označíme $\cos x$ a druhou $\sin x$. Dále klademe $\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Tento popis není definicí, neboť se používá vágní pojem „délka oblouku“, který nebyl přesně zaveden. *Goniometrické funkce* $\sin$, $\cos$, tg , cotg tedy nejsou zatím přesně definovány. Poněvadž jsou ale velice užitečné, budeme je používat již před jejich přesným definováním.

Vlastnosti goniometrických funkcí:

$$1. \text{ Dom } \sin = \text{Dom } \cos = \mathbb{R},$$

$$\text{Im } \sin = \text{Im } \cos = [-1, 1],$$

$$\text{Dom } \text{tg} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \text{ Dom } \text{cotg} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\text{Im } \text{tg} = \text{Im } \text{cotg} = \mathbb{R}.$$

$$2. \sin, \cos \text{ jsou periodické se základní periodou } 2\pi,$$

$$\text{tg}, \text{cotg} \text{ jsou periodické se základní periodou } \pi.$$

$$3. \sin \text{ je rostoucí na } [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi], \text{ klesající na } [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos \text{ je rostoucí na } [(2k-1)\pi, 2k\pi], \text{ klesající na } [2k\pi, (2k+1)\pi], k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{tg} \text{ je rostoucí na } (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{cotg} \text{ je klesající na } (k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$4. \sin, \cos, \text{tg}, \text{cotg} \text{ jsou liché, } \cos \text{ je sudá funkce}$$

$$5. \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \text{tg } x \text{cotg } x = 1, \sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - x), \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \\ \text{pro všechna přípustná } x.$$

$$6. \text{ Součtové vzorce: } \sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x,$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$$\text{tg}(x+y) = \frac{\text{tg } x + \text{tg } y}{1 - \text{tg } x \text{tg } y},$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$|\sin \frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}},$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)),$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)),$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x,$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

$$|\cos \frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}},$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)).$$

7. Jsou-li $A, B \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$ pak $A \sin x + B \cos x = P \sin(x + q)$, kde $P = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\operatorname{tg} q = \frac{B}{A}$.

D.:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} q &= \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{B}{A} = \frac{\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}}{\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}}, \\ -1 &< \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} < 1 \quad , \quad -1 < \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} < 1, \\ \cos q &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad , \quad \sin q = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \\ A \sin x + B \cos x &= \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x \right) = \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} (\cos q \sin x + \sin q \cos x) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x + q). \end{aligned}$$

□

Funkce cyklometrické jsou funkce inverzní k funkcím goniometrickým.

Ve všech případech je nutno zúžit definiční obor příslušné goniometrické funkce tak, aby funkce byla ryze monotonní (tedy prostá). Je přirozené tento interval vzít „co nejblíže počátku“.

$$\begin{array}{ll} \sin & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \cos & [0, \pi] \\ \operatorname{tg} & (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \operatorname{cotg} & (0, \pi) \end{array} \quad \text{Pro } \begin{array}{l} \sin \\ \cos \\ \operatorname{tg} \\ \operatorname{cotg} \end{array} \text{ vezmeme interval } \quad .$$

Funkce cyklometrické se nazývají *arcus* a značí se $\arcsin$, $\arccos$, arctg , $\operatorname{arccotg}$.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

1. $\operatorname{Dom} \arcsin = \operatorname{Dom} \arccos = [-1, 1]$, $\operatorname{Im} \arcsin = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\operatorname{Im} \arccos = [0, \pi]$
 $\operatorname{Dom} \operatorname{arctg} = \operatorname{Dom} \operatorname{arccotg} = \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} \operatorname{arctg} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\operatorname{Im} \operatorname{arccotg} = (0, \pi)$.
2. Pro každé $x \in [-1, 1]$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

$$\textbf{D.:} \quad y = \arcsin x, x = \sin y = \cos(\frac{\pi}{2} - y) \Rightarrow \arccos x = \frac{\pi}{2} - y; y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \frac{\pi}{2} - y \in [0, \pi]. \quad \square$$

3. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.

$$\textbf{D.:} \quad x \in \mathbb{R}, y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow x = \operatorname{tg} y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - y)}{\sin(\frac{\pi}{2} - y)} = \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - y) \Rightarrow \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - y. \quad \square$$

F. Dodatek

• Polární souřadnice r , φ .

Transformace kartézských souřadnic na polární:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi \text{ je řešením soustavy rovnic } \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\text{tj. } \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2k\pi, & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} + k\pi, & x = 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + (2k + 1)\pi, & x < 0 \end{cases}$$

Transformace polárních souřadnic na kartézské: $x = r \cos \varphi$
 $y = r \sin \varphi$

• **Parametrické vyjádření**

Buďte φ, ψ funkce, $J \subseteq \text{Dom } \varphi \cap \text{Dom } \psi$ interval.

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \quad t \in J \end{aligned}$$

je tzv. parametrické vyjádření nějaké podmnožiny $\mathbb{R}^2$.

1.6 Limita funkce

1.6.1 Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $a \in \mathbb{R}^*$ a píšeme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(a)$ čísla a existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ čísla x_0 takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) \in \mathcal{O}(a)$.

Definice dostane konkrétní tvar podle toho, zda $x_0 \in \mathbb{R}$ nebo $x_0 = \pm\infty$ a $a \in \mathbb{R}$ nebo $a = \pm\infty$:

1. Vlastní limita ve vlastním bodě

$$\bullet \quad x_0 \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} : \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$$

2. Nevlastní limita ve vlastním bodě

$$\begin{aligned} \bullet \quad x_0 \in \mathbb{R}, a = \infty : \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty &\Leftrightarrow (\forall h \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > h) \\ \bullet \quad x_0 \in \mathbb{R}, a = -\infty : \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty &\Leftrightarrow (\forall h \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < h) \end{aligned}$$

3. Vlastní limita v nevlastním bodě

$$\begin{aligned} \bullet \quad x_0 = \infty, a \in \mathbb{R} : \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x)(x > h \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon) \\ \bullet \quad x_0 = -\infty, a \in \mathbb{R} : \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x)(x < h \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon) \end{aligned}$$

4. Nevlastní limita v nevlastním bodě

$$\begin{aligned} \bullet \quad x_0 = \infty, a = \infty : \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty &\Leftrightarrow (\forall h \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x)(x > k \Rightarrow f(x) > h) \\ \bullet \quad x_0 = -\infty, a = \infty : \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty &\Leftrightarrow (\forall h \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x)(x < k \Rightarrow f(x) > h) \\ \bullet \quad x_0 = \infty, a = -\infty : \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty &\Leftrightarrow (\forall h \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x)(x > k \Rightarrow f(x) < h) \\ \bullet \quad x_0 = -\infty, a = -\infty : \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty &\Leftrightarrow (\forall h \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x)(x < k \Rightarrow f(x) < h) \end{aligned}$$

1.6.2 Poznámky

1. V definici 1.6.1 se nevyskytuje žádný požadavek na $f(x_0)$. Existence a hodnota $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ nezávisí na tom, zda $x_0 \in \text{Dom } f$, a pokud ano, tak nezávisí na hodnotě $f(x_0)$. Existuje-li však $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, musí být funkce f definována v nějakém ryším okolí bodu x_0 .
2. Buďte f, g funkce, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a necht existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$. Jestliže existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) = g(x)$, pak existuje také $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ a platí $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$.
3. Logickou negací definice 1.6.1 obdržíme výrok „neplatí $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ “: Existuje okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a takové, že v každém okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 existuje číslo x takové, že $f(x) \notin \mathcal{O}(a)$. Jestliže neplatí $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, pak buď $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \neq a$ nebo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ neexistuje.
4. Existence a hodnota limity funkce f v bodě x_0 je lokální vlastností této funkce.

1.6.3 Příklady

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$.

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Položme $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Je-li $0 < |x - 0| = |x| < \delta = \sqrt{\varepsilon}$, pak $|x^2 - 0| = |x^2| = |x|^2 < \varepsilon$. $\square$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ pro $g = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

D.: Stejně jako v 1. $\square$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \chi(x)$ neexistuje.

D.: Pripusťme, že $\lim_{x \rightarrow 0} \chi(x) = a \in \mathbb{R}$.

Nechť $a \neq 0$. Položme $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0$. Buď $\delta > 0$ libovolné a $x \in (-\delta, \delta) \cap \mathbb{I}$. Pak

$$\chi(x) = 0 \notin \left(a - \frac{|a|}{2}, a + \frac{|a|}{2}\right).$$

Je tedy $a = 0$. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$. Buď $\delta > 0$ libovolné a $x \in (-\delta, \delta) \cap \mathbb{Q}$. Pak $\chi(x) = 1 \notin (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Nemůže tedy být $\lim_{x \rightarrow 0} \chi(x) = a \in \mathbb{R}$.

Pripusťme, že $\lim_{x \rightarrow 0} \chi(x) = \infty$. Avšak pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ je $\chi(x) \in \{0, 1\}$, tedy pro $h > 1$ nemůže být $\chi(x) > h$ pro žádné $x \in \mathbb{R}$.

Z podobných důvodů nemůže být $\lim_{x \rightarrow 0} \chi(x) = -\infty$. $\square$

1.6.4 Věta (Heineova podmínka [1821 – 1881])

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $a \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \text{Dom } f$ takovou, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ a $x_n \neq x_0$ pro $n \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$.

D.:

„ $\Rightarrow$ “ Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$ a nechť $\{x_n\}$ je posloupnost splňující předpoklady.

Buď $\mathcal{O}(a)$ libovolné. Pak existuje ryzí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ takové, že pro $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) \in \mathcal{O}(a)$. Poněvadž $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \neq x_0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ jest $x_n \in \mathcal{O}(x_0)$ a tedy $f(x_n) \in \mathcal{O}(a)$, což znamená, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$.

„ $\Leftarrow$ “ Nechť platí tvrzení věty.

Zvolme libovolnou $\{x_n\}$, $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \neq x_0$. Pak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a \in \mathbb{R}^*$. Ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

Pripusťme, že existuje $\mathcal{O}(a)$ takové, že v každém ryzím okolí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 existuje x takové, že $f(x) \notin \mathcal{O}(a)$.

$$x_0 \in \mathbb{R} \quad \mathcal{O}_n(x_0) = (x_0 - \frac{1}{n}, x_0) \cup (x_0, x_0 + \frac{1}{n})$$

$$\text{Je-li } x_0 = \infty \quad \text{položíme } \mathcal{O}_n(x_0) = (n, \infty)$$

$$x_0 = -\infty \quad \mathcal{O}_n(x_0) = (-\infty, -n)$$

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ existuje $y_n \in \mathcal{O}_n(x_0)$ takové, že $f(y_n) \notin \mathcal{O}(a)$. Z konstrukce $\mathcal{O}_n(x_0)$ plyne, že $y_n \rightarrow x_0$, $y_n \neq x_0$ a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = a$. To ovšem není možné, neboť $f(y_n) \notin \mathcal{O}(a)$.

$\square$

1.6.5 Poznámka

Nechť $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$ a nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = f(n)$. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

D.: Buď $\mathcal{O}(a)$ libovolné. Pak existuje $k \in \mathbb{R}$ takové, že pro $x > k$ je $f(x) \in \mathcal{O}(a)$.

Volme $n_0 = [k] + 1$. Pak pro $n \geq n_0$ je $a_n = f(n) \in \mathcal{O}(a)$ a tedy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$. $\square$

Heineova podmínka umožňuje převádět vlastnosti limity a nevlastní limity posloupnosti na vlastnosti limity funkce:

1.6.6 Věta (Cauchyovo – Bolzanovo kritérium pro existenci vlastní limity)

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $a \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 takové, že pro každé dva body $x_1, x_2 \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

D.: 1.3.22 a 1.6.4 $\square$

1.6.7 Věta (vlastnosti limity)

1. Každá funkce má v libovolném bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.
(viz 1.3.3)
2. Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ vlastní limitu, pak existuje ryzí okolí bodu x_0 , v němž je funkce f ohraničená.
(viz 1.3.4)
Jestliže $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a > 0$ (resp. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a < 0$), pak existuje ryzí okolí $\mathcal{O}'(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}'(x_0)$ je $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$).

D.: Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a > 0$ a buď $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$. Existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ je $f(x) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, zejména tedy $f(x) > a - \varepsilon = \frac{a}{2} > 0$. Platnost druhého tvrzení ukážeme analogicky. $\square$

3. Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0 , v němž je funkce g ohraničená. Pak je $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$.
(viz 1.3.5.3)

4. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}$. Pak

- existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|$ a platí $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |a|$,
- existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ a platí $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$,
- existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x))$ a platí $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = a - b$,
- existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ a platí $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = ab$,
- pokud $b \neq 0$ existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

(viz 1.3.6)

5. Nechť f, g, h jsou funkce, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Jestliže $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a \in \mathbb{R}^*$, pak $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$.
(viz 1.3.7)

6. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0 , v němž je $f(x) \neq 0$ (resp. $f(x) > 0$, resp. $f(x) < 0$). Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{|f(x)|} = \infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$, resp. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$).
(viz 1.3.12.1)

7. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty$. Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
(viz 1.3.12.4)

8. Necht $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$) a necht existuje ryzí okolí bodu x_0 , v němž je funkce g zdola (resp. shora) ohraničená. Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = -\infty$).
(viz 1.3.12.2)
9. Necht $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ a necht existuje ryzí okolí bodu x_0 , v němž je $g(x) \geq \delta > 0$ (resp. $g(x) \leq \delta < 0$). Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = -\infty$).
Necht $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ a necht existuje ryzí okolí bodu x_0 , v němž je $g(x) \geq \delta > 0$ (resp. $g(x) \leq \delta < 0$). Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = -\infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \infty$).
(viz 1.3.12.3)
10. Funkce *signum* (znaménko) je pro každé $x \in \mathbb{R}$ definována předpisem $\text{sgn } x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \\ -1, & x < 0 \end{cases}$
Necht $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ a necht existuje ryzí okolí bodu x_0 , v němž je $g(x) \neq 0$ a $\text{sgn } f(x) = \text{sgn } g(x)$ (resp. $\text{sgn } f(x) = -\text{sgn } g(x)$). Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$).
(viz 1.3.12.1 a předchozí tvrzení)
11. Necht $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ a necht existuje ryzí okolí bodu x_0 , v němž je $f(x) < g(x)$. Pak $a \leq b$.
(viz 1.3.5.1)

1.6.8 Věta (o limitě složené funkce)

Necht $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \alpha \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{y \rightarrow \alpha} f(y) = a \in \mathbb{R}^*$. Necht existuje ryzí okolí $\mathcal{O}_1(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 , v němž platí $\varphi(x) \neq \alpha$. Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = a$. (Tj. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{y \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} f(y) = a$.)

D.: Buď $\mathcal{O}(a)$ libovolné okolí bodu a . K němu existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(\alpha) \setminus \{\alpha\}$ takové, že pro $y \in \mathcal{O}(\alpha) \setminus \{\alpha\}$ je $f(y) \in \mathcal{O}(a)$.

K $\mathcal{O}(\alpha)$ existuje ryzí okolí $\mathcal{O}_2(x_0) \setminus \{x_0\}$ takové, že pro $x \in \mathcal{O}_2(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $\varphi(x) \in \mathcal{O}(\alpha)$.

Položme $\mathcal{O}(x_0) = (\mathcal{O}_1(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap (\mathcal{O}_2(x_0) \setminus \{x_0\})$. Pak pro $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $\varphi(x) \in \mathcal{O}(\alpha)$ a $\varphi(x) \neq \alpha$, tj. $\varphi(x) \in \mathcal{O}(\alpha) \setminus \{\alpha\}$. Tedy $f(\varphi(x)) \in \mathcal{O}(a)$, neboli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = a$. $\square$

1.6.9 Příklady

1. Necht $f(x) = c \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $x_0 \in \mathbb{R}^*$ jest $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$.

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné, $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ libovolné ryzí okolí x_0 . Pro $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. $\square$

2. Necht $f(x) = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$ jest $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ a dále $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$.

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné a $\delta = \varepsilon$. Pak pro $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ je $|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$.
Buď $h \in \mathbb{R}$ libovolné a $k = h$. Pak pro $x > k$ je $f(x) = x > k = h$ a pro $x < k$ je $f(x) = x < k = h$.
 $\square$

3. Buď $P(x)$ polynom. Pak pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}$ jest $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

D.: S využitím předchozího výsledku a 1.6.7.4 jest

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} x^n &= \lim_{x \rightarrow x_0} x x^{n-1} = \lim_{x \rightarrow x_0} x \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-1} = x_0 \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-1} = x_0 \lim_{x \rightarrow x_0} x \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-2} = \\ &= x_0 x_0 \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-2} = \dots = x_0^{n-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0^n. \end{aligned}$$

Tvrzení nyní plyne z 1.6.7.4. $\square$

4. Buď $R(x)$ racionální lomená funkce a $x_0 \in \text{Dom } R$. Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = R(x_0)$.

D.: plyne z 3. a 1.6.7.4. $\square$

5. $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$.

Pro $x \neq 1$ platí $\frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} = \frac{(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1}$ a tedy podle 1.6.2.4 a předchozího

výsledku je $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{4}{3}$.

6. Buď $a > 0$, $f(x) = a^x$. Pak pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}$ je $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$.

D.: plyne z 1.5.20.2 a 1.6.4. $\square$

7. Buď $a > 0$, $f(x) = x^a$, $x_0 \in \text{Dom } f$. Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} x^a = x_0^a$.

D.: plyne z 1.5.24, předchozího tvrzení a 1.6.8. $\square$

8. Pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}$ je $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$.

Plyne z geometrického názoru. (Funkce $\sin$ a $\cos$ nebyly přesně definovány.)

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

D.: Pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí: $0 < \sin x$. Plocha kruhové výseče OAC je $P_0 = \frac{1}{2}x$, plocha trojúhelníka OAC je $P_1 = \frac{1}{2} \sin x$ a plocha trojúhelníka OAB je $P_2 = \frac{1}{2} \tan x$. Jest $P_1 < P_0 < P_2$, neboli

$$\begin{aligned} \sin x &< x < \tan x \\ 1 &< \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \\ \cos x &< \frac{\sin x}{x} < 1 \end{aligned}$$

Všechny funkce v poslední nerovnosti jsou sudé, to znamená, že tato nerovnost platí i pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Dále podle předchozího $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$. Tvrzení nyní plyne z 1.6.7.5. $\square$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

1.6.10 Poznámka

Předpoklad o existenci ryzího okolí $\mathcal{O}_1(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 nelze v 1.6.8 obecně vynechat.

Např. pro $\varphi(x) = 0$, $f(y) = \begin{cases} 0, & y \neq 0 \\ 1, & y = 0 \end{cases}$ platí

$f(\varphi(x)) = 1$ a tedy podle 1.6.9.1 pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = 1$,

avšak $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$, $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 0$.

1.6.11 Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ *limitu zprava* (resp. *zleva*) rovnou $a \in \mathbb{R}^*$ a píšeme $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = a$ (resp. $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = a$), jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a existuje pravé (resp. levé) ryzí okolí $(x_0, x_0 + \delta)$ (resp. $(x_0 - \delta, x_0)$) takové, že pro každé $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ (resp. $x \in (x_0 - \delta, x_0)$) platí $f(x) \in \mathcal{O}(a)$. Limita zprava a limita zleva se souhrnně nazývají *jednostranné limity*.

- $a \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$
 $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$
- $a = \infty$: $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall h \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x)(0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) > h)$
 $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall h \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x)(0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) > h)$
- $a = -\infty$: $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall h \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x)(0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) < h)$
 $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall h \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x)(0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) < h)$

1.6.12 Věta

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když má v tomto bodě limitu zprava i zleva a platí $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = a$.

D.: plyne přímo z definic limity a jednostranných limit a z faktu $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$. $\square$

1.6.13 Poznámka

I pro jednostranné limity platí analogie Heineovy podmínky **1.6.4**:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = a \Leftrightarrow \text{pro každou } \{x_n\} \text{ takovou, že } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, x_n > x_0 \text{ platí } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = a \Leftrightarrow \text{pro každou } \{x_n\} \text{ takovou, že } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, x_n < x_0 \text{ platí } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a.$$

V důsledku toho i pro jednostranné limity platí **1.6.6**, **1.6.7** a **1.6.8**.

1.6.14 Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Ř.:

- Podle **1.3.10** posloupnost $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$ je rostoucí a její limita je e , takže podle **1.3.9** pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e.$$

- Vyšetříme $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^x - 1}{x}$:

Buďte $x \in (0, \frac{1}{2})$, $n = \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil$, tedy $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$.

Podle **1.3.10** a prvního kroku řešení je

$$\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} < e < \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^n$$

a tedy podle **1.5.19.3** je $e^x \leq e^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n-1}$, $e^x > e^{\frac{1}{n+1}} > 1 + \frac{1}{n+1}$.

Poněvadž $n \leq \frac{1}{x}$, jest $n+1 \leq \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x}$, tedy $\frac{x}{1+x} \leq \frac{1}{n+1}$.

Poněvadž $n+1 > \frac{1}{x}$, jest $n-1 > \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x}$, tedy $\frac{x}{1-2x} > \frac{1}{n-1}$.

Celkem

$$1 + \frac{x}{1+x} < e^x < 1 + \frac{x}{1-2x}$$

$$\frac{x}{1+x} < e^x - 1 < \frac{x}{1-2x}$$

$$\frac{1}{1+x} < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{1}{1-2x}$$

a podle 1.6.7.5 je $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

- Vyšetříme $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{e^x - 1}{x}$:

Buď $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$ Položíme $y = -x$. Pak $y \in (0, \frac{1}{2})$ a s využitím předchozího kroku dostaneme

$$\begin{aligned} 1 + \frac{y}{1+y} &< e^y < 1 + \frac{y}{1-2y} \\ \frac{1+2y}{1+y} &< e^y < \frac{1-y}{1-2y} \\ \frac{1-2y}{1-y} &< e^{-y} < \frac{1+y}{1+2y} \\ \frac{1+2x}{1+x} &< e^x < \frac{1-x}{1-2x} \\ \frac{x}{1+x} &< e^x - 1 < \frac{x}{1-2x} \\ \frac{1}{1+x} &> \frac{e^x - 1}{x} > \frac{1}{1-2x} \end{aligned}$$

a podle 1.6.7.5 je $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Nyní $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ podle 1.6.12. $\square$

1.6.15 Věta

Nechť funkce f je monotonní v nějakém levém (resp. pravém) ryzím okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$).

Podrobněji:

1. Nechť funkce f je neklesající v nějakém levém ryzím okolí $\mathcal{L}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Je-li f shora ohraničená v $\mathcal{L}(x_0)$, je $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in \mathcal{L}(x_0)\}$, není-li f shora ohraničená v $\mathcal{L}(x_0)$, je $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \infty$.
2. Nechť funkce f je nerostoucí v nějakém levém ryzím okolí $\mathcal{L}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Je-li f zdola ohraničená v $\mathcal{L}(x_0)$, je $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \inf\{f(x) : x \in \mathcal{L}(x_0)\}$, není-li f zdola ohraničená v $\mathcal{L}(x_0)$, je $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = -\infty$.
3. Nechť funkce f je neklesající v nějakém pravém ryzím okolí $\mathcal{P}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Je-li f zdola ohraničená v $\mathcal{P}(x_0)$, je $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in \mathcal{P}(x_0)\}$, není-li f zdola ohraničená v $\mathcal{P}(x_0)$, je $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = -\infty$.
4. Nechť funkce f je nerostoucí v nějakém pravém ryzím okolí $\mathcal{P}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Je-li f shora ohraničená v $\mathcal{P}(x_0)$, je $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \sup\{f(x) : x \in \mathcal{P}(x_0)\}$, není-li f shora ohraničená v $\mathcal{P}(x_0)$, je $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \infty$.

D.: Provedeme pouze pro tvrzení 1. Důkazy ostatních lze provést analogicky.

- Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a f je shora ohraničená v $\mathcal{L}(x_0) = (x_0 - \alpha, x_0)$. Množina $\{f(x) : x \in \mathcal{L}(x_0)\}$ je neprázdná a shora ohraničená, tedy podle 1.1.7 (R14) existuje $\sup\{f(x) : x \in \mathcal{L}(x_0)\} = a \in \mathbb{R}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle 1.1.6 (s2*) existuje $x_1 \in \mathcal{L}(x_0)$ takové, že $f(x_1) > a - \varepsilon$. Položíme

$\delta = x_0 - x_1$. Pak je $(x_1, x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \subseteq \mathcal{L}(x_0)$.

Poněvadž f je na $\mathcal{L}(x_0)$ neklesající, pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ platí $f(x) \geq f(x_1) > a - \varepsilon$.

Poněvadž $a = \sup\{f(x) : x \in \mathcal{L}(x_0)\}$, pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ platí $f(x) \leq a$.

Celkem pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $a - \varepsilon < f(x) \leq a$, což znamená $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = a$.

- Nechť $x_0 = \infty$ a f je shora ohraničená v $\mathcal{L}(x_0) = (\alpha, \infty)$. Zopakujeme úvahy z předchozího kroku s tím rozdílem, že nedefinujeme δ . Dojdeme k tomu, že pro $x \in (x_1, \infty)$ je $a - \varepsilon < f(x) \leq a$.
- Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a f není shora ohraničená v $\mathcal{L}(x_0) = (x_0 - \alpha, x_0)$.
Buď $h \in \mathbb{R}$ libovolné. Poněvadž f není shora ohraničená, v $(x_0 - \alpha, x_0)$, existuje $x_1 \in (x_0 - \alpha, x_0)$ takové, že $f(x_1) > h$. Položíme $\delta = x_0 - x_1$.
Poněvadž f je neklesající na $(x_0 - \alpha, x_0)$, pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ platí $f(x) \geq f(x_1) > h$, což znamená $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \infty$.
- Nechť $x_0 = \infty$ a f není shora ohraničená v $\mathcal{L}(x_0) = (\alpha, \infty)$. Zopakujeme úvahy z předchozího kroku s tím rozdílem, že nedefinujeme δ . Pak pro $x \in (x_1, \infty)$ je $f(x) > h$.

□

Poznámka: (Oboustranná) limita nemusí existovat.

1.6.16 Definice

Řekneme, že $a \in \mathbb{R}$ je *limitní bod* funkce f pro $x_0 \in \mathbb{R}^*$, jestliže existuje posloupnost $\{x_n\}$ taková, že $x_n \neq x_0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$.

Označme $\Omega(f, x_0)$ množinu limitních bodů funkce f pro $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

Je-li funkce f ohraničená shora v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $\Omega(f, x_0) \neq \emptyset$, klademe

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup \Omega(f, x_0).$$

Je-li funkce f ohraničená shora v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $\Omega(f, x_0) = \emptyset$, klademe $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Není-li funkce f ohraničená shora v každém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$, klademe $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Je-li funkce f ohraničená zdola v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $\Omega(f, x_0) \neq \emptyset$, klademe $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf \Omega(f, x_0)$.

Je-li funkce f ohraničená zdola v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $\Omega(f, x_0) = \emptyset$, klademe $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Není-li funkce f ohraničená zdola v každém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$, klademe $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

$$\begin{aligned} \text{Snadno ověříme, že } \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\sup\{f(\xi) : 0 < |x_0 - \xi| < |x_0 - x|\}) \\ \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\inf\{f(\xi) : 0 < |x_0 - \xi| < |x_0 - x|\}). \end{aligned}$$

Jestliže $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$, pak a je limitním bodem funkce f pro $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

Zřejmým způsobem lze zavést pravé a levé limitní body a $\limsup_{x \rightarrow x_0+} f(x)$, $\limsup_{x \rightarrow x_0-} f(x)$, $\liminf_{x \rightarrow x_0+} f(x)$, $\liminf_{x \rightarrow x_0-} f(x)$.

Přímo z definice plyne

1.6.17 Věta

$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Rovnost nastane právě tehdy, když existuje vlastní nebo nevlastní $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

1.7 Spojité funkce

1.7.1 Definice

Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$ *zprava* (resp. *zleva*), jestliže $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$).

1.7.2 Poznámky

1. Z definice 1.7.1 bezprostředně plyne:
Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
2. Je-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, pak je v nějakém okolí tohoto bodu ohraničená.
3. Spojitost je definována pouze v bodech z $\mathbb{R}$. Nelze definovat spojitost v nevlastním bodě.
4. Spojitost funkce je lokální vlastností této funkce.

1.7.3 Terminologická poznámka

Není-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a je při tom definovaná na nějakém okolí (případně ryzím okolí) bodu x_0 , mohou nastat možnosti:

- A) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ neexistuje
- A1) $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ existují a jsou reálné různé — *bod nespojivosti 1. druhu*
(Např.: $f(x) = [x]$, $x_0 = 1$)
- A2) Alespoň jedna z jednostranných limit neexistuje — *bod nespojivosti 2. druhu*
(Např.: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$; $\chi(x)$, x_0 libovolné)
- A3) $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ existují, jsou různé a alespoň jedna z nich je nevlastní
(Např.: $f(x) = \operatorname{tg}(x)$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$)
- B) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$, $a \neq f(x_0)$
- B1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ je nevlastní
(Např.: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 0$)
- B2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ a $f(x_0) \neq a$ nebo $x_0 \notin \operatorname{Dom} f$ — *bod odstranitelné nespojivosti*
Nespojivost lze odstranit změnou $f(x_0)$ nebo dodefinováním $f(x_0)$:
- $$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \operatorname{Dom} f \setminus \{x_0\} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), & x = x_0 \end{cases}.$$
- (Např.: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$, $g(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$, $x_0 = 1$)
- Nespojivost odstraníme definováním $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{g}(1) = \frac{1}{2}$

1.7.4 Věta

Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když je v tomto bodě spojitá zprava i zleva.

D.: plyne z 1.6.12. $\square$

1.7.5 Věta

Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ zprava (resp. zleva) právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $x_n \geq x_0$ (resp. $x_n \leq x_0$) a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

D.: plyne z 1.6.4 a 1.6.13. $\square$

1.7.6 Věta

Jsou-li funkce f a g spojité v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, pak jsou také funkce $|f|$, $f + g$, $f - g$, fg spojité v bodě x_0 . Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, je i funkce $\frac{f}{g}$ spojitá v bodě x_0 .

D.: plyne z 1.6.7.4 $\square$

1.7.7 Věta

Nechť funkce φ je spojitá v bodě x_0 a funkce f je spojitá v bodě $\varphi(x_0)$. Pak je také funkce $x \mapsto f(\varphi(x))$ spojitá v bodě x_0 .

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu existuje $\eta > 0$ takové, že pro $y \in (\varphi(x_0) - \eta, \varphi(x_0) + \eta)$ platí

$$|f(y) - f(\varphi(x_0))| < \varepsilon.$$

K $\eta > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \eta$.

Tedy pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je $|f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))| < \varepsilon$, což znamená $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = f(\varphi(x_0))$. $\square$

Tato věta není důsledkem 1.6.8, neboť má jiné předpoklady.

1.7.8 Definice

Řekneme, že funkce f je *spojitá na intervalu* $I \subseteq \text{Dom } f$, jestliže platí

- (i) f je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I .
- (ii) Patří-li levý (resp. pravý) krajní bod intervalu I do tohoto intervalu, pak je v něm funkce f spojitá zprava (resp. zleva).

Zejména: Funkce f je spojitá na otevřeném intervalu (a, b) právě tehdy, když je spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

Funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$ právě tehdy, když je spojitá v každém bodě intervalu (a, b) , v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Spojitosť na intervalu je globální vlastnost.

1.7.9 Věta

Nechť funkce f je spojitá a ryze monotonní na intervalu I_1 a zobrazuje tento interval na interval I_2 . Pak funkce inverzní f^{-1} je spojitá na intervalu I_2 .

D.: Nechť f je rostoucí na I_1 , $y_0 \in I_2$, y_0 není levý koncový bod I_2 . Ukážeme, že f^{-1} je spojitá zleva v bodě $y_0 = f(x_0)$:

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné takové, že $x_0 - \varepsilon \in I_1$. Pak $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0)$. Označme $\delta = f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon) > 0$.

Buď $y \in (y_0 - \delta, y_0)$ libovolný. Poněvadž podle 1.2.17 je f^{-1} rostoucí, je $f^{-1}(y_0 - \delta) < f^{-1}(y)$.

$f^{-1}(y_0 - \delta) = f^{-1}(f(x_0) - f(x_0) + f(x_0 - \varepsilon)) = x_0 - \varepsilon$, tedy $x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y)$, neboli $f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y) < \varepsilon$.

Ostatní možnosti rozebereme analogicky. $\square$

Z této věty, z 1.7.6, 1.7.7 a z 1.6.9 bezprostředně plyne

1.7.10 Důsledek

Elementární funkce jsou spojité na svém definičním oboru.

1.7.11 Věta (1. Weierstrassova [1815 – 1897])

Funkce spojitá na uzavřeném intervalu je na tomto intervalu ohraničená.

D.: Sporem. Pripusťme, že funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$ není ohraničená shora.

Pak ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in [a, b]$ takové, že $f(x_n) > n$. Takto definovaná posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená ($a \leq x_n \leq b$) a tedy podle 1.3.19.1 existuje posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z ní vybraná a taková, že $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$.

Poněvadž $a \leq x_{n_k} \leq b$, podle 1.3.5.1 je $a \leq x_0 \leq b$, neboli $x_0 \in [a, b]$.

Poněvadž f je spojitá (případně jednostranně spojitá), podle 1.7.5 je $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \in \mathbb{R}$.

Současně ale $f(x_{n_k}) > n_k$, $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$, a tedy podle 1.3.5.1 a poznámky za 1.3.11 je $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \infty$.

To je spor.

Analogicky vyloučíme možnost, že by funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$ nebyla ohraničená zdola. $\square$

Poznámka: Oba předpoklady jsou podstatné.

1.7.12 Věta (2. Weierstrassova [1815 – 1897])

Funkce spojitá na uzavřeném intervalu nabývá na tomto intervalu své největší i nejmenší hodnoty.

D.: Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Podle 1.7.11 je na tomto intervalu ohraničená a tedy existuje $m = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Ukážeme, že existuje $x_1 \in [a, b]$, že $f(x_1) = m$.

Připusťme, že $f(x) < m$ pro každé $x \in [a, b]$. Pak $m - f(x) > 0$ a tedy podle 1.7.6 je funkce $x \mapsto \frac{1}{m - f(x)}$

spojitá. Podle 1.7.11 existuje $K \in \mathbb{R}$, že $\frac{1}{m - f(x)} < K$ pro každé $x \in [a, b]$. Bez újmy na obecnosti lze

předpokládat, že $K > 0$. Tedy $f(x) < m - \frac{1}{K}$. Podle 1.1.6 (s2*) existuje $x_0 \in [a, b]$, že $f(x_0) \geq m - \frac{1}{K}$,

neboli $m - f(x_0) \leq \frac{1}{K}$, $K \leq \frac{1}{m - f(x_0)}$, což je spor.

Analogicky ukážeme, že existuje $x_2 \in [a, b]$, že $x_2 = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$. $\square$

1.7.13 Věta (1. Bolzanova [1781 – 1848])

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$ a nechť platí $f(a)f(b) < 0$. Pak existuje $c \in (a, b)$, že $f(c) = 0$.

D.: Položme $d = \frac{b-a}{2}$. Pak $d \in (a, b)$. Pokud $f(d) = 0$, je $c = d$.

Nechť $f(d) \neq 0$. Jestliže $f(a)f(d) < 0$, položme $a_1 = a$, $b_1 = d$; jestliže $f(a)f(d) > 0$, položme $a_1 = d$, $b_1 = b$.

Jest $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$, $f(a)f(b_1) < 0, f(a_1)f(b) < 0$, $a_1 \geq a$, $b_1 \leq b$.

Dále položme $d_1 = \frac{b_1 - a_1}{2}$. Pak $d_1 \in (a_1, b_1) \subseteq (a, b)$. Pokud $f(d_1) = 0$, je $c = d_1$.

Nechť $f(d_1) \neq 0$. Jestliže $f(a_1)f(d_1) < 0$, položme $a_2 = a_1$, $b_2 = d_1$; jestliže $f(a_1)f(d_1) > 0$, položme $a_2 = d_1$, $b_2 = b_1$.

Jest $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$, $f(a)f(b_2) < 0, f(a_2)f(b) < 0$, $a_2 \geq a_1$, $b_2 \leq b_1$.

Analogicky postupujeme dále. Buď po konečném počtu kroků nalezneme d_k takové, že $f(d_k) = 0$, nebo dostaneme dvě posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ takové, že $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, $f(a)f(b_n) < 0$, $f(a_n)f(b) < 0$.

V prvním případě je $c = d_k$. Nechť nastane druhý případ.

$\{a_n\}$ je neklesající, ohraničená shora číslem b a tedy podle 1.3.9 existuje $c_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq b$. $\{b_n\}$ je nerostoucí, ohraničená zdola číslem a a tedy existuje $c_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq a$.

Platí $c_1 - c_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-b}{2^n} = 0$, tedy $c_1 = c_2 = c \in [a, b]$.

Kdyby $f(a)f(c) < 0$ a $f(c)f(b) < 0$, pak by $f(a)f(c)f(c)f(b) > 0$, neboli $f(a)f(b) > 0$, což by byl spor. Pokud $f(a)f(c) \geq 0$, pak podle 1.3.5.1 je $0 \leq f(a) \lim f(b_n) = \lim f(a)f(b_n) \leq 0$, tedy $f(a)f(c) = 0$, což je možné jen tak, že $f(c) = 0$. Pokud $f(c)f(b) \geq 0$, pak $0 \leq (\lim f(a_n))f(b) = \lim f(a_n)f(b) \leq 0$, tedy $f(c)f(b) = 0$, což je možné jen tak, že $f(c) = 0$. $\square$

1.7.14 Důsledek (Speciální případ Brouwerovy [1881 – 1966] věty o pevném bodě)

Buď f spojitá funkce zobrazující uzavřený interval $[a, b]$ do sebe. Pak existuje $c \in [a, b]$ takové, že $f(c) = c$.

D.: Platí $f(a) \geq a$, $f(b) \leq b$. Pokud $f(a) = a$, položíme $c = a$, pokud $f(b) = b$, položíme $c = b$. Nechť $f(a) > a$, $f(b) < b$. Definujme funkci g předpisem $g(x) = x - f(x)$. Funkce g je spojitá na $[a, b]$, $g(a) < 0$, $g(b) > 0$, takže podle 1.7.13 existuje $c \in (a, b)$ takové, že $g(c) = c - f(c) = 0$. $\square$

1.7.15 Věta (2. Bolzanova [1781 – 1848])

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Pak na tomto intervalu nabývá všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.

D.: Buďte $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $p \in \mathbb{R}$ takové, že $m < p < M$. Podle 1.7.12 existují $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [a, b]$ takové, že $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$. $f(x_1) - p > 0$, $f(x_2) - p < 0$, tedy $(f(x_1) - p)(f(x_2) - p) < 0$. Podle 1.7.13 existuje v uzavřeném intervalu s krajními body x_1 a x_2 číslo c takové, že $0 = (f - p)(c) = f(c) - p$, tedy $f(c) = p$. $\square$

1.7.16 Důsledek

Spojitým obrazem uzavřeného intervalu je buď jednoprvková množina nebo uzavřený interval.

1.7.17 Poznámka

Nyní můžeme dokázat tvrzení uvedené za 1.5.19: Je-li $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) = a^x$, pak $\text{Im } f = (0, \infty)$.

D.: Nechť $a > 1$. Vzhledem k 1.5.19.1 stačí ukázat, že $(0, \infty) \subseteq \text{Im } f$. Buď tedy $y_0 \in (0, \infty)$ libovolné. Poněvadž $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{-n} = 0$, existují $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, že $a^{-n_1} < y_0 < a^{n_2}$. Funkce $f(x) = a^x$ je podle 1.7.10 spojitá na $(-\infty, \infty)$, je tedy spojitá na uzavřeném intervalu $[-n_1, n_2]$. Podle 1.5.19.3 je

$$f(-n_1) = a^{-n_1} < y_0 < a^{n_2} = f(n_2)$$

a tedy podle 1.7.15 existuje $x_0 \in [-n_1, n_2]$ takové, že $f(x_0) = y_0$. To znamená, že $y_0 \in \text{Im } f$. Platnost tvrzení dokážeme analogicky i v případě $0 < a < 1$. $\square$

1.7.18 Definice

Řekneme, že funkce f je *stejněměrně spojitá na intervalu* $I \subseteq \text{Dom } f$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každá dvě $x_1, x_2 \in I$ taková, že $|x_1 - x_2| < \delta$ platí $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

1.7.19 Poznámky

1. Stejněměrně spojitá funkce na intervalu je na tomto intervalu spojitá. Spojitá funkce na intervalu nemusí být na tomto intervalu spojitá stejněměrně.
2. Stejněměrná spojitost je globální vlastnost.

3. Nechť funkce f je stejnoměrně spojitá na otevřeném intervalu (a, b) .
Podle 1.6.6 existují $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) \in \mathbb{R}$. Funkce $\tilde{f}$ zadaná předpisem

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a+} f(x), & x = a \\ f(x), & x \in (a, b) \\ \lim_{x \rightarrow b-} f(x), & x = b \end{cases}$$

je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$.

(Funkci stejnoměrně spojitou na otevřeném intervalu lze spojitě prodloužit na krajní body tohoto intervalu.)

4. Funkce stejnoměrně spojitá na libovolném intervalu je na tomto intervalu ohraničená.

D.: Plyne z předchozího tvrzení a 1.7.12. $\square$

1.7.20 Věta (Heine [1821 – 1881] - Cantor [1845 – 1918])

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Pak je na tomto intervalu spojitá stejnoměrně.

D.: Sporem: Pripustíme, že f je spojitá na $[a, b]$ nikoliv stejnoměrně. Existuje tedy $\varepsilon_0 > 0$ takové, že ke každému $\delta > 0$ existuje dvojice bodů $x, y \in [a, b]$, že $|x - y| < \delta$ a zároveň $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$.

Zejména tedy pro $\delta = \frac{1}{n}$ existují $x_n, y_n \in [a, b]$, že $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ a $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$.

Posloupnost $\{x_n\}$ je ohraničená a tedy podle 1.3.19.2 existuje posloupnost $\{x_{n_k}\}$ vybraná z $\{x_n\}$ taková, že $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \in [a, b]$.

Dále podle 1.3.5.1 $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} = 0$, tedy $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_{n_k} - y_{n_k}| = 0$, což znamená $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = x_0$.

Poněvadž f je spojitá v x_0 , je $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k})$. To je spor s $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0$. $\square$

1.8 Cvičení

Určete definiční obor funkcí

1) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4}}$, 2) $f(x) = \log \sin 2x$.

Rozhodněte, zda funkce je sudá nebo lichá

3) $f(x) = -\sqrt[3]{x}$, 4) $f(x) = \sqrt{x}$.

Najděte nejmenší periodu funkcí

5) $f(x) = \sin \frac{1}{3}x$, 6) $f(x) = \operatorname{tg} ax$.

Najděte intervaly, na nichž jsou ryze monotonní funkce

7) $f(x) = x + |x|$, 8) $f(x) = 2^{1/x}$.

Najděte inverzní funkci k funkci

9) $f(x) = 2^{3x-1}$, 10) $f(x) = x + [x]$.

Rozhodněte, zda je posloupnost $\{a_n\}$ ohraničená

11) $a_n = 1 - \cos^n \frac{\pi}{n}$, 12) $a_n = \frac{n^n}{n!}$.

Rozhodněte, zda je posloupnost $\{a_n\}$ monotonní

13) $a_n = \frac{n^2 + 1}{n + 1}$, 14) $a_n = \log n - n$.

Vypočítejte limitu posloupnosti $\{a_n\}$

15) $a_n = \frac{2n^2 - n + 3}{3n^2 + n - 5}$

16) $a_n = \frac{3^{n+1} + (-5)^{n-1}}{3^n + (-5)^n}$,

17) $a_n = \sqrt{n^2 + 3n + 2} - \sqrt{n^2 - n + 1}$,

18) $a_n = \frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{n^3}$,

19) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$,

20) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

21) Zjistěte, zda posloupnost $\{\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\}$ je konvergentní.

22) Najděte limes superior a inferior posloupnosti $\left\{(-1)^n \left(\sqrt[n]{2} + \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right) + \sqrt[n]{2}\right\}$.

Polynomy rozložte v reálném oboru

23) $x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1$, 24) $x^6 + 1$.

Racionální funkce rozložte na parciální zlomky

25) $\frac{x^4 + 6x^2 + x - 2}{x^4 - 2x^3}$, 26) $\frac{x - 1}{x^4 + 3x^2 + 2}$.

27) jaký je vztah mezi grafy funkcí $f(x) = a^x$ a $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, $a > 0$?

Určete definiční obor funkce f , zjednodušte její vyjádření a znázorněte ji graficky

28) $f(x) = \log_x a$, 29) $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

Vypočítejte

30) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$,

31) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$,

32) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$,

33) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$,

34) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$,

35) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}$,

36) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 4x + 1})$,

37) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} + x)$,

38) $\lim_{x \rightarrow 1+} \left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{\cotg \pi x}$,

39) $\lim_{x \rightarrow \pi+} (\sin^2 x)^{\tg x/2}$.

40) Vysvětlete význam podmínky $(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$.

Najděte body nespojitosti následujících funkcí a určete jejich typ

41) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$, 42) $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$.

Výsledky: 1) $(-\infty, 1) \cup [2, 3] \cup (4, \infty)$ 2) $\{x \in \mathbb{R} : k\pi < x < (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ 3) sudá 4) ani sudá, ani lichá 5) 6π 6) $\frac{\pi}{a}$ 7) na $[0, \infty)$ rostoucí 8) na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ klesající 9) $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}(1 + \log_2 y)$ 10) $f^{-1}(y) = y - k$ pro $y \in [2k, 2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$ 11) ano, $0 \leq a_n \leq 2$ 12) ohraničená zdola $a_n > 0$ 13) rostoucí 14) klesající 15) $\frac{2}{3}$ 16) $-\frac{1}{5}$ 17) 2 18) $\frac{4}{3}$ 19) 0 20) ∞ 21) ano; je rostoucí a shora ohraničená 22) $2 + e$, $-e$ 23) $(x^2 + 1)\left((x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right)$ 24) $(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 + 1)$ 25) $1 + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x} + \frac{5}{x-2}$ 26) $\frac{x-1}{x^2+1} - \frac{x-1}{x^2+2}$ 27) souměrné kolem osy y 28) $\text{Dom } f = (0, 1) \cup (1, \infty)$, $f(x) = \frac{\ln a}{\ln x}$ 29) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, f je 2π periodické rozšíření funkce $g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \pi - x, & x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$ 30) $\frac{2}{3}$ 31) $\frac{m}{n}$ 32) $\frac{2}{3}$ 33) $\frac{2}{3}$ 34) $\frac{a}{b}$ 35) $\frac{3}{4}$ 36) $\frac{5}{2}$ 37) $-\infty$ 38) 0 39) ∞ 40) f je ohraničená v $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ 41) $x = 1$ odstranitelná, $x = -1$ typu A3 42) $x = 0$ druhého druhu

Kapitola 2

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

2.1 Derivace

2.1.1 Definice

Nechť f je funkce a $x_0 \in \mathbb{R}$. Existuje-li vlastní limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, nazýváme ji *derivace funkce f v bodě x_0* a označujeme ji $f'(x_0)$.

Je-li tato limita nevlastní, řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *nevlastní derivaci*.

Neexistuje-li tato limita, řekneme, že funkce f *nemá derivaci v bodě x_0* .

2.1.2 Poznámky

1. Má-li funkce f derivaci v bodě x_0 , pak je v tomto bodě a nějakém jeho okolí definována. (Existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 takové, že $\mathcal{O}(x_0) \subseteq \text{Dom } f$.) (Viz 1.6.2.1)
2. Funkce f má v libovolném bodě $x_0 \in \text{Dom } f$ nejvýše jednu derivaci. (Viz 1.6.7.1)
3. Derivace je definována pouze v $x_0 \in \mathbb{R}$. Nelze definovat derivaci v ∞ nebo $-\infty$.
4. Existence a hodnota derivace $f'(x_0)$ je lokální vlastností funkce f v bodě x_0 .
5. Označíme-li $x = x_0 + h$, lze v definici 2.1.1 psát $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ místo $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
6. Lze definovat i *jednostranné derivace* funkce f v bodě x_0 :
$$\text{Derivace zleva } f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$
$$\text{Derivace zprava } f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$
Funkce f má v bodě x_0 derivaci právě tehdy, když v něm má derivaci zprava a derivaci zleva a platí $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. (Viz 1.6.12)
7. Nechť $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ vyjadřuje křivku v rovině (s kartézskými souřadnicemi). Rovnice *tečny* k této křivce v bodě $(x_0, f(x_0)) = (x_0, y_0)$ je

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

rovnice *normály* v témže bodě je

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

2.1.3 Věta

Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \text{Dom } f$ derivaci, je v tomto bodě spojitá.

D.: Necht $f'(x_0)$ existuje. Pak

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0) + f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) + f(x_0) \right) = \\ &= f'(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) + f(x_0) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0),\end{aligned}$$

a tvrzení plyne přímo z definice 1.7.1. $\square$

2.1.4 Poznámky

1. Opačné tvrzení neplatí. Funkce spojitá v bodě x_0 nemusí mít v tomto bodě derivaci.

$$\begin{aligned}\text{Například pro } f(x) = |x| \text{ je } f'_+(x_0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1, \\ f'_-(x_0) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x}{x} = -1.\end{aligned}$$

2. Analogicky platí: Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \text{Dom } f$ derivaci zprava (resp. zleva), pak je v tomto bodě spojitá zprava (resp. zleva).

2.1.5 Věta

Necht funkce f, g mají derivaci v bodě $x_0 \in \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$. Pak platí:

1. Pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$.
2. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$, $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$.
3. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
4. Je-li $g(x_0) \neq 0$, pak $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Analogická tvrzení platí i o jednostranných derivacích.

D.:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{cf(x) - cf(x_0)}{x - x_0} = c \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = cf'(x_0)$.
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \pm g(x) - (f(x_0) \pm g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) \pm (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$
 $= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$
(Poslední rovnost platí, poněvadž podle 2.1.3 je $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$.)
4. $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$

Dokazovaný vztah nyní plyne z předchozího.

$\square$

Tvrzení věty lze stručně zapsat:

$$(cu)' = cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v', \quad (uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Matematickou indukcí lze tvrzení zobecnit:

$$\begin{aligned}(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n)'(x_0) &= c_1 f_1'(x_0) + c_2 f_2'(x_0) + \cdots + c_n f_n'(x_0), \\ (f_1 f_2 f_3 \cdots f_{n-1} f_n)'(x_0) &= f_1'(x_0) f_2(x_0) f_3(x_0) \cdots f_{n-1}(x_0) f_n(x_0) + \\ &\quad + f_1(x_0) f_2'(x_0) f_3(x_0) \cdots f_{n-1}(x_0) f_n(x_0) + \cdots + \\ &\quad + f_1(x_0) f_2(x_0) f_3(x_0) \cdots f_{n-1}(x_0) f_n'(x_0).\end{aligned}$$

2.1.6 Věta (o derivaci složené funkce)

Nechť funkce f má derivaci v bodě $u_0 \in \mathbb{R}$ a nechť funkce φ má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ takovém, že $\varphi(x_0) = u_0$. Pak složená funkce $F : x \mapsto f(\varphi(x))$ má derivaci v bodě x_0 a platí $F'(x_0) = f'(u_0)\varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0)$.

D.:
$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}.$$

Jestliže existuje ryzí $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $\varphi(x) \neq \varphi(x_0)$ pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$, pak podle 1.6.8 je

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = f'(u_0)\varphi'(x_0).$$

Nechť v každém ryzím $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ existují body x takové, pro něž $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. Ukážeme, že pak $\varphi'(x_0) = 0$ a také $F'(x_0) = 0$, tedy že platí dokazovaný vztah.

Buď $\{x_n\}$ taková, že $\varphi(x_n) = \varphi(x_0)$, $x_n \neq x_0$, $x_n \rightarrow x_0$. Pak podle 1.6.4

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x_n) - \varphi(x_0)}{x_n - x_0} = 0.$$

Buď nyní $\{x_n\}$ libovolná taková, že $x_n \neq x_0$, $x_n \rightarrow x_0$. Označme

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(x_n) = \varphi(x_0)\}, \quad B = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(x_n) \neq \varphi(x_0)\}.$$

Pro $n \in A$ jest
$$\frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{f(\varphi(x_n)) - f(\varphi(x_0))}{x_n - x_0} = 0.$$

Je-li B konečná, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_0$ je $n \in A$, tedy pro $n \geq n_0$ je $\frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} = 0$, což

znamená, že
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} = 0.$$

Je-li B nekonečná, existuje vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq B$. Dále

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F(x_{n_k}) - F(x_0)}{x_{n_k} - x_0} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(\varphi(x_{n_k})) - f(\varphi(x_0))}{\varphi(x_{n_k}) - \varphi(x_0)} \frac{\varphi(x_{n_k}) - \varphi(x_0)}{x_{n_k} - x_0} = \\ &= f'(\varphi(x_0)) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x_{n_k}) - \varphi(x_0)}{x_{n_k} - x_0} = 0,\end{aligned}$$

neboť $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_{n_k}) = \varphi(x_0)$, jelikož φ je spojitá v x_0 . Z 1.6.4 plyne $F'(x_0) = 0$. $\square$

2.1.7 Věta (o derivaci inverzní funkce)

Nechť funkce f je ryze monotonní a spojitá na intervalu J . Nechť y_0 je vnitřní bod intervalu J a nechť funkce f má v tomto bodě derivaci $f'(y_0) \neq 0$. Pak funkce f^{-1} inverzní k funkci f má derivaci v bodě $x_0 = f(y_0)$ a platí $(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}$.

D.: Poněvadž f je ryze monotonní, pro $x \neq x_0$ platí $y = f^{-1}(x) \neq f^{-1}(x_0) = y_0$. Tedy podle 1.6.8 platí:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{x - x_0}{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(x)) - f(f^{-1}(x_0))}{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}} = \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{f'(y_0)}.\end{aligned}$$

(Předposlední rovnost plyne ze spojitosti funkce f .) $\square$

2.1.8 Definice

Buď $M \subseteq \text{Dom } f$ množina bodů, v nichž má funkce f derivaci. Pak zobrazení $x_0 \mapsto f'(x_0)$ je funkcí s definičním oborem M . Tato funkce se nazývá *derivace funkce f* a označuje se f' .

2.1.9 Přehled vzorců pro derivaci

- | | |
|--|--|
| (1) pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $c' = 0$ | (11) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| (2) $(x^a)' = ax^{a-1}$ | (12) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| (3) $(e^x)' = e^x$ | (13) $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$ |
| (4) $(a^x)' = a^x \ln a$ | (14) $(\text{arccotg } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ |
| (5) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | (15) $(cu)' = cu'$ |
| (6) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ | (16) $(u \pm v)' = u' \pm v'$ |
| (7) $(\sin x)' = \cos x$ | (17) $(uv)' = u'v + uv'$ |
| (8) $(\cos x)' = -\sin x$ | (18) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ |
| (9) $(\tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ | (19) $(u^v)' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right)$ |
| (10) $(\cotg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ | (20) $(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$ |

D.:

- (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$
- (3) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$ a vzorec plyne z **1.6.14**.
- (5) Podle **2.1.7** je $(\ln x)' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$
- (2) S využitím **2.1.6** dostaneme $(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} (a \ln x)' = x^a \frac{a}{x} = ax^{a-1}.$
- (4) $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = a^x (x)' \ln a = a^x \ln a.$
- (6) $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}.$
- (7) S využitím **1.6.9.9** dostaneme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x.$$

Dále $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{\cos h + 1} = 1 \cdot 0 = 0.$
- (8) $(\cos x)' = (\sin(x + \frac{\pi}{2}))' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \cdot 1 = -\sin x.$
- (9) $(\tg x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$
- (10) $(\cotg x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

$$(11) \text{ Podle 2.1.7 je } (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$(12) \text{ Podle 2.1.7 je } (\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$(13) \text{ Podle 2.1.7 je } (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 y + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

$$(14) \text{ Podle 2.1.7 je } (\operatorname{arccotg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{cotg} y)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = \frac{1}{-\frac{\sin^2 y - \cos^2 y}{\cos^2 y}} = -\frac{1}{x^2 + 1}.$$

(15)-(18) 2.1.5

$$(19) (u^v)' = (e^{v \ln u})' = e^{v \ln u} \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right) = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right).$$

(20) 2.1.6

□

2.1.10 Příklady

$$1. y = \arccos \sqrt{\frac{ax^2 + 1}{bx^2 + 1}}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad 0 < a < b.$$

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{ax^2 + 1}{bx^2 + 1}}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{bx^2 + 1}{ax^2 + 1}} \frac{2ax(bx^2 + 1) - 2bx(ax^2 + 1)}{(bx^2 + 1)^2} = \\ &= -\frac{(bx^2 + 1)(abx^3 + ax - abx^3 - bx)}{\sqrt{bx^2 - ax^2} \sqrt{ax^2 + 1} (bx^2 + 1)^2} = -\frac{(a - b)x}{|x| \sqrt{b - a} \sqrt{ax^2 + 1} (bx^2 + 1)} = \\ &= \operatorname{sgn} x \frac{\sqrt{b - a}}{\sqrt{ax^2 + 1} (bx^2 + 1)}. \end{aligned}$$

$$2. y = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln x}.$$

$$y' = \sqrt[x]{x} \left(-\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \right) = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2} (1 - \ln x)$$

3. Napište rovnici tečny a normály k hyperbole $xy = 1$ v bodě $A = (\frac{1}{2}, 2)$.

$$y = \frac{1}{x}, \quad y' = -\frac{1}{x^2}, \quad y'(\frac{1}{2}) = -4.$$

$$\begin{array}{ll} \text{tečna:} & \begin{array}{l} y - 2 = -4(x - \frac{1}{2}) \\ 2y - 4 = -8x + 4 \\ 4x + y - 4 = 0 \end{array} & \text{normála:} & \begin{array}{l} y - 2 = \frac{1}{4}(x - \frac{1}{2}) \\ 8y - 16 = 2x - 1 \\ 2x - 8y + 15 = 0 \end{array} \end{array}$$

$$4. y = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 0.$$

$$y' = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \text{ pro } x \neq 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty, \text{ derivace v bodě } 0 \text{ je nevlastní.}$$

$$5. y = \sqrt[3]{x^2}, \quad x_0 = 0.$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad y'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty \\ y'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty \end{aligned}$$

Funkce tedy nemá v bodě 0 derivaci ani nevlastní derivaci.

$$6. y = \operatorname{sgn} x, \quad x_0 = 0$$

$$(\operatorname{sgn} x)'_{x=0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sgn} x}{x} = \infty$$

Pro nevlastní derivaci neplatí tvrzení věty 2.1.3. (Proto také nevlastní derivaci nepovažujeme za derivaci.)

2.2 Derivace vyšších řádů, diferenciál

2.2.1 Definice

Buď f funkce, která má derivaci na množině $M_1 \subseteq \text{Dom } f$ a buď $x_0 \in M_1$. Má-li funkce f' derivaci v bodě x_0 , nazýváme tuto derivaci *druhou derivací funkce f v bodě x_0* a značíme ji $f''(x_0)$.

Obecně: Buď f funkce, která má na množině $M_{n-1} \subseteq \text{Dom } f$ $(n-1)$ -tou derivaci $f^{(n-1)}$ a buď $x_0 \in M_{n-1}$. Má-li funkce $f^{(n-1)}$ derivaci v bodě x_0 , nazýváme tuto derivaci *n -tou derivací funkce f v bodě x_0* a značíme ji $f^{(n)}(x_0)$.

2.2.2 Vzorce pro n -tou derivaci

$$(1) \quad (x^a)^{(n)} = a(a-1) \cdots (a-n+1)x^{a-n}$$

$$(2) \quad (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(3) \quad (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$$

$$(4) \quad (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$(5) \quad (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(6) \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(7) \quad (uv)^{(n)} = \binom{n}{0} u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v' + \cdots + \binom{n}{n-1} u'v^{(n-1)} + \binom{n}{n} uv^{(n)} =$$

$$= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} u^{(n-i)}v^{(i)} \quad (\text{Leibnizova formule})$$

D.: Ve všech případech matematickou indukcí. První krok indukce vždy bezprostředně plyne z 2.1.9. Ukážeme indukční krok.

$$(1) \quad (x^a)^{(n)} = ((x^a)^{(n-1)})' = (a(a-1) \cdots (a-n+2)x^{a-n+1})' = a(a-1) \cdots (a-n+2)(x^{a-n+1})' =$$

$$= a(a-1) \cdots (a-n+2)(a-n+1)x^{a-n}$$

$$(2) \quad (e^x)^{(n)} = ((e^x)^{(n-1)})' = (e^x)' = e^x$$

$$(3) \quad (a^x)^{(n)} = ((a^x)^{(n-1)})' = (a^x \ln^{n-1} a)' = (a^x)' \ln^{n-1} a = (a^x \ln a) \ln^{n-1} a = a^x \ln^n a$$

$$(4) \quad (\ln x)^{(n)} = ((\ln x)^{(n-1)})' = \left((-1)^{n-2} \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}\right)' = (-1)^{n-2} (n-2)! \frac{(-n+1)}{x^n} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$(5) \quad (\sin x)^{(n)} = ((\sin x)^{(n-1)})' = (\sin(x + (n-1)\frac{\pi}{2}))' = \cos(x + (n-1)\frac{\pi}{2}) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$$

$$(6) \quad \text{Analogicky jako (5)}$$

$$(7) \quad (uv)^{(n)} = ((uv)^{(n-1)})' = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} u^{(n-1-i)}v^{(i)}\right)' =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (u^{(n-i)}v^{(i)} + u^{(n-1-i)}v^{(i+1)}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} u^{(n-i)}v^{(i)} + \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} u^{(n-i)}v^{(i)} =$$

$$= \binom{n-1}{0} u^{(n)}v + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right] u^{(n-i)}v^{(i)} + \binom{n-1}{n-1} uv^{(n)} =$$

$$= u^{(n)}v + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} u^{(n-i)}v^{(i)} + uv^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} u^{(n-i)}v^{(i)} \quad \square$$

2.2.3 Definice

Buď f funkce definovaná v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že tato funkce je *diferencovatelná v bodě x_0* , jestliže existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \text{Dom } f$, a existuje funkce $\tau : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$

taková, že $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0$ a existuje $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro $h \in \mathbb{R}$, $|h| < \delta$ je $f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + h\tau(h)$.
V tomto případě se lineární funkce $h \mapsto ah$ nazývá *diferenciál funkce f v bodě x_0* a značí se $df(x_0)$.

2.2.4 Poznámky

1. Vyjádření $f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + h\tau(h)$ je možné při libovolném $a \in \mathbb{R}$. Stačí položit

$$\tau(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{h}.$$

Podstatné je však volit a tak, aby $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0$.

2. Rozdíl $f(x_0 + h) - f(x_0)$ se nazývá *přírůstek funkce f v bodě x_0 při přírůstku h nezávisle proměnné* a značí se $\Delta f(x_0)(h)$, stručně $\Delta f(x_0)$.

Pro diferencovatelnou funkci platí $\Delta f(x_0)(h) = df(x_0)(h) + h\tau(h)$.

2.2.5 Věta

Funkce f je diferencovatelná v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když má v tomto bodě derivaci. V tomto případě $a = f'(x_0)$.

D.:

$$\Rightarrow: f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (a + \tau(h)) = a + \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = a.$$

$$\Leftarrow: \text{Nechť } f \text{ má derivaci v bodě } x_0. \text{ Položme } a = f'(x_0), \tau(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h}. \text{ Pak}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

□

Platí tedy $df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h$, $\frac{df(x_0)(h)}{h} = f'(x_0)$; stručně $\frac{df(x_0)}{h} = f'(x_0)$

Z tohoto vyjádření plyne geometrická interpretace diferenciálu: Diferenciál je přírůstek funkce naměřený na tečně, tedy $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$. Toho lze využít k přibližnému výpočtu funkčních hodnot.

Například: Výpočet $\sqrt{4.02}$. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$, $h = 0.02$, $f(x_0) = \sqrt{4} = 2$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}, \quad df(4) = f'(4) \cdot h = \frac{0.02}{4} = 0.005$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \Delta f(x_0) \approx f(x_0) + df(x_0) = 2 + 0.005 = 2.005$$

(Přesná hodnota je 2.00499)

Je-li $f(x) = x$, pak $f'(x_0) = 1$ pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$, $df(x_0)(h) = h$, stručně $dx = h$. Lze tedy psát $df(x_0) = f'(x_0)dx$, neboli $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$, stručně $f' = \frac{df}{dx}$. Je-li $y = f(x)$, lze psát $y' = \frac{dy}{dx}$.

Za použití této symboliky dostanou názorný tvar vzorce pro

- derivaci složené funkce: $\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx}$.

- derivaci inverzní funkce: $\frac{df^{-1}}{dy} = \frac{1}{\frac{df}{dy}} = \frac{dx}{df}$, neboli $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

2.2.6 Poznámka — zavedení diferenciálů vyšších řádů

Nechť funkce f má v bodě x_0 n -tou derivaci $f^{(n)}(x_0)$, $n \geq 1$. n -tý diferenciál (*diferenciál n -tého řádu*) definujeme jako zobrazení $d^n f(x_0) : h \mapsto f^{(n)}(x_0) \cdot h^n$, symbolicky $d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)dx^n$.

Za použití této symboliky lze n -tou derivaci zapsat $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d^n y}{dx^n}$.

2.3 Obecné věty o derivaci

2.3.1 Věta (Rolle [1652 – 1719])

Nechť funkce f splňuje předpoklady:

- (i) je spojitá na $[a, b]$,
- (ii) v každém bodě intervalu (a, b) má vlastní nebo nevlastní derivaci,
- (iii) $f(a) = f(b)$.

Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že platí $f'(c) = 0$.

D.: Je-li f konstantní, lze podle 2.1.9.1 za c vzít libovolný bod z (a, b) .

Nechť f není konstantní. Podle 1.7.12 existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

Nechť nejprve $f(c) > f(a) = f(b)$.

Podle (ii) existuje $f'(c) \in \mathbb{R}^*$. Pripustíme $f'(c) > 0$, tedy $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$.

Existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(c) \setminus \{c\}$ takové, že pro $x \in \mathcal{O}(c) \setminus \{c\}$ je $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$.

Zvolme $x_1 \in [a, b] \cap (\mathcal{O}(c) \setminus \{c\})$, $x_1 > c$. Pak $x_1 - c > 0$, $f(x_1) - f(c) \leq 0$, tedy $\frac{f(x_1) - f(c)}{x_1 - c} \leq 0$, což je spor.

Analogicky vyloučíme možnost $f'(c) < 0$. Je tedy $f'(c) = 0$.

Pokud $f(a) = f(b) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$, položíme $c = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ a provedeme analogické úvahy. $\square$

Z důkazu plyne, že za c lze volit bod, v němž nabývá funkce f své extrémní hodnoty. Neplyne z něho, že jiné body s vlastností $f'(c) = 0$ neexistují.

Všechny tři předpoklady věty jsou podstatné.

2.3.2 Důsledek

Buď f funkce spojitá na intervalu J , která má na tomto intervalu n -tou derivaci. Má-li f na J n kořenů (t.j. existují $x_0, x_1, \dots, x_n \in J$, že $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n) = 0$), pak existuje $c \in J$ takové, že $f^{(n)}(c) = 0$.

D.: Volme označení tak, že $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Na intervalech $[x_i, x_{i+1}] \subseteq J$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ splňuje f předpoklady Rolleovy věty. Existují tedy $c_i^1 \in (x_i, x_{i+1}) \subseteq J$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ taková, že $f'(c_i^1) = 0$.

Na intervalech $[c_i^1, c_{i+1}^1] \subseteq J$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-2$ splňuje f' předpoklady Rolleovy věty. Existují tedy $c_i^2 \in (c_i^1, c_{i+1}^1) \subseteq J$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-2$ taková, že $f''(c_i^2) = 0$.

Analogicky postupujeme dále.

V $n-1$ -ním kroku ukážeme, že existují $c_0^{n-1}, c_1^{n-1} \in J$ taková, že $f^{(n-1)}(c_0^{n-1}) = f^{(n-1)}(c_1^{n-1}) = 0$.

Na intervalu $[c_0^{n-1}, c_1^{n-1}]$ splňuje tedy $f^{(n-1)}$ předpoklady Rolleovy věty a tedy existuje

$c \in (c_0^{n-1}, c_1^{n-1}) \subseteq J$ takové, že $f^{(n)}(c) = 0$. $\square$

2.3.3 Věta (Lagrange [1736 – 1813], 1. věta o střední hodnotě, věta o přírůstku funkce)

Nechť funkce f splňuje předpoklady:

- (i) je spojitá na $[a, b]$,
- (ii) v každém bodě intervalu (a, b) má vlastní nebo nevlastní derivaci.

Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že platí $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

D.: Položme $F(x) = (b-a)f(x) - (f(b) - f(a))x$. Funkce F splňuje předpoklady 2.3.1:

- (i): plyne z 1.7.6
- (ii): plyne z 2.1.9(2) a 2.1.5.
- (iii): $F(a) = (b-a)f(a) - (f(b) - f(a))a = f(a)(b-a+a) - f(b)a = bf(a) - af(b)$
 $F(b) = (b-a)f(b) - (f(b) - f(a))b = f(b)(b-a-b) + f(a)b = bf(a) - af(b)$

Existuje tedy $c \in (a, b)$, že $F'(c) = 0$.

$$F'(x) = (b-a)f'(x) - (f(b) - f(a)), \quad 0 = F'(c) = (b-a)f'(c) - (f(b) - f(a)), \quad \text{z čehož } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

□

2.3.4 Důsledky

- Splňuje-li funkce f na intervalu $[a, b]$ předpoklady 2.3.3, pak pro libovolná $x_1, x_2 \in [a, b], x_1 \neq x_2$ existuje ξ mezi x_1 a x_2 tak, že platí $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, neboli $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.
 $f(x_2) - f(x_1)$ — přírůstek funkce f mezi body x_1, x_2 . Odtud je odvozen jeden z názvů věty.

- Nechť funkce f je spojitá na $[a, b]$ a nechť pro každé $x \in (a, b)$ je $f'(x) = 0$. Pak je f konstantní na $[a, b]$.

D.: Buďte $x_1, x_2 \in [a, b]$ libovolné. Pak podle předchozího $f(x_2) = f'(\xi)(x_2 - x_1) + f(x_1) = f(x_1)$. □

- Nechť funkce f, g jsou spojitě na $[a, b]$. Mají-li f, g vlastní nebo nevlastní derivaci na $[a, b]$ a platí-li $f'(x) = g'(x)$ pro každé $x \in (a, b)$, pak existuje $c \in \mathbb{R}$ taková konstanta, že $f(x) = g(x) + c$ identicky na $[a, b]$.

D.: Položme $h(x) = f(x) - g(x)$. Pak $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ a podle předchozího $h(x) = c$. □

2.3.5 Věta (Cauchy [1789 – 1857], 2. věta o střední hodnotě, věta o podílu přírůstků funkce)

Nechť funkce f, g splňují předpoklady:

- (i) jsou spojitě na $[a, b]$,
- (ii) v každém bodě intervalu (a, b) existuje vlastní nebo nevlastní derivace $f'(x)$ a vlastní derivace $g'(x) \neq 0$.

Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že platí $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

D.: g splňuje předpoklady 2.3.3, existuje tedy $d \in (a, b)$ takové, že $\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(d) \neq 0$, z čehož plyne $g(b) - g(a) \neq 0$, takže zlomek na levé straně tvrzení věty má smysl.

Položme $F(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)$. Přímou ověříme, že tato funkce splňuje předpoklady 2.3.1. Existuje tedy $c \in (a, b)$ takové, že $F'(c) = 0$.

Tedy $0 = (g(b) - g(a))f'(c) - (f(b) - f(a))g'(c)$, z čehož plyne tvrzení. □

$$\begin{aligned} x &= g(t) \\ y &= f(t) \end{aligned} \quad t \in [a, b] \quad \text{— parametrické vyjádření nějaké křivky.}$$

$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ — směrnice sečny, vedené body $A = (g(a), f(a)), B = (g(b), f(b))$.

$y = f(g^{-1}(x)), y' = \frac{f'(g^{-1}(x))}{g'(t)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$, tedy $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ je směrnice tečny v bodě $C = (g(c), f(c))$.

Z důkazu Lagrangeovy věty je vidět, že Lagrangeova věta je důsledkem Rolleovy věty. Z důkazu Cauchyovy věty je vidět, že Cauchyova věta je důsledkem současně Rolleovy a Lagrangeovy věty. Bezprostředně je ale vidět, že Lagrangeova věta je důsledkem Cauchyovy věty a Rolleova věta je důsledkem Lagrangeovy věty. Všechny tři věty jsou tedy ekvivalentní.

2.3.6 Věta (Johann Bernoulli [1667 – 1748], de l'Hospitalovo pravidlo [1696])

Nechť f, g jsou funkce, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a necht' $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ nebo $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$.

Existuje-li $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}^*$, existuje i $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Stejně tvrzení platí i pro jednostranné limity.

Je-li $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ a funkce $\frac{f'}{g'}$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, důkaz je snadný:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Důkazy de l'Hospitalova pravidla v ostatních případech lze nalézt v literatuře.

Poznámka: Jestliže $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ nebo $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ neexistuje, nelze z toho usuzovat nic o existenci a hodnotě $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Například $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\cos x}{x}} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$, ale $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sin x)'}{(x - \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \sin x}$ neexistuje.

2.3.7 Zobecnění:

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a necht' pro $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ platí $\lim_{x \rightarrow x_0} f^{(k)}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g^{(k)}(x) = 0$ nebo $\lim_{x \rightarrow x_0} |g^{(k)}(x)| = \infty$.

Existuje-li $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$, existuje i $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a obě limity jsou shodné.

Jinými slovy: de l'Hospitalovo pravidlo lze používat opakovaně

2.3.8 Poznámka o neurčitých výrazech

Nechť f, g jsou funkce, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ takové, že $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}^*$.

$$1. \ a = b = 0, \text{ typ } \frac{0}{0}: \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$$2. \ a = \pm\infty, \ b = \pm\infty, \text{ typ } \frac{\infty}{\infty}: \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$$3. \ a = 0, \ b = \pm\infty, \text{ typ } 0 \cdot \infty: \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, \text{ což je některý z předchozích typů.}$$

$$4. \ a = b = \pm\infty, \text{ typ } \infty - \infty: \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}, \text{ což je typ } \frac{0}{0}.$$

$$5. \ a = b = 0, \text{ typ } 0^0: \quad f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x)}, \text{ což je typ } 0 \cdot \infty.$$

$$6. \ a = \infty, \ b = 0, \text{ typ } \infty^0: \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x)}, \text{ což je typ } 0 \cdot \infty.$$

$$7. \ a = 1, \ b = \infty, \text{ typ } 1^\infty: \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x)}, \text{ což je typ } \infty \cdot 0.$$

2.4 Taylorův vzorec

2.4.1 Označení

Budte f, g funkce, $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

Symbol $f(x) = O(g(x)), x \rightarrow x_0$, stručněji $f = O(g), x \rightarrow x_0$ značí: existuje okolí $\mathcal{O}(x_0) \subseteq \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$ bodu x_0 a konstanta $k \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0)$ platí $|f(x)| \leq k|g(x)|$. Někdy se v takovém případě říká, že *funkce f je malá řádu g* .

Symbol $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0$, stručněji $f = o(g), x \rightarrow x_0$ značí $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Někdy se v takovém případě říká, že *funkce f je nekonečně malá řádu g* .

2.4.2 Definice

Budte f, g spojitě funkce, $x_0 \in \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Řekneme, že funkce f, g mají v bodě x_0 *styk řádu alespoň n* , jestliže $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^n} = 0$.

Funkce f, g mají v bodě x_0 styk řádu alespoň n , pokud $f(x) - g(x) = o((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$.

Poznámka: Je-li rovinná křivka grafem funkce f , která má v $x_0 \in \text{Dom } f$ derivaci a funkce g je dána předpisem $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, pak funkce f a g mají v bodě x_0 styk řádu alespoň 1. (Tečna ke grafu funkce má s grafem funkce styk řádu alespoň 1.)

$$\text{D.: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0 \quad \square$$

2.4.3 Věta

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a funkce f, g mají v bodě $x_0 \in \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$ spojitou n -tou derivaci. Funkce f a g mají v bodě x_0 styk řádu alespoň n právě tehdy, když platí

$$f(x_0) = g(x_0), f'(x_0) = g'(x_0), f''(x_0) = g''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0).$$

D.: V obou částech důkazu budeme používat označení $F(x) = f(x) - g(x)$, $G_k(x) = (x - x_0)^k$ pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Poněvadž existuje $F^{(n)}(x_0)$, existují na jistém okolí bodu x_0 i $F^{(k)}$ pro $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ a jsou to podle 2.1.3 funkce spojitě v bodě x_0 .

Podle 2.2.2.1 je $G_k^{(l)}(x) = k(k-1)\dots(k-l+1)(x-x_0)^{k-l}$. Všechny funkce $G_k^{(l)}$ jsou v bodě x_0 spojitě a platí $G_k^{(l)}(x_0) = \begin{cases} 0, & l \neq k \\ k!, & l = k \end{cases}$.

$\Leftarrow$: Nechť $F(x_0) = F'(x_0) = F''(x_0) = \dots = F^{(n)}(x_0) = 0$. Pak s využitím 2.3.7 platí

$$0 = \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{F^{(n)}(x_0)}{G_n^{(n)}(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F^{(n)}(x)}{G_n^{(n)}(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{G_n(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{(x - x_0)^n}.$$

$\Rightarrow$: Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{(x - x_0)^n} = 0$.

Kdyby existovalo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ takové, že $F(x_0) = F'(x_0) = F''(x_0) = \dots = F^{(k-1)}(x_0) = 0$ a $F^{(k)}(x_0) \neq 0$, pak by s využitím 2.3.7 platilo

$$\begin{aligned} 0 &\neq \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!} = \frac{F^{(k)}(x_0)}{G_k^{(k)}(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F^{(k)}(x)}{G_k^{(k)}(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{G_k(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{(x - x_0)^k} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{(x - x_0)^n} (x - x_0)^{n-k} = 0, \end{aligned}$$

což by byl spor.

□

2.4.4 Definice

Bud' f funkce, $a \in \text{Dom } f$. Nechť funkce f má v bodě a derivace až do n -té včetně. Polynom

$$T_{n,f,a}(x) = T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

se nazývá *Taylorův polynom stupně n funkce f v bodě a (se středem a)*.

Je-li $a = 0$, nazývá se tento polynom *Maclaurinův*.

2.4.5 Věta

Pro Taylorův polynom platí

$$T_n(a) = f(a), \quad T'_n(a) = f'(a), \quad T''_n(a) = f''(a), \quad \dots, \quad T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

D.: $T_n(a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(a-a) + \frac{f''(a)}{2!}(a-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(a-a)^n = f(a)$
 $T'_n(x) = \frac{f'(a)}{1!} + \frac{f''(a)}{2!}2(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}n(x-a)^{n-1}; \quad T'_n(a) = f'(a)$
 $T''_n(x) = \frac{f''(a)}{2!}2 + \frac{f'''(a)}{3!}3 \cdot 2 \cdot (x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}n(n-1)(x-a)^{n-2}; \quad T''_n(a) = f''(a)$
 $\vdots$
 $T_n^{(n)}(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}n(n-1) \dots 2; \quad T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \quad \square$

Z vět 2.4.3 a 2.4.5 bezprostředně plyne

2.4.6 Důsledek

Nechť funkce f má v bodě $a \in \text{Dom } f$ n -tou derivaci a nechť $T_{n,f,a}$ je Taylorův polynom stupně n funkce f v bodě a . Pak funkce f a $T_{n,f,a}$ mají v bodě x_0 styk řádu alespoň n .

2.4.7 Příklad (Maclaurinovy polynomy některých elementárních funkcí)

1. $f(x) = e^x$
 $f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$, tedy $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$
 $T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$
2. $f(x) = \sin x$
 $f(0) = 0, f'(0) = \cos 0 = 1, f''(0) = -\sin 0 = 0, f'''(0) = -\cos 0 = -1, f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0, \dots,$
 $f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}, f^{(2n)}(0) = 0$
 $T_{2n-1}(x) = T_{2n}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$
3. $f(x) = \cos x$
 $f(0) = 1, f'(0) = -\sin 0 = 0, f''(0) = -\cos 0 = -1, f'''(0) = \sin 0 = 0, f^{(4)}(0) = \cos 0 = 1, \dots,$
 $f^{(2n)}(0) = (-1)^n, f^{(2n+1)}(0) = 0$
 $T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
4. $f(x) = \ln(1+x)$
 $f(0) = 0,$
 Podle 2.2.2.4 je $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$, a tedy $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!$.
 $T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$

5. $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(0) = 1,$$

Podle 2.2.2.1 je $[(1+x)^\alpha]^{(k)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$, a tedy

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1).$$

Definujeme $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. Pak

$$T_n(x) = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k}x^k.$$

Pro $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \leq n$ je Maclaurinův polynom rozepsáním výrazu $(1+x)^\alpha$ podle binomické věty.

2.4.8 Věta (Brook Taylor [1685 – 1731])

Buď f funkce, $a \in \text{Dom } f$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť existuje okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a takové, že funkce f má $(n+1)$ -tou derivaci v každém bodě z $\mathcal{O}(a)$. Buď $x \in \mathcal{O}(a)$. Pak v otevřeném intervalu s krajními body a a x existuje číslo c takové, že platí

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

D.: Buď $x_0 > a$, $x_0 \in \mathcal{O}(a)$ libovolné.

Položíme $K = \frac{f(x_0) - T_n(x_0)}{(x_0 - a)^{n+1}}$, neboli $f(x_0) = T_n(x_0) + K(x_0 - a)^{n+1}$.

Dále položíme $F(x) = f(x) - T_n(x) - K(x-a)^{n+1}$ pro $x \in [a, x_0]$.

Funkce F má podle 2.1.3 a 2.1.5 na $[a, x_0]$ spojitě derivace až do n -té, neboť f má na tomto intervalu $(n+1)$ -tou derivaci a $T_n(x)$, $(x-a)^{n+1}$ mají derivace všech řádů.

Podle 2.4.5 platí $F(a) = F'(a) = F''(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = 0$.

Dále $F'(x_0) = 0$. Tedy F splňuje na $[a, x_0]$ předpoklady 2.3.1. odtud plyne, že existuje $c_1 \in (a, x_0)$ že $F'(c_1) = 0$.

To dále znamená, že funkce F' splňuje na $[a, c_1]$ předpoklady 2.3.1, z čehož plyne, že existuje $c_2 \in (a, c_1)$ že $F''(c_2) = 0$.

Tak pokračujeme dále. Nakonec ukážeme, že existuje c_n , $a < c_n < x_0$ takové, že $F^{(n)}(c) = 0$.

Celkem tedy dostaneme, že funkce $F^{(n)}$ splňuje na $[a, c_n]$ předpoklady 2.3.1, z čehož plyne, že existuje $c \in (a, c_n) \subseteq (a, x_0)$ že $F^{(n+1)}(c) = 0$.

Přitom $F^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - 0 - K(n+1)!$, z čehož plyne $K = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$.

Dokázali jsme tedy platnost vzorce pro $x = x_0 > a$, $x_0 \in \mathcal{O}(a)$. Poněvadž $x_0 > a$ byl libovolný, platí vzorec na pravém okolí bodu a .

Jeho platnost na levém okolí bodu a dokážeme analogicky. $\square$

Poznámky

- Vzorec uvedený ve větě lze zapsat: $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$. Tento vzorec se nazývá *Taylorův* (pro $a = 0$ *Maclaurinův*); výraz $R_n(x)$ se nazývá *zbytek v Taylorově vzorci* nebo *Taylorův zbytek*.

Výraz $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ se nazývá *Lagrangeův tvar (Taylorova) zbytku*.

Existují i jiné tvary zbytku, vždy však platí $R_n(x) = o((x-a)^n)$, $x \rightarrow a$.

- Číslo c lze napsat ve tvaru $c = a + \Theta(x-a)$, kde $\Theta \in (0, 1)$.
- Je vidět, že Lagrangeova věta 2.3.3 je speciálním případem věty Taylorovy (pro $n = 1$). Naopak, Taylorova věta byla dokázána jako důsledek věty Rolleovy 2.3.1

2.4.9 Příklad (Zbytky Maclaurinových polynomů některých elementárních funkcí)

Sr. 2.2.2

$$1. f(x) = e^x, R_n(x) = \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

2. $f(x) = \sin x$, $R_{2n-1}(x) = \frac{\sin(\Theta x + n\pi)}{(2n)!} x^{2n}$
3. $f(x) = \cos x$, $R_{2n}(x) = \frac{\cos(\Theta x + \frac{2n+1}{2}\pi)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
4. $f(x) = \ln(x+1)$, $R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\Theta x)^{n+1}}$
5. $f(x) = (1+x)^\alpha$, $R_n(x) = \binom{\alpha}{n+1} (1+\Theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1}$

Taylorova věta slouží k přibližnému výpočtu funkčních hodnot

2.4.10 Příklad

Najděte Maclaurinův polynom, který na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aproximuje funkci $f(x) = \sin x$ s přesností 10^{-5} .

Ř.:

$$\sin x = T_{2n-1}(x) + R_{2n-1}(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{\sin(\Theta x + n\pi)}{(2n)!} x^{2n}$$

$$|R_{2n-1}(x)| = \left| \frac{\sin(\Theta x + n\pi)}{(2n)!} x^{2n} \right| \leq \frac{|x^{2n}|}{(2n)!} \leq \frac{(\frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!}$$

Snadno ověříme, že $|R_9(x)| \leq 0.00002$ a $|R_{11}| \leq 0.0000005 < 10^{-5}$. Tedy stačí vzít

$$T_{11}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} - \frac{x^{11}}{39916800}.$$

□

2.5 Průběh funkce

2.5.1 Věta

Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \text{Dom } f$ vlastní nebo nevlastní derivaci. Je-li $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$), pak je f v bodě x_0 rostoucí (resp. klesající).

D.: Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$. Pak existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$.

Je-li $x \in \mathcal{O}(x_0)$, $x < x_0$, pak $x - x_0 < 0$ a tedy $f(x) - f(x_0) < 0$, tj. $f(x) < f(x_0)$.

Je-li $x \in \mathcal{O}(x_0)$, $x > x_0$, pak $x - x_0 > 0$ a tedy $f(x) - f(x_0) > 0$, tj. $f(x) > f(x_0)$.

Druhé tvrzení dokážeme analogicky. □

2.5.2 Věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu J a má zde vlastní nebo nevlastní derivaci. f je rostoucí (resp. klesající) na J právě tehdy, když $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) na J , přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném subintervalu intervalu J .

D.: $\Rightarrow$: Nechť f je rostoucí na J , $x_0 \in J$ libovolný. Pro $x \in J$, $x > x_0$ je $f(x) > f(x_0)$ a pro $x \in J$, $x < x_0$ je

$$f(x) < f(x_0), \text{ tedy } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \text{ pro } x \in J. \text{ Odtud plyne, že } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Kdyby rovnost $f'(x_0) = 0$ platila na intervalu $I \subseteq J$, byla by podle 2.3.4.2 funkce f konstantní na I .

$\Leftarrow$: Budte $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$. Na $[x_1, x_2]$ funkce f splňuje předpoklady 2.3.3 a tedy existuje $\xi \in (x_1, x_2)$ takové, že $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi) \geq 0$, což znamená, že $f(x_1) \leq f(x_2)$.

f je tedy neklesající na J a poněvadž na žádném subintervalu není konstantní, je rostoucí.

Druhé tvrzení se dokáže analogicky. □

2.5.3 Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \text{Dom } f$ *lokální maximum* (resp. *minimum*), jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \cap \text{Dom } f$ bodu x_0 platí $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).

Lokální maximum (resp. minimum) se nazývá *ostré*, jestliže existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in (\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap \text{Dom } f$ platí $f(x) < f(x_0)$ (resp. $f(x) > f(x_0)$).

Lokální maxima a minima souhrnně nazýváme *lokální extrémy*, případně *ostré lokální extrémy*.

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in M \subseteq \text{Dom } f$ *absolutní maximum* (resp. *minimum*), na množině M , jestliže pro každé $x \in M$ platí $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).

Absolutní maximum (resp. minimum) se nazývá *ostré*, jestliže příslušné nerovnosti jsou ostré.

Absolutní maxima a minima souhrnně nazýváme *absolutní extrémy*.

2.5.4 Poznámky

1. Má-li funkce v bodě $x_0 \in \text{Dom } f$ lokální extrém a existuje-li vlastní nebo nevlastní $f'(x_0)$, pak $f'(x_0) = 0$. (Plyne bezprostředně z 2.5.1.)
2. Body, v nichž $f'(x_0) = 0$ nazýváme *stacionární body* funkce f . Bezprostředně z předchozího tvrzení vyplývá, že funkce může mít lokální extrém buď ve stacionárním bodě a nebo v bodě, kde neexistuje vlastní ani nevlastní derivace.
3. Stacionární bod nemusí být bodem lokálního extrému. Např. $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$, $f'(x) = 3x^2 > 0$ pro $x \neq 0$. Tedy podle 2.5.2 je f rostoucí na $\mathbb{R}$.

2.5.5 Věta

Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \text{Dom } f$. Existuje-li levé ryzí okolí $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 , v němž je f neklesající (resp. nerostoucí) a pravé ryzí okolí $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 , v němž je f nerostoucí (resp. neklesající), pak má funkce f v bodě x_0 lokální maximum (resp. lokální minimum).

Existuje-li levé ryzí okolí $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 , v němž je f rostoucí (resp. klesající) a pravé ryzí okolí $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 , v němž je f klesající (resp. rostoucí), pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum (resp. ostré lokální minimum).

D.: Nechť f je v $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ neklesající a v $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ nerostoucí. Podle 1.6.15 je $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in \mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}\}$, $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \sup\{f(x) : x \in \mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}\}$. Poněvadž f je spojitá v x_0 , je $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \sup\{f(x) : x \in (\mathcal{P}(x_0) \cup \mathcal{L}(x_0)) \setminus \{x_0\}\}$.

Nechť f je v $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ rostoucí a v $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ klesající. Buď $x \in \mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ libovolný. Pro $x_1 \in (x, x_0) \subseteq \mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) < f(x_1) \leq f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in \mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}\}$.

Podobně ukážeme, že pro $x \in \mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x_0) > f(x)$.

Analogicky ukážeme platnost tvrzení v ostatních případech. $\square$

Obrácená věta neplatí. Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém, nemusí být v žádném ryzím jednostranném okolí monotonní.

Předpoklad o spojitosti funkce f je podstatný.

2.5.6 Důsledky

1. Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \text{Dom } f$ a existuje levé ryzí okolí $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 a pravé ryzí okolí $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 taková, že funkce f má vlastní nebo nevlastní derivaci $f'(x)$ na $(\mathcal{P}(x_0) \cup \mathcal{L}(x_0)) \setminus \{x_0\}$, přičemž $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) na $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ a $f'(x) < 0$ (resp. $f'(x) > 0$) na $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$. Pak má f v bodě x_0 ostré lokální maximum (resp. minimum).

D.: plyne z 2.5.5 a z 2.5.1 $\square$

2. Nechť $f'(x_0) = 0$ a nechť funkce f má v bodě x_0 vlastní nebo nevlastní druhou derivaci. Je-li $f''(x_0) < 0$, má f v bodě x_0 ostré lokální maximum, je-li $f''(x_0) > 0$, má f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

D.: Je-li $f''(x_0) < 0$, je $f'(x_0)$ v bodě x_0 podle 2.5.1 klesající. Existuje tedy ryzí levé okolí $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 takové, že $f'(x) > 0$ na $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ a existuje ryzí pravé okolí $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 takové, že $f'(x) < 0$ na $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$.
Analogicky ukážeme platnost druhého tvrzení. $\square$

2.5.7 Poznámka o absolutních extrémech

Nechť funkce f je spojitá na $[a, b]$. Podle 1.7.12 nabývá f na $[a, b]$ své největší i nejmenší hodnoty, tedy svého absolutního maxima a absolutního minima. Absolutních extrémů nabývá buď v bodech lokálních extrémů nebo v krajních bodech intervalu $[a, b]$.

2.5.8 Definice

Řekneme, že funkce f je *konvexní* (resp. *konkávní*) na intervalu $J \subseteq \text{Dom } f$, jestliže pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in J$, $x_1 < x_2 < x_3$ platí $f(x_2) \leq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1)$

(resp. $f(x_2) \geq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1)$).

Řekneme, že funkce f je *ryze konvexní* (resp. *ryze konkávní*) na intervalu $J \subseteq \text{Dom } f$, jestliže pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in J$, $x_1 < x_2 < x_3$ platí $f(x_2) < f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1)$

(resp. $f(x_2) > f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1)$).

2.5.9 Věta

Funkce f je konvexní na intervalu $J \subseteq \text{Dom } f$ právě tehdy, když pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in J$, $x_1 < x_2 < x_3$ je splněna některá z ekvivalentních podmínek

$$(\vee_1) \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

$$(\vee_2) \quad \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

$$(\vee_3) \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Nerovnost v těchto podmínkách je ostrá právě tehdy, když funkce f je ryze konvexní na intervalu J .

Funkce f je konkávní na intervalu $J \subseteq \text{Dom } f$ právě tehdy, když pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in J$, $x_1 < x_2 < x_3$ je splněna některá z ekvivalentních podmínek

$$(\wedge_1) \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

$$(\wedge_2) \quad \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

$$(\wedge_3) \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Nerovnost v těchto podmínkách je ostrá právě tehdy, když funkce f je ryze konkávní na intervalu J .

D.: Podmínka $(\vee_1)$ je zřejmě ekvivalentní s podmínkou v definici 2.5.8.

Upravíme podmínku $(\vee_1)$:

$$\begin{aligned} (x_3 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) &\leq (x_2 - x_1)(f(x_3) - f(x_1)) \\ x_3f(x_2) - x_3f(x_1) - x_1f(x_2) + x_1f(x_1) &\leq x_2f(x_3) - x_2f(x_1) - x_1f(x_3) + x_1f(x_1) \\ x_2f(x_1) + x_3f(x_2) + x_1f(x_3) &\leq x_1f(x_2) + x_2f(x_3) + x_3f(x_1) \end{aligned}$$

Dále upravíme podmínku $(\vee_2)$:

$$\begin{aligned}(x_3 - x_2)(f(x_3) - f(x_1)) &\leq (x_3 - x_1)(f(x_3) - f(x_2)) \\ x_3f(x_3) - x_3f(x_1) - x_2f(x_3) + x_2f(x_1) &\leq x_3f(x_3) - x_3f(x_2) - x_1f(x_3) + x_1f(x_2) \\ x_2f(x_1) + x_3f(x_2) + x_1f(x_3) &\leq x_1f(x_2) + x_2f(x_3) + x_3f(x_1)\end{aligned}$$

Odtud je vidět, že podmínky $(\vee_1)$ a $(\vee_2)$ jsou ekvivalentní. Stejně (prostým roznásobením) ukážeme ekvivalenci podmínky $(\vee_3)$ s podmínkami $(\vee_1)$ a $(\vee_2)$.

Tvrzení pro konkávní funkce dokážeme analogicky. $\square$

2.5.10 Věta

Nechť funkce f má na intervalu $J \subseteq \text{Dom } f$ derivaci f' . Je-li funkce f konvexní (resp. konkávní) na J , pak pro každé dva různé vnitřní body $x, x_0 \in J$ platí $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (resp. $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$). Je-li funkce f ryze konvexní (resp. ryze konkávní) na J , pak pro každé dva různé vnitřní body $x, x_0 \in J$ platí $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (resp. $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$).

D.:

- Buď f konvexní funkce na J a x, x_0 libovolné vnitřní body intervalu J .
Nechť nejprve $x_0 < x$. Podle $(\vee_1)$ pro libovolné $\xi \in (x_0, x)$ platí $\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
Limitním přechodem $\xi \rightarrow x_0$ dostaneme $f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, neboli $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x)$.
Nechť nyní $x < x_0$. Podle $(\vee_2)$ pro libovolné $\xi \in (x, x_0)$ platí $\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq \frac{f(x_0) - f(\xi)}{x_0 - \xi}$.
Limitním přechodem $\xi \rightarrow x_0$ dostaneme $\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq f'(x_0)$, neboli $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- Je-li f ryze konvexní na J , pak podle již dokázaného pro každé dva vnitřní body $x, x_0 \in J$ platí $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Pripusťme, že existují vnitřní body $x_1, x_3 \in J$, $x_1 < x_3$ takové, že $f(x_3) = f(x_1) + f'(x_1)(x_3 - x_1)$.
Podle $(\vee_1)$ — s modifikací pro ryze konvexní funkce — pro každé $x_2 \in (x_1, x_3)$ platí

$$\begin{aligned}\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &< \frac{f(x_1) + f'(x_1)(x_3 - x_1) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \\ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &< f'(x_1) \\ f(x_2) &< f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1),\end{aligned}$$

což je spor s již dokázaným (při označení $x = x_2$, $x_0 = x_1$).

Analogicky s využitím $(\vee_2)$ vyloučíme možnost existence vnitřních bodů $x_1, x_3 \in J$ takových, že $f(x_1) = f(x_3) + f'(x_3)(x_1 - x_3)$.

Tedy pro všechny vnitřní body $x, x_0 \in J$ platí $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

- Tvrzení o konkávní funkci dokážeme analogicky.

$\square$

2.5.11 Věta

Nechť funkce f má na intervalu $J \subseteq \text{Dom } f$ derivaci f' . Funkce f je ryze konvexní (resp. konkávní) na intervalu J právě tehdy, když f' je na J rostoucí (resp. klesající).

D.: $\Rightarrow$: Budte $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$ libovolné. Podle 2.5.10 je $f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$ a

$$f(x_1) > f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2), \text{ neboli } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > f'(x_1) \text{ a } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < f'(x_2).$$

Odtud $f'(x_1) < f'(x_2)$.

$\Leftarrow$: Sporem. Necht' f' je rostoucí na J a připustíme, že f není ryze konvexní, tedy že existují

$$x_1, x_2, x_3 \in J, \quad x_1 < x_2 < x_3 \text{ takové, že } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \quad (\text{sr. } (\vee_3)).$$

Podle 2.3.3 existují $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ a $\xi_2 \in (x_2, x_3)$, že

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi_1) \text{ a } \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\xi_2).$$

Zřejmě $\xi_1 < \xi_2$ a poněvadž f' je rostoucí, je $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, což je spor.

Tvrzení o konkávní funkci dokážeme analogicky. $\square$

Odtud a z 2.5.2 plyne

2.5.12 Důsledek

Necht' funkce f má na intervalu J spojitou první derivaci a vlastní nebo nevlastní druhou derivaci. f je ryze konvexní (resp. konkávní) na J právě tehdy, když $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) \leq 0$) na J , přičemž rovnost $f''(x) = 0$ neplatí na žádném subintervalu intervalu J .

2.5.13 Definice

Necht' f je funkce spojitá v $x_0 \in \text{Dom } f$ a necht' existuje vlastní nebo nevlastní derivace $f'(x_0)$. Řekneme, že x_0 je *inflexním bodem* funkce f , jestliže existuje levé ryzí okolí $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 a pravé ryzí okolí $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 taková, že f je ryze konvexní na $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ a ryze konkávní na $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$, nebo naopak f je ryze konvexní na $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ a ryze konkávní na $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$.

2.5.14 Poznámky

1. Je-li x_0 inflexní bod funkce f a f' je spojitá v bodě x_0 . Pak f' má v bodě x_0 ostrý lokální extrém. (sr. 2.5.6.1, a 2.5.12).
2. Je-li x_0 inflexní bod funkce f a existuje vlastní nebo nevlastní druhá derivace $f''(x_0)$, pak $f''(x_0) = 0$. Opačné tvrzení neplatí. Z $f''(x_0) = 0$ neplyne, že by x_0 byl inflexní bod funkce f .
Například: $f(x) = x^4$, $f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0$ a v bodě $x_0 = 0$ není inflexní bod funkce f .

2.5.15 Definice

Řekneme, že přímka $p: x = x_0$ je *asymptotou bez směrnice* funkce f , jestliže funkce f má v x_0 alespoň jednu nevlastní jednostrannou limitu.

Řekneme, že přímka $p: y = ax + b$ je *asymptotou se směrnicí* funkce f , jestliže funkce f je definována v okolí ∞ (resp. $-\infty$) a platí $\lim_{x \rightarrow \infty} (ax + b - f(x)) = 0$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + b - f(x)) = 0$).

Libovolná funkce může mít nejvýše dvě asymptoty se směrnicí, může však mít libovolný počet asymptot bez směrnice.

2.5.16 Věta

Přímka $y = ax + b$ je asymptotou se směrnicí funkce f právě tehdy, když $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$
 $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = b \right)$.

D.: $\Rightarrow$: Pokud $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (ax + b - f(x)) = 0$ pak podle 1.6.7.7 a 1.6.7.4 také $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax + b - f(x)}{x} = 0$, tedy

$$0 = a - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \text{ neboli } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a.$$

Dále z $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (ax + b - f(x)) = 0$ plyne $0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (ax - f(x)) + b$ a tedy $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b$.

$\Leftarrow$: Jestliže $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b$, pak $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (ax + b - f(x)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (ax - f(x)) + b = -b + b = 0$. $\square$

2.5.17 Postup při vyšetřování průběhu funkce

1. Určíme $\text{Dom } f$; pokud je to možné, tak nulové body funkce f a intervaly, na nichž je f kladná a záporná.
2. Vypočítáme f' ; určíme nulové body f' (stacionární body); body, v nichž f' není definována; body, v nichž f' je kladná a záporná (Tj. určíme intervaly monotonnosti a lokální extrémy.)
3. Vypočítáme f'' ; určíme nulové body f'' ; body, v nichž f'' není definována; body, v nichž f'' je kladná a záporná (Tj. určíme intervaly konvexity a konkavity, inflexní body.)
4. Vypočítáme příslušné jednostranné limity v „hraničních bodech“ $\text{Dom } f$ (Tj. najdeme všechny asymptoty bez směrnice). Najdeme obě asymptoty se směrnicí (pokud existují).
5. Vypočítáme funkční hodnoty ve význačných bodech (stacionárních, inflexních), případně v několika dalších bodech. V inflexních bodech může být užitečné vypočítat hodnotu derivace.

2.6 Rovinné křivky

2.6.1 Definice

Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ spojité funkce. Množina $C = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^2$ se nazývá (rovinná) křivka, funkce φ, ψ se nazývají *parametrizace křivky* C .

Je-li $I = [a, b]$, body $A = (\varphi(a), \psi(a))$, $B = (\varphi(b), \psi(b))$ se nazývají *krajní body křivky* C . Křivka C se nazývá *uzavřená*, jestliže $A = B$.

- Jedna křivka může mít více parametrizací. Například

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \cos t, & \tilde{\varphi}(t) &= \cos 2t, & \hat{\varphi}(t) &= \cos t \\ \psi(t) &= \sin t, & \tilde{\psi}(t) &= \sin 2t, & \hat{\psi}(t) &= -\sin t, \end{aligned} \quad t \in [0, 2\pi], \quad t \in [0, \pi], \quad t \in [0, 2\pi],$$

jsou tři různé parametrizace kružnice se středem $(0, 0)$ a poloměrem 1.

- Je-li f spojitá funkce, $\text{Dom } f$ je interval, pak graf funkce f je křivka s parametrizací

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= t \\ \psi(t) &= f(t), \end{aligned} \quad t \in \text{Dom } f.$$

- Je-li $C = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in I\}$ křivka, t_0 vnitřní bod intervalu I a funkce φ je na okolí bodu t_0 ryze monotónní (k tomu stačí, aby φ měla v bodě t_0 spojitou derivaci a $\varphi'(t_0) \neq 0$), pak existuje interval $J \subseteq \mathbb{R}$, který obsahuje bod $\varphi(t_0)$ a existuje funkce f definovaná na J tak, že $\{(x, f(x)) : x \in J\} \subseteq C$.

D.: Nechť existuje okolí $\mathcal{O}(t_0)$ bodu t_0 takové, že φ je na $\mathcal{O}(t_0)$ ryze monotónní. Na $\mathcal{O}(t_0)$ existuje funkce φ^{-1} inverzní k funkci φ . Označme $J = \varphi(\mathcal{O}(t_0))$. Pro $x = \varphi(t) \in J$ definujme $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$. $\square$

2.6.2 Poznámka o derivaci funkcí daných parametricky

- Nechť $C = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in I\}$ je křivka, φ, ψ mají spojitou derivaci na I a nechť $\varphi'(t) \neq 0$ pro každé $t \in I$. Pak existuje funkce f definovaná na intervalu $J = \{\varphi(t) : t \in I\}$, která má na tomto intervalu derivaci, přičemž platí $f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pro $x = \varphi(t) \in J$.

D.: Ze spojitosti φ' a z podmínky $\varphi'(t) \neq 0$ na I plyne, že $\varphi'(t) > 0$ pro každé $t \in I$, nebo $\varphi'(t) < 0$ pro každé $t \in I$ a tedy podle 2.5.2 je φ na I ryze monotónní. Podle 1.2.16.2 existuje funkce φ^{-1} inverzní k φ .

Definujme $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ pro $x = \varphi(t)$.

$$\text{Podle 2.1.6 a 2.1.7 je } f'(x) = [\psi(\varphi^{-1}(x))]' = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad \square$$

- Nechť jsou splněny podmínky předchozího tvrzení a nechť funkce φ, ψ mají na I druhé derivace. Pak také funkce f má na J druhou derivaci a platí $f''(x) = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3}$ pro $x = \varphi(t) \in J$.

$$\mathbf{D.}: f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \right)' = \frac{\varphi'(\varphi^{-1}(x))\psi''(\varphi^{-1}(x)) - \varphi''(\varphi^{-1}(x))\psi'(\varphi^{-1}(x))}{(\varphi'(\varphi^{-1}(x)))^2} \frac{1}{\varphi'(t)}. \quad \square$$

- Analogicky lze postupovat při výpočtu vyšších derivací.
- S použitím „diferenciální symboliky“ lze předchozí tvrzení zapsat:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d\psi(t)}{d\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}{\varphi'(t)dt} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2} dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

2.6.3 Definice

Řekneme, že křivka C je *oblouk (jednoduchá křivka)*, jestliže existuje její parametrizace φ, ψ taková, že zobrazení $t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$ je bijektivní.

Křivka se nazývá *jordanovská (jednoduchá uzavřená)*, jestliže je uzavřená a existuje její parametrizace $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že platí implikace $t_1, t_2 \in [a, b], 0 < |t_1 - t_2| < b - a \Rightarrow (\varphi(t_1), \psi(t_1)) \neq (\varphi(t_2), \psi(t_2))$.

Jestliže křivka C není uzavřená a není obloukem, pak pro její libovolnou parametrizaci $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ existují $t_1, t_2 \in I, t_1 \neq t_2$ tak, že $(\varphi(t_1), \psi(t_1)) = (\varphi(t_2), \psi(t_2))$. Bod $(\varphi(t_1), \psi(t_1)) = (\varphi(t_2), \psi(t_2))$ se nazývá *vícenásobný bod (bod větvení) křivky C* .

2.6.4 Definice

Buď C křivka, $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ její parametrizace. Nechť t_0 je vnitřní bod intervalu I a $A = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$ není vícenásobný bod křivky C a nechť existují derivace $\varphi'(t_0), \psi'(t_0)$ a platí $(\varphi'(t_0))^2 + (\psi'(t_0))^2 \neq 0$. Přímka τ procházející bodem A , jejíž směrový vektor je $(\varphi'(t_0), \psi'(t_0))$ se nazývá *tečna ke křivce C v bodě A* .

2.6.5 Poznámka

Nechť křivka C je grafem funkce f , $\text{Dom } f$ je interval a f má derivaci v bodě x_0 . Pak

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= t \\ \psi(t) &= f(t), \quad t \in \text{Dom } f \end{aligned} \quad \text{je parametrizací } C.$$

$$\varphi'(t) = 1, \quad \psi'(t) = f'(t). \quad \text{Tečna ke křivce } C \text{ v bodě } (x_0, f(x_0)) \text{ má parametrické rovnice} \quad \begin{aligned} x &= x_0 + t \\ y &= f(x_0) + f'(x_0)t \end{aligned}$$

Eliminací parametru t dostaneme obecnou rovnici tečny $x - x_0 = \frac{y - f(x_0)}{f'(x_0)}$, neboli $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Tedy definice 2.6.4 souhlasí s tím, jak byla tečna ke grafu funkce zavedena v 2.1.2.7.

Příklad:

$$C : \begin{aligned} x &= \varphi(t) = a \cos^3 t \\ y &= \psi(t) = a \sin^3 t \end{aligned}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0 \text{ je jordanovskou křivkou.}$$

$$\varphi'(t) = -3a \cos^2 t \sin t, \quad \psi'(t) = 3a \sin^2 t \cos t.$$

Tečna ke křivce C existuje v každém bodě $(\varphi(t), \psi(t))$ takovém, že

$$0 \neq (\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 = 9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t, \text{ tedy pro } t \notin \{0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi\}.$$

2.6.6 Definice

Nechť C je oblouk nebo jordanovská křivka. C se nazývá *hladká*, existuje-li její parametrizace $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že

- $\varphi'(t), \psi'(t)$ existují pro každý vnitřní bod $t \in I$. Je-li C uzavřená, $I = [a, b]$, existují $\varphi'_+(a), \varphi'_-(b), \psi'_+(a), \psi'_-(b)$ a platí $\varphi'_+(a) = \varphi'_-(b), \psi'_+(a) = \psi'_-(b)$.
- $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \neq 0$ pro každý vnitřní bod $t \in I$. Je-li C uzavřená, $I = [a, b]$, navíc platí $(\varphi'_+(a))^2 + (\psi'_+(a))^2 \neq 0 \neq (\varphi'_-(b))^2 + (\psi'_-(b))^2$.

C se nazývá *po částech hladká*, existuje-li konečný počet hladkých křivek $C_1, C_2, \dots, C_n$ takových, že $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$.

Křivka je hladká, jestliže nemá vícenásobné body a existuje k ní tečna v každém bodě, který není krajní.

2.6.7 Definice

Budť $C_1 = \{(\varphi_1(t), \psi_1(t)) : t \in I_1\}$, $C_2 = \{(\varphi_2(t), \psi_2(t)) : t \in I_2\}$ křivky a nechtě $(x_0, y_0) = (\varphi_1(t_1), \psi_1(t_1)) = (\varphi_2(t_2), \psi_2(t_2)) \in C_1 \cap C_2$ není ani krajní ani vícenásobný bod žádné z křivek C_1, C_2 . Řekneme, že křivky C_1 a C_2 mají v bodě (x_0, y_0) styk řádu alespoň $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, jestliže

budť existují kladná čísla δ_0, δ a funkce f_1, f_2 takové, že

$$(t_1 - \delta, t_1 + \delta) \subseteq I_1, (t_2 - \delta, t_2 + \delta) \subseteq I_2, (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \subseteq \text{Dom } f_1 \cap \text{Dom } f_2,$$

$$\{(x, f_1(x)) : x_0 - \delta_0 < x < x_0 + \delta_0\} = \{(\varphi_1(t), \psi_1(t)) : t_1 - \delta < t < t_1 + \delta\},$$

$$\{(x, f_2(x)) : x_0 - \delta_0 < x < x_0 + \delta_0\} = \{(\varphi_2(t), \psi_2(t)) : t_2 - \delta < t < t_2 + \delta\},$$

a funkce f_1, f_2 mají v bodě x_0 styk řádu alespoň n ,

nebo existují kladná čísla $\varepsilon_0, \varepsilon$ a funkce g_1, g_2 takové, že

$$(t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon) \subseteq I_1, (t_2 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon) \subseteq I_2, (y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0) \subseteq \text{Dom } g_1 \cap \text{Dom } g_2,$$

$$\{(g_1(y), y) : y_0 - \varepsilon_0 < y < y_0 + \varepsilon_0\} = \{(\varphi_1(t), \psi_1(t)) : t_1 - \varepsilon < t < t_1 + \varepsilon\},$$

$$\{(g_2(y), y) : y_0 - \varepsilon_0 < y < y_0 + \varepsilon_0\} = \{(\varphi_2(t), \psi_2(t)) : t_2 - \varepsilon < t < t_2 + \varepsilon\},$$

a funkce g_1, g_2 mají v bodě y_0 styk řádu alespoň n

2.6.8 Definice

Nechtě C je křivka, K je kružnice se středem (x_S, y_S) a poloměrem r a $(x_0, y_0) \in C \cap K$.

Kružnice K se nazývá *oskulační kružnice křivky C v bodě (x_0, y_0)* , jestliže křivky C, K mají v bodě (x_0, y_0) styk řádu alespoň 2.

Střed oskulační kružnice se nazývá *střed křivosti křivky C v bodě (x_0, y_0)* , poloměr oskulační kružnice se nazývá *poloměr křivosti křivky C v bodě (x_0, y_0)* , jeho převrácená hodnota $\frac{1}{r}$ se nazývá *křivost křivky C v bodě (x_0, y_0)* . Množina všech středů křivosti křivky C ve všech jejích bodech se nazývá *evoluta křivky C* .

2.6.9 Věta

Budť $C = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in I\}$ hladká křivka, t_0 vnitřní bod intervalu I a nechtě funkce φ, ψ mají v bodě t_0 druhé derivace. Nechtě $(x_0, y_0) = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$ není vícenásobný bod křivky C a platí $\varphi'(t_0)\psi''(t_0) - \varphi''(t_0)\psi'(t_0) \neq 0$. Pak má křivka C v bodě (x_0, y_0) jedinou oskulační kružnici o středu (x_S, y_S) a poloměru r , kde

$$\begin{aligned} x_S &= \varphi(t_0) - \frac{(\varphi'(t_0))^2 + (\psi'(t_0))^2}{\varphi'(t_0)\psi''(t_0) - \varphi''(t_0)\psi'(t_0)}\psi'(t_0), \\ y_S &= \psi(t_0) + \frac{(\varphi'(t_0))^2 + (\psi'(t_0))^2}{\varphi'(t_0)\psi''(t_0) - \varphi''(t_0)\psi'(t_0)}\varphi'(t_0), \\ r &= \frac{((\varphi'(t_0))^2 + (\psi'(t_0))^2)^{3/2}}{|\varphi'(t_0)\psi''(t_0) - \varphi''(t_0)\psi'(t_0)|}. \end{aligned}$$

D.: Poznamenejme, že z existence druhé derivace funkce φ v bodě t_0 plyne spojitost její první derivace v tomto bodě.

Nechtě nejprve $\varphi'(t_0) \neq 0$. Pak nastává první případ z definice 2.6.7.

Nechtě $K = \{(x_S + r \cos t, y_S + r \sin t) : t \in [0, 2\pi]\}$ je oskulační kružnice křivky C v bodě $(x_0, y_0) = (\varphi(t_0), \psi(t_0)) = (x_S + r \cos \tau_0, y_S + r \sin \tau_0)$.

Podle 2.4.3 je

$$\psi(\varphi^{-1}(x_0)) = f(x_0), \quad \psi'(\varphi^{-1}(x_0)) = f'(x_0), \quad \psi''(\varphi^{-1}(x_0)) = f''(x_0),$$

kde f je funkce definovaná v okolí bodu x_0 a daná parametricky rovnicemi kružnice K . Podle 2.6.2 je

$$\begin{aligned}\psi'(\varphi^{-1}(x_0)) &= \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} = \frac{r \cos \tau_0}{-r \sin \tau_0} = -\cotg \tau_0, \\ \psi''(\varphi^{-1}(x_0)) &= \frac{\varphi'(t_0)\psi''(t_0) - \varphi''(t_0)\psi'(t_0)}{(\varphi'(t_0))^3} = \frac{(-r \sin \tau_0)(-r \sin \tau_0) - (-r \cos \tau_0)(r \cos \tau_0)}{-r^3 \sin^3 \tau_0} = \\ &= -\frac{1}{r \sin^3 \tau_0}.\end{aligned}$$

Máme tedy soustavu čtyř rovnic pro čtyři neznámé τ_0, x_S, y_S, r :

$$\begin{aligned}\varphi(t_0) &= x_S + r \cos \tau_0, \\ \psi(t_0) &= y_S + r \sin \tau_0, \\ \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} &= -\cotg \tau_0, \\ \frac{\varphi'(t_0)\psi''(t_0) - \varphi''(t_0)\psi'(t_0)}{(\varphi'(t_0))^3} &= -\frac{1}{r \sin^3 \tau_0},\end{aligned}$$

která má jediné řešení dané formulemi v tvrzení věty.

Nechť nyní $\varphi'(t_0) = 0$. Pak, poněvadž křivka C je hladká, ze vztahu $(\varphi'(t_0))^2 + (\psi'(t_0))^2 \neq 0$ plyne $\psi'(t_0) \neq 0$ a nastává druhý případ z definice 2.6.7. Tento případ vyšetříme analogicky. $\square$

2.6.10 Důsledek

Nechť funkce f má v bodě x_0 druhou derivaci $f''(x_0) \neq 0$. Pak graf funkce f má v bodě $(x_0, f(x_0))$ oskulační kružnici, pro jejíž střed a poloměr platí

$$x_S = x_0 - \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)} f'(x_0), \quad y_S = f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)}, \quad r = \frac{(1 + (f'(x_0))^2)^{3/2}}{|f''(x_0)|}.$$

Příklady:

1. Určete křivost paraboly $y = x^2$ v jejím vrcholu.

Ř.: $f(x) = x^2, f'(x) = 2x, f'(0) = 0, f''(x) = 2, \frac{1}{r} = 2. \square$

2. Najděte evolutu elipsy $\begin{aligned} \varphi(t) &= a \cos t \\ \psi(t) &= b \sin t \end{aligned}, t \in [0, 2\pi].$

Ř.: $\begin{aligned} \varphi'(t) &= -a \sin t, \varphi''(t) = -a \cos t, \\ \psi'(t) &= b \cos t, \psi''(t) = -b \sin t, \\ (\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 &= a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t, \\ \varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t) &= ab \sin^2 t + ab \cos^2 t = ab. \end{aligned}$

Parametrické rovnice evoluty:

$$\begin{aligned}x &= a \cos t - \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} b \cos t = \frac{\cos t}{a} (a^2 - a^2 \sin^2 t - b^2 \cos^2 t) = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t \\ y &= b \sin t - \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} a \sin t = \frac{\sin t}{b} (b^2 - a^2 \sin^2 t - b^2 \cos^2 t) = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t\end{aligned}$$

$\square$

2.7 Cvičení

Vypočítejte derivaci funkce

$$1) f(x) = (\sqrt{x} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right),$$

$$2) f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}},$$

$$3) f(x) = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2},$$

$$4) f(x) = \sqrt{\sin x},$$

$$5) f(x) = xe^x(\cos x + \sin x),$$

$$6) f(x) = \sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}},$$

$$7) f(x) = x^2 \log_3 x,$$

$$8) f(x) = \operatorname{tg}(\sin x),$$

$$9) f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}},$$

$$10) f(x) = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x},$$

$$11) f(x) = \ln \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

$$12) f(x) = 3^{\sin^2 x},$$

$$13) f(x) = x^{x^x},$$

$$14) f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt[4]{1+x^4} + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + 1}{\sqrt[4]{1+x^4} - 1}.$$

Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce

$$15) y = \frac{8}{4+x^2} \text{ v bodě } (2, ?), \quad 16) y = x^2 \text{ v bodě } (x_0, ?).$$

17) Úhlem křivek rozumíme úhel tečen těchto křivek ve společném bodě. Určete úhel grafu funkce $y = x^2$ a křivky $x^2 + y^2 = 1$.

18) Na grafu funkce $y = x^3$ najděte bod, v němž je tečna rovnoběžná se sečnou spojující body $(-1, ?)$ a $(?, 8)$.

Vypočítejte limity

$$19) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x},$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\ln \sin x},$$

$$21) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{a}{x},$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right),$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 0+} x^{x^x - 1},$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1},$$

$$25) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}), \quad 26) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right).$$

Najděte Maclaurinův polynom stupně n dané funkce

$$27) f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}, \quad n = 4, \quad 28) f(x) = \sqrt{1 - 2x + x^3} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^3}, \quad n = 3,$$

$$29) f(x) = \sqrt[3]{\sin x^3}, \quad n = 7, \quad 30) f(x) = \operatorname{tg} x, \quad n = 5.$$

Vyšetřete průběh funkce

$$31) f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}, \quad 32) f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}, \quad 33) f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}, \quad 34) f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}.$$

35) Najděte nejmenší a největší hodnotu součinu m -té a n -té mocniny kladných čísel, jejichž součet je a .

36) Jaký největší povrch může mít válec vepsaný kouli o poloměru R ?

37) Jaký nejmenší objem může mít kužel opsaný kouli o poloměru R ?

38) Na elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ najděte v prvním kvadrantu bod takový, že tečna k elipse vedená tímto bodem vytvoří se souřadnými osami trojúhelník nejmenšího obsahu.

39) Jakou výseč je třeba vyříznout z kruhu o poloměru R , aby zbývající část bylo možno svinout do kornoutu o maximálním objemu?

Výsledky: 1) $-\frac{x+1}{2x} \sqrt[3]{x^2}$ 2) $\frac{7}{8\sqrt[8]{x}}$ 3) $\frac{2-4x}{(1+x-x^2)^2}$ 4) $\frac{\sqrt{\cos x \cotg x}}{2}$ 5) $e^x(\sin x + (2x+1)\cos x)$ 6) $-\frac{e^x}{(1+e^x)\sqrt{1-e^{2x}}}$
7) $x \log_3 ex^2$ 8) $\frac{\cos x}{(\sin \sin x)^2}$ 9) $-\frac{1}{\cos x}$ 10) $\arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ 11) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x(1+x)}$ 12) $3^{\sin^2 x} \sin 2x \ln 3$ 13) $(2 \ln x + 1)x^{x+1}$ 14) $-\frac{1}{x^4 \sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$ 15) $x + 2y - 4 = 0, 2x - y - 1 = 0$ 16) $2x_0x - y - x_0^2 = 0, x + 2x_0y - x_0 - 2x_0^3 = 0$ 17) asi $70^\circ 37' 46''$
18) $(-1, -1), (1, 1)$ 19) $-\frac{1}{2}$ 20) 1 21) a 22) $\frac{1}{2}$ 23) 1 24) -2 25) $\frac{1}{3}$ 26) $\frac{1}{2}$ 27) $1 + 2x + 2x^2 - 2x^4$ 28) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3$
29) $x - \frac{1}{18}x^7$ 30) $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$ 31) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; lichá; nulový bod 0; rostoucí $(-\infty, -\sqrt{3}]$, $[\sqrt{3}, \infty)$;

klesající $[-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \sqrt{3}]$; lokální minimum $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$; lokální maximum $f(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$; konvexní $(-\infty, -3)$, $(-1, 0]$, $(1, 3]$; konkávní $[-3, -1)$, $[0, 1)$, $[3, \infty)$; inflexní body $f(3) = \frac{3}{2}$, $f(-3) = -\frac{3}{2}$; asymptoty $x = 1$, $x = -1$ 32) $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; nulový bod 0; rostoucí $(-\infty, -3]$, $(-1, \infty)$; klesající $[-3, -1]$; lokální maximum $f(-3) = -\frac{27}{8}$; konvexní $[0, \infty)$; konkávní $(-\infty, -1)$, $(-1, 0]$; inflexní bod $f(0) = 0$; asymptoty $x = -1$, $x - 2y - 2 = 0$ 33) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; lichá; nulový bod 0; rostoucí $[-1, 1]$; klesající $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$; lokální minimum $f(-1) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$; lokální maximum $f(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$; konvexní $[-\sqrt{3}, 0]$, $[\sqrt{3}, \infty)$; konkávní $(-\infty, -\sqrt{3}]$, $[0, \sqrt{3}]$; inflexní body $f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{\frac{3}{e^3}}$, $f(0) = 0$, $f(\sqrt{3}) = \sqrt{\frac{3}{e^3}}$; asymptota $y = 0$ 34) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; nulový bod 1; klesající $(-\infty, \infty)$; konvexní $(-\infty, 0]$, $[1, \infty)$; konkávní $[0, 1]$; inflexní body $f(0) = 1$, $f(1) = 0$; asymptota $y = -x$ 35) největší hodnota $\left(\frac{a}{m+n}\right)^{m+n} m^m n^n$, nejmenší hodnota není 36) $\pi R^2(1+\sqrt{5})$ 37) $\frac{8}{3}\pi R^3$ 38) $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$, $P_{\min} = ab$ 39) vyříznout úhel $2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi R^3$

	Rovnice v kartézských souřadnicích	Parametrické rovnice	Rovnice v polárních souřadnicích
Kružnice	$x^2 + y^2 = a^2$	$x = a \cos t$ $y = a \sin t$	$r = a$
Elipsa	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$x = a \cos t$ $y = b \sin t$	$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad 0 < \varepsilon < 1$
Parabola	$y^2 = 2px$	$x = \frac{1}{2p}t^2$ $y = t$	$r = \frac{p}{1 + \cos \varphi}$
Hyperbola	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$x = \frac{a}{\cos t}$ $y = \pm b \operatorname{tg} t$	$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad \varepsilon > 1$
Cassiniovy křivky	$(x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) = a^4 - e^4$		$r^2 = e^2 \cos^2 2\varphi \pm \sqrt{e^4 \cos^2 2\varphi + a^4 - e^4}$
Bernoulliova lemniskáta	$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$	$x = \sqrt{2}at \frac{1+t^2}{1+t^4}$ $y = \sqrt{2}at \frac{1-t^2}{1+t^4}$	$r = a\sqrt{2 \cos^2 2\varphi},$ $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$
Cykloida	$x + \sqrt{2ay - y^2} = a \arccos \frac{a-y}{a}$ $x - \sqrt{2ay - y^2} = a \left(2\pi - \arccos \frac{a-y}{a} \right)$	$x = a(t - \sin t)$ $y = a(1 - \cos t)$	
Kardioda (srdcovka)	$(x^2 + y^2 - a^2)^2 = 4a^2((x-a)^2 + y^2)$	$x = a(2 \cos t - \cos 2t)$ $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$	$r = 2a(1 - \cos \varphi)$
Asteroida (hvězdice)	$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$	$x = a \cos^3 \frac{t}{4}$ $y = a \sin^3 \frac{t}{4}$	
Archimedova spirála	$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}$		$r = a\varphi, \quad \varphi \geq 0$
Hyperbolická spirála	$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2}}$		$r = \frac{a}{\varphi}$
Logaritmická spirála	$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \left(\frac{1}{k} \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right)$		$r = ae^{k\varphi}$

Tabulka 2.1: Některé křivky

Kapitola 3

Integrální počet funkcí jedné proměnné

3.1 Primitivní funkce

3.1.1 Definice

Budte f , F funkce definované na intervalu I . Řekneme, že funkce F je *primitivní k funkci* (je *neurčitým integrálem z funkce*) f na I , jestliže na tomto intervalu platí $F' = f$. Označení: $F(x) = \int f(x)dx$.

3.1.2 Poznámky

1. Pokud některý z krajních bodů intervalu I do tohoto intervalu patří, je potřeba v tomto bodě uvažovat příslušnou jednostrannou derivaci.
2. Primitivní funkce je podle 2.1.3 spojitá na I .
3. Primitivní funkce bývá někdy definována obecněji: F je primitivní k f na I , jestliže množina $\{x \in I : F'(x) \neq f(x)\}$ je nejvýše spočetná. ($F'(x) = f(x)$ skoro všude na I .)
V tomto smyslu je například $F(x) = |x|$ zobecněnou primitivní funkcí k $f(x) = \operatorname{sgn} x$ na $I = (-\infty, \infty)$.

3.1.3 Příklady

1. $\frac{x^3}{3} = \int x^2 dx$ na $(-\infty, \infty)$.
2. $\ln x = \int \frac{1}{x} dx$ na $(0, \infty)$
 $\ln(-x) = \int \frac{1}{x} dx$ na $(-\infty, 0)$ $\Rightarrow \ln|x| = \int \frac{1}{x} dx$ na intervalu, který neobsahuje 0.

3.1.4 Věta (o existenci primitivní funkce)

Ke každé funkci spojitě na intervalu I existuje na tomto intervalu funkce primitivní.

D.: Bude proveden později (3.4.6). $\square$

3.1.5 Věta

Je-li F funkce primitivní k f na I a $c \in \mathbb{R}$, pak $F + c$ je rovněž primitivní k f na I .

Jsou-li F a G funkce primitivní k funkci f na intervalu I , pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $G(x) = F(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Je-li F funkce primitivní k f na I pak $\{F + c : c \in \mathbb{R}\}$ je množina všech funkcí primitivních k funkci f na I .

D.: $(F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x)$, druhé tvrzení plyne z 2.3.4.3, třetí je důsledkem prvních dvou. $\square$

3.1.6 Nejdůležitější neurčité integrály

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x|$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x = -\operatorname{arccotg} x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = -\arccos x$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cotg x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}|$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)|.$$

Každý z uvedených vzorců platí na libovolném intervalu, na němž je funkce za znakem $\int$ definována. Platnost uvedených vzorců lze ověřit derivováním.

3.1.7 Věta

Nechť $\int f_i(x) dx = F_i(x)$ na intervalu I , $c_i \in \mathbb{R}$ pro $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pak

$$\int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)) dx = c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) + \dots + c_n F_n(x) \text{ na } I.$$

D.: Plyne přímo z 2.1.5. $\square$

Věta říká, že neurčitý integrál je lineární operátor na množině funkcí.

3.1.8 Věta

Nechť $\int f(x) dx = F(x)$ na I . Pak $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b)$ na $J = \{x \in \mathbb{R} : ax+b \in I\}$.

D.: Podle 2.1.6 je $\left[\frac{1}{a} F(ax+b) \right]' = \frac{1}{a} F'(ax+b)[ax+b]' = F'(ax+b) = f(ax+b)$. $\square$

3.1.9 Příklad

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) = \frac{x + \sin x \cos x}{2}$$

3.1.10 Věta (metoda “per partes”)

Nechť funkce u , v mají derivaci na intervalu I . Existuje-li na I primitivní funkce k jedné z funkcí $u'v$, uv' , existuje i ke druhé z nich a platí $\int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x)$ na I .

D.: Nechť existuje primitivní funkce k $u'v$. Podle 2.1.5 je $(uv)' = u'v + uv'$, tedy $uv' = (uv)' - u'v$.
 $\int (u(x)v(x))' dx = u(x)v(x)$ na I , $\int u'(x)v(x) dx$ existuje a tedy podle 3.1.7
 $\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$ na I , což je vzorec z tvrzení věty. $\square$

3.1.11 Poznámky

1. Je-li alespoň jedna z derivací u' , v' spojitá na I , jsou předpoklady věty 3.1.10 splněny.

2. Vzorec uvedený v 3.1.10 ve tvaru

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

dává metodu integrace v případě, kdy integrovaná funkce je součinem dvou funkcí, z nichž jedna je derivací známé funkce.

3. Metodou „per partes“ jsou řešitelné zejména tyto typy integrálů:

- $\int x^n e^{ax} dx$: $u(x) = x^n$, $v' = e^{ax}$
- $\int x^n \cos ax dx$: $u(x) = x^n$, $v' = \cos ax$
- $\int x^n \sin ax dx$: $u(x) = x^n$, $v' = \sin ax$
- $\int x^n \operatorname{arctg} ax dx$: $u(x) = \operatorname{arctg} ax$, $v' = x^n$
- $\int x^n \operatorname{arccotg} ax dx$: $u(x) = \operatorname{arccotg} ax$, $v' = x^n$
- $\int x^n \arccos ax dx$: $u(x) = \arccos ax$, $v' = x^n$
- $\int x^n \arcsin ax dx$: $u(x) = \arcsin ax$, $v' = x^n$
- $\int x^a \log_b^n x dx$: $u(x) = \log_b^n x$, $v' = x^a$

Příklad:

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= x \ln x - \int dx = x \ln x - x = x \ln \frac{x}{e} \\ u = \ln x & \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & \quad v = x \end{aligned}$$

3.1.12 Věta (substituční metoda)

Nechť f je funkce definovaná na intervalu I a φ je prostá funkce, která má derivaci na intervalu J takovém, že $\varphi(J) = I$. $\int f(x)dx$ existuje na I právě tehdy, když na J existuje $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$; v tomto případě platí:

$$F(x) = \int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) \quad , \quad G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(x)) \quad .$$

D.: Podle 2.1.6 pokud $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$, pak $\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Podle 2.1.6 a 2.1.7 pokud $\frac{d}{dt}G(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, pak

$$\frac{d}{dx}G(\varphi^{-1}(x)) = G'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x). \quad \square$$

Schéma použití věty je jednoduché:

$$\begin{aligned} \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt &= \int f(x)dx = F(x) = F(\varphi(t)) \\ \varphi(t) &= x \\ \varphi'(t)dt &= dx \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t) = G(\varphi^{-1}(x)) \\ x &= \varphi(t) \\ dx &= \varphi'(t)dt \end{aligned}$$

3.1.13 Příklad

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \frac{t + \sin t \cos t}{2} = \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2}$$

$$\begin{aligned} x &= \sin t \\ dx &= \cos t dt \end{aligned}$$

Předposlední rovnost platí podle 3.1.9.

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad I = [-1, 1], \quad \varphi(t) = \sin t, \quad J = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

3.1.14 Integrace racionálních funkcí

V rozkladu racionální funkce na parciální zlomky (viz 1.5.15) se vyskytují zlomky tvaru

$$\frac{p}{(x-\alpha)^m} \text{ a } \frac{cx+d}{[(x-a)^2+b^2]^n}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-\alpha)^m} &= \int \frac{dt}{t^m} = \begin{cases} \frac{1}{1-m} \frac{1}{t^{m-1}} = \frac{1}{1-m} \frac{1}{(x-\alpha)^{m-1}}, & m \neq 1 \\ \ln |t| = \ln |x-\alpha|, & m = 1 \end{cases} \\ x-\alpha &= t \\ dx &= dt \end{aligned}$$

$$\frac{cx+d}{[(x-a)^2+b^2]^n} = \frac{c}{2} \frac{2(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^n} + \frac{ac+d}{[(x-a)^2+b^2]^n}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^n} dx &= \int \frac{dt}{t^n} = \begin{cases} \frac{1}{1-n} \frac{1}{t^{n-1}} = \frac{1}{1-n} \frac{1}{((x-a)^2+b^2)^{n-1}}, & n \neq 1 \\ \ln |t| = \ln |(x-a)^2+b^2|, & n = 1 \end{cases} \\ (x-a)^2+b^2 &= t \\ 2(x-a)dx &= dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^n} &= \int \frac{bdt}{(b^2t^2+b^2)^n} = \frac{1}{b^{2n-1}} \int \frac{dt}{(t^2+1)^n} \\ x-a &= bt \\ dx &= bdt \end{aligned}$$

Označme $K_n = \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$. Pak

$$K_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t$$

$$\begin{aligned} K_n &= \int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}} dt = \\ u &= \frac{1}{(t^2+1)^n} & u' &= \frac{-2nt}{(t^2+1)^{n+1}} \\ v' &= 1 & v &= t \\ & & &= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n \left(\int \frac{dt}{(t^2+1)^n} - \int \frac{dt}{(t^2+1)^{n+1}} \right) = \\ & & &= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n(K_n - K_{n+1}) \end{aligned}$$

Tedy $K_n = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2nK_n - 2nK_{n+1}$. Odtud $K_{n+1} = \frac{t}{2n(t^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}K_n$.

Neboli (píšeme-li $n-1$ místo n)

$$K_n = \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}K_{n-1}$$

3.1.15 Poznámka

Je-li R racionální funkce pak následující integrály lze transformovat na integrály z racionální funkce:

- $\int R(u(x))u'(x)dx$, kde u je libovolná funkce — substituce $u(x) = t$
- $\int R(e^{ax})dx$ — substituce $e^{ax} = t$

3.1.16 Definice

Polynom ve dvou proměnných je funkce $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tvaru

$$P(x, y) = a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + a_{n-2,2}x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{0,n}y^n + \cdots + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{0,0}.$$

Racionální funkce ve dvou proměnných je funkce $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tvaru

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

kde P, Q jsou polynomy ve dvou proměnných.

3.1.17 Integrály, které lze transformovat na integrály z racionální funkce

Symbolem $R(x, y)$ budeme značit racionální funkci ve dvou proměnných x, y .

1. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ — substituce $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$.

2. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ (Eulerovy substituce)

$$a > 0 : \quad \pm\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$$

$$c > 0 : \quad \pm\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$$

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) : \quad \pm\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha_1)$$

3. Binomické integrály $\int x^m(a+bx^n)^pdx$, kde $m, n, p \in \mathbb{Q}$.

$$p \in \mathbb{Z} : \quad x = t^N, \text{ kde } N \text{ je společný jmenovatel čísel } m \text{ a } n$$

$$\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} : \quad a+bx^n = t^N, \text{ kde } N \text{ je jmenovatel zlomku } p$$

$$\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} : \quad \frac{a}{x^n} + b = t^N, \text{ kde } N \text{ je jmenovatel zlomku } p$$

4. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ — substituce $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

V některých případech lze volit jednodušší substituci:

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) : \quad \sin x = t$$

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) : \quad \cos x = t$$

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) : \quad \operatorname{tg} x = t$$

3.1.18 Poznámka

Primitivní funkce k funkci elementární nemusí být elementární, může být tzv. *vyšší funkcí*. Vyššími funkcemi jsou zejména

$$\begin{array}{lll} \int \frac{\sin x}{x} dx = Si(x) & \text{„integrál sinus“} & \int \frac{\cos x}{x} dx = Ci(x) \quad \text{„integrál cosinus“} \\ \int \frac{dx}{\ln x} = Li(x) & \text{„logaritmický integrál“} & \int e^{-x^2} dx \quad \text{Gaussova funkce} \\ \int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx & \text{Fresnelovy integrály} & \end{array}$$

Binomické integrály $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, pokud žádné z čísel $p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + p$ není celé.

Není známo obecné pravidlo, které by umožnilo rozhodnout, zda primitivní funkci neumíme vyjádřit jako elementární v důsledku nevhodných integračních metod, nebo zda skutečně vyjadřuje vyšší funkci.

3.2 Určitý integrál

V celém tomto odstavci bude f ohraničená funkce definovaná na uzavřeném intervalu $[a, b]$.

3.2.1 Definice

Dělením uzavřeného intervalu $[a, b]$ rozumíme množinu $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ takovou, že

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Čísla $x_0, x_1, \dots, x_n$ nazýváme *dělicí body*, intervaly $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ nazýváme *dělicí intervaly* dělení D .

Číslo $\nu(D) = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, 2, \dots, n\}$ nazýváme *norma* dělení D .

Symbolem $\vartheta([a, b])$ označíme množinu všech dělení intervalu $[a, b]$.

Jsou-li $D_1 \in \vartheta([a, b])$, $D_2 \in \vartheta([a, b])$ taková, že $D_1 \subseteq D_2$ (tj. každý dělicí bod D_1 je současně dělicím bodem D_2), řekneme, že dělení D_2 je *zjemněním* dělení D_1 .

3.2.2 Definice

Buďte $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \vartheta([a, b])$, $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Číslo

$$s(D, f) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

nazveme *dolním součtem* a číslo

$$S(D, f) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

nazveme *horním součtem* příslušným k funkci f a dělení D .

(Poznamenejme, že existence čísel m_i a M_i je zaručena ohraničeností funkce f .)

3.2.3 Tvzení

1. Pro libovolné $D \in \vartheta([a, b])$ platí $s(D, f) \leq S(D, f)$.

D.: plyne z toho, že $m_i \leq M_i$ a $x_i - x_{i-1} > 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. $\square$

2. Je-li $D_2 \in \vartheta([a, b])$ zjemněním $D_1 \in \vartheta([a, b])$, pak $s(D_1, f) \leq s(D_2, f)$, $S(D_1, f) \geq S(D_2, f)$.
(Při zjemnění dělení se dolní součet nezmenší a horní součet neztvětší.)

D.: Nechť D_2 má o jeden dělicí bod více, než D_1 , tj.

$D_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_n\}$, $D_2 = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, z, x_k, \dots, x_n\}$.

Označme $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $i = 1, 2, \dots, n$

$m'_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, z]\}$,

$m''_k = \inf\{f(x) : x \in [z, x_k]\}$.

Pak zřejmě $m_k \leq m'_k$, $m_k \leq m''_k$ a tedy

$m_k(x_k - x_{k-1}) = m_k(x_k - z) + m_k(z - x_{k-1}) \leq m_k''(x_k - z) + m_k'(z - x_{k-1})$.
Odtud plyne

$$\begin{aligned} s(D_1, f) &= \sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_k''(x_k - z) + m_k'(z - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = s(D_2, f). \end{aligned}$$

Analogicky ukážeme, že $S(D_1, f) \geq S(D_2, f)$.

Pokud D_2 má o p dělicích bodů více než D_1 , ukážeme platnost tvrzení p -násobným opakováním téže úvahy. $\square$

3. Necht $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Pak pro každé $D \in \mathcal{D}([a, b])$ platí $m(b-a) \leq s(D, f) \leq S(D, f) \leq M(b-a)$.

D.: plyne z 1. a 2., neboť $\{a, b\} \in \mathcal{D}([a, b])$ a každé jiné dělení je zjemněním $\{a, b\}$. $\square$

Množiny $\{s(D, f) : D \in \mathcal{D}([a, b])\}$ a $\{S(D, f) : D \in \mathcal{D}([a, b])\}$ jsou tedy ohraničené. Obě jsou zřejmě neprázdné. To podle 1.1.7(R14) znamená, že následující definice je korektní.

3.2.4 Definice

Číslo

$$\int_{\bar{a}}^b f(x)dx = \sup\{s(D, f) : D \in \mathcal{D}([a, b])\}$$

nazýváme *dolní integrál funkce f na intervalu $[a, b]$* a číslo

$$\int_a^b f(x)dx = \inf\{S(D, f) : D \in \mathcal{D}([a, b])\}$$

nazýváme *horní integrál funkce f na intervalu $[a, b]$* .

3.2.5 Tvrzení

Necht $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Pak platí

$$m(b-a) \leq \int_{\bar{a}}^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

D.: plyne z 3.2.3.3 a z definice 3.2.4. $\square$

3.2.6 Definice

Řekneme, že ohraničená funkce f je na intervalu $[a, b]$ *integrace schopna* (*integrovatelná*, *integrabilní*) v Riemannově smyslu, jestliže

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\bar{a}}^b f(x)dx.$$

V tomto případě definujeme její *Riemannův integrál*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\bar{a}}^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Jestliže

$$\int_{\bar{a}}^b f(x)dx < \int_a^b f(x)dx,$$

řekneme, že funkce f *není na intervalu $[a, b]$ integrace schopna v Riemannově smyslu*.

3.2.7 Příklady

1. $f(x) = c \in \mathbb{R}$ pro $x \in [a, b]$.

Pak $m = M = c$ a tedy podle 3.2.5 je

$$c(b-a) \leq \int_{\bar{a}}^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq c(b-a),$$

z čehož plyne

$$\int_{\bar{a}}^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = c(b-a).$$

2. $f(x) = \chi(x)$ na $[0, 1]$.

$D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \vartheta([0, 1])$, $m_i = 0$, $M_i = 1$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Tedy

$$s(D, f) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n 0(x_i - x_{i-1}) = 0, \quad \int_{\bar{a}}^b \chi(x)dx = 0,$$

$$S(D, f) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n 1(x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = 1, \quad \int_a^b f(x)dx = 1$$

a $\chi(x)$ není integrabilní na $[0, 1]$.

3.2.8 Definice

Nechť $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \vartheta([a, b])$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Množina $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ se nazývá *výběr reprezentantů dělicích intervalů dělení D* .

Číslo

$$\sigma(D, f, \Xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

se nazývá *integrální součet příslušný k funkci f , dělení D a výběru reprezentantů Ξ* .

Poněvadž $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, platí $s(D, f) \leq \sigma(D, f, \Xi) \leq S(D, f)$.

Posloupností v širším smyslu rozumíme zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do libovolné množiny.

Lze tedy mluvit o posloupnosti dělení daného intervalu: $\mathbb{N} \rightarrow \vartheta([a, b])$. Řekneme, že posloupnost dělení $\{D_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \vartheta([a, b])$ je *nulová*, jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(D_n) = 0$.

Ke každému $\delta > 0$ existuje $D \in \vartheta([a, b])$ takové, že $\nu(D) < \delta$. (Stačí položit $n = \left\lceil \frac{b-a}{\delta} \right\rceil + 1$ a interval $[a, b]$ rozdělit na n stejně dlouhých dělicích intervalů.)

3.2.9 Věta

Buď $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ libovolná nulová posloupnost dělení intervalu $[a, b]$. Pak platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(D_n, f) = \int_a^b f(x) dx, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S(D_n, f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Je-li navíc f integrabilní na $[a, b]$ a Ξ_n je libovolný výběr representantů dělicích intervalů dělení D_n , pak platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(D_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(D_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(D_n, f, \Xi_n) = \int_a^b f(x) dx.$$

D.: Nejdříve dokážeme pomocné tvrzení: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $D \in \vartheta([a, b])$, $\nu(D) < \delta$ platí

$$S(D, f) < \int_a^b f(x) dx + \varepsilon.$$

Poněvadž f je ohraničená, existuje $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, že $|f(x)| \leq h$ pro $x \in [a, b]$.

Podle 3.2.4 a podle 1.1.6(s2*) existuje $D_1 = \{y_0, y_1, \dots, y_p\} \in \vartheta([a, b])$, že

$$\int_a^b f(x) dx \leq S(D_1, f) < \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme $\delta = \frac{\varepsilon}{4hp}$. Pak $\delta > 0$. Buď $D = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \vartheta([a, b])$ libovolné takové, že $\nu(D) < \delta$.

Dále položme $D_2 = D \cup D_1 = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ Podle 3.2.3.2 je $S(D_2, f) \leq S(D, f)$.

Dělicí intervaly $[x_{i-1}, x_i]$ rozdělíme do dvou druhů:

- interval 1. druhu, jestliže uvnitř něho neleží žádný dělicí bod y_j
- interval 2. druhu v opačném případě

Každý dělicí interval 1. druhu je rovněž dělicím intervalem dělení D_2 . Tento interval přispívá k $S(D, f)$ i k $S(D_2, f)$ týmž sčítancem $M_i(x_i - x_{i-1})$, tedy v rozdílu $S(D, f) - S(D_2, f)$ se neprojeví.

Uvnitř každého intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ 2. druhu leží alespoň jedno z čísel $y_1, y_2, \dots, y_{p-1}$, což znamená, že intervalů 2. druhu je nejvýše $p - 1$.

Interval druhého druhu přispívá k $S(D, f)$ sčítancem $M_i(x_i - x_{i-1})$, který je v absolutní hodnotě menší nebo roven $h\nu(D) < h\delta$. Absolutní hodnota příspěvku všech intervalů 2. druhu k $S(D, f)$ je tedy $< h\delta p$.

V D_2 je každý interval $[x_{i-1}, x_i]$ 2. druhu rozdělen dělicími body $x_{i-1} = z_r < z_{r+1} < \dots < z_s = x_i$. Označme $M'_k = \sup\{f(x) : x \in [z_{k-1}, z_k]\}$. Opět $|M'_k| \leq h$ a tedy absolutní hodnota příspěvku intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ do součtu $S(D_2, f)$ jest

$$\left| \sum_{k=r+1}^s M'_k(z_k - z_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=r+1}^s h(z_k - z_{k-1}) = h(z_s - z_r) = h(x_i - x_{i-1}) < h\nu(D) < h\delta.$$

Absolutní hodnota příspěvků všech intervalů 2. druhu k $S(D_2, f)$ je tedy $< h\delta p$.

Odtud plyne, že $S(D, f) - S(D_2, f) < 2h\delta p = \frac{\varepsilon}{2}$, neboli $S(D, f) < S(D_2, f) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Podle 3.2.3.2 je $S(D_2, f) \leq S(D_1, f)$ a tedy

$$S(D, f) < S(D_2, f) + \frac{\varepsilon}{2} \leq S(D_1, f) + \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

což je pomocné tvrzení.

Buď nyní $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle pomocného tvrzení existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že pro každé $D \in \mathcal{V}([a, b])$, $\nu(D) < \delta$ platí

$$S(D, f) < \int_a^b f(x) dx + \varepsilon.$$

Poněvadž

$$S(D, f) \geq \int_a^b f(x) dx,$$

platí

$$\left| S(D, f) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Poněvadž posloupnost $\{D_n\}$ je nulová, k $\delta > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí $\nu(D_n) < \delta$. To znamená, že pro $n \geq n_0$ platí

$$\left| S(D_n, f) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon,$$

neboli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(D_n, f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Analogicky dokážeme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(D_n, f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Je-li f integrabilní na $[a, b]$, je

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx,$$

takže

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(D_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(D_n, f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Poslední tvrzení věty nyní plyne z nerovnosti $s(D, f) \leq \sigma(D, f, \Xi) \leq S(D, f)$ a z [1.3.7](#). $\square$

3.2.10 Věta (Nutná a dostatečná podmínka integrability)

Funkce f je na $[a, b]$ integrabilní právě tehdy, když ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje $D \in \mathcal{V}([a, b])$ takové, že $S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon$.

D.: $\Rightarrow$: Nechť f je integrabilní. Buďte $\varepsilon > 0$ libovolné a $\{D_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{V}([a, b])$ libovolná nulová. Podle [3.2.9](#) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že

$$\left| s(D_{n_0}, f) - \int_a^b f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| S(D_{n_0}, f) - \int_a^b f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tedy pro D_{n_0} platí

$$\begin{aligned} S(D_{n_0}, f) - s(D_{n_0}, f) &= |S(D_{n_0}, f) - s(D_{n_0}, f)| \leq \\ &\leq \left| S(D_n, f) - \int_a^b f(x) dx \right| + \left| \int_a^b f(x) dx - s(D_n, f) \right| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$: Necht' je podmínka splněna. Buď $\varepsilon > 0$ a $D \in \vartheta([a, b])$ takové dělení, že $S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon$. Protože

$$\int_a^b f(x) dx \leq S(D, f), \quad \int_{\bar{a}}^b f(x) dx \geq s(D, f),$$

platí

$$\int_a^b f(x) dx - \int_{\bar{a}}^b f(x) dx < \varepsilon.$$

Poněvadž ε je libovolné, je možno poslední nerovnost splnit pouze tehdy, když

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_{\bar{a}}^b f(x) dx.$$

Poněvadž opačná nerovnost platí podle 3.2.5 vždy, jest

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\bar{a}}^b f(x) dx$$

a f je integrabilní. $\square$

3.2.11 Věta

Je-li funkce f monotonní na $[a, b]$, pak je na tomto intervalu integrabilní.

D.: Necht' pro určitost je f na $[a, b]$ neklesající.

Je-li $f(a) = f(b)$, je f na $[a, b]$ konstantní a podle 3.2.7.1 je integrabilní.

Necht' $f(a) < f(b)$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné a $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \vartheta([a, b])$ takové, že $\nu(D) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$.
 $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_{i-1})$, $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_i)$, tedy

$$\begin{aligned} S(D, f) - s(D, f) &= \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))\nu(D) = \\ &= \nu(D)(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})) = \\ &= \nu(D)(f(x_n) - f(x_0)) = \nu(D)(f(b) - f(a)) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}(f(b) - f(a)) = \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Podle 3.2.10 je f integrabilní na $[a, b]$. $\square$

3.2.12 Věta

Je-li funkce f spojitá na $[a, b]$, pak je na tomto intervalu integrabilní.

D.: Buď f spojitá a $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle 1.7.20 je f na $[a, b]$ spojitá stejnoměrně, tedy k $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ existuje

$\delta > 0$ takové, že pro $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$ je $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Buď $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{D}([a, b])$, $\nu(D) < \delta$,

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Podle 1.7.12 existují $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takové, že $f(y_i) = m_i$, $f(z_i) = M_i$.

Dále $|y_i - z_i| < \delta$ a tedy $f(z_i) - f(y_i) = M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Odtud

$$\begin{aligned} S(D, f) - s(D, f) &= \sum_{i=1}^n f(z_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n f(y_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (f(z_i) - f(y_i))(x_i - x_{i-1}) < \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$

a podle 3.2.10 je f integrabilní na $[a, b]$. $\square$

3.2.13 Definice

Množina $M \subseteq \mathbb{R}$ se nazývá *nulová*, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje konečný počet otevřených intervalů $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ takových, že $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \varepsilon$ a $M \subseteq (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup \dots \cup (a_n, b_n)$.

Platí

- Každá konečná množina je nulová.
- Sjednocení konečně mnoha nulových množin je nulová množina.
- Množina členů konvergentní posloupnosti je nulová.
- Množina členů posloupnosti, která má konečný počet hromadných bodů, je nulová.

3.2.14 Věta

Je-li množina bodů nespojitosti funkce f na intervalu $[a, b]$ nulová, pak je f integrabilní na $[a, b]$.

D.: Bude proveden později (3.3.15). $\square$

Příklad: $[a, b] = [0, 1]$, $f(x) = \begin{cases} (-1)^n, & x \in \left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right], n = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Množina bodů nespojitosti $M = \left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ tvoří konvergentní posloupnost. Je to tedy nulová množina, což znamená, že f je integrabilní na $[0, 1]$. (Platí $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3}$.)

3.2.15 Věta (Leibnizova [1646 – 1716] – Newtonova [1642 – 1727] formule)

Nechť funkce f je integrabilní na $[a, b]$ a nechť funkce F je spojitá na $[a, b]$ a na (a, b) primitivní k f . Pak

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

D.: Buď $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \vartheta([a, b])$. F splňuje na $[x_{i-1}, x_i]$ předpoklady 2.3.3. Existuje tedy $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ takové, že $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Označme $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$. Pak

$$\sigma(D, f, \Xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a).$$

To znamená: Pro libovolné $D \in \vartheta([a, b])$ existuje výběr representantů Ξ takový, že $\sigma(D, f, \Xi) = F(b) - F(a)$. Buď nyní $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ libovolná nulová posloupnost dělení intervalu $[a, b]$. Ke každému D_n existuje výběr representantů Ξ_n takový, že $\sigma(D_n, f, \Xi_n) = F(b) - F(a)$. Podle 3.2.9 je

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(D_n, f, \Xi_n) = F(b) - F(a).$$

□

Budeme používat označení $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

3.2.16 Poznámka

Je-li funkce G spojitá na $[a, b]$ a na (a, b) primitivní k f , pak podle 3.1.5 je $G(x) = F(x) + c$ a tedy

$$[G(x)]_a^b = [F(x) + c]_a^b = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

To znamená, že formule z věty 3.2.15 nezávisí na výběru primitivní funkce.

3.2.17 Příklad

$$\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x dx$$

$x^2 \operatorname{arctg} x$ je na $[0, 1]$ spojitá, tedy podle 3.2.12 integrabilní.

$\frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6} \ln(x^2 + 1) - \frac{x^2}{6}$ je primitivní k $x^2 \operatorname{arctg} x$ a na $[0, 1]$ spojitá. Tedy

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x dx &= \left[\frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6} \ln(x^2 + 1) - \frac{x^2}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{6} \ln 2 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \ln 1 = \\ &= \frac{1}{3} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6} \ln 2 - \frac{1}{6} = \frac{1}{12} (\pi - 2 + \ln 2). \end{aligned}$$

3.2.18 Definice

Řekneme, že funkce f definovaná na (a, b) je na tomto intervalu *integrace schopna* (*integrovatelná*, *integrabilní*) v *Newtonově smyslu*, jestliže existuje funkce F spojitá na $[a, b]$ a primitivní k f na (a, b) .

V tomto případě definujeme její *Newtonův integrál*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Věta 3.2.15 říká, že je-li funkce f integrabilní na $[a, b]$ v Riemannově i v Newtonově smyslu, pak se její Riemannův a Newtonův integrál rovnají.

3.2.19 Poznámky

1. Integrace „per partes“ pro určité integrály:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

2. Substituční metoda pro určité integrály:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

3.3 Vlastnosti Riemannova integrálu

V celém odstavci bude pojem „integrabilní funkce“ znamenat funkci integrace schopnou v Riemannově smyslu.

3.3.1 Věta

Nechť f je funkce integrabilní na intervalu $[a, b]$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c \leq f(x) \leq d$ pro každé $x \in [a, b]$. Pak

$$c(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq d(b-a).$$

D.: Plyne z 3.2.5, neboť $c \leq \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $d \geq \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. $\square$

3.3.2 Důsledky

1. Nechť f je funkce integrabilní na intervalu $[a, b]$. Jestliže $f(x) \geq 0$ pro každé $x \in [a, b]$, pak

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

2. Nechť f je funkce integrabilní na intervalu $[a, b]$. Jestliže $|f(x)| \leq c$ pro každé $x \in [a, b]$, pak

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq c(b-a).$$

D.: Plyne z nerovnosti $-c(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq c(b-a)$. $\square$

3.3.3 Věta (aditivita vzhledem k integrovaným funkcím)

Nechť f a g jsou funkce integrabilní na intervalu $[a, b]$. Pak je i funkce $f + g$ integrabilní na intervalu $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

D.: Buď $D = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \vartheta([a, b])$ libovolné a označme
 $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $n_i = \inf\{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $p_i = \inf\{f(x) + g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.
Na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ platí $m_i + n_i \leq f(x) + g(x)$ a tedy $m_i + n_i \leq p_i$, což znamená, že
 $m_i(x_i - x_{i-1}) + n_i(x_i - x_{i-1}) \leq p_i(x_i - x_{i-1})$.
Sečtením těchto nerovností pro i od 1 do n dostaneme $s(D, f) + s(D, g) \leq s(D, f + g)$.
Buď nyní $\{D_n\}_{n=0}^\infty$ libovolná nulová posloupnost dělení intervalu $[a, b]$. Pak platí
 $s(D_n, f) + s(D_n, g) \leq s(D_n, f + g)$ a limitním přechodem $n \rightarrow \infty$ dostaneme podle 3.2.9, 1.3.5.1 a 1.3.6.2

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b (f(x) + g(x))dx.$$

Analogicky odvodíme

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx \leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Z těchto nerovností plyne tvrzení. $\square$

3.3.4 Věta (homogenita vzhledem k integrovaným funkcím)

Nechť f je funkce integrabilní na intervalu $[a, b]$ a $c \in \mathbb{R}$. Pak funkce cf je integrabilní na intervalu $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx.$$

D.: Nechť $D = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \vartheta([a, b])$ libovolné a označme

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, & M_i &= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \\ n_i &= \inf\{cf(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, & N_i &= \sup\{cf(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}. \end{aligned}$$

Pro $c = 0$ je tvrzení zřejmé.

Nechť $c > 0$. Pak je $n_i = cm_i$, $N_i = cM_i$ a tedy $s(D, cf) = cs(D, f)$, $S(D, cf) = cS(D, f)$.

Pro libovolnou nulovou $\{D_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \vartheta([a, b])$ platí:

$$\begin{aligned} \int_a^b cf(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} s(D_n, cf) = c \lim_{n \rightarrow \infty} s(D_n, f) = c \int_a^b f(x)dx, \\ \int_a^b cf(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(D_n, cf) = c \lim_{n \rightarrow \infty} S(D_n, f) = c \int_a^b f(x)dx, \end{aligned}$$

z čehož plyne tvrzení.

Nechť $c < 0$. Pak $n_i = cM_i$, $N_i = cm_i$ a tedy $s(D, cf) = cS(D, f)$, $S(D, cf) = cs(D, f)$ a důkaz dokončíme s využitím nulové posloupnosti $\{D_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \vartheta([a, b])$. $\square$

3.3.5 Důsledek (linearita Riemannova integrálu)

Nechť $f_1, f_2, \dots, f_n$ jsou funkce integrabilní na intervalu $[a, b]$ a $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Pak je funkce $c_1f_1 + c_2f_2 + \dots + c_nf_n$ integrabilní na intervalu $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b (c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \dots + c_nf_n(x))dx = c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx + \dots + c_n \int_a^b f_n(x)dx.$$

3.3.6 Věta (monotonie vzhledem k integrovaným funkcím)

Nechť f a g jsou funkce integroabilní na intervalu $[a, b]$. Jestliže pro každé $x \in [a, b]$ platí $f(x) \leq g(x)$, pak

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

D.: Pro $x \in [a, b]$ je $g(x) - f(x) \geq 0$ a tedy podle 3.3.2.1 a 3.3.5 je

$$0 \leq \int_a^b (g(x) - f(x))dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx. \quad \square$$

3.3.7 Věta

Nechť funkce f a g jsou integroabilní na intervalu $[a, b]$. Pak je také funkce fg integroabilní na intervalu $[a, b]$.

D.: Nechť nejprve $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ pro $x \in [a, b]$.

Poněvadž funkce f a g jsou integroabilní, jsou ohraničené a tedy existuje $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ takové, že $f(x) \leq k$, $g(x) \leq k$ pro $x \in [a, b]$.

Buď $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolné. K číslu $\frac{\varepsilon}{2k} > 0$ existují podle 3.2.10 dělení D_1 , D_2 intervalu $[a, b]$ taková, že

$$S(D_1, f) - s(D_1, f) < \frac{\varepsilon}{2k}, \quad S(D_2, g) - s(D_2, g) < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Položme $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} = D_1 \cup D_2$.

Podle 3.2.3.2 platí $s(D_1, f) \leq s(D, f)$, $S(D_1, f) \geq S(D, f)$ a tedy

$$S(D, f) - s(D, f) \leq S(D_1, f) - s(D_1, f) < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Obdobně: $S(D, g) - s(D, g) < \frac{\varepsilon}{2k}$.

Označme

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, & M_i &= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \\ n_i &= \inf\{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, & N_i &= \sup\{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \\ p_i &= \inf\{f(x)g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, & P_i &= \sup\{f(x)g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}. \end{aligned}$$

Na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ platí $0 \leq m_i \leq f(x) \leq M_i$, $0 \leq n_i \leq g(x) \leq N_i$ a tedy $m_i n_i \leq f(x)g(x) \leq M_i N_i$. Odtud dále plyne $m_i n_i \leq p_i \leq P_i \leq M_i N_i$, neboli $P_i - p_i \leq M_i N_i - m_i n_i = N_i(M_i - m_i) + m_i(N_i - n_i)$. Poněvadž $N_i \leq k$, $m_i \leq k$, platí $P_i - p_i \leq k((M_i - m_i) + (N_i - n_i))$. Poslední nerovnost vynásobíme $(x_i - x_{i-1})$ a takto vzniklé nerovnosti sečteme pro $i = 1, 2, \dots, n$. Dostaneme:

$$S(D, fg) - s(D, fg) \leq k(S(D, f) - s(D, f) + S(D, g) - s(D, g)) \leq k\left(\frac{\varepsilon}{2k} + \frac{\varepsilon}{2k}\right) = \varepsilon.$$

Podle 3.2.10 je funkce fg integroabilní.

Nechť nyní jsou f , g libovolné. Opět existuje $k \in \mathbb{R}$, že $f(x) \leq k$, $g(x) \leq k$ pro $x \in [a, b]$.

Podle 3.3.5 jsou funkce $k - f(x) \geq 0$, $k - g(x) \geq 0$ integroabilní a podle první části důkazu je integroabilní i funkce $h(x) = (k - f(x))(k - g(x))$.

Poněvadž $f(x)g(x) = h(x) + kf(x) + kg(x) - k^2$, je funkce fg podle 3.3.5 integroabilní na intervalu $[a, b]$. $\square$

3.3.8 Věta

Nechť funkce f a g jsou integroabilní na intervalu $[a, b]$. Je-li $|g(x)| \geq c > 0$ pro $x \in [a, b]$, pak je také funkce $\frac{f}{g}$ integroabilní na intervalu $[a, b]$.

D.: Nechť $g(x) \geq c > 0$ pro $x \in [a, b]$.

Buď $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolné. K číslu $c^2\varepsilon > 0$ existuje podle 3.2.10 takové $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{D}([a, b])$, že $S(D, g) - s(D, g) < c^2\varepsilon$.

Označme

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, & M_i &= \sup\{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \\ n_i &= \inf\left\{\frac{1}{g(x)} : x \in [x_{i-1}, x_i]\right\}, & N_i &= \sup\left\{\frac{1}{g(x)} : x \in [x_{i-1}, x_i]\right\}. \end{aligned}$$

Platí $n_i = \frac{1}{M_i}$, $N_i = \frac{1}{m_i}$, $m_i \geq c$, $M_i \geq c$. Odtud dostaneme

$$N_i - n_i = \frac{1}{m_i} - \frac{1}{M_i} = \frac{M_i - m_i}{m_i M_i} \leq \frac{1}{c^2} (M_i - m_i).$$

Tyto nerovnice vynásobíme $(x_i - x_{i-1})$ a sečteme pro $i = 1, 2, \dots, n$. Dostaneme

$$S\left(D, \frac{1}{g}\right) - s\left(D, \frac{1}{g}\right) \leq \frac{1}{c^2} (S(D, g) - s(D, g)) < \varepsilon.$$

Podle 3.2.10 je funkce $\frac{1}{g}$ integrabilní na $[a, b]$.

Je-li $g(x) \leq -c < 0$ pro $x \in [a, b]$, je podle první části důkazu funkce $-\frac{1}{g}$ integrabilní na $[a, b]$ a tedy podle 3.3.4 je také $\frac{1}{g}$ integrabilní na $[a, b]$.

Tvrzení věty je nyní důsledkem 3.3.7, neboť $\frac{f}{g} = f \frac{1}{g}$. $\square$

Poznámka: Předpoklad $|g(x)| \geq c > 0$ nelze obecně nahradit slabším předpokladem $|g(x)| > 0$, neboť v takovém případě funkce $\frac{f}{g}$ nemusí být ohraničená.

$$\text{Např.: } [a, b] = [0, 1], \quad f(x) = 1, \quad g(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

g je integrabilní na $[0, 1]$ podle 3.2.14, $\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ není ohraničená.

3.3.9 Věta

Je-li funkce f integrabilní na intervalu $[a, b]$, pak také funkce $|f|$ je integrabilní na intervalu $[a, b]$ a platí

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

D.: Buď $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolné. Existuje $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{D}([a, b])$ takové, že $S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon$. Označme

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, & M_i &= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \\ n_i &= \inf\{|f(x)| : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, & N_i &= \sup\{|f(x)| : x \in [x_{i-1}, x_i]\}. \end{aligned}$$

Buďte $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$. Pak $|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq M_i - m_i$. Odtud plyne, že pro pevně zvolené y je $|f(x)| \leq |f(y)| + M_i - m_i$. Z vlastností suprema plyne $N_i \leq |f(y)| + M_i - m_i$, neboli $|f(y)| \geq N_i - (M_i - m_i)$. Z vlastností infima nyní plyne $n_i \geq N_i - (M_i - m_i)$, neboli $N_i - n_i \leq M_i - m_i$.

Poslední nerovnice vynásobíme $(x_i - x_{i-1})$ a sečteme přes $i = 1, 2, \dots, n$.

Dostaneme $S(D, |f|) - s(D, |f|) \leq S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon$ a podle 3.2.10 je funkce $|f|$ integrabilní.

Dále pro $x \in [a, b]$ platí $f(x) \leq |f(x)|$, $-f(x) \leq |f(x)|$ a tedy podle 3.3.6

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx, \quad - \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

což znamená

$$- \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

a to je nerovnost v tvrzení věty. $\square$

Poznámka: Obrácené tvrzení neplatí. Např. pro $f(x) = \chi(x) - \frac{1}{2}$ je $|f(x)| = \frac{1}{2}$, což je funkce integrabilní, ale

$$\int_0^1 f(x)dx = -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} = \int_0^1 f(x)dx.$$

(Sr. 3.2.7)

3.3.10 Věta (1. věta o střední hodnotě integrálního počtu)

Nechť funkce f a g jsou integrabilní na intervalu $[a, b]$, $g(x) \geq 0$ pro $x \in [a, b]$, $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Pak existuje $\mu \in [m, M]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

D.: Poněvadž $m \leq f(x) \leq M$ a $g(x) \geq 0$, platí $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ a tedy podle 3.3.6 a 3.3.4 je

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

Je-li $\int_a^b g(x)dx = 0$, pak podle 3.3.6 a 3.3.4 je

$$0 = m \int_a^b g(x)dx = \int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b Mg(x)dx = M \int_a^b g(x)dx = 0$$

a tedy $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Rovnost v tvrzení věty je splněna pro libovolné $\mu \in \mathbb{R}$.

Je-li $\int_a^b g(x)dx > 0$, položíme

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

Pak

$$m = \frac{m \int_a^b g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq \frac{M \int_a^b g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = M.$$

□

3.3.11 Důsledky

1. Nechť funkce f je navíc spojitá. Pak existuje $c \in [a, b]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

D.: plyne z 1.7.15. □

2. Nechť m a M mají stejný význam jako v 3.3.10. Pak existuje $\mu \in [m, M]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

D.: volbou $g(x) = 1$. $\square$

3. Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Pak existuje $c \in [a, b]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

3.3.12 Věta (aditivita vzhledem k integračnímu oboru)

Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$ a f je ohraničená funkce definovaná na $[a, c]$. Pak platí

$$\int_{\bar{a}}^c f(x)dx = \int_{\bar{a}}^b f(x)dx + \int_{\bar{b}}^c f(x)dx, \quad \int_a^{\bar{c}} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{\bar{c}} f(x)dx.$$

Je-li funkce f integrabilní na $[a, b]$ i na $[a, c]$, pak je integrabilní i na $[a, c]$ a platí

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

D.: Nechť $\{D'_n\}$ je nulová posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ a $\{D''_n\}$ je nulová posloupnost dělení intervalu $[b, c]$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $D_n = D'_n \cup D''_n$.

Pak je $D_n \in \vartheta([a, b])$, $\nu(D_n) = \max\{\nu(D'_n), \nu(D''_n)\}$. Tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(D_n) = 0$, neboli $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ je nulová posloupnost dělení intervalu $[a, c]$.

Dále $s(D_n, f) = s(D'_n, f) + s(D''_n, f)$, $S(D_n, f) = S(D'_n, f) + S(D''_n, f)$, z čehož limitním přechodem $n \rightarrow \infty$ s využitím 3.2.9 dostaneme první tvrzení.

Je-li funkce f integrabilní na intervalech $[a, b]$ a $[b, c]$, platí

$$\int_{\bar{a}}^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{\bar{c}} f(x)dx = \int_a^{\bar{c}} f(x)dx,$$

což je druhé tvrzení. $\square$

3.3.13 Poznámky

1. Druhé tvrzení věty 3.3.12 neplatí pro Newtonův integrál.

Např.: $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

2. Větu 3.3.12 lze indukcí zobecnit na libovolný konečný počet intervalů:

Jsou-li $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ taková, že $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ a funkce f je integrabilní na každém intervalu $[a_{i-1}, a_i]$, $i = 2, 3, \dots, n$, pak je f integrabilní i na intervalu $[a_1, a_n]$ a platí

$$\int_{a_1}^{a_n} f(x)dx = \sum_{i=2}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)dx.$$

Analogické tvrzení platí pro horní a dolní integrál.

3.3.14 Věta (monotonie vzhledem k integračnímu oboru)

Nechť funkce f je integrabilní na intervalu $[a, b]$ a nechť $[c, d] \subseteq (a, b)$. Pak je f integrabilní i na intervalu $[c, d]$.

D.: Nechť $\{D'_n\}$, resp. $\{D''_n\}$, resp. $\{D'''_n\}$ je nulová posloupnost dělení intervalu $[a, c]$, resp. $[c, d]$, resp. $[d, b]$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $D_n = D'_n \cup D''_n \cup D'''_n$.

Pak je $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ nulová posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ a platí

$$s(D_n, f) = s(D'_n, f) + s(D''_n) + s(D'''_n), \quad S(D_n, f) = S(D'_n, f) + S(D''_n) + S(D'''_n).$$

Odtud dostaneme limitním přechodem $n \rightarrow \infty$ s využitím 3.2.9

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx, \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx.$$

Odečtením těchto rovností dostaneme

$$0 = \left(\int_a^c f(x)dx - \int_a^c f(x)dx \right) + \left(\int_c^d f(x)dx - \int_c^d f(x)dx \right) + \left(\int_d^b f(x)dx - \int_d^b f(x)dx \right).$$

Poněvadž všechny sčítance jsou nezáporné, musí být nulové. Zejména

$$\int_c^d f(x)dx = \int_c^d f(x)dx.$$

□

3.3.15 Důkaz věty 3.2.14

D.: Buď $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolné.

Poněvadž funkce f je na intervalu $[a, b]$ ohraničená, existuje $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ takové, že $-k \leq f(x) \leq k$ pro každé $x \in [a, b]$.

Buď M množina bodů nespojitosti funkce f . Poněvadž je tato množina nulová, existují

$$a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}, \quad a \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n \leq b$$

takové, že $M \subseteq (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup \dots \cup (a_n, b_n)$ a $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \frac{\varepsilon}{2k}$.

Předpokládejme, že $a < a_1$, $b_n < b$. (V opačném případě bychom provedli analogické úvahy.)

Na každém z intervalů $[a, a_1]$, $[b_1, a_2]$, $\dots$, $[b_{n-1}, a_n]$, $[b_n, b]$ je funkce f spojitá a tedy podle 3.2.12 integrabilní.

Na každém intervalu (a_1, b_1) , (a_2, b_2) , $\dots$, (a_n, b_n) podle 3.2.5 platí

$$-k(b_i - a_i) \leq \int_{a_i}^{b_i} f(x)dx \leq \int_{a_i}^{b_i} f(x)dx \leq k(b_i - a_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Podle 3.3.13.2 je

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{b_n}^b f(x)dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} f(x)dx \geq \\ &\geq \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{b_n}^b f(x)dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)dx - k \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) > \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{b_n}^b f(x)dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)dx - k \frac{\varepsilon}{2k} = \\
&= \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{b_n}^b f(x)dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Analogicky ukážeme, že

$$\int_a^b f(x)dx < \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{b_n}^b f(x)dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx - \int_{\bar{a}}^b f(x)dx < \varepsilon.$$

Poněvadž $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, je

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\bar{a}}^b f(x)dx.$$

□

3.3.16 Věta

Nechť f, g jsou ohraničené funkce na intervalu $[a, b]$ a necht' množina $M = \{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$ je nulová. Je-li jedna z funkcí f, g integrabilní na $[a, b]$, je integrabilní i druhá z nich a platí

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

D.: Necht' funkce f je integrabilní a buď $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolné.

Buď $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ takové, že $-k \leq g(x) \leq k$ pro $x \in [a, b]$.

Poněvadž M je nulová, existují $a \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n \leq b$ takové, že

$$M \subseteq (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup \dots \cup (a_n, b_n), \quad \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \leq \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Podle 3.3.14 je funkce f na každém z intervalů $[a, a_1], [b_1, a_2], [b_2, a_3], \dots, [b_n, b]$ integrabilní.

Na každém z těchto intervalů jsou funkce f, g shodné, tedy i g je na nich integrabilní a platí

$$\int_a^{a_1} f(x)dx = \int_a^{a_1} g(x)dx, \quad \int_{b_1}^{a_2} f(x)dx = \int_{b_1}^{a_2} g(x)dx, \quad \dots, \quad \int_{b_n}^b f(x)dx = \int_{b_n}^b g(x)dx.$$

Na každém z intervalů $[a_i, b_i]$ platí

$$-k(b_i - a_i) \leq \int_{\bar{a}_i}^{b_i} g(x)dx \leq \int_{a_i}^{b_i} g(x)dx \leq k(b_i - a_i).$$

Analogicky jako v důkazu věty 3.2.14 ukážeme

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{a}}^b g(x)dx &> \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{b_n}^b f(x)dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}, \\
\int_a^b g(x)dx &< \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{b_n}^b f(x)dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

z čehož opět vyplýne

$$\int_{\bar{a}}^b g(x)dx = \int_a^{\bar{b}} g(x)dx.$$

□

V důsledku věty 3.3.16 není při úvahách o Riemannovu integrálu nutné předpokládat, že ohraničená funkce je definovaná na celém intervalu $[a, b]$. Stačí, je-li definovaná na $[a, b]$ s výjimkou nulové množiny. Zejména lze tedy hovořit o funkci integrabilní na otevřeném intervalu (a, b) .

3.4 Integrál jako funkce horní meze

3.4.1 Úmluva

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a funkce f je definována v a (tj. $a \in \text{Dom } f$). Pak klademe $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ a nechť funkce f je integrabilní na intervalu $[b, a]$. Pak klademe $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Snadno ověříme, že při této rozšířené definici zůstávají v platnosti všechna tvrzení předchozího odstavce.

Nechť funkce f je integrabilní na $[a, b]$ a $x \in [a, b]$. Podle 3.3.14 je funkce f integrabilní na $[a, x]$. Funkci $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ definovanou na $[a, b]$ nazýváme *integrál jako funkce horní meze*.

3.4.2 Věta

Nechť funkce f je integrabilní na $[a, b]$. Pak je funkce $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ spojitá na $[a, b]$.

D.: Buď $x_0 \in [a, b]$, $\varepsilon > 0$ libovolné.

Poněvadž f je integrabilní, je ohraničená a tedy existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $|f(x)| \leq c$ pro $x \in [a, b]$.

Položme $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$.

Buď $x \in [a, b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ libovolný. Pak

$$|F(x_0) - F(x)| = \left| \int_a^{x_0} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t)dt \right| \leq |x - x_0|c < \delta c = \frac{\varepsilon}{c}c = \varepsilon.$$

(První nerovnost plyne z 3.3.2.2) □

3.4.3 Věta

Nechť je funkce f integrabilní na $[a, b]$ a spojitá v $x_0 \in [a, b]$. Pak funkce $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ má derivaci v x_0 a platí $F'(x_0) = f(x_0)$.

V případě $x_0 = a$ nebo $x_0 = b$ se jedná o příslušnou jednostrannou derivaci.

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Poněvadž f je spojitá v x_0 , k $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$ platí $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Tedy pro $x \neq x_0$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$ platí

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) - \frac{f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right| = \\
 &= \left| \frac{1}{x - x_0} \left(\int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{x_0}^x f(x_0) dt \right) \right| = \\
 &= \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \leq \\
 &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x \frac{\varepsilon}{2} dt \right| = \\
 &= \frac{1}{|x - x_0|} |x - x_0| \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Tedy $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$. $\square$

3.4.4 Důsledek

Je-li funkce f spojitá na $[a, b]$, pak $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ má na $[a, b]$ derivaci a platí $F'(x) = f(x)$.

Buď f integrabilní na $[a, b]$, $c \in [a, b]$ libovolný, pevně zvolený bod. Funkce f je na intervalu s krajními body $c, x \in [a, b]$ (tj. na intervalu $[c, x]$ pro $x > c$ nebo $[x, c]$ pro $x < c$) podle 3.3.14 integrabilní. Lze tedy definovat funkci $F(x) = \int_c^x f(t) dt$.

3.4.5 Poznámka

Nechť f je funkce integrabilní na $[a, b]$ a $c \in [a, b]$. Pak je funkce $F(x) = \int_c^x f(t) dt$ spojitá na $[a, b]$.

Je-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in [a, b]$, má funkce $F = \int_c^x f(t) dt$ v tomto bodě derivaci a platí $F'(x_0) = f(x_0)$.

D.: Podle 3.4.1 a 3.3.12 je $\int_c^x f(t) dt = \int_a^x f(t) dt - \int_a^c f(t) dt$.

$\int_a^c f(t) dt$ je konstanta, tedy spojitá funkce mající nulovou derivaci. Tvzení nyní plyne z 3.4.2 a z 3.4.3. $\square$

3.4.6 Věta (o existenci primitivní funkce)

K funkci f spojitě na intervalu J existuje na tomto intervalu funkce primitivní.

D.: Je-li interval J uzavřený, plyne tvrzení z 3.4.4.

Nechť J není uzavřený. Zvolme pevně $c \in J$ a položme $F(x) = \int_c^x f(t) dt$.

F je definována na celém J , neboť pro $x \in J$ je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu s krajními body c a x a tedy podle 3.2.12 integrabilní.

Buď $x_0 \in J$ libovolný. Zvolme $a, b \in J$, $a \leq \min\{c, x_0\}$, $b \geq \max\{c, x_0\}$.

Pak $c \in [a, b]$, $x_0 \in [a, b]$ a f je spojitá na $[a, b]$. Podle 3.4.5 tedy platí $F'(x_0) = f(x_0)$.

Poněvadž $x_0 \in J$ byl libovolný, platí $F'(x_0) = f(x_0)$ pro každé $x \in J$. $\square$

Je-li f integrabilní funkce na $[a, b]$, lze analogicky uvažovat *integrál jako funkci dolní meze* $G(x) = \int_x^b f(t)dt$, nebo obecněji $G(x) = \int_x^c f(t)dt$ pro $c \in [a, b]$.

3.4.7 Poznámka

Nechť funkce f je integrabilní na $[a, b]$, $c \in [a, b]$. Pak je funkce $G(x) = \int_x^c f(t)dt$ spojitá na $[a, b]$.

Je-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in [a, b]$, má funkce G v tomto bodě derivaci a platí $G'(x_0) = -f(x_0)$.

3.5 Nevlastní integrály

V dosavadních úvahách o $\int_a^b f(x)dx$ jsme předpokládali

(i) $a, b \in \mathbb{R}$, tj. interval (a, b) má konečnou délku,

(ii) f je ohraničená na (a, b) .

V tomto odstavci rozšíříme pojem integrálu na případy, kdy některý z těchto předpokladů není splněn. V takovém případě mluvíme o *nevlastních integrálech*.

Nejdříve budeme uvažovat nesplnění prvního předpokladu.

3.5.1 Definice

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce definovaná na $[a, \infty)$, která je integrabilní na každém intervalu $[a, b]$, kde $b > a$, $b \in \mathbb{R}$.

Položme $F(t) = \int_a^t f(x)dx$.

Existuje-li vlastní limita $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t)$, řekneme, že nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)dx$ *konverguje* a klademe

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t).$$

Neexistuje-li vlastní limita $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t)$, řekneme, že nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)dx$ *diverguje*.

Analogicky definujeme konvergenci nevlastního integrálu $\int_{-\infty}^a f(x)dx$, $a \in \mathbb{R}$.

Je-li funkce f definována na $\mathbb{R}$ a integrabilní na každém uzavřeném intervalu, pak pravíme, že nevlastní integrál $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ *konverguje*, jestliže pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ konvergují nevlastní integrály $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ a $\int_a^\infty f(x)dx$ a klademe

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx.$$

3.5.2 Příklady

$$1. \int_1^\infty \frac{dx}{x^k}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$k \neq 1: F(t) = \int_1^t \frac{dx}{x^k} = \left[\frac{1}{-k+1} \frac{1}{x^{k-1}} \right]_1^t = \frac{1}{1-k} \left(\frac{1}{t^{k-1}} - 1 \right), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \begin{cases} \frac{1}{k-1}, & k > 1 \\ \infty, & k < 1 \end{cases}$$

$$k = 1: F(t) = \int_1^t \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^t = \ln t - \ln 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \infty$$

Tedy $\int_1^\infty \frac{dx}{x^k}$ konverguje pro $k > 1$ a diverguje pro $k \leq 1$.

$$2. \int_0^{\infty} e^{-kx} dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$k \neq 0: F(t) = \int_0^t e^{-kx} dx = \left[-\frac{e^{-kx}}{k} \right]_0^t = \frac{1}{k} - \frac{e^{-kt}}{k}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k > 0 \\ \infty, & k < 0 \end{cases}$$

$$k = 0: F(t) = \int_0^t dx = t, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \infty$$

Tedy $\int_0^{\infty} e^{-kx} dx$ konverguje pro $k > 0$ a diverguje pro $k \leq 0$.

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} [\arctg x]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \arctg t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t \rightarrow -\infty} [\arctg x]_t^0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} (-\arctg t) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Tedy } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

$$4. \int_0^{\infty} \cos x dx$$

$$F(t) = \int_0^t \cos x dx = [\sin x]_0^t = \sin t, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) \text{ neexistuje, } \int_0^{\infty} \cos x dx \text{ diverguje.}$$

$$5. \int_0^{\infty} f(x) dx, \text{ kde } f(x) = \begin{cases} n, & x = n \in \mathbb{N} \\ 0, & x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

$$F(t) = \int_0^t f(x) dx = 0, \text{ tedy } \int_0^{\infty} f(x) dx = 0.$$

Nevlastní integrál může konvergovat, i když je integrovaná funkce neohraničená.

V tvrzeních 3.5.3 – 3.5.8 budeme předpokládat, že všechny uvažované funkce jsou definovány na $[a, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$ a integrabilní na $[a, b]$ pro každé $b > a$.

Tato tvrzení se týkají integrálů typu $\int_a^{\infty} f(x) dx$. Po příslušné úpravě předpokladů však platí i pro integrály typu $\int_{-\infty}^a f(x) dx$.

3.5.3 Věta (Cauchyovo – Bolzanovo kritérium)

Integrál $\int_a^{\infty} f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $x_0 \geq a$ takové, že pro každá dvě

$$t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad t_1 > x_0, \quad t_2 > x_0 \text{ platí } \left| \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

D.: Plyne z 1.6.6. $\square$

3.5.4 Věta (Srovnávací kritérium)

Nechť na intervalu $[a, \infty)$ platí $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Konverguje-li $\int_a^{\infty} g(x) dx$, konverguje i $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

Diverguje-li $\int_a^{\infty} f(x) dx$, diverguje i $\int_a^{\infty} g(x) dx$.

D.: Nechť $\int_a^\infty g(x)dx$ konverguje. Podle 3.5.3 existuje $x_0 \geq a$ takové, že pro každá $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 > x_0$, $t_2 > x_0$ platí $\left| \int_{t_1}^{t_2} g(x)dx \right| < \varepsilon$.

Volme označení tak, že $t_1 < t_2$. Pak podle 3.3.2.1 je $\int_{t_1}^{t_2} g(x)dx \geq 0$, $\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \geq 0$.

Tedy $\left| \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \right| = \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \leq \int_{t_1}^{t_2} g(x)dx = \left| \int_{t_1}^{t_2} g(x)dx \right| < \varepsilon$. (První nerovnost plyne z 3.3.6)

Podle 3.5.3 $\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje.

Nechť $\int_a^\infty f(x)dx$ diverguje. Podle první části důkazu nemůže $\int_a^\infty g(x)dx$ konvergovat. $\square$

3.5.5 Věta (limitní srovnávací kritérium)

Nechť funkce f, g jsou nezáporné na $[a, b)$ a nechť existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R}^*$.

Je-li $c < \infty$ a konverguje-li $\int_a^\infty g(x)dx$, pak konverguje i $\int_a^\infty f(x)dx$.

Je-li $c > 0$ a diverguje-li $\int_a^\infty g(x)dx$, pak diverguje i $\int_a^\infty f(x)dx$.

D.: Nechť $c < \infty$ a $\int_a^\infty g(x)dx$ konverguje.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Existuje $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \geq a$ takové, že pro $x \geq x_0$ platí $c - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < c + \varepsilon$, neboli $f(x) < (c + \varepsilon)g(x)$.

Z konvergence $\int_a^\infty g(x)dx$ plyne konvergence $\int_{x_0}^\infty g(x)dx$ a tedy i konvergence $\int_{x_0}^\infty (c + \varepsilon)g(x)dx$. Odtud podle 3.5.4 plyne konvergence $\int_{x_0}^\infty f(x)dx$ a tedy i konvergence $\int_a^\infty f(x)dx$.

Nechť $c > 0$ a $\int_a^\infty g(x)dx$ diverguje.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} \frac{1}{c}, & c < \infty \\ 0, & c = \infty \end{cases}.$$

Kdyby $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergoval, pak by podle první části důkazu $\int_a^\infty g(x)dx$ konvergoval. $\square$

3.5.6 Důsledky

1. Nechť funkce f, g jsou nezáporné na $[a, b)$. Jestliže $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in (0, \infty)$, pak oba nevlastní integrály

$\int_a^\infty f(x)dx$ a $\int_a^\infty g(x)dx$ buď současně konvergují, nebo současně divergují.

2. Buď f nezáporná funkce na intervalu $[a, \infty)$.

- Jestliže existuje $k \in \mathbb{R}$, $k > 1$ takové, že $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k f(x) < \infty$, pak $\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje.
- Jestliže existuje $k \in \mathbb{R}$, $k \leq 1$ takové, že $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k f(x) > 0$, pak $\int_a^\infty f(x)dx$ diverguje.
- Jestliže existuje $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ takové, že $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{kx} f(x) < \infty$, pak $\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje.

- Jestliže existuje $k \in \mathbb{R}$, $k \leq 0$ takové, že $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{kx} f(x) > 0$, pak $\int_a^\infty f(x) dx$ diverguje.

D.: 3.5.5, 3.5.2.1 a 3.5.2.2. $\square$

3.5.7 Věta (Nutná podmínka konvergence nevlastního integrálu)

Nechť $\int_a^\infty f(x) dx$ konverguje a necht' existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c \in \mathbb{R}^*$. Pak $c = 0$.

D.: Pripustíme $c > 0$.

Podle definice limity existují $x_0 \geq a$ a $k > 0$ takové, že pro $x \geq x_0$ je $f(x) > k$.

$\int_{x_0}^\infty k dx = \lim_{t \rightarrow \infty} k(t - x_0) = \infty$. Podle 3.5.4 diverguje $\int_{x_0}^\infty f(x) dx$ a tedy i $\int_a^\infty f(x) dx$ — spor.

Možnost $c < 0$ vyloučíme analogicky. $\square$

Poznámka: Předpoklad o existenci $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ nelze obecně vynechat, jak ukazuje 3.5.2.5.

3.5.8 Věta

Konverguje-li $\int_a^\infty |f(x)| dx$, pak konverguje i $\int_a^\infty f(x) dx$.

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle 3.5.3 existují $x_0 \geq a$ a $t_1, t_2 > x_0$ takové, že $\left| \int_{t_1}^{t_2} |f(x)| dx \right| < \varepsilon$. Volme $t_1 < t_2$.

Pak $\left| \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(x)| dx = \left| \int_{t_1}^{t_2} |f(x)| dx \right| < \varepsilon$ (první nerovnost platí podle 3.3.9).

Tvrzení nyní plyne z 3.5.3. $\square$

3.5.9 Definice

Nechť f je funkce definovaná na $[a, \infty)$ a integrabilní na $[a, b]$ pro každé $b > a$. Řekneme, že nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x) dx$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje $\int_a^\infty |f(x)| dx$.

Poznámky:

- Z 3.5.8 plyne, že konverguje-li $\int_a^\infty f(x) dx$ absolutně, pak konverguje.
- Je-li f nezáporná funkce na $[a, \infty)$ a integrál $\int_a^\infty f(x) dx$ konverguje, pak konverguje absolutně.

Nyní budeme uvažovat nesplnění druhého z předpokladů uvedených na začátku odstavce.

3.5.10 Definice

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a necht' funkce f je definována na $[a, b)$. Řekneme, že b je *singulární bod* funkce f , jestliže f není ohraničená na $[a, b)$ a pro každé $\beta \in (a, b)$ je integrabilní na $[a, \beta]$.

3.5.11 Definice

Nechť f je funkce definovaná na $[a, b)$ a necht' b je jejím singulárním bodem. Pro $t \in [a, b)$ položme

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx.$$

Existuje-li vlastní $\lim_{t \rightarrow b-} F(t)$, řekneme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x) dx$ *konverguje* a klademe

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b-} F(t).$$

Neexistuje-li vlastní $\lim_{t \rightarrow b-} F(t)$, řekneme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x)dx$ *diverguje*.

Analogicky definujeme singulární bod a pro funkci definovanou na intervalu $(a, b]$ a konvergenci nebo divergenci nevlastního integrálu $\int_a^b f(x)dx$.

3.5.12 Příklad

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^k}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad k > 0$$

$$k \neq 1: F(t) = \int_t^1 \frac{dx}{x^k} = \left[\frac{1}{1-k} \frac{1}{x^{k-1}} \right]_t^1 = \frac{1}{1-k} \left(1 - \frac{1}{t^{k-1}} \right), \quad \lim_{t \rightarrow 0+} F(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-k}, & k < 1 \\ \infty, & k > 1 \end{cases}$$

$$k = 1: F(t) = \int_t^1 \frac{dx}{x} = [\ln x]_t^1 = \ln 1 - \ln t = -\ln t, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} F(t) = \infty$$

Tedy $\int_0^1 \frac{dx}{x^k}$ konverguje pro $k < 1$ a diverguje pro $k \geq 1$.

Pro nevlastní integrály typu $\int_a^b f(x)dx$ platí tvrzení analogická 3.5.3, 3.5.4, 3.5.5 a 3.5.8. Důkazy se provedou shodným způsobem.

3.5.13 Věta (Cauchyovo – Bolzanovo kritérium)

Integrál $\int_a^b f(x)dx$, kde b je singulární bod funkce f konverguje právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $x_0 \in [a, b)$ takové, že pro každá dvě $t_1, t_2 \in (x_0, b)$ platí $\left| \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$.

3.5.14 Věta (Srovnávací kritérium)

Nechť b je singulárním bodem funkce f i funkce g a nechť na intervalu $[a, b)$ platí $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Konverguje-li $\int_a^b g(x)dx$, konverguje i $\int_a^b f(x)dx$.

Diverguje-li $\int_a^b f(x)dx$, diverguje i $\int_a^b g(x)dx$.

3.5.15 Věta (limitní srovnávací kritérium)

Nechť b je singulárním bodem funkce f i funkce g , funkce f, g jsou nezáporné na $[a, b)$ a nechť existuje

$$\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R}^*.$$

Je-li $c < \infty$ a konverguje-li $\int_a^b g(x)dx$, pak konverguje i $\int_a^b f(x)dx$.

Je-li $c > 0$ a diverguje-li $\int_a^b g(x)dx$, pak diverguje i $\int_a^b f(x)dx$.

3.5.16 Věta

Nechť b je singulárním bodem funkce f . Konverguje-li $\int_a^b |f(x)|dx$, pak konverguje i $\int_a^b f(x)dx$.

Analogická tvrzení platí i pro nevlastní integrály typu $\int_a^b f(x)dx$, je-li a singulárním bodem funkce f .

3.6 Aplikace určitého integrálu

3.6.1 Průměrná hodnota (integrální průměr) veličiny $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

3.6.2 Plocha rovinného obrazce

1. Obrazec v kartézských souřadnicích určený nerovnostmi $a \leq x \leq b$, $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$.

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

2. Obrazec v kartézských souřadnicích ohraničený uzavřenou křivkou o parametrických rovnicích $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Křivka je orientována kladně, tj. tak, že plocha leží nalevo od křivky.

$$S = - \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))dt$$

3. Plocha, kterou opisuje průvodič křivky, zadané v polárních souřadnicích rovnicí $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$.

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (r(\varphi))^2 d\varphi$$

3.6.3 Délka rovinné křivky

1. Křivka zadána parametrickými rovnicemi $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$.

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

2. Křivka je grafem funkce $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

3. Křivka zadána v polárních souřadnicích rovnicí $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$.

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi$$

3.6.4 Objem tělesa

1. Těleso ohraničené rovnoběžnými rovinami vzdálenými od sebe na vzdálenost a se známými plochami řezů $S(x)$ rovinami rovnoběžnými s podstavami ve vzdálenosti x .

$$V = \int_0^a S(x) dx$$

2. Těleso vzniklé rotací podgrafu funkce f na intervalu $[a, b]$ kolem osy x .

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

3. Těleso vzniklé rotací podgrafu funkce f na intervalu $[a, b]$ kolem osy y .

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

3.6.5 Plocha pláště rotačního tělesa

1. Těleso vzniklé rotací křivky o parametrických rovnicích $\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}, t \in [\alpha, \beta]$.

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

2. Těleso vzniklé rotací grafu funkce $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

3.7 Numerická integrace

3.7.1 Lemma

Buď f funkce definovaná na intervalu $[a, b]$, která má na intervalu (a, b) druhou derivaci. Pak ke každému $x \in [a, b]$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)(b - x).$$

D.: Označme $P(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Pak P je lineární polynom a platí $P(a) = f(a)$, $P(b) = f(b)$.

Tedy pro $x = a$ nebo $x = b$ platí formule v tvrzení při libovolném $\xi \in (a, b)$.

Buď $x_0 \in (a, b)$ libovolný pevně zvolený bod a položme $F(x) = f(x) - P(x) - \frac{f(x_0) - P(x_0)}{(x_0 - a)(b - x_0)}(x - a)(b - x)$.

Pak platí $F(a) = F(b) = F(x_0) = 0$. Podle 2.3.1 existují $\xi_1 \in (a, x_0)$ a $\xi_2 \in (x_0, b)$ takové, že $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$. Dále opět podle 2.3.1 existuje $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ takové, že $F''(\xi) = 0$.

Pro každé $x \in (a, b)$ platí $P''(x) = 0$, $[(x - a)(b - x)]'' = -2$, tedy $0 = F''(\xi) = f''(\xi) + 2 \frac{f(x_0) - P(x_0)}{(x_0 - a)(b - x_0)}$.

Odtud $f(x_0) = -\frac{f''(\xi)}{2}(x_0 - a)(b - x_0) + P(x_0)$ a poněvadž $x_0 \in (a, b)$ bylo libovolné, je tvrzení dokázáno.

□

3.7.2 Lemma

Buď f funkce definovaná na intervalu $[a, b]$, která má na intervalu (a, b) druhou derivaci takovou, že $|f''(x)| \leq M$ pro každé $x \in (a, b)$. Pak pro každé $x \in [a, b]$ platí

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + \frac{M}{2}(x^2 - (a + b)x + ab) \leq f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - \frac{M}{2}(x^2 - (a + b)x + ab).$$

D.: Podle 3.7.1 je pro každé $x \in [a, b]$

$$\left| f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right| = \frac{|f''(\xi(x))|}{2}(x - a)(b - x) \leq \frac{M}{2}(-x^2 + (a + b)x - ab),$$

z čehož plyne tvrzení. $\square$

3.7.3 Věta (lichoběžníkové pravidlo)

Buď f funkce definovaná na intervalu $[a, b]$, která má na intervalu (a, b) ohraničenou druhou derivaci a buď $n \in \mathbb{N}$. Označme

$$\begin{aligned} h &= \frac{b - a}{n}, \\ x_i &= a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \\ I_n(f, a, b) &= \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)), \\ M &= \sup\{|f''(x)| : x \in (a, b)\}. \end{aligned}$$

Pak

$$\left| I_n(f, a, b) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M(b - a)^3}{12n^2}.$$

D.: Pro každé $i \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ je

$$\begin{aligned} & \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \pm \frac{M}{2}(x^2 - (x_i + x_{i+1})x + x_i x_{i+1}) \right) dx = \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}(x - x_i) \pm \frac{M}{2}(x^2 - (x_i + x_{i+1})x + x_i x_{i+1}) \right) dx = \\ &= f(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \left[\frac{(x - x_i)^2}{2} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \pm \frac{M}{2} \left[\frac{x^3}{3} - (x_i + x_{i+1})\frac{x^2}{2} + x_i x_{i+1}x \right]_{x_i}^{x_{i+1}} = \\ &= hf(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \frac{h^2}{2} \pm \frac{M}{2} \left(\frac{x_{i+1}^3 - x_i^3}{3} - (x_i + x_{i+1})\frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{2} + x_i x_{i+1}(x_{i+1} - x_i) \right) = \\ &= \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) \pm \frac{M}{2} h \left(\frac{x_{i+1}^2 + x_{i+1}x_i + x_i^2}{3} - \frac{x_{i+1}^2 + 2x_{i+1}x_i + x_i^2}{2} + x_{i+1}x_i \right) = \\ &= \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) \pm \frac{M}{12} h(2x_{i+1}x_i - x_{i+1}^2 - x_i^2) = \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) \mp \frac{M}{12} h^3. \end{aligned}$$

Podle 3.7.2 a 3.3.6 platí

$$\frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) - \frac{M}{12} h^3 \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \leq \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) + \frac{M}{12} h^3.$$

Sečtením těchto nerovností pro n od 0 do $n - 1$ a s využitím 3.3.13.2 dostaneme

$$\frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) - \frac{M}{12} h^3 n \leq \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \leq$$

$$\leq \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) + \frac{M}{12}h^3n,$$

což je tvrzení. $\square$

Poněvadž $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M}{12} \frac{(b-a)^3}{n^2} = 0$, je podle 1.3.7 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f, a, b) = \int_a^b f(x) dx$.

3.7.4 Věta (Simpsonovo [1710 – 1761] pravidlo)

Buď f funkce definovaná na intervalu $[a, b]$, která má na intervalu (a, b) ohraničenou čtvrtou derivaci a buď $m \in \mathbb{N}$ sudé. Označme

$$h = \frac{b-a}{m},$$

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m,$$

$$J_m(f, a, b) = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{m-1}) + f(x_m)),$$

$$N = \sup\{|f^{(4)}(x)| : x \in (a, b)\}.$$

Pak

$$\left| J_m(f, a, b) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{N}{180} \frac{(b-a)^5}{m^4}.$$

Myšlenka důkazu: Na každém z intervalů $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ nahradíme funkci f kvadratickým polynomem

$$P(x) = \frac{(x - x_{2k+1})(x - x_{2k+2})f(x_{2k})}{(x_{2k} - x_{2k+1})(x_{2k} - x_{2k+2})} + \frac{(x - x_{2k})(x - x_{2k+2})f(x_{2k+1})}{(x_{2k+1} - x_{2k})(x_{2k+1} - x_{2k+2})} + \frac{(x - x_{2k})(x - x_{2k+1})f(x_{2k+2})}{(x_{2k+2} - x_{2k})(x_{2k+2} - x_{2k+1})},$$

pro který platí $f(x_{2k}) = P(x_{2k})$, $f(x_{2k+1}) = P(x_{2k+1})$, $f(x_{2k+2}) = P(x_{2k+2})$. $\square$

3.8 Cvičení

Najděte primitivní funkci

$$1) \int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx,$$

$$2) \int \frac{(1-x)^3}{x \sqrt[3]{x}} dx,$$

$$3) \int \frac{x^2}{1-x^2} dx,$$

$$4) \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx,$$

$$5) \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx,$$

$$6) \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx,$$

$$7) \int \sqrt{1 - \sin 2x} dx,$$

$$8) \int \operatorname{tg}^2 x dx,$$

$$9) \int \frac{dx}{\sqrt{(5x-2)^5}},$$

$$10) \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}},$$

$$11) \int \frac{dx}{1 + \cos x},$$

$$12) \int \frac{dx}{1 + \sin x},$$

$$13) \int \frac{x^3 dx}{x^8 - 2},$$

$$14) \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}},$$

$$15) \int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx,$$

$$16) \int \operatorname{tg} x dx,$$

$$17) \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}},$$

$$18) \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}},$$

$$19) \int x^n \ln x dx,$$

$$20) \int x^2 \sin 2x dx,$$

$$21) \int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) dx,$$

$$22) \int \operatorname{arctg} x dx,$$

$$23) \int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx,$$

$$24) \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{1+x}},$$

$$25) \int \frac{dx}{(1-x)^2 \sqrt{1-x^2}},$$

$$26) \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2+1}},$$

$$27) \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+x+1}},$$

$$28) \int \cos^5 x dx,$$

$$29) \int \sin 5x \cos x dx,$$

$$30) \int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x},$$

$$31) \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5},$$

$$32) \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^2},$$

$$33) \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}.$$

Rozhodněte o konvergenci nevlastních integrálů

$$34) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} dx, \quad 35) \int_0^2 \frac{dx}{\ln x}, \quad 36) \int_2^{\infty} \frac{\ln^k x}{x} dx.$$

Vypočítejte plochu obrazce ohraničeného danými křivkami (x, y jsou kartézské souřadnice, r, φ polární)

$$37) y = |\log_{10} x|, y = 0, x = \frac{1}{10}, x = 10, \quad 38) y = (x + 1)^2, x = \sin \pi x, y = 0,$$

$$39) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad 40) y^2 = x^2(a^2 - x^2),$$

$$41) x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3, \quad 42) x = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, y = \frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t,$$

$$43) r = a \sin 3\varphi, \quad 44) r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}, \varphi = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$45) (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy.$$

Vypočítejte délku křivky

$$46) y = \sqrt{x^3}, 0 \leq x \leq 4, \quad 47) y = \ln(\cos x), 0 \leq x \leq a < \frac{\pi}{2},$$

$$48) x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi, \quad 49) x = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, y = \frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t,$$

$$50) r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}, \quad 51) r = a\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Vypočítejte objem tělesa ohraničeného plochami

$$52) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = \frac{c}{a}x, z = 0, \quad 53) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, z = \pm c.$$

54) Vypočítejte objem tělesa vzniklého rotací obrazce ohraničeného křivkami $y = 2x - x^2, y = 0$ kolem osy x a objem tělesa vzniklého rotací téhož obrazce kolem osy y .

55) Vypočítejte objem tělesa vzniklého rotací obrazce ohraničeného křivkami o parametrických rovnicích $x = a \sin^3 t, y = b \cos^3 t$ kolem osy x a objem tělesa vzniklého rotací téhož obrazce kolem osy y .

56) Vypočítejte povrch tělesa vzniklého rotací asteroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ kolem osy x .

57) Vypočítejte $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ pomocí lichoběžníkového pravidla s $n = 8$ a odhadněte chybu. Výsledek porovnejte s přesnou hodnotou.

Výsledky:

$$\begin{aligned} & 1) x - \frac{1}{x} - \ln x^2 \quad 2) -\frac{3}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{8}x^3\right) \quad 3) \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - x \quad 4) \arcsin x + \ln |x + \sqrt{1+x^2}| \quad 5) \frac{1}{5 \ln 2} \left(\frac{1}{2}\right)^x - \\ & \frac{2}{\ln 5} \left(\frac{1}{5}\right)^x \quad 6) \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x \quad 7) \operatorname{sgn} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) (\sin x - \cos x) \quad 8) \operatorname{tg} x - x \quad 9) \frac{2}{(30-75x)\sqrt{5x-2}} \quad 10) \frac{1}{\sqrt{3}} \ln |\sqrt{3}x - \sqrt{3x^2-2}| \quad 11) \\ & \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad 12) \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad 13) \frac{\sqrt{2}}{16} \ln \left| \frac{x^4 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{2}} \right| \quad 14) 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} \quad 15) \cos \frac{1}{x} \quad 16) -\ln |\cos x| \quad 17) \operatorname{arctg} e^x \quad 18) \ln (\sqrt{1+e^{2x}} - 1) - x \\ & 19) \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \quad 20) x \sin x \cos x - \frac{2x^2-1}{4} \cos 2x \quad 21) \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| - \cos x \ln (\operatorname{tg} x) \quad 22) x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2} \quad 23) \\ & -\frac{6}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 6t + 3 \ln(t^2+1) - 6 \operatorname{arctg} t, \text{ kde } t = \sqrt[6]{x+1} \quad 24) \sqrt{x} - \frac{x - \sqrt{x(1+x)}}{2} - \frac{1}{2} \ln (\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) \\ & 25) \frac{2-x}{3(1-x)^2} \sqrt{1-x^2} \quad 26) \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|} \quad 27) \frac{3}{2+4t} + \frac{1}{2} \ln \frac{t^4}{|1+2t|^3}, \text{ kde } t = x + \sqrt{x^2+x+1} \quad 28) \sin x - \\ & \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x \quad 29) -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{12} \cos 6x \quad 30) \frac{1}{6} \ln \frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3} \quad 31) \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} \quad 32) \frac{-\cos x}{a(a \sin x + b \cos x)} \\ & 33) \frac{3}{5}t^5 - 2t^3 + 3t, \text{ kde } t = \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}} \quad 34) \text{konverguje} \quad 35) \text{diverguje} \quad 36) \text{konverguje pro } k < -1, \text{ diverguje pro } \\ & k \geq -1 \quad 37) \frac{99 \ln 10 - 81}{\ln 100} \quad 38) \frac{\pi+2}{3\pi} \quad 39) \pi ab \quad 40) \frac{4}{3}a^3 \quad 41) \frac{8}{15} \quad 42) \frac{3}{8}\pi \frac{(a^2-b^2)^2}{ab} \quad 43) \frac{\pi a^2}{4} \quad 44) \frac{p^2}{6} (3 + 4\sqrt{2}) \quad 45) a^2 \quad 46) \\ & \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1) \quad 47) \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) \quad 48) 8a \quad 49) \frac{4(a^3-b^3)}{ab} \quad 50) \frac{3\pi a}{2} \quad 51) |a| \left(\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln\sqrt{2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}}\right) \quad 52) \frac{2}{3}abc \\ & 53) \frac{8}{3}\pi abc \quad 54) \frac{16}{15}\pi, \frac{8}{3}\pi \quad 55) \frac{32}{105}\pi ab^2, \frac{32}{105}\pi a^2b \quad 56) \frac{12}{5}\pi a^2 \quad 57) 0.6941, \text{ chyba} \leq 0.003, \text{ přesná hodnota } 0.6932 \end{aligned}$$

Část II

Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných

Kapitola 4

Metrické prostory

4.1 Pojem metriky

4.1.1 Definice

Bud' $P \neq \emptyset$ množina a $\rho : P^2 \rightarrow [0, \infty)$ zobrazení, které pro všechna $x, y, z \in P$ splňuje

- (M1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (axiom totožnosti)
- (M2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (axiom symetrie)
- (M3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ (trojúhelníková nerovnost)

Zobrazení ρ nazýváme *metrika na P* , prvky množiny P nazýváme *body metrického prostoru (P, ρ)* , číslo $\rho(x, y)$ nazýváme *vzdálenost bodů x, y* .

4.1.2 Příklady

1. Diskrétní metrický prostor

$$P \neq \emptyset \text{ libovolná množina, } \rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}.$$

2. Metrika na $\mathbb{R}$

$$P = \mathbb{R}, \quad \rho(x, y) = |x - y|.$$

3. Metriky na $\mathbb{R}^n$

$$P = \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad \text{euklidovská metrika}$$

$$\rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad \text{součtová metrika (taxikářská metrika)}$$

$$\rho_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, 2, \dots, n\} \quad \text{maximální metrika}$$

Axiomy (M1), (M2) jsou splněny triviálně. (M3) ověříme postupně:

$$\rho_1: \rho_1(x, y) + \rho_1(y, z) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^n |y_i - z_i| = \sum_{i=1}^n (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) \geq \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| = \rho_1(x, z)$$

$$\begin{aligned} \rho_\infty: \rho_\infty(x, y) + \rho_\infty(y, z) &= \max\{|x_i - y_i| : i = 1, 2, \dots, n\} + \max\{|y_i - z_i| : i = 1, 2, \dots, n\} \geq \\ &\geq \max\{|x_i - y_i| + |y_i - z_i| : i = 1, 2, \dots, n\} \geq |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \geq |x_i - z_i| \text{ pro libovolné} \\ &i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \text{ a tedy } \rho_\infty(x, y) + \rho_\infty(y, z) \geq \max\{|x_i - z_i| : i = 1, 2, \dots, n\} = \rho_\infty(x, z) \end{aligned}$$

$$\rho_2: \text{Vyjdeme z nerovnosti } \sum_{i=1}^n u_i v_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \text{ (Cauchy-Buňakovski-Schwarz)}$$

$$u_i = p_i + q_i, \quad v_i = q_i : \quad \sum_{i=1}^n (p_i + q_i) q_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i + q_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n q_i^2}$$

$$u_i = p_i, \quad v_i = p_i + q_i : \quad \sum_{i=1}^n p_i(p_i + q_i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i + q_i)^2}$$

$$\text{Sečtením: } \sum_{i=1}^n (p_i + q_i)^2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i + q_i)^2} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n p_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n q_i^2} \right)$$

$$\text{neboli } \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i + q_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n q_i^2} \quad (\text{Minkowského nerovnost})$$

Píšeme-li v poslední nerovnosti $x_i - y_i$ místo p_i a $y_i - z_i$ místo q_i , dostaneme

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2}, \text{ tedy}$$

$$\rho_2(x, z) \leq \rho_2(x, y) + \rho_2(y, z).$$

4. Buď $P = C[a, b]$ — množina funkcí spojitých na intervalu $[a, b]$

$$\rho_C(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\} \quad \text{metrika stejnoměrné konvergence}$$

$$\rho_I(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad \text{integrální metrika}$$

1.7.12 ukazuje, že ρ_C je definována korektně. (M1) a (M2) jsou opět splněny triviálně.

Platnost (M3) pro ρ_C ověříme podobně jako v případě ρ_∞ na $\mathbb{R}^n$.

Platnost (M3) pro ρ_I ověříme s využitím **3.3.6** a **3.3.3**:

$$\begin{aligned} \rho_I(f, h) &= \int_a^b |f(x) - h(x)| dx = \int_a^b |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| dx \leq \\ &\leq \int_a^b (|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|) dx = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx + \int_a^b |g(x) - h(x)| dx = \\ &= \rho_I(f, g) + \rho_I(g, h). \end{aligned}$$

5. Buď $P = \ell_\infty$ — množina ohraničených posloupností

$$\rho_\infty(\{a_n\}, \{b_n\}) = \sup\{|a_n - b_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

Platnost (M1), (M2) a (M3) ověříme stejně, jako v případě ρ_∞ na $\mathbb{R}^n$.

4.1.3 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor. Pro $a \in P$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ definujeme:

$$K[a, r] = \{x \in P : \rho(x, a) \leq r\} \text{ — uzavřená koule se středem } a \text{ a poloměrem } r,$$

$$K(a, r) = \{x \in P : \rho(x, a) < r\} \text{ — otevřená koule se středem } a \text{ a poloměrem } r,$$

Speciálně: otevřená koule $\mathcal{O}_\varepsilon(a) = \mathcal{O}(a) = K(a, \varepsilon)$ se nazývá (*epsilonové*) *okolí bodu* a .

$$\text{Zřejmě platí: } \varepsilon \leq \delta \Rightarrow \mathcal{O}_\varepsilon(a) \subseteq \mathcal{O}_\delta(a).$$

4.1.4 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor. Pro $\emptyset \neq A, B \subseteq P$ definujeme:

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\} \text{ — vzdálenost množin } A, B,$$

$$d(A) = \sup\{\rho(x, y) : x \in A, y \in A\} \text{ — průměr množiny } A.$$

Jestliže množina $\{x \in A, y \in A\}$ není ohraničená shora, klademe $d(A) = \infty$

Vzdálenost bodu x od množiny A definujeme: $\rho(x, A) = \rho(\{x\}, A)$.

4.1.5 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Řekneme, že množina A je *ohraničená*, jestliže $d(A) < \infty$.

Množina A je zřejmě ohraničená, jestliže existuje bod a a číslo $r > 0$, že $A \subseteq K(a, r)$.

4.1.6 Poznámka

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Pro $x, y \in A$ definujeme $\rho_A(x, y) = \rho(x, y)$. Zobrazení ρ_A je zřejmě metrika na A .

4.1.7 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Metriku ρ_A zavedenou v 4.1.6 nazýváme *metrikou indukovanou na množině A metrikou ρ* . Metrický prostor (A, ρ_A) nazýváme *podprostorem metrického prostoru (P, ρ)* . Píšeme $(A, \rho_A) \subseteq (P, \rho)$.

4.1.8 Věta

Buďte $(P_1, \sigma_1), (P_2, \sigma_2)$ metrické prostory. Položme $P = P_1 \times P_2$ a definujme zobrazení $\rho : P^2 \rightarrow [0, \infty)$ předpisem

$$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(\sigma_1(x_1, y_1))^2 + (\sigma_2(x_2, y_2))^2}.$$

Pak ρ je metrika na P .

D.: Nejdříve dokážeme pomocné tvrzení: Nechť (R, σ) je metrický prostor a $a, b, c \in R$. Pak existují $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^2$ takové body, že

$$\sigma(a, b) = \rho_2(\alpha, \beta), \quad \sigma(b, c) = \rho_2(\beta, \gamma), \quad \sigma(a, c) = \rho_2(\alpha, \gamma),$$

kde ρ_2 je euklidovská metrika na $\mathbb{R}^2$.

Pro stručnost označme $r = \sigma(a, b)$, $s = \sigma(a, c)$, $t = \sigma(b, c)$. Nyní stačí volit

$$\alpha = (0, 0), \quad \beta = (r, 0), \quad \gamma = \left(\frac{r^2 + s^2 - t^2}{2r}, \frac{\sqrt{(2rs - r^2 - s^2 + t^2)(2rs + r^2 + s^2 - t^2)}}{2r} \right).$$

(Jedná se o konstrukci trojúhelníka v rovině, známe-li délky stran.)

Nechť $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in P$.

- Pro $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ je $\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0$ právě tehdy, když $\sigma_1(x_1, y_1) = 0$ a $\sigma_2(x_2, y_2) = 0$, což podle (M1) nastane právě tehdy, když $x_1 = y_1$ a $x_2 = y_2$, tedy $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. ρ splňuje (M1).
- $\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(\sigma_1(x_1, y_1))^2 + (\sigma_2(x_2, y_2))^2} = \sqrt{(\sigma_1(y_1, x_1))^2 + (\sigma_2(y_2, x_2))^2} = \rho((y_1, y_2), (x_1, x_2))$, takže ρ splňuje (M2).
- Podle pomocného tvrzení existují reálná čísla $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ taková, že

$$\begin{aligned} \sigma_1(x_1, y_1) &= \sqrt{\sum_{i=1}^2 (\xi_i - \eta_i)^2}, & \sigma_1(x_1, z_1) &= \sqrt{\sum_{i=1}^2 (\xi_i - \zeta_i)^2}, & \sigma_1(y_1, z_1) &= \sqrt{\sum_{i=1}^2 (\eta_i - \zeta_i)^2}, \\ \sigma_2(x_2, y_2) &= \sqrt{\sum_{i=3}^4 (\xi_i - \eta_i)^2}, & \sigma_2(x_2, z_2) &= \sqrt{\sum_{i=3}^4 (\xi_i - \zeta_i)^2}, & \sigma_2(y_2, z_2) &= \sqrt{\sum_{i=3}^4 (\eta_i - \zeta_i)^2}. \end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned} \rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= \sqrt{\sum_{i=1}^4 (\xi_i - \eta_i)^2} = \rho_2((\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)), \\ \rho((y_1, y_2), (z_1, z_2)) &= \sqrt{\sum_{i=1}^4 (\eta_i - \zeta_i)^2} = \rho_2((\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4), (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)), \\ \rho((x_1, x_2), (z_1, z_2)) &= \sqrt{\sum_{i=1}^4 (\xi_i - \zeta_i)^2} = \rho_2((\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)), \end{aligned}$$

kde ρ_2 je euklidovská metrika na $\mathbb{R}^4$. Poněvadž ρ_2 splňuje nerovnost (M3), splňuje ji také ρ .

□

4.1.9 Definice

Budte (P_1, σ_1) , (P_2, σ_2) metrické prostory, $P = P_1 \times P_2$ a ρ metrika definovaná v 4.1.8. Prostor (P, ρ) nazýváme (*kartézským*) *součinem* prostorů (P_1, σ_1) a (P_2, σ_2) .

4.1.10 Definice

Budte (P_1, ρ_1) , (P_2, ρ_2) metrické prostory. Zobrazení $f : P_1 \rightarrow P_2$ se nazývá *isometrické* (*izometrie*), jestliže $\rho_2(f(x), f(y)) = \rho_1(x, y)$ pro všechny dvojice bodů $(x, y) \in P^2$. Jestliže existuje izometrie $f : P_1 \rightarrow P_2$, řekneme, že prostory (P_1, ρ_1) , (P_2, ρ_2) jsou *isometrické*.

Například všechna shodná zobrazení známá z geometrie jsou izometriemi.

4.1.11 Poznámka

Isometrické zobrazení je prosté.

D.: Kdyby existovaly body $x, y \in P_1$ takové, že $f(x) = f(y)$, pak by podle (M1) platilo $0 = \rho_2(f(x), f(y)) = \rho_1(x, y) \neq 0$, což by byl spor. $\square$

Tedy metrický prostor a jeho isometrický obraz lze považovat za dvě kopie téhož prostoru.

4.2 Podmnožiny metrického prostoru

4.2.1 Definice

Bud' (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Bod $a \in P$ se nazývá

- *vnitřní bod množiny* A , jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\mathcal{O}_\varepsilon(a) \subseteq A$,
- *vnější bod množiny* A , jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\mathcal{O}_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$,
- *hraniční bod množiny* A , jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí $\mathcal{O}_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$, $\mathcal{O}_\varepsilon(a) \cap (P \setminus A) \neq \emptyset$,
- *bod uzávěru množiny* A , jestliže $\rho(a, A) = 0$,
- *hromadný bod množiny* A , jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí $(\mathcal{O}_\varepsilon(a) \cap A) \setminus \{a\} \neq \emptyset$,
- *izolovaný bod množiny* A , jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\mathcal{O}_\varepsilon(a) \cap A = \{a\}$.

Množina všech vnitřních bodů množiny A se nazývá *vnitřek množiny* A a značí se A° (někdy $\text{int } A$), Množina všech hraničních bodů množiny A se nazývá *hranice množiny* A a značí se ∂A (někdy $\text{fr } A$), Množina všech bodů uzávěru množiny A se nazývá *uzávěr množiny* A a značí se $\overline{A}$ (někdy $\text{cl } A$), Množina všech hromadných bodů množiny A se nazývá *derivace množiny* A a značí se A' .

Příklad $P = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$

a) $A = (0, 1)$: $A^\circ = (0, 1)$, $\partial A = \{0, 1\}$, $\overline{A} = [0, 1]$, $A' = [0, 1]$

b) $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$: $A^\circ = \emptyset$, $\partial A = [0, 1]$, $\overline{A} = [0, 1]$, $A' = [0, 1]$

b) $A = [0, 1] \cup \{2\}$: $A^\circ = (0, 1)$, $\partial A = \{0, 1, 2\}$, $\overline{A} = [0, 1] \cup \{2\}$, $A' = [0, 1]$

4.2.2 Věta

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A, B \subseteq P$. Pak platí

1. $\bar{\emptyset} = \emptyset$, $\emptyset^\circ = \emptyset$.
2. $\overline{P} = P$, $P^\circ = P$.
3. $A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}$.
4. $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$, $A^\circ \subseteq B^\circ$.
5. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$.
6. $\bar{A} = P \setminus (P \setminus A)^\circ$, $A^\circ = P \setminus \overline{P \setminus A}$.
7. $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$, $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

D.: 1. – 4. je triviální

6. $x \in P \setminus (P \setminus A)^\circ \Leftrightarrow x \notin (P \setminus A)^\circ \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\emptyset \neq \mathcal{O}_\varepsilon(x) \cap (P \setminus (P \setminus A)) = \mathcal{O}_\varepsilon(x) \cap A) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \rho(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$
 $x \in P \setminus \overline{P \setminus A} \Leftrightarrow x \notin \overline{P \setminus A} \Leftrightarrow \varepsilon := \rho(x, P \setminus A) > 0 \Leftrightarrow (\forall y \in P \setminus A)(\rho(x, y) \geq \varepsilon) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \mathcal{O}_\varepsilon(x) \cap (P \setminus A) = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq A \Leftrightarrow x \in A^\circ$
5. $x \in A^\circ \cap B^\circ \Rightarrow x \in A^\circ \wedge x \in B^\circ \Rightarrow (\exists \varepsilon_1)(\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A) \wedge (\exists \varepsilon_2)(\mathcal{O}_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \mathcal{O}_{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}(x) \subseteq A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B)^\circ$
 $x \in (A \cap B)^\circ \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq A \wedge \mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq B) \Rightarrow$
 $\Rightarrow x \in A^\circ \wedge x \in B^\circ \Rightarrow x \in A^\circ \cap B^\circ$

S využitím 6., již dokázané části a de Morganových pravidel dostaneme

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= [P \setminus (P \setminus A)^\circ] \cup [P \setminus (P \setminus B)^\circ] = P \setminus [(P \setminus A)^\circ \cap (P \setminus B)^\circ] = P \setminus [(P \setminus A) \cap (P \setminus B)]^\circ = \\ &= P \setminus [P \setminus (A \cup B)]^\circ = \overline{A \cup B} \end{aligned}$$

7. Buď $x \in \bar{\bar{A}}$. Pak $0 = \rho(x, \bar{A}) = \inf\{\rho(x, y) : y \in \bar{A}\} \geq \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}$, neboť podle 3. je $A \subseteq \bar{A}$ a tedy $\{\rho(x, y) : y \in \bar{A}\} \supseteq \{\rho(x, y) : y \in A\}$. Poněvadž ale $\inf\{\rho(x, y) : y \in A\} = \rho(x, A) \geq 0$, jest $\rho(x, A) = 0$ a tedy $x \in \bar{A}$, t.j. $\bar{\bar{A}} \subseteq \bar{A}$. Opačná inkluze plyne z 3.
Druhou část tvrzení dokážeme analogicky. $\square$

4.2.3 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Množina A se nazývá *otevřená*, jestliže $A = A^\circ$, množina A se nazývá *uzavřená*, jestliže $A = \bar{A}$.

Zejména podle 4.2.2.6 A° je otevřená množina, $\bar{A}$ je uzavřená množina.

4.2.4 Věta

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Množina A je otevřená právě tehdy, když $P \setminus A$ je uzavřená; množina A je uzavřená právě tehdy, když $P \setminus A$ je otevřená.

- D.:** Nechť $A = A^\circ$. Podle 4.2.2.6 je $A = P \setminus \overline{P \setminus A}$. Z toho plyne, že $P \setminus A = P \setminus (P \setminus \overline{P \setminus A}) = \overline{P \setminus A}$ a tedy $P \setminus A$ je uzavřená.
Nechť $P \setminus A = \overline{P \setminus A}$. Pak podle 4.2.2.6 je $A^\circ = P \setminus \overline{P \setminus A} = P \setminus (P \setminus A) = A$.
Platnost druhého tvrzení ukážeme analogicky. $\square$

4.2.5 Věta

Buď (P, ρ) metrický prostor a $\mathcal{T}$ soustava všech otevřených množin prostoru (P, ρ) . Pak platí

$$(T1) \quad P \in \mathcal{T}, \quad \emptyset \in \mathcal{T},$$

$$(T2) \quad A \in \mathcal{T}, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T},$$

$$(T3) \quad (\forall \iota \in I)(A_\iota \in \mathcal{T}) \Rightarrow \bigcup_{\iota \in I} A_\iota \in \mathcal{T}.$$

D.: (T1) Plyne z 4.2.2.1 a 4.2.2.2.

(T2) Je-li $x \in A \cap B$, pak $x \in A = A^\circ$, $x \in B = B^\circ$ a tedy existují $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, že $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$, $\mathcal{O}_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Položíme-li $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, pak $\mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$, tedy každý $x \in A \cap B$ je vnitřním bodem, což znamená, že $A \cap B$ je otevřená.

(T3) Nechť $x \in \bigcup_{\iota \in I} A_\iota$. Pak existuje $\iota_0 \in I$, že $x \in A_{\iota_0}$. Poněvadž A_{ι_0} je otevřená, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq A_{\iota_0} \subseteq \bigcup_{\iota \in I} A_\iota$. $\square$

4.2.6 Věta

Buď (P, ρ) metrický prostor a $\mathcal{F}$ soustava všech uzavřených množin prostoru (P, ρ) . Pak platí

$$(i) \quad P \in \mathcal{F}, \quad \emptyset \in \mathcal{F},$$

$$(ii) \quad A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F},$$

$$(iii) \quad (\forall \iota \in I)(A_\iota \in \mathcal{F}) \Rightarrow \bigcap_{\iota \in I} A_\iota \in \mathcal{F}.$$

D.: Plyne z 4.2.4, 4.2.5 a z de Morganových pravidel. $\square$

4.2.7 Poznámky

Z 4.2.5 plyne, že průnik libovolného konečného systému otevřených množin je otevřená množina; z 4.2.6 plyne, že sjednocení libovolného konečného systému uzavřených množin je uzavřená množina.

Průnik nekonečného systému otevřených množin nemusí být otevřená množina:

$$A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}, \quad \text{což není otevřená množina v } \mathbb{R} \text{ s metrikou } \rho(x, y) = |x - y|.$$

Sjednocení nekonečného systému uzavřených množin nemusí být uzavřená množina:

$$A_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right], \quad n \in \mathbb{N}. \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (-1, 1).$$

4.2.8 Věta

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Pak $\partial A = \overline{A} \cap \overline{P \setminus A}$.

D.: $x \in \partial A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\mathcal{O}_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \neq \mathcal{O}_\varepsilon(x) \cap (P \setminus A)) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\rho(x, A) < \varepsilon \wedge \rho(x, P \setminus A) < \varepsilon) \Leftrightarrow \rho(x, A) = 0 \wedge \rho(x, P \setminus A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{P \setminus A}$. $\square$

4.2.9 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Množina A se nazývá *hustá v prostoru* (P, ρ) , jestliže $\overline{A} = P$.

4.2.10 Věta

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Množina A je hustá v P právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ a každému $x \in P$ existuje $a \in A$, že $\rho(x, a) < \varepsilon$, t.j. $a \in \mathcal{O}_\varepsilon(x)$. (Neboli když každý bod $x \in P$ je hromadným bodem množiny A .)

D.: „ $\Rightarrow$ “: Nechť $\overline{A} = P$. Vezmeme $\varepsilon > 0$ a $x \in P$ libovolná. S využitím vlastnosti 1.1.6(i2*) dostaneme

$$x \in P = \overline{A} \Rightarrow \rho(x, A) = 0 \Rightarrow \inf\{\rho(x, a) : a \in A\} = 0 \Rightarrow \text{existuje } a \in A, \text{ že } \rho(x, a) < \varepsilon.$$

„ $\Leftarrow$ “: Jestliže existuje $x \in P \setminus \overline{A}$, pak podle 4.2.4 a definice otevřené množiny existuje $\varepsilon > 0$, že $\mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq P \setminus \overline{A}$, tedy $\rho(x, a) \geq \varepsilon$ pro každé $a \in \overline{A}$. Podle 4.2.2.3 je $A \subseteq \overline{A}$, což znamená, že $\rho(x, a) \geq \varepsilon$ pro každé $a \in A$. $\square$

4.3 Konvergence

4.3.1 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost bodů z P (t.j. zobrazení $\mathbb{N} \rightarrow P$). Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k bodu $x \in P$ (je konvergentní v P) a píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ (stručně $\lim x_n = x$, $x_n \rightarrow x$), jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$.

4.3.2 Příklady

1. (P, ρ) diskrétní (viz 4.1.2.1)
 $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow x_n = x)$

2. $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$ (viz 4.1.2.3)
 $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \Leftrightarrow x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ v $\mathbb{R}$ s metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$.

D.: $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \Leftrightarrow 0 = \lim(|x_n - x| + |y_n - y|) = \lim|x_n - x| + \lim|y_n - y|$. Avšak podle 1.3.5.1 $\lim|x_n - x| \geq 0$, $\lim|y_n - y| \geq 0$, takže $\lim|x_n - x| = 0$, $\lim|y_n - y| = 0$. $\square$

Analogické tvrzení platí pro všechny metrické prostory z 4.1.2.3.

3. $(C[a, b], \rho_C)$ (viz 4.1.2.4)
 $f_n \rightarrow f$ v tomto prostoru $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall x \in [a, b])(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$.
(Má-li posloupnost funkcí definovaných na intervalu $[a, b]$ vlastnost uvedenou na pravé straně ekvivalence, řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ stejnoměrně konverguje na intervalu $[a, b]$ k funkci f .)

D.: $f_n \rightarrow f$ v $(C[a, b], \rho_C) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\rho_C(f_n, f) < \varepsilon) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\max\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a, b]\} < \varepsilon) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall x \in [a, b])(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \square$

4.3.3 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost bodů z P . Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je ohraničená, jestliže množina $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je ohraničená ve smyslu definice 4.1.5.

4.3.4 Věta

Buď (P, ρ) metrický prostor. Pak platí

1. Každá posloupnost $\{x_n\} \subseteq P$ má nejvýše jednu limitu v P .
2. Posloupnost konvergentní v (P, ρ) je ohraničená v (P, ρ) .
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in P$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_{n_k}\}$ vybranou z $\{x_n\}$ platí $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$.

D.: 1.3.3, 1.3.4, 1.3.14. $\square$

4.3.5 Definice

Bud' (P, ρ) metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost bodů z P . Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *cauchyovská*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $m, n \geq n_0$ je $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

4.3.6 Věta

Bud' (P, ρ) metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost bodů z P . Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní v (P, ρ) , pak je cauchyovská.

D.: Nechť $x_n \rightarrow x$ a buď $\varepsilon > 0$ libovolné.

K $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \geq n_0$ je $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pro libovolné $m \geq n_0$ a libovolné $n \geq n_0$ tedy s využitím trojúhelníkové nerovnosti platí $\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x) + \rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$

Obrácené tvrzení obecně neplatí: $P = (0, 1)$, $\rho(x, y) = |x - y|$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, ale není konvergentní; $0 \notin P$.

4.3.7 Věta

Bud' (P, ρ) metrický prostor a $A \subseteq P$. Množina A je uzavřená v (P, ρ) právě tehdy, když pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\} \subseteq A$, $x_n \rightarrow x$ platí $x \in A$.

D.: „ $\Rightarrow$ “ Nechť $A = \overline{A}$, $\{x_n\}$ libovolná konvergentní, $x_n \rightarrow x$. Kdyby $x \notin \overline{A}$, pak by $\varepsilon = \rho(x, A) > 0$ a tedy pro každé x_n by platilo $\rho(x_n, x) > \varepsilon$, což by bylo ve sporu s $x_n \rightarrow x$.

„ $\Leftarrow$ “ Nechť platí podmínka. Bud' $y \in \overline{A}$ libovolný bod. Pak $\rho(y, A) = 0$. Podle 1.1.6(i2*) ke každému $\frac{1}{n} > 0$ existuje $x_n \in A$, že $\rho(x_n, y) < \frac{1}{n}$. To znamená, že pro takto vytvořenou posloupnost $\{x_n\}$ platí $\lim \rho(x_n, y) = 0$, $x_n \rightarrow y$. Z podmínky plyne, že $y \in A$. Tedy $\overline{A} \subseteq A$ a podle 4.2.2.3 $A = \overline{A}$. $\square$

4.3.8 Definice

Bud' P množina a ρ, σ metriky na P . Řekneme, že ρ a σ jsou *ekvivalentní metriky na P* , jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P$ platí: $x_n \rightarrow x$ v (P, ρ) právě tehdy když $x_n \rightarrow x$ v (P, σ) .

4.3.9 Příklady

1. $P = \mathbb{R}^n$. Metriky $\rho_1, \rho_2, \rho_{\infty}$ zavedené v 4.1.2.3 jsou ekvivalentní:

$x_k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ v $(\mathbb{R}^n, \rho_1) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0)(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\})(|x_i^k - x_i| < \varepsilon)$

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ v $(\mathbb{R}^n, \rho_2) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0)(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\})(|x_i^k - x_i| < \varepsilon)$

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ v $(\mathbb{R}^n, \rho_{\infty}) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0)(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\})(|x_i^k - x_i| < \varepsilon)$

2. $P = C[a, b]$. Metriky ρ_I a ρ_C (viz 4.1.2.3) nejsou ekvivalentní:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[a, \frac{(n+1)a + (n-1)b}{2n} \right] \cup \left[\frac{(n-1)a + (n+1)b}{2n}, b \right] \\ \frac{2nx - (n+1)a - (n-1)b}{b-a}, & x \in \left(\frac{(n+1)a + (n-1)b}{2n}, \frac{a+b}{2} \right) \\ \frac{-2nx + (n-1)a + (n+1)b}{b-a}, & x \in \left(\frac{a+b}{2}, \frac{(n-1)a + (n+1)b}{2n} \right) \end{cases},$$

$f \equiv 0$

$$\rho_I(f_n, f) = \int_a^b f_n(x) dx = \frac{b-a}{2n} \rightarrow 0$$

$$\rho_C(f_n, f) = 1$$

4.3.10 Poznámka

Buďte ρ, σ ekvivalentní metriky na P . Z 4.3.7 plyne, že množina $A \subseteq P$ je uzavřená v (P, ρ) právě tehdy, když je uzavřená v (P, σ) . Z 4.2.4 dále plyne, že množina $A \subseteq P$ je otevřená v (P, ρ) právě tehdy, když je otevřená v (P, σ) .

4.3.11 Věta

Buďte ρ, σ metriky na množině P . Jestliže existují kladné konstanty a, b takové, že pro všechny dvojice bodů $(x, y) \in P^2$ je

$$a\sigma(x, y) \leq \rho(x, y) \leq b\sigma(x, y),$$

pak jsou metriky ρ a σ ekvivalentní.

D.: Nechť je podmínka splněna, $x \in P$, a nechť $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq P$ je taková posloupnost, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(x_n, x) = 0$. Pak $a\sigma(x_n, x) \leq \rho(x_n, x) \leq b\sigma(x_n, x)$ a z 1.3.7 plyne $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$.

Důkaz se dokončí analogickou úvahou s využitím nerovnosti $\frac{1}{b}\rho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq \frac{1}{a}\rho(x, y)$, která je ekvivalentní s nerovností v podmínce věty. $\square$

4.4 Úplné a kompaktní prostory

4.4.1 Definice

Metrický prostor (P, ρ) se nazývá *úplný*, jestliže v něm má každá cauchyovská posloupnost limitu.

4.4.2 Příklady

1. Prostor $\mathbb{R}$ s metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$ je podle 1.3.22 úplný.
2. Prostory $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$, $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$, $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$ (viz 4.1.2) jsou úplné:
Je-li posloupnost $\{x^k\}_{k=1}^\infty = \{(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)\}_{k=1}^\infty$ cauchyovská v prostoru $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$, pak je zřejmě každá z posloupností $\{x_1^k\}_{k=1}^\infty, \{x_2^k\}_{k=1}^\infty, \dots, \{x_n^k\}_{k=1}^\infty$ cauchyovská v prostoru $(\mathbb{R}, \rho_1)$. Pak podle 1.3.22 každá tato posloupnost je konvergentní v $(\mathbb{R}, \rho_1)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_1^k = x_1, \lim_{k \rightarrow \infty} x_2^k = x_2, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} x_n^k = x_n$. Odtud vyplyne, že i posloupnost $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ je konvergentní v prostoru $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_1^k = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Podle 4.3.9.1 jsou metriky $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$ ekvivalentní.
3. Diskrétní metrický prostor (P, ρ) (viz 4.1.2.1) je úplný.
Buď $\varepsilon = \frac{1}{2}$. $\rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$ právě tehdy, když $x_n = x_m$. Tedy je-li $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská, pak je od jistého indexu počínaje stacionární a to podle 4.3.2.1 znamená, že je konvergentní.

4. $\mathbb{Q}$ s metrikou indukovanou ρ_1 není úplný:
Např. $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n=1}^\infty$ konverguje v $(\mathbb{R}, \rho_1)$ k $e \notin \mathbb{Q}$.

5. Prostor $(C[a, b], \rho_I)$ (viz 4.1.2.4) není úplný:

$$[a, b] = [-1, 1]$$

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1, \frac{1}{n}) \\ nx, & x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1, & x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases},$$

$$\rho_I(f_n, f_{n+p}) = \frac{p}{n^2 + np},$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_I(f_n, f_{n+p}) = 0$, tedy $\{f_n\}$ je cauchyovská. Avšak jediná možná limita posloupnosti funkcí $\{f_n\}$ je

funkce $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1, 0) \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x \in (0, 1] \end{cases}$, což není spojitá funkce, $f \notin C[-1, 1]$ a tedy $\{f_n\}$ není v $(C[-1, 1], \rho_I)$ konvergentní.

6. Prostor $(C[a, b], \rho_C)$ (viz 4.1.2.4) je úplný:

Buď $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ libovolná posloupnost funkcí cauchyovská v $(C[a, b], \rho_C)$.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo. K němu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n, m \geq n_0$ je $\rho_C(f_n, f_m) < \varepsilon$.

Buď $x_0 \in [a, b]$ libovolný bod. Pak pro $n, m \geq n_0$ je

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \max\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in [a, b]\} = \rho_C(f_n, f_m) < \varepsilon,$$

což znamená, že číselná posloupnost $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská a tedy podle 1.3.22 konvergentní.

Poněvadž $x_0 \in [a, b]$ byl libovolný bod, existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ pro každé $x \in [a, b]$.

Definujme funkci $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem: $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Ukážeme, že $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a, b]\} \rightarrow 0$:

Poněvadž $\{f_n\}$ je cauchyovská, tak k $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n, m \geq n_1$ je

$$\rho_C(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{2}. \text{ Pro každé } x \in [a, b] \text{ a všechna } n, m \geq n_1 \text{ je tedy } |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ což podle 1.3.5.1}$$

znamená, že pro každé $x \in [a, b]$ a každé $n \geq n_1$ je $\lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy pro $n \geq n_1$ a každé

$$x \in [a, b] \text{ je } |f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ takže pro } n \geq n_1 \text{ je}$$

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a, b]\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Zbývá ukázat, že funkce f je spojitá.

Podle předchozího tvrzení k $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že $\sup\{|f_{n_2}(x) - f(x)| : x \in [a, b]\} < \frac{\varepsilon}{3}$.

Buď $x_1 \in [a, b]$ libovolný bod. Poněvadž funkce f_{n_2} je spojitá, k číslu $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro všechna

$x \in [a, b]$ taková, že $|x_1 - x| < \delta$ je $|f_{n_2}(x_1) - f_{n_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pro $x \in [a, b]$ takové, že $|x_1 - x| < \delta$ tedy platí

$$|f(x_1) - f(x)| = |f(x_1) - f_{n_2}(x_1) + f_{n_2}(x_1) - f_{n_2}(x) + f_{n_2}(x) - f(x)| \leq$$

$$\leq |f(x_1) - f_{n_2}(x_1)| + |f_{n_2}(x_1) - f_{n_2}(x)| + |f_{n_2}(x) - f(x)| \leq$$

$$\leq \sup\{|f_{n_2}(x) - f(x)| : x \in [a, b]\} + |f_{n_2}(x_1) - f_{n_2}(x)| + \sup\{|f_{n_2}(x) - f(x)| : x \in [a, b]\} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \text{ což znamená, že funkce } f \text{ je spojitá v bodě } x_1 \in [a, b]. \text{ Poněvadž tento bod byl libovolný,}$$

je f spojitá na $[a, b]$.

4.4.3 Věta

Je-li metrický prostor (P, ρ) úplný a množina $A \subseteq P$ je uzavřená, pak metrický prostor (A, ρ_A) , kde ρ_A je metrika indukovaná metrikou ρ , je úplný.

D.: Buď $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ libovolná cauchyovská posloupnost. Poněvadž (P, ρ) je úplný, existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in P$.

Podle 4.3.7 je $x \in A$. $\square$

4.4.4 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor. Řekneme, že metrický prostor (Q, σ) je *úplným obalem* metrického prostoru (P, ρ) , jestliže

(i) (Q, σ) je úplný prostor,

(ii) $(P, \rho) \subseteq (Q, \sigma)$,

(iii) Množina P je hustá v (Q, σ) .

Například $(\mathbb{R}, \rho_1)$ je úplným obalem $(\mathbb{Q}, \rho_1)$.

4.4.5 Věta

Ke každému metrickému prostoru (P, ρ) existuje jeho úplný obal. Tento úplný obal je určen jednoznačně v tomto smyslu: Jsou-li (Q_1, σ_1) a (Q_2, σ_2) dva úplné obaly prostoru (P, ρ) , pak (Q_1, σ_1) a (Q_2, σ_2) jsou isometrické.

Kroky důkazu:

1. Na množině všech cauchyovských posloupností z prostoru (P, ρ) definujeme relaci $\sim$ vztahem:
 $\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \rho(x_n, y_n) \rightarrow 0$.
2. Ukážeme, že $\sim$ je ekvivalence.
3. Položíme $Q = P / \sim$ (rozklad množiny P podle ekvivalence $\sim$). Prvky množiny Q jsou třídy ekvivalence $\sim$. Označíme $[\{x_n\}] \in Q$ takovou třídu ekvivalence, že $\{x_n\} \in [\{x_n\}]$.
4. Položíme $\sigma([\{x_n\}], [\{y_n\}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n)$. Ukážeme, že σ nezáleží na výběru reprezentantů a že σ je metrikou na Q .
5. Ztotožníme $[\{x, x, \dots\}] \in Q$ s $x \in P$. Pak je $(P, \rho) \subseteq (Q, \sigma)$.
6. Ukážeme, že prostor (Q, σ) je úplný.
7. Ukážeme, že $\overline{P} = Q$.
8. Ukážeme, že je-li (Q_1, σ_1) úplným obalem prostoru (P, ρ) , pak (Q, σ) a (Q_1, σ_1) jsou isometrické. $\square$

4.4.6 Definice

Řekneme, že metrický prostor (P, ρ) je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti jeho bodů lze vybrat posloupnost konvergentní.

Řekneme, že množina $A \subseteq P$ je kompaktní, jestliže podprostor (A, ρ_A) je kompaktní.

4.4.7 Věta

Je-li A kompaktní množina v metrickém prostoru (P, ρ) , pak je A uzavřená a ohraničená.

D.: Pripusťme, že $A \neq \overline{A}$, tedy že existuje $x \in \overline{A} \setminus A$. Pak $\rho(x, A) = 0$ a podle definice infima existuje $\{x_n\} \subseteq A$, že $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$, neboli $x_n \rightarrow x$. Pro každou vybranou posloupnost $\{x_{n_k}\}$ z posloupnosti $\{x_n\}$ je podle 4.3.4.3 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \notin A$, což je spor s kompaktností A .

Připusťme, že A není ohraničená. Buď $x_1 \in A$ libovolný bod. Existuje $x_2 \in A \setminus K(x_1, 1)$. (Kdyby neexistoval, byla by množina A ohraničená.) Dále existuje $x_3 \in A \setminus K(x_1, \rho(x_1, x_2) + 1)$ atd. Posloupnost $\{x_n\}$ i každá posloupnost z ní vybraná není cauchyovská, neboť $\rho(x_n, x_m) \geq 1$ a tedy podle 4.3.6 nemůže být konvergentní. $\square$

4.4.8 Věta

Množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní v $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$ právě tehdy, když je v tomto prostoru uzavřená a ohraničená.

D.: Nutnost podmínky plyne z 4.4.7. Dokážeme její dostatečnost.

Buď $\{x^k\}_{k=1}^\infty = \{(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)\}_{k=1}^\infty$ posloupnost bodů z A . Poněvadž A je ohraničená, je každá z číselných posloupností $\{x_i^k\}_{k=1}^\infty$, $i = 1, 2, \dots, n$ ohraničená. Podle 1.3.19.1 lze z každé $\{x_i^k\}_{k=1}^\infty$ vybrat posloupnost $\{x_i^{k_l}\}_{l=1}^\infty$ konvergentní. Vybereme tedy z posloupnosti $\{x_1^k\}_{k=1}^\infty$ konvergentní posloupnost $\{x_1^{k_1}\}_{k_1=1}^\infty$ a označíme $x_1^0 = \lim_{k_1 \rightarrow \infty} x_1^{k_1}$. Potom z posloupnosti $\{x_2^{k_1}\}_{k_1=1}^\infty$ vybereme konvergentní posloupnost $\{x_2^{k_2}\}_{k_2=1}^\infty$ a označíme $x_2^0 = \lim_{k_2 \rightarrow \infty} x_2^{k_2}$. Tak postupujeme dále, až z posloupnosti $\{x_n^{k_{n-1}}\}_{k_{n-1}=1}^\infty$ vybereme konvergentní posloupnost $\{x_n^{k_n}\}_{k_n=1}^\infty$, kterou budeme pro přehlednost značit $\{x_n^l\}_{l=1}^\infty$, a označíme $x_n^0 = \lim_{l \rightarrow \infty} x_n^l$. Tímto postupem získáme posloupnost $\{(x_1^l, x_2^l, \dots, x_n^l)\}_{l=1}^\infty$, která je vybraná z posloupnosti $\{(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)\}_{k=1}^\infty$ a platí $\lim_{l \rightarrow \infty} (x_1^l, x_2^l, \dots, x_n^l) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = x^0$. Poněvadž A je uzavřená, je podle 4.3.7 $x^0 \in A$. $\square$

Z ekvivalence metrik $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$ (viz 4.3.9.1) plyne, že analogické tvrzení platí i pro $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$ a $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$.

4.4.9 Věta

Je-li metrický prostor (P, ρ) kompaktní, pak je úplný.

D.: Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná cauchyovská posloupnost v prostoru (P, ρ) . Poněvadž (P, ρ) je kompaktní, existuje posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \in P$.

Ukážeme, že $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo.

Poněvadž $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k x , tak k $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $k \geq k_0$ je $\rho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Poněvadž $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, tak k $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_1$ a $m \geq n_1$ platí $\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_{k_0}\}$ a nechť $n \geq n_0$ a $k > k_0$ jsou libovolná čísla. Pak také $n_k > n_0$. S využitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

což znamená, že $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. $\square$

4.5 Zobrazení metrických prostorů

4.5.1 Definice

Buďte (P, ρ) , (Q, σ) metrické prostory, $F : P \rightarrow Q$.

Řekneme, že zobrazení F je *spojité v bodě* $x_0 \in P$, jestliže ke každému okolí V bodu $F(x_0)$ v (Q, σ) existuje okolí U bodu x_0 v (P, ρ) tak, že $F(U) \subseteq V$.

Řekneme, že zobrazení F je *spojité* na P , jestliže je spojité v každém bodě $x \in P$.

Zobrazení F je spojité v bodě x_0 , jestliže $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in P)(\rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \sigma(F(x), F(x_0)) < \varepsilon)$.

4.5.2 Věta

Buďte (P, ρ) , (Q, σ) metrické prostory. Zobrazení $F : P \rightarrow Q$ je spojité na P právě tehdy, když ke každé otevřené množině $V \subseteq F(P)$ existuje otevřená množina $U \subseteq P$ taková, že $F(U) \subseteq V$.

D.: $\Rightarrow$: Nechť F je spojité, $V \subseteq F(P)$ otevřená. Ke každému $y_0 \in V$ existuje $x_0 \in P$ takové, že $F(x_0) = y_0$. Poněvadž V je otevřená, k libovolnému $y_0 \in V$ existuje $\varepsilon_{y_0} > 0$ takové, že $\mathcal{O}_{\varepsilon_{y_0}}(y_0) \subseteq V$. K ε_{y_0} existuje $\delta_{y_0} > 0$ takové, že $F(\mathcal{O}_{\delta_{y_0}}(x_0)) \subseteq \mathcal{O}_{\varepsilon_{y_0}}(y_0)$. Množina $U = \bigcup_{y_0 \in V} \mathcal{O}_{\delta_{y_0}}(x_0)$ je podle 4.2.5 (T3) otevřená a zřejmě platí $F(U) = V$.

$\Leftarrow$: Buď $x_0 \in P$ libovolný bod, V okolí bodu $F(x_0)$. Existuje otevřená $U \subseteq P$ taková, že $F(U) \subseteq V$. Poněvadž U je otevřená, existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 takové, že $\mathcal{O}(x_0) \subseteq U$. Pak $F(\mathcal{O}(x_0)) \subseteq F(U) \subseteq V$ a tedy F je spojité v bodě x_0 . $\square$

4.5.3 Věta (Heineova podmínka)

Buďte (P, ρ) , (Q, σ) metrické prostory. Zobrazení $F : P \rightarrow Q$ je spojité v bodě $x_0 \in P$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z P takovou, že $x_n \rightarrow x_0$ v (P, ρ) platí $F(x_n) \rightarrow F(x_0)$ v (Q, σ) .

D.: $\Rightarrow$: Nechť $\{x_n\} \subseteq P$, $x_n \rightarrow x_0$.

Buď $\mathcal{O}_{\varepsilon}(F(x_0))$, $\varepsilon > 0$, libovolné okolí bodu $F(x_0)$. Existuje $\delta > 0$ takové, že $F(\mathcal{O}_{\delta}(x_0)) \subseteq \mathcal{O}_{\varepsilon}(F(x_0))$.

K $\delta > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $\rho(x_n, x_0) < \delta$, neboli $x_n \in \mathcal{O}_{\delta}(x_0)$.

Odtud plyne, že $F(x_n) \in \mathcal{O}_{\varepsilon}(F(x_0))$ pro všechna $n \geq n_0$, neboli $\sigma(F(x_n), F(x_0)) < \varepsilon$ pro všechna $n \geq n_0$.

To ovšem znamená, že $F(x_n) \rightarrow F(x_0)$.

$\Leftarrow$: Nechť platí podmínka a připustíme, že F není spojitě v bodě x_0 . Pak existuje okolí $V = \mathcal{O}_\varepsilon(F(x_0))$ bodu $F(x_0)$ takové, že v každém okolí U bodu x_0 existuje x , že $F(x) \notin V$. Zejména v okolí $\mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(x_0)$ existuje bod x_n takový, že $F(x_n) \notin V$. Platí $x_n \rightarrow x_0$ a tedy $F(x_n) \rightarrow F(x_0)$, což znamená, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sigma(F(x_{n_0}), F(x_0)) < \varepsilon$, tedy $F(x_{n_0}) \in \mathcal{O}_\varepsilon(F(x_0)) = V$, což je spor. $\square$

4.5.4 Věta

Budte (P, ρ) , (Q, σ) metrické prostory, $A \subseteq P$, $F : P \rightarrow Q$ spojitě zobrazení. Je-li množina A kompaktní, pak je i $F(A)$ kompaktní.

D.: Nechť A je kompaktní a buď $\{y_n\}$ libovolná posloupnost bodů z $F(A)$. Ke každému $y_n \in F(A)$ existuje $x_n \in A$ takové, že $F(x_n) = y_n$. Poněvadž A je kompaktní, lze z posloupnosti $\{x_n\}$ vybrat posloupnost konvergentní $\{x_{n_k}\}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \in A$ v (P, ρ) . Označme $y_0 = F(x_0)$. Pak $y_0 \in F(A)$ a podle 4.5.3 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} F(x_{n_k}) = F(x_0) = y_0$ v (Q, σ) . Našli jsme tedy posloupnost $\{y_{n_k}\}$ vybranou z $\{y_n\}$, která konverguje k $y_0 \in F(A)$. To znamená, že $F(A)$ je kompaktní množina. $\square$

4.5.5 Důsledek (Weierstrassovy věty)

Reálná funkce spojitá na uzavřeném intervalu je na tomto intervalu ohraničená a nabývá na něm své největší a nejmenší hodnoty.

D.: Uzavřený interval $[a, b]$ je podle 4.4.8 kompaktní v $(\mathbb{R}, \rho_1)$ a tedy podle 4.5.4 je $f([a, b])$ kompaktní. Podle 4.4.8 je $f([a, b])$ ohraničená a uzavřená.

K $\frac{1}{n} > 0$ existuje $y_n \in f([a, b])$ takové, že $\sup f([a, b]) - \frac{1}{n} < y_n$, $y_n \rightarrow \sup f([a, b])$ a podle 4.3.7 je $\sup f([a, b]) \in f([a, b])$. Funkce f nabývá na $[a, b]$ svého suprema, tedy své největší hodnoty.

Analogicky ukážeme, že funkce f nabývá na $[a, b]$ i své nejmenší hodnoty. $\square$

4.5.6 Věta

Budte (P, ρ) , (Q, σ) , (R, τ) metrické prostory, $F : P \rightarrow Q$, $G : Q \rightarrow R$. Je-li zobrazení F spojitě v bodě $x_0 \in P$ a zobrazení G je spojitě v bodě $F(x_0) \in Q$, pak je složené zobrazení $G \circ F : P \rightarrow R$ spojitě v bodě x_0 . Je-li zobrazení F spojitě na P a zobrazení G je spojitě na Q , pak je složené zobrazení $G \circ F : P \rightarrow R$ spojitě na P .

D.: K $\mathcal{O}(G(F(x_0))) \subseteq R$ existuje $\mathcal{O}(F(x_0)) \subseteq Q$, že $G(\mathcal{O}(F(x_0))) \subseteq \mathcal{O}(G(F(x_0)))$, poněvadž G je spojitě v $F(x_0)$.

K $\mathcal{O}(F(x_0)) \subseteq Q$ existuje $\mathcal{O}(x_0) \subseteq P$, že $F(\mathcal{O}(x_0)) \subseteq \mathcal{O}(F(x_0))$, neboť F je spojitě v x_0 .

Nyní $G \circ F(\mathcal{O}(x_0)) = G(F(\mathcal{O}(x_0))) \subseteq G(\mathcal{O}(F(x_0))) \subseteq \mathcal{O}(G(F(x_0)))$.

Druhé tvrzení je důsledkem prvního. $\square$

4.5.7 Definice

Budte (P, ρ) , (Q, σ) metrické prostory, $F : P \rightarrow Q$. Řekneme, že zobrazení F je *stejně spojitě na P* , jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dva body $x, y \in P$ taková, že $\rho(x, y) < \delta$ platí $\sigma(F(x), F(y)) < \varepsilon$.

Stejně spojitě zobrazení je zřejmě spojitě.

4.5.8 Věta (Heine - Cantor)

Buď (P, ρ) kompaktní metrický prostor, (Q, σ) metrický prostor, $F : P \rightarrow Q$ spojitě zobrazení. Pak je F stejně spojitě.

D.: Nechť (P, ρ) je kompaktní a $F : P \rightarrow Q$ spojitě.

Připustíme, že F není stejně spojitě. Pak existuje $\varepsilon_0 > 0$ takové, že ke každému $\delta > 0$ existují $x, y \in P$ tak, že $\rho(x, y) < \delta$ a $\sigma(F(x), F(y)) \geq \varepsilon_0$.

K $\delta = \frac{1}{n}$ existují $x_n, y_n \in P$, že $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ a $\sigma(F(x_n), F(y_n)) \geq \varepsilon_0$. Poněvadž P je kompaktní, lze z posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ vybrat posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ tak, že $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \in P$.

Dále $\rho(x_0, y_{n_k}) \leq \rho(x_0, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow \infty$ a tedy také $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = x_0$.

Podle 4.5.3 platí $\sigma(F(x_{n_k}), F(y_{n_k})) \leq \sigma(F(x_{n_k}), F(x_0)) + \sigma(F(x_0), F(y_{n_k})) \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow \infty$, což je spor s $\sigma(F(x), F(y)) \geq \varepsilon_0$. $\square$

4.5.9 Definice

Buďte (P, ρ) , (Q, σ) metrické prostory, $F : P \rightarrow Q$.

Řekneme, že zobrazení F je *lipschitzovské*, jestliže existuje konstanta $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$ taková, že pro všechny $x, y \in P$ je $\sigma(F(x), F(y)) \leq L\rho(x, y)$. Konstanta L se nazývá *Lipschitzova konstanta*.

Řekneme, že zobrazení F je *kontrakce*, je-li lipschitzovské s konstantou $L < 1$.

4.5.10 Věta

Buďte (P, ρ) , (Q, σ) metrické prostory, $F : P \rightarrow Q$. Je-li zobrazení F lipschitzovské, pak je stejnoměrně spojitě (a tedy také spojitě).

D.: Nechť F je lipschitzovské s konstantou L . Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Položíme $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$.

Jsou-li $x, y \in P$ libovolné body takové, že $\rho(x, y) < \delta$, pak $\sigma(F(x), F(y)) \leq L\rho(x, y) < L\delta = L \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$. $\square$

4.5.11 Příklady

1. Buď f reálná funkce definovaná na intervalu $[a, b]$, která má na tomto intervalu ohraničenou první derivaci. Pak f je lipschitzovská s konstantou $L = \sup\{|f'(x)| : x \in [a, b]\}$.

D.: Podle 2.3.4.1 ke každým $x, y \in [a, b]$ existuje ξ z intervalu o krajních bodech x a y takové, že $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$.

Odtud $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| |x - y| \leq L|x - y|$. $\square$

2. $(C[a, b], \rho_C)$, $(\mathbb{R}, \rho_1)$, $F : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem $F(f) = \int_a^b f(x)dx$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \rho_1(F(f), F(g)) &= \left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \right| = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - g(x)|dx \leq \\ &\leq \int_a^b \max\{|f(\xi) - g(\xi)| : \xi \in [a, b]\}dx = \max\{|f(\xi) - g(\xi)| : \xi \in [a, b]\} \int_a^b dx = \\ &= (b - a)\rho_C(f, g) \end{aligned}$$

(první nerovnost platí podle 3.3.9, druhá podle 3.3.6.)

Zobrazení F je tedy lipschitzovské s konstantou $b - a$, což podle 4.5.10 znamená, že je spojitě.

- Z 4.5.3 plyne: Jestliže posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ spojitých na intervalu $[a, b]$ konverguje k funkci f v prostoru $(C[a, b], \rho_C)$ (stejnoměrně konverguje k funkci f , sr. 4.3.2.3), pak platí $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

4.5.12 Definice

Buďte (P, ρ) , (Q, σ) metrické prostory, $F : P \rightarrow Q$ a $x_0 \in P$ hromadný bod. Řekneme, že zobrazení F má v bodě $x_0 \in P$ limitu $y_0 \in Q$ a píšeme $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = y_0$, jestliže ke každému okolí V bodu y_0 v (Q, σ) existuje okolí U bodu x_0 v (P, ρ) tak, že $F(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V$.

Zřejmě platí:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = y_0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in P)(0 < \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \sigma(F(x), F(x_0)) < \varepsilon)$.
- Jestliže má zobrazení F v bodě x_0 limitu $F(x_0)$, pak je v tomto bodě spojitě.

- $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = y_0$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z P takovou, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \neq x_0$ a $x_n \rightarrow x_0$ v (P, ρ) platí $F(x_n) \rightarrow y_0$ v (Q, σ) .

4.5.13 Definice

Nechť P je množina a $F : P \rightarrow P$. Bod $x \in P$ se nazývá *pevný bod zobrazení F* , jestliže $F(x) = x$.

4.5.14 Věta (Banach [1892–1945], o kontrakci)

Buď (P, ρ) úplný metrický prostor, $F : P \rightarrow P$ kontrakce. Pak existuje jediný pevný bod zobrazení F . Tento pevný bod je limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $x_1 \in P$ je libovolný bod a $x_{n+1} = F(x_n)$.

D.: • Nejprve ukážeme, že posloupnost $\{x_n\}$, $x_{n+1} = F(x_n)$ je cauchyovská:

$$\text{Pro libovolné } n \in \mathbb{N} \text{ platí } \rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(F(x_{n-1}), F(x_n)) \leq L\rho(x_{n-1}, x_n) = L\rho(F(x_{n-2}), F(x_{n-1})) \leq L^2\rho(x_{n-2}, x_{n-1}) = \dots \leq L^{n-1}\rho(x_1, x_2).$$

Odtud a z (M3) plyne, že pro libovolná $n, p \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+p}) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \\ &\leq L^{n-1}\rho(x_1, x_2) + L^n\rho(x_1, x_2) + L^{n+1}\rho(x_1, x_2) + \dots + L^{n+p-2}\rho(x_1, x_2) = \\ &= (L^{n-1} + L^n + L^{n+1} + \dots + L^{n+p-2})\rho(x_1, x_2) = (1 + L + L^2 + \dots + L^{p-1})L^{n-1}\rho(x_1, x_2) = \\ &= \frac{1 - L^p}{1 - L}L^{n-1}\rho(x_1, x_2) \leq L^{n-1}\frac{\rho(x_1, x_2)}{1 - L} \rightarrow 0 \text{ pro } n \rightarrow \infty, \text{ neboť } L^{n-1} \rightarrow 0 \text{ pro } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

- Poněvadž (P, ρ) je úplný, existuje $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in P$.
- $\rho(x_0, F(x_0)) \leq \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, F(x_0)) = \rho(x_0, x_n) + \rho(F(x_{n-1}), F(x_0)) \leq \rho(x_0, x_n) + L\rho(x_{n-1}, x_0) \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$ neboť $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_0, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_{n-1}, x_0) = 0$ pro $n \rightarrow \infty$.
- Je-li y jiný pevný bod zobrazení F , pak $\rho(y, x_0) = \rho(F(y), F(x_0)) \leq L\rho(y, x_0)$. Odtud plyne, že $(1 - L)\rho(y, x_0) \leq 0$ a poněvadž $0 < L < 1$, musí být $\rho(y, x_0) = 0$. $\square$

4.5.15 Aplikace (Newtonova iterační metoda)

Nechť reálná funkce g má na uzavřeném intervalu I druhou derivaci a nenulovou první derivaci. Jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $x \in I$ platí $\frac{|g(x)g''(x)|}{(g'(x))^2} < 1 - \varepsilon$, pak rovnice $g(x) = 0$ má na intervalu I jediný kořen x_0 a platí $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, kde posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána rekurentně:

$$x_1 \in I \text{ je libovolné číslo, } x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}.$$

D.: Uvažujme metrický prostor (I, ρ) s přirozenou metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$. Tento prostor je podle 4.4.8 kompaktní.

Definujme funkci $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$. Číslo x_0 je kořenem rovnice $g(x) = 0$ právě tehdy, když je pevným bodem zobrazení (funkce) f . Podle 2.3.3 platí $\rho(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| |x - y|$, kde ξ je nějaké číslo mezi x a y . Označme $L = \sup\{|f'(\xi)| : \xi \in I\}$. Podle předpokladu

$$|f'(\xi)| = \left| 1 - \frac{(g'(\xi))^2 - g(\xi)g''(\xi)}{(g'(\xi))^2} \right| = \left| \frac{g(\xi)g''(\xi)}{(g'(\xi))^2} \right| < 1 - \varepsilon$$

pro každé $\xi \in I$. Funkce f je tedy kontrakcí a tvrzení plyne z 4.5.14. $\square$

4.6 Cvičení

- 1) Ověřte, že $\rho(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$ a $\sigma(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$ jsou metriky na $\mathbb{R}$. Jsou tyto metriky ekvivalentní?
- 2) Vypočítejte vzdálenost funkcí $f(x) = \ln(1 + x)$ a $g(x) = \frac{x}{e - 1}$ v prostoru $C[0, 1]$ s metrikami ρ_C a ρ_I .
- 3) Vypočítejte vzdálenost množiny $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{|x|^3}\}$ od bodu $(\frac{1}{2}, 0)$ v prostoru $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$
- 4) Vypočítejte vzdálenost bodu $(3, 2)$ od množiny $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + bx \leq 0\}$, kde $b \geq 0$, v prostoru $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$.
- 5) Vypočítejte průměr množiny $M = \{f(x) = x^n : n \in \mathbb{N}\}$ v prostoru $(C[0, 1], \rho_I)$.
- 6) Najděte vnitřek, uzávěr, hranici a derivaci množiny $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup [1, 2) \cup ((2, 3) \cap \mathbb{Q})$ v prostoru $(\mathbb{R}, \rho)$.
- 7) Rozhodněte, zda platí tvrzení: Jsou-li množiny A, B uzavřené a $\rho(A, B) = 0$, pak $A \cap B \neq \emptyset$. Pokud ano, dokažte; pokud ne, uveďte protipříklad.
- 8) Mohou existovat neprázdné podmnožiny A, B metrického prostoru takové, že $\bar{A} \subseteq \bar{B}$, $\bar{A} \neq \bar{B}$ a $A \cap B = \emptyset$? Pokud ne, dokažte; pokud ano, udejte příklad.
- 9) Nechť F je zobrazení prostoru $(C[a, b], \rho_C)$ do prostoru $(\mathbb{R}, \rho)$ dané předpisem $F(f) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Rozhodněte, zda je toto zobrazení spojitě. Je stejně definované zobrazení spojitě na prostoru $(C[a, b], \rho_I)$?
- 10) Nechť A, B jsou neprázdné uzavřené a disjunktní množiny v prostoru (P, ρ) . Najděte spojitě zobrazení $F : P \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ uvažujeme s přirozenou metrikou ρ) takové, že $F(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in B \end{cases}$.
- 11) Rozhodněte, zda zobrazení $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dané předpisem $F(x) = \sqrt{x}$ je Lipschitzovské. Existuje pevný bod tohoto zobrazení?
- 12) Najděte kořen rovnice $\cos x = x$ s přesností na čtyři desetinná místa.

Výsledky: 1) Ano 2) $\ln(e - 1) - \frac{e-2}{e-1} \doteq 0.1233$, $2 \ln 2 - \frac{1-2e}{2-2e} \doteq 0.0953$ 3) $\sqrt{\frac{7}{108}}$ 4) $2 + 3b$ pokud $b < 1$, $3 + \frac{2}{b}$, pokud $b \geq 1$ 5) $\frac{1}{2}$ 6) $A^\circ = (1, 2)$, $\bar{A} = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup [1, 3]$, $\partial A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup [2, 3]$, $A' = \{0\} \cup [1, 3]$ 7) Ne. Např. v prostoru $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$ jsou množiny $A = \{(x, 0) : x \geq 1\}$, $B = \{(x, \frac{1}{x}) : x \geq 1\}$ uzavřené a $\rho(A, B) = 0$. 8) Ano. Např. v prostoru $(\mathbb{R}, \rho)$ množiny $A = [0, 1] \cap \mathbb{I}$, $B = [0, 2] \cap \mathbb{Q}$. 9) Ano, ne 10) $F(x) = \frac{\rho(x, B)}{\rho(x, A) + \rho(x, B)}$ 11) Ne. Dokonce dva: 0 a 1 12) 0.7391

Kapitola 5

Diferenciální počet funkcí více proměnných

5.1 Spojitost a limita

5.1.1 Definice

Buď $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$. Zobrazení $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme *(reálnou) funkcí n (reálných) proměnných*.

Množina M se nazývá *definiční obor funkce f* a značí se $\text{Dom } f$, množina $f(M)$ se nazývá *obor hodnot funkce f* a značí se $\text{Im } f$.

Zápis: $y = f(x)$, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
pro $n = 2$: $z = f(x, y)$
pro $n = 3$: $u = f(x, y, z)$
a p.

5.1.2 Definice

Buď f funkce n proměnných. Řekneme, že tato funkce je *ohraničená*, je-li množina $\text{Im } f$ ohraničená (jakožto podmnožina $\mathbb{R}$).

Na množině $\mathbb{R}^n$ uvažujeme některou z ekvivalentních metrik ρ_1 , ρ_2 , ρ_∞ (sr. 4.1.2.3 a 4.3.9.1). Na množině $\text{Dom } f$ potom je příslušná indukovaná metrika. Funkci n proměnných lze tedy považovat za zobrazení metrického prostoru $\text{Dom } f$ na metrický prostor $\text{Im } f$. O funkci f řekneme, že je *spojitá*, *stejněoměrně spojitá*, *lipschitzovská*, je-li toto zobrazení *spojité*, *stejněoměrně spojité*, *lipschitzovské*. Lze použít všechna tvrzení z 4.5.

Nebude-li řečeno jinak, budeme používat maximální metriku ρ_∞ . V tomto případě $\mathcal{O}_\varepsilon(x) = \mathcal{O}_\varepsilon(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \times (x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon) \times \dots \times (x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$.

Abychom mohli i pro funkce n proměnných zavést pojem nevlastní limity, definujeme okolí nevlastních bodů:

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$, $\mathcal{O}(x) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$

kde $a_i = \begin{cases} x_i - \varepsilon, & x_i \in \mathbb{R} \\ -\infty, & x_i = -\infty \\ c \in \mathbb{R}, & x_i = \infty \end{cases}$, $b_i = \begin{cases} x_i + \varepsilon, & x_i \in \mathbb{R} \\ \infty, & x_i = \infty \\ c \in \mathbb{R}, & x_i = -\infty \end{cases}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

5.1.3 Definice

Buď f funkce n proměnných, x_0 hromadný bod množiny $\text{Dom } f$. Řekneme, že *funkce f má v bodě x_0 limitu $a \in \mathbb{R}^*$* a píšeme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, jestliže ke každému $\mathcal{O}(a)$ existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že pro každé $x \in (\mathcal{O}(x_0) \cap \text{Dom } f) \setminus \{x_0\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(a)$.

5.1.4 Věta (Heineova podmínka)

Funkce f n proměnných má v bodě x_0 limitu a právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $x_n \in \text{Dom } f$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq x_0$ a $x_n \rightarrow x_0$ platí $f(x_n) \rightarrow a$.

D.: Analogicky důkazu 4.5.3. Věta již byla dokonce obecněji zformulována za 4.5.12 $\square$

5.1.5 Věta

1. Funkce f má v bodě x_0 nejvýše jednu limitu.
2. Má-li funkce f v bodě x_0 limitu $a \in \mathbb{R}$, pak existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že funkce f je na $(\mathcal{O}(x_0) \cap \text{Dom } f) \setminus \{x_0\}$ ohraničená.
3. Necht' $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ a existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že funkce g je na $(\mathcal{O}(x_0) \cap \text{Dom } f) \setminus \{x_0\}$ ohraničená. Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$.
4. Necht' $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}$. Pak platí:
 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |a|$.
 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$.
 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = a - b$.
 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = ab$.
 Je-li navíc $b \neq 0$, pak $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.
5. Necht' existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že pro $x \in (\mathcal{O}(x_0) \cap \text{Dom } f \cap \text{Dom } g \cap \text{Dom } h) \setminus \{x_0\}$ platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
 Jestliže $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a \in \mathbb{R}^*$, pak $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$.

D.: Analogický důkazu podobných tvrzení v 1.6. $\square$

5.1.6 Věta (výpočet limity funkce dvou proměnných)

Funkce $z = f(x, y)$ má v bodě (x_0, y_0) limitu $a \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když existuje $\rho > 0$ a funkce $g : (0, \rho) \rightarrow [0, \infty)$ taková, že $\lim_{r \rightarrow 0+} g(r) = 0$ a

$$|f(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) - a| \leq g(r)$$

pro každé $r \in (0, \rho)$ a každé $\varphi \in [0, 2\pi)$.

D.: Na $\mathbb{R}^2$ uvažujme euklidovskou metriku ρ_2 .

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Poněvadž $\lim_{r \rightarrow 0+} g(r) = 0$, existuje $\delta > 0$ takové, že pro $r \in (0, \delta)$ je $g(r) < \varepsilon$.

Tedy pro $x \in \mathcal{O}_\delta((x_0, y_0)) \setminus \{(x_0, y_0)\}$ platí $|f(x, y) - a| < \varepsilon$. $\square$

Příklad: $f(x, y) = \frac{x^2 + (y-1)^2 y}{x^2 + (y-1)^2}, (x_0, y_0) = (0, 1).$

$$f(r \cos \varphi, 1 + r \sin \varphi) = \frac{r^2 \cos^2 \varphi + (1 + r \sin \varphi) r^2 \sin^2 \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = \frac{r^2 + r^3 \sin^3 \varphi}{r^2} = 1 + r \sin^3 \varphi$$

$$\lim_{r \rightarrow 0+} (1 + r \sin^3 \varphi) = 1, \text{ což ukazuje, že } a \text{ by se mohlo rovnat } 1.$$

$$|f(r \cos \varphi, 1 + r \sin \varphi) - 1| = |r \sin^3 \varphi|$$

$$\text{Poněvadž } \lim_{r \rightarrow 0+} |r \sin^3 \varphi| = 0, \text{ je } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{x^2 + (y-1)^2 y}{x^2 + (y-1)^2} = 1.$$

5.2 Derivace

5.2.1 Definice

Buď f funkce n proměnných, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \text{Dom } f$.

Položme $\varphi(x) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, x_{i+2}^0, \dots, x_n^0)$. Má-li funkce (jedné proměnné) φ v bodě x_i^0 vlastní derivaci, nazveme tuto derivaci *parciální derivací funkce f podle i -té proměnné v bodě x^0* a značíme ji $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$, $f_{x_i}(x^0)$, $f'_{x_i}(x^0)$, $f'_{|i}(x^0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \lim_{x \rightarrow x_i^0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, x_{i+2}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, x_{i+2}^0, \dots, x_n^0)}{x - x_i^0}.$$

Má-li funkce f parciální derivaci f_{x_i} ve všech bodech nějaké množiny $M \subseteq \text{Dom } f$, je tato parciální derivace sama funkcí. Značíme ji $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, f_{x_i} , f'_{x_i} , $f'_{|i}$.

5.2.2 Poznámky

1. Z definice 5.2.1 plyne jednoduché pravidlo pro výpočet parciálních derivací:

$x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$ považujeme za parametry a x_i za proměnnou, podle níž derivujeme.

2. Funkce, která má v bodě x^0 parciální derivace podle všech proměnných, nemusí být v tomto bodě spojitá.

Např. $f(x, y) = \begin{cases} 1, & xy = 0 \\ 0, & xy \neq 0 \end{cases}$, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ a f není spojitá v $(0, 0)$.

5.2.3 Věta

Nechť funkce f a g mají na otevřené množině $M \subseteq \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$ parciální derivaci $f'_{|i}$, $g'_{|i}$. Pak jejich součet, rozdíl a součin mají parciální derivaci podle i -té proměnné na M a platí:

$$(f \pm g)'_{|i}(x) = f'_{|i}(x) \pm g'_{|i}(x),$$

$$(fg)'_{|i}(x) = f'_{|i}(x)g(x) + f(x)g'_{|i}(x),$$

Ve všech bodech množiny M , v nichž $g(x) \neq 0$ navíc platí $\left(\frac{f}{g}\right)'_{|i}(x) = \frac{f'_{|i}(x)g(x) - f(x)g'_{|i}(x)}{(g(x))^2}$.

D.: Plyne z 2.1.5. $\square$

5.2.4 Věta (o střední hodnotě)

Nechť funkce f má parciální derivace ve všech bodech množiny $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \text{Dom } f$ podle všech proměnných. Pak existují čísla $\xi_1 \in (a_1, b_1)$, $\xi_2 \in (a_2, b_2)$, $\dots$, $\xi_n \in (a_n, b_n)$ taková, že

$$f(b_1, b_2, \dots, b_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{\infty} f'_{|i}(b_1, b_2, \dots, b_{i-1}, \xi_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n)(b_i - a_i).$$

Zejména pro $n = 2$: $f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, y_0)(x_1 - x_0) + f_y(x_1, \eta)(y_1 - y_0)$, kde $\xi \in (x_0, x_1)$, $\eta \in (y_0, y_1)$.

D.: Provedeme pro $n = 2$. S využitím 2.3.3 dostaneme:

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0) + f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0) = f_y(x_1, \eta)(y_1 - y_0) + f_x(\xi, y_0)(x_1 - x_0).$$

$\square$

5.2.5 Definice

Nechť funkce f má parciální derivaci podle i -té proměnné na otevřené množině $M \subseteq \text{Dom } f$, $x^0 \in M$. Existuje-li parciální derivace funkce $f'_{|i}$ podle j -té proměnné v bodě x^0 , nazveme tuto derivaci *druhou parciální derivací*

funkce f podle i -té a j -té proměnné a značíme ji $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0)$, $f_{x_i x_j}(x^0)$, $f''_{x_i x_j}(x^0)$, $f''_{|i,j}(x^0)$. V případě, že $i \neq j$,

mluvíme o *smíšené parciální derivaci*.

Analogicky definujeme parciální derivace vyšších řádů v bodě x_0 .

Také parciální derivace vyšších řádů lze považovat za funkce.

5.2.6 Věta (Schwarz [1843 – 1921])

Nechť funkce f má parciální derivace $f_{x_i x_j}$, $f_{x_j x_i}$ spojité v bodě x^0 . Pak jsou tyto derivace záměnné, tj. $f_{x_i x_j}(x^0) = f_{x_j x_i}(x^0)$.

D.: Provedeme pro $n = 2$.

$$\text{Položme } F(h) = \frac{f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0)}{h^2}$$

$$\varphi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y), \quad \psi(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0).$$

S využitím 2.3.3 dostaneme

$$\begin{aligned} F(h) &= \frac{1}{h^2}(\varphi(y_0 + h) - \varphi(y_0)) = \frac{1}{h^2}\varphi'(y_0 + \vartheta_1 h)h = \\ &= \frac{1}{h}(f_y(x_0 + h, y_0 + \vartheta_1 h) - f_y(x_0, y_0 + \vartheta_1 h)) = \frac{1}{h}f_{yx}(x_0 + \vartheta_2 h, y_0 + \vartheta_1 h)h = \\ &= f_{yx}(x_0 + \vartheta_2 h, y_0 + \vartheta_1 h), \text{ kde } \vartheta_1, \vartheta_2 \in (0, 1). \end{aligned}$$

Analogicky odvodíme

$$F(h) = \frac{1}{h^2}(\psi(x_0 + h) - \psi(x_0)) = f_{xy}(x_0 + \vartheta_3 h, y_0 + \vartheta_4 h), \text{ kde } \vartheta_3, \vartheta_4 \in (0, 1).$$

Tedy $f_{yx}(x_0 + \vartheta_2 h, y_0 + \vartheta_1 h) = f_{xy}(x_0 + \vartheta_3 h, y_0 + \vartheta_4 h)$ a ze spojitosti druhých parciálních derivací plyne pro $h \rightarrow 0$: $f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$. $\square$

5.2.7 Důsledek

Má-li funkce f na otevřené množině $M \subseteq \text{Dom } f$ spojité parciální derivace až do řádu m , pak hodnota m -té parciální derivace v libovolném bodě této množiny závisí pouze na tom, kolikrát se derivovalo podle i -té proměnné ($i = 1, 2, \dots, n$), nikoliv na pořadí, v jakém se derivovalo.

5.2.8 Definice

Buď V_n n -rozměrný vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, f funkce n proměnných, $x^0 \in \text{Dom } f$, $\vec{v} \in V_n$.

Položme $\varphi(t) = f(x^0 + t\vec{v})$. Má-li funkce φ derivaci v bodě 0, nazveme tuto derivaci *derivací funkce f ve směru $\vec{v}$ v bodě x^0 (směrovou derivací)* a značíme ji $f'_{\vec{v}}(x^0)$, $f_{\vec{v}}(x^0)$.

Má-li funkce f derivaci ve směru $\vec{v}$ ve všech bodech nějaké množiny $M \subseteq \text{Dom } f$, je tato směrová derivace sama funkcí, značíme ji $f_{\vec{v}}$.

$$f_{\vec{v}}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t\vec{v}) - f(x)}{t}.$$

5.2.9 Poznámky

1. Je-li $\vec{e}_i = (0, 0, \dots, 0, \overbrace{1}^i, 0, 0, \dots, 0)$ ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ je standardní báze V_n), pak $f_{\vec{e}_i} = f'_{|i}$.

2. Pro směrové derivace platí:

$$\begin{aligned} (f \pm g)_{\vec{v}} &= f_{\vec{v}} \pm g_{\vec{v}}, \\ (fg)_{\vec{v}} &= f_{\vec{v}}g + fg_{\vec{v}}, \\ \left(\frac{f}{g}\right)_{\vec{v}} &= \frac{f_{\vec{v}}g - fg_{\vec{v}}}{g^2}. \end{aligned}$$

3. Existují-li směrové derivace $f_{\vec{v}}(x^0)$ pro všechny $\vec{v} \in V_n$, funkce f nemusí být spojitá v x^0 .

Např. $f(x, y) = \begin{cases} 1, & y = x^2, x > 0 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$ má derivace v $(0, 0)$ v jakémkoliv směru, ale není v tomto bodě spojitá.

5.2.10 Věta (o střední hodnotě)

Nechť funkce f má derivaci ve směru $\vec{v}$ ve všech bodech úsečky $\{x : x = x^0 + t\vec{v}, t \in [0, t_0]\}$. Pak existuje $\vartheta \in (0, 1)$, že platí

$$f(x^0 + t_0\vec{v}) - f(x^0) = t_0 f_{\vec{v}}(x^0 + \vartheta t_0\vec{v}).$$

D.: Položme $\varphi(t) = f(x^0 + t\vec{v})$. Podle předpokladu pro každé $t \in [0, t_0]$ existuje $\varphi'(t)$. To podle 2.1.3 znamená, že φ je spojitá na $[0, t_0]$. Odtud dále podle 2.3.3 plyne $\varphi(t_0) - \varphi(0) = \varphi'(\vartheta t_0)t_0$, což je tvrzení. $\square$

5.2.11 Věta

Buď f funkce n proměnných, $\vec{v} \in V_n$. Jestliže existuje $f_{\vec{v}}(x)$, pak pro každé $c \in \mathbb{R}$ existuje $f_{c\vec{v}}(x)$ a platí $f_{c\vec{v}}(x) = c f_{\vec{v}}(x)$.

D.: $f_{c\vec{v}}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tc\vec{v}) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} c \frac{f(x + t\vec{v}) - f(x)}{ct} = c f_{\vec{v}}(x)$. $\square$

5.2.12 Věta

Buď f funkce n proměnných, $\vec{u} \in V_n, \vec{v} \in V_n, x^0 \in \text{Dom } f$. Nechť $f_{\vec{u}}$ existuje v x^0 a je spojitá v nějakém okolí $\mathcal{O}(x^0)$ a nechť $f_{\vec{v}}(x^0)$ existuje. Pak existuje $f_{\vec{u}+\vec{v}}(x^0)$ a platí $f_{\vec{u}+\vec{v}}(x^0) = f_{\vec{u}}(x^0) + f_{\vec{v}}(x^0)$.

D.: Položme $\varphi(t) = f(x^0 + t(\vec{u} + \vec{v}))$. S využitím 5.2.10 dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} &= \frac{f(x^0 + t\vec{u} + t\vec{v}) - f(x^0 + t\vec{v}) + f(x^0 + t\vec{v}) - f(x^0)}{t} = \\ &= \frac{f(x^0 + t\vec{u} + t\vec{v}) - f(x^0 + t\vec{v})}{t} + \frac{f(x^0 + t\vec{v}) - f(x^0)}{t} = \\ &= \frac{t f_{\vec{u}}(x^0 + \vartheta t\vec{v})}{t} + \frac{f(x^0 + t\vec{v}) - f(x^0)}{t} \rightarrow f_{\vec{u}}(x^0) + f_{\vec{v}}(x^0) \text{ pro } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$\square$

Poznámka: Předpoklad o spojitosti $f_{\vec{u}}$ v nějakém okolí $\mathcal{O}(x^0)$ obecně nelze vynechat.

Např.: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad (x^0, y^0) = (0, 0), \quad \vec{u} = (1, 0), \quad \vec{v} = (0, 1).$

$$f_{\vec{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot 0(t+0)}{t^3} = 0, \quad f_{\vec{v}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 \cdot t(0+t)}{t^3} = 0, \quad f_{\vec{u}}(0, 0) + f_{\vec{v}}(0, 0) = 0,$$

$$f_{\vec{u}+\vec{v}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tt(t+t)}{t(t^2+t^2)} = 1.$$

5.2.13 Definice

Buď f funkce n proměnných, $x^0 \in \text{Dom } f$ a nechť má f v x^0 derivaci ve směru každého vektoru $\vec{v} \in V_n$ a nechť funkce $\varphi : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ daná předpisem $\varphi(\vec{v}) = f_{\vec{v}}(x^0)$ je lineární formou na V_n , což znamená, že existuje vektor $\vec{a} \in V_n$ takový, že $\varphi(\vec{v}) = \vec{a} \cdot \vec{v}$, kde $\cdot$ značí skalární součin. Pak vektor $\vec{a}$ nazveme *derivací (gradientem)* funkce f v bodě x^0 a značíme $\vec{a} = f'(x^0) = \nabla f(x^0) = \text{grad } f(x^0)$.

Má-li funkce f derivaci ve všech bodech nějaké množiny $M \subseteq \text{Dom } f$, pak je tato derivace zobrazením $M \rightarrow V_n$ (vektorovou funkcí). Značíme ji $f', \nabla f, \text{grad } f$.

5.2.14 Poznámky

1. Nechť funkce f má derivaci ve směru každého vektoru $\vec{v} \in V_n$ která je spojitou funkcí na otevřené množině $M \subseteq \text{Dom } f$. Pak podle 5.2.11 a 5.2.12 má f na M derivaci.

2. Nechť $f'(x^0) = \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\varphi(\vec{v}) = f_{\vec{v}}(x^0) = \vec{a} \cdot \vec{v}$, $\vec{e}_i = (0, 0, \dots, 0, \overbrace{1}^i, 0, 0, \dots, 0)$.
Pak $\varphi(\vec{e}_i) = \vec{a} \cdot \vec{e}_i = a_i$.
Tedy $a_i = f_{\vec{e}_i}(x^0) = f'_{\vec{e}_i}(x^0)$, $f'(x^0) = (f'_{\vec{e}_1}, f'_{\vec{e}_2}, \dots, f'_{\vec{e}_n})$.

3. Funkce, která má v bodě x_0 derivaci, nemusí být v tomto bodě spojitá. (Stejný příklad jako v 5.2.9.3)

4. Geometrický význam derivace:

Nechť f má derivaci v bodě $x^0 \in \text{Dom } f$. Pak pro libovolný vektor $\vec{v} \in V_n$ platí

$$f_{\vec{v}}(x^0) = f'(x^0) \cdot \vec{v} = \|f'(x^0)\| \|\vec{v}\| \cos \alpha, \text{ kde } \alpha \text{ je úhel, který svírají vektory } f'(x^0), \vec{v}.$$

Odtud plyne, že $f_{\vec{v}}(x^0)$ je maximální pro $\cos \alpha = 1$, tj. pro $\alpha = 0$, tedy v případě, že vektory $f'(x^0)$ a $\vec{v}$ jsou rovnoběžné. To znamená, že směrová derivace je největší ve směru $f'(x^0)$.

Gradient — směr, ve kterém funkce nejrychleji roste.

5.3 Diferenciál

5.3.1 Definice

Nechť f je funkce n proměnných, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ vnitřní bod $\text{Dom } f$. Řekneme, že funkce f je *diferencovatelná v bodě x^0* , jestliže existují reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ taková, že platí

$$\lim_{(h_1, h_2, \dots, h_n) \rightarrow (0, 0, \dots, 0)} \frac{f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \dots, x_n^0 + h_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) - (a_1 h_1 + a_2 h_2 + \dots + a_n h_n)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}} = 0.$$

Lineární funkce $df(x^0)$ daná předpisem $(h_1, h_2, \dots, h_n) \mapsto (a_1 h_1 + a_2 h_2 + \dots + a_n h_n)$ se nazývá *(totální) diferenciál funkce f v bodě x^0* .

Ekvivalentní formulace: Funkce f je diferencovatelná v bodě x^0 , jestliže existují reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ a funkce n proměnných τ tak, že

$$\begin{aligned} & f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \dots, x_n^0 + h_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \\ & = (a_1 h_1 + a_2 h_2 + \dots + a_n h_n) + \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2} \tau(h_1, h_2, \dots, h_n), \end{aligned}$$

přičemž

$$\lim_{(h_1, h_2, \dots, h_n) \rightarrow (0, 0, \dots, 0)} \tau(h_1, h_2, \dots, h_n) = 0.$$

Definice 5.3.1 je v souladu s definicí 2.2.3

$\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}$ je euklidovská vzdálenost bodu $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ od počátku soustavy souřadnic. Místo ní lze uvažovat vzdálenost v libovolné ekvivalentní metrice.

5.3.2 Věta

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x^0 , pak je v tomto bodě spojitá.

$$\begin{aligned} \text{D.: } f(x) - f(x^0) &= f(x_1^0 + (x_1 - x_1^0), x_2^0 + (x_2 - x_2^0), \dots, x_n^0 + (x_n - x_n^0)) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \\ &= (a_1(x_1 - x_1^0) + a_2(x_2 - x_2^0) + \dots + a_n(x_n - x_n^0) + \\ &+ \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2} \tau((x_1 - x_1^0), (x_2 - x_2^0), \dots, (x_n - x_n^0))), \end{aligned}$$

z čehož plyne $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = f(x^0)$. $\square$

5.3.3 Věta

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x^0 , pak má v tomto bodě parciální derivace podle všech proměnných a platí $a_1 = f'_{|1}(x^0), a_2 = f'_{|2}(x^0), \dots, a_n = f'_{|n}(x^0)$, neboli $df(x^0)(h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n f'_{|i}(x^0) h_i$.

D.: Z 5.3.1 a 5.2.1 plyne

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + h, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) - a_i h}{|h|} = \begin{cases} f'_{|i}(x_0) - a_i, & h \geq 0 \\ a_i - f'_{|i}(x_0), & h < 0 \end{cases}$$

a tedy $f'_{|i}(x_0) = a_i$. $\square$

5.3.4 Věta

Má-li funkce n proměnných f v bodě x^0 spojitě parciální derivace podle všech proměnných, pak je v tomto bodě diferencovatelná.

D.: Pro stručnost zápisu provedeme pro $n = 2$.

Ze spojitosti parciálních derivací plyne jejich existence v jistém okolí bodu (x_0, y_0) .

S využitím 5.2.4 dostaneme:

$$\begin{aligned} & \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f_x(x_0 + \vartheta_1 h, y_0)h + f_y(x_0 + h, y_0 + \vartheta_2 k)k - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (f_x(x_0 + \vartheta_1 h, y_0) - f_x(x_0, y_0)) \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (f_y(x_0 + h, y_0 + \vartheta_2 k) - f_y(x_0, y_0)) \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne z 5.1.5.3, neboť f_x a f_y jsou spojitě a $\left| \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq 1$, $\left| \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq 1$. $\square$

5.3.5 Poznámky

- Podobně jako za větou 2.2.5 lze zdůvodnit, že přírůstky $h_1, h_2, \dots, h_n$ nezávisle proměnných můžeme označit $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$.

Diferenciál pak zapíšeme $df(x^0) = \sum_{i=1}^n f'_i(x^0)dx_i = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n}dx_n$.

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n$$

Zejména: $df(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$

$$df = f_x dx + f_y dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$d = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$$

- Tečná rovina

Rovina $z = ax + by + c$ v prostoru $\mathbb{R}^3$ se nazývá tečná rovina ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $T = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, jestliže

$$f(x_0, y_0) = ax_0 + by_0 + c,$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - ax - by - c}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Z těchto rovnic dostaneme:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) - ax - by - c}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - a(x - x_0) - b(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}. \end{aligned}$$

Podle 5.3.1 je tedy $df(x, y)(x - x_0, y - y_0) = a(x - x_0) + b(y - y_0)$, takže podle 5.3.3

$a = f_x(x_0, y_0)$, $b = f_y(x_0, y_0)$.

Z první rovnice dostaneme $c = f(x_0, y_0) - x_0 f_x(x_0, y_0) - y_0 f_y(x_0, y_0)$.

Rovnice tečné roviny tedy je $z = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$.

Označíme-li $z_0 = f(x_0, y_0)$, je rovnice tečné roviny

$$z - z_0 = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \cdot (x - x_0, y - y_0),$$

neboli

$$z - z_0 = f'(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0).$$

Obecně v $(n+1)$ -rozměrném prostoru je rovnice tečné nadroviny ke grafu funkce n proměnných $y = f(x)$ v bodě x^0

$$y - f(x^0) = f'(x^0) \cdot (x - x^0).$$

3. Geometrický význam diferenciálu: přírůstek funkce měřený na tečné nadrovině.

$$f(x) \approx f(x^0) + df(x^0)(x - x^0).$$

4. Příklad funkce dvou proměnných, která má v bodě $(0,0)$ derivaci, je v tomto bodě spojitá, ale k jejímu grafu neexistuje v tomto bodě tečná rovina:

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & y = x^2, x > 0 \\ \frac{2y}{x} - x, & \frac{x^2}{2} < y < x^2, x > 0 \\ 2x - \frac{y}{x}, & x^2 < y < 2x^2, x > 0 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Spojitosť a existence derivace v daném bodě tedy ještě nezaručí diferencovatelnost funkce.

5.3.6 Definice

Řekneme, že funkce n proměnných f je třídy C^m v bodě $x^0 \in \text{Dom } f$, existuje-li okolí $\mathcal{O}(x^0)$ bodu x^0 takové, že $\mathcal{O}(x^0) \subseteq \text{Dom } f$ a funkce f má na $\mathcal{O}(x^0)$ spojitě všechny parciální derivace až do řádu m včetně.

Řekneme, že funkce n proměnných f je třídy C^m na otevřené množině $M \subseteq \text{Dom } f$, je-li třídy C^m v každém bodě množiny M .

Řekneme, že funkce n proměnných f je třídy C^∞ v bodě $x^0 \in \text{Dom } f$, je-li v tomto bodě třídy C^m pro každé $m \in \mathbb{N}$.

Řekneme, že funkce n proměnných f je třídy C^∞ na otevřené množině $M \subseteq \text{Dom } f$, je-li třídy C^∞ v každém bodě množiny M .

Z 5.3.4 plyne, že funkce třídy C^1 v bodě x^0 je v tomto bodě diferencovatelná.

5.3.7 Definice

Nechť funkce n proměnných f je třídy C^m v bodě x^0 . Diferenciál m -tého řádu funkce f v bodě x^0 definujeme vztahem

$$\begin{aligned} d^m f(x^0)(h_1, h_2, \dots, h_n) &= \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=m} \frac{m!}{i_1!i_2!\dots i_n!} \frac{\partial^m f(x^0)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} h_1^{i_1} h_2^{i_2} \dots h_n^{i_n} \\ d^m f(x^0) &= \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=m} \frac{m!}{i_1!i_2!\dots i_n!} \frac{\partial^m f(x^0)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} dx_1^{i_1} dx_2^{i_2} \dots dx_n^{i_n} = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m f(x^0) \\ d^m &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m \end{aligned}$$

Zejména pro $n = 2$:

$$\begin{aligned} d^m f(x_0, y_0)(h, k) &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^i \partial y^{m-i}} h^i k^{m-i} \\ d^m f(x_0, y_0) &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^i \partial y^{m-i}} dx^i dy^{m-i} = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^m f(x_0 y_0) \end{aligned}$$

$$d^2 f = f_{xx} dx^2 + 2f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2$$

$$d^3 f = f_{xxx} dx^3 + 3f_{xxy} dx^2 dy + 3f_{xyy} dx dy^2 + f_{yyy} dy^3$$

5.3.8 Definice

Buďte $g_1, g_2, \dots, g_n$ funkce n proměnných. Funkce n proměnných F se nazývá *kmenová funkce diferenciálu*

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_1 + g_2(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_2 + \dots + g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_n$$

na otevřené množině $M \subseteq \bigcap_{i=1}^n \text{Dom } g_i$, jestliže na této množině platí

$$F'_{|1}(x) = g_1(x), F'_{|2}(x) = g_2(x), \dots, F'_{|n}(x) = g_n(x), \text{ tj. } dF = \sum_{i=1}^n g_i dx_i.$$

5.3.9 Věta

Nechť $g_1, g_2, \dots, g_n$ jsou funkce n proměnných, které jsou třídy C^1 na otevřené množině $M \subseteq \bigcap_{i=1}^n \text{Dom } g_i$. Kmenová funkce diferenciálu $g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + \dots + g_n dx_n$ existuje právě tehdy, když

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$$

pro všechna $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$.

D.: Provedeme pro $n = 2$.

$\Rightarrow$: Nechť existuje kmenová funkce F , $dF = g_1 dx + g_2 dy$. Pak $F_x = g_1$, $F_y = g_2$.

Derivace $F_{xy} = g_{1y}$, $F_{yx} = g_{2x}$ jsou spojité a tedy podle 5.2.6 záměnné. To znamená, že

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} = F_{xy} = F_{yx} = \frac{\partial g_2}{\partial x}.$$

$\Leftarrow$: Nechť $\frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{\partial g_2}{\partial x}$. Pro $(x_0, y_0), (x, y) \in M$ takové, že $\{(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) : t \in [0, 1]\} \subseteq M$

položme $F(x, y) = \int_{x_0}^x g_1(t, y) dt + \int_{y_0}^y g_2(x_0, t) dt$. Pak podle 3.4.3

$$F_x(x, y) = g_1(x, y).$$

Dále s využitím 2.3.3 dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x g_1(t, y) dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{x_0}^x g_1(t, y+h) dt - \int_{x_0}^x g_1(t, y) dt}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{x_0}^x \frac{g_1(t, y+h) - g_1(t, y)}{h} dt = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{x_0}^x g'_{1|2}(t, y + \vartheta h) dt = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{x_0}^x g'_{2|1}(t, y + \vartheta h) dt = \lim_{h \rightarrow 0} (g_2(x, y + \vartheta h) - g_2(x_0, y + \vartheta h)) = \\ &= g_2(x, y) - g_2(x_0, y) \end{aligned}$$

$$\text{Odtud } F_y(x, y) = g_2(x, y) - g_2(x_0, y) + g_2(x_0, y) = g_2(x, y).$$

□

5.4 Derivace složené funkce, Taylorův vzorec

5.4.1 Věta (řetězové pravidlo)

Nechť f je funkce m proměnných a $g_1, g_2, \dots, g_m$ jsou funkce n proměnných, které mají spojité parciální derivace prvního řádu v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Označme $u_1^0 = g_1(x^0), u_2^0 = g_2(x^0), \dots, u_m^0 = g_m(x^0)$. Je-li funkce $z = f(u_1, u_2, \dots, u_m)$ diferencovatelná v bodě $(u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0)$, pak má složená funkce n proměnných

$z = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$ parciální derivace prvního řádu v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ a platí

$$F'_{|i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \sum_{j=1}^m f'_{|j}(u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0) g'_{j|i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_j}(u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0),$$

stručně

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial z}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial z}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_i},$$

nebo

$$z_{x_i} = z_{u_1} u_{1x_i} + z_{u_2} u_{2x_i} + \dots + z_{u_n} u_{nx_i}.$$

D.: Provedeme pro $m = n = 2$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$,
 $z = F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u(x_0 + h, y_0), v(x_0 + h, y_0)) - f(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))}{h}. \end{aligned}$$

Poněvadž f je diferencovatelná v (u_0, v_0) , existuje podle 5.3.1 a 5.3.3 funkce $\tau = \tau(h, k)$ taková, že
 $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \tau(h, k) = 0$ a

$$\begin{aligned} &f(u(x_0 + h, y_0), v(x_0 + h, y_0)) - f(u_0, v_0) = \\ &= f_u(u_0, v_0)(u(x_0 + h, y_0) - u_0) + f_v(u_0, v_0)(v(x_0 + h, y_0) - v_0) + \\ &\quad + \sqrt{(u(x_0 + h, y_0) - u_0)^2 + (v(x_0 + h, y_0) - v_0)^2} \tau(u(x_0 + h, y_0) - u_0, v(x_0 + h, y_0) - v_0). \end{aligned}$$

Označme $\alpha(h) = \sqrt{(u(x_0 + h, y_0) - u_0)^2 + (v(x_0 + h, y_0) - v_0)^2} \tau(u(x_0 + h, y_0) - u_0, v(x_0 + h, y_0) - v_0)$.

$$\begin{aligned} \text{Pak } \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f_u(u_0, v_0)(u(x_0 + h, y_0) - u_0) + f_v(u_0, v_0)(v(x_0 + h, y_0) - v_0) + \alpha(h)) = \\ &= f_u(u_0, v_0)u_x(x_0, y_0) + f_v(u_0, v_0)v_x(x_0, y_0) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(h)}{h}. \end{aligned}$$

Ukážeme, že $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(h)}{h} = 0$: Podle 2.3.6

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u(x_0 + h, y_0) - u_0)^2 + (v(x_0 + h, y_0) - v_0)^2}{h^2} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(u(x_0 + h, y_0) - u_0)u_x(x_0 + h, y_0) + 2(v(x_0 + h, y_0) - v_0)v_x(x_0 + h, y_0)}{2h} = \\ &= (u_x(x_0, y_0))^2 + (v_x(x_0, y_0))^2, \end{aligned}$$

tedy funkce $\frac{\sqrt{(u(x_0 + h, y_0) - u_0)^2 + (v(x_0 + h, y_0) - v_0)^2}}{h}$ je ohraničená a tvrzení plyne z 5.1.5.3.

Dokázali jsme tedy

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = f_u(u_0, v_0)u_x(x_0, y_0) + f_v(u_0, v_0)v_x(x_0, y_0).$$

Analogicky dokážeme

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = f_u(u_0, v_0)u_y(x_0, y_0) + f_v(u_0, v_0)v_y(x_0, y_0).$$

□

5.4.2 Poznámky

1. Vzorce ve větě 5.4.1 lze zapsat maticově:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial u_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

2. Pomocí řetězového pravidla lze počítat i druhé parciální derivace:

Nechť funkce $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ mají druhé parciální derivace v bodě (x_0, y_0) . Označme $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. Je-li funkce $z = f(u, v)$ třídy C^2 v bodě (u_0, v_0) , pak složená funkce $z = F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ má druhé parciální derivace v bodě (x_0, y_0) a v něm platí

$$\begin{aligned} F_{xx} &= f_{uu}u_x^2 + 2f_{uv}u_xv_x + f_{vv}v_x^2 + f_uu_{xx} + f_vv_{xx} \\ F_{xy} &= f_{uu}u_xu_y + f_{uv}(u_xv_y + u_yv_x) + f_{vv}v_xv_y + f_uu_{xy} + f_vv_{xy} \\ F_{yy} &= f_{uu}u_y^2 + 2f_{uv}u_yv_y + f_{vv}v_y^2 + f_uu_{yy} + f_vv_{yy} \end{aligned}$$

D.: Odvodíme první formuli. Ostatní lze odvodit analogicky.

$$\begin{aligned} F_{xx} &= (z_x)_x = (z_uu_x + z_vv_x)_x = (z_u)_xu_x + z_uu_{xx} + (z_v)_xv_x + z_vv_{xx} = \\ &= (z_{uu}u_x + z_{uv}v_x)u_x + (z_{vu}u_x + z_{vv}v_x)v_x + z_uu_{xx} + z_vv_{xx} = \\ &= z_{uu}u_x^2 + z_{uv}u_xv_x + z_{vu}u_xv_x + z_{vv}v_x^2 + z_uu_{xx} + z_vv_{xx}. \end{aligned}$$

Odtud již plyne dokazovaná formule, neboť podle 5.3.6 a 5.2.6 je $z_{uv} = z_{vu} = f_{uv}$. $\square$

3. Předchozí vzorce si lze pamatovat pomocí formální mocniny nebo součinu. Např.:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2,$$

což jsou první tři členy prvního vzorce.

4. Analogicky lze počítat i derivace vyšších řádů.

5.4.3 Věta (Taylor)

Nechť funkce n proměnných f je v bodě $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ třídy C^{m+1} , tj. existuje okolí $\mathcal{O}(x^0)$ bodu x^0 takové, že f má na něm spojité parciální derivace až do řádu $m+1$ včetně. Buď $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{O}(x^0)$. Pak existuje $\vartheta \in (0, 1)$ takové, že platí

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \\ &+ \frac{1}{1!} (f_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)(x_1 - x_1^0) + f_{x_2}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)(x_2 - x_2^0) + \cdots + f_{x_n}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)(x_n - x_n^0)) + \cdots + \\ &+ \frac{1}{m!} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=m} \frac{m!}{i_1!i_2!\dots i_n!} \frac{\partial^m f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} (x_1 - x_1^0)^{i_1} (x_2 - x_2^0)^{i_2} \dots (x_n - x_n^0)^{i_n} + \\ &+ \frac{1}{(m+1)!} \sum_{i_1+\dots+i_n=m+1} \frac{(m+1)!}{i_1!i_2!\dots i_n!} \frac{\partial^{m+1} f(x_1^0 + \vartheta(x_1 - x_1^0), \dots, x_n^0 + \vartheta(x_n - x_n^0))}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} (x_1 - x_1^0)^{i_1} \dots (x_n - x_n^0)^{i_n}. \end{aligned}$$

D.: Položme $F(t) = f(x_1^0 + t(x_1 - x_1^0), x_2^0 + t(x_2 - x_2^0), \dots, x_n^0 + t(x_n - x_n^0))$. Tvrzení nyní plyne z 2.4.8, 5.4.1 a 5.4.2.4 $\square$

Vzorec v předchozí větě se nazývá Taylorův.

Polynom n proměnných

$$T_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \\ + \frac{1}{1!} (f_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)(x_1 - x_1^0) + f_{x_2}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)(x_2 - x_2^0) + \dots + f_{x_n}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)(x_n - x_n^0)) + \dots + \\ + \frac{1}{m!} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=m} \frac{m!}{i_1!i_2!\dots i_n!} \frac{\partial^m f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} (x_1 - x_1^0)^{i_1} (x_2 - x_2^0)^{i_2} \dots (x_n - x_n^0)^{i_n} +$$

se nazývá *Taylorův polynom m -tého stupně funkce f se středem x^0* a výraz

$$R_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{i_1+\dots+i_n=m+1} \frac{(m+1)!}{i_1!i_2!\dots i_n!} \frac{\partial^{m+1} f(x_1^0 + \vartheta(x_1 - x_1^0), \dots, x_n^0 + \vartheta(x_n - x_n^0))}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} (x_1 - x_1^0)^{i_1} \dots (x_n - x_n^0)^{i_n}$$

se nazývá *zbytek v Taylorově vzorci*.

Taylorův vzorec lze stručněji zapsat pomocí diferenciálů:

$$T_m(x) = f(x^0) + \frac{1}{1!} df(x^0)(x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x^0)(x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0) + \dots + \\ + \frac{1}{m!} d^m f(x^0)(x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0) \\ R_m(x) = \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(x^0)(x_1^0 + \vartheta(x_1 - x_1^0), \dots, x_n^0 + \vartheta(x_n - x_n^0))$$

5.5 Průběh funkce více proměnných

5.5.1 Definice

Řekneme, že funkce f nabývá v bodě x^* *lokálního maxima* (resp. *minima*), jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x^*)$ bodu x^* takové, že $\mathcal{O}(x^*) \subseteq \text{Dom } f$ a pro každé $x \in \mathcal{O}(x^*)$ platí $f(x) \leq f(x^*)$ (resp. $f(x) \geq f(x^*)$).

Jsou-li tyto nerovnosti pro $x \neq x^*$ ostré, mluvíme o *ostrém lokálním maximu* (resp. *minimu*).

(Ostrá) lokální maxima a minima nazýváme souhrnně (*ostré*) *lokální extrémy*.

5.5.2 Příklad

1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ má v bodě (x^*, y^*) ostré lokální minimum, neboť $f(x, y) > 0 = f(0, 0)$ pro každý $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
2. $f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) = (0, 0) \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$ má v bodě (x^*, y^*) ostré lokální maximum.

V bodě ostrého lokálního extrému funkce nemusí být diferencovatelná ani spojitá.

5.5.3 Definice

Řekneme, že $x^* \in \mathbb{R}^n$ je *stacionárním bodem funkce f* , jestliže f má v tomto bodě parciální derivace podle všech proměnných a platí

$$f'_{|1}(x^*) = f'_{|2}(x^*) = \dots = f'_{|n}(x^*) = 0.$$

5.5.4 Věta

Nechť funkce f má v bodě $x^* \in \mathbb{R}^n$ lokální extrém a nechť v tomto bodě existují všechny parciální derivace funkce f . Pak x^* je stacionárním bodem funkce f .

D.: Kdyby $f'_{|i}(x^*) > 0$, pak by podle 2.5.2 existovalo $\varepsilon > 0$, že

$$f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^* - \varepsilon, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) < f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$$

$$f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^* + \varepsilon, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) > f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$$

a tedy by v x^* nemohl být lokální extrém.

Podobně vyloučíme možnost $f'_{|i}(x^*) < 0$. $\square$

Poznámka: Stacionární bod nemusí být bodem lokálního extrému. Např. $f(x, y) = x^2 - y^2$, $(x^*, y^*) = (0, 0)$.

5.5.5 Definice

Je-li $x^* \in \mathbb{R}^n$ stacionárním bodem funkce f a f přitom nenabývá v x^* lokálního extrému, řekneme, že x^* je *sedlový bod* (*sedlo*) funkce f .

5.5.6 Několik pojmů z lineární algebry

- Nechť $A = (a_{ij})$ je symetrická matice, $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T \in V_n$, $\Phi(\vec{h}) = \vec{h}^T A \vec{h} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j$ kvadratická forma.

Řekneme, že matice A je

<i>negativně semidefinitní</i>	$\Phi(\vec{h}) \leq 0$
<i>negativně definitní</i>	$\Phi(\vec{h}) < 0$
<i>pozitivně semidefinitní</i>	$\Phi(\vec{h}) \geq 0$
<i>pozitivně definitní</i>	$\Phi(\vec{h}) > 0$

platí-li pro každý nenulový $\vec{h} \in V_n$.

Řekneme, že matice A je *indefinitní*, existují-li vektory $\vec{h}, \vec{k} \in V_n$, že $\Phi(\vec{h}) < 0$, $\Phi(\vec{k}) > 0$.

- Platí:
 - Symetrická matice A je pozitivně (resp. negativně) definitní právě tehdy, když všechna vlastní čísla matice A jsou kladná (resp. záporná).
Symetrická matice A je pozitivně (resp. negativně) semidefinitní právě tehdy, když všechna vlastní čísla matice A jsou nezáporná (resp. nekladná).
 - Symetrická matice A je pozitivně definitní právě tehdy, když všechny hlavní minory matice A , tj. determinanty

$$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \det A$$

jsou kladné.

Symetrická matice A je negativně definitní právě tehdy, když hlavní minory matice A střídají znaménka počínaje záporným.

5.5.7 Věta

Nechť $x^* \in \mathbb{R}^n$ je stacionární bod funkce f a nechť f je třídy C^2 v bodě x^* . Položme $A = (a_{ij}) = (f'_{|ij}(x^*))$.

Je-li matice A v pozitivně (resp. negativně) definitní, má funkce f v bodě x^* ostré lokální minimum (resp. maximum).

Je-li matice A indefinitní, funkce f nemá v bodě x^* lokální extrém.

D.: Nechť A je pozitivně definitní.

Buď $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in V_n$ libovolný, ale pevně zvolený vektor. Položme $F_{\vec{h}}(x) = \sum_{i,j=1}^n f'_{|ij}(x) h_i h_j$.

Poněvadž funkce f je třídy C^2 v bodě x^* , je funkce $F_{\vec{h}}$ spojitá v bodě x^* a poněvadž $(f'_{|ij}(x^*))$ je pozitivně

definitní, existuje okolí $\mathcal{O}(x^*)$ bodu x^* takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x^*)$ je $F_{\vec{h}}(x) > 0$.
 Poněvadž $\vec{h}$ byl libovolný vektor, tak pro všechny $x, \hat{x} \in \mathcal{O}(x^*)$ platí $F_{x-x^*}(\hat{x}) > 0$.
 Nyní podle 5.4.3 je pro $x \in \mathcal{O}(x^*)$

$$f(x) = f(x^*) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f'_{ij}(x^* + \vartheta(x - x^*))(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) = f(x^*) + \frac{1}{2} F_{x-x^*}(x^* + \vartheta(x - x^*)),$$

kde $\vartheta \in [0, 1]$. Tedy $x^* + \vartheta(x - x^*) \in \mathcal{O}(x^*)$ (uvažujeme euklidovskou metriku) a $f(x) > f(x^*)$, což znamená, že funkce f nabývá v bodě x^* svého ostrého lokálního minima.

Tvrzení pro maximum se dokáže analogicky.

Nechť A je nyní indefinitní. Pak existují vektory $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n), \vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in V_n$ takové, že $\sum_{i,j=1}^n f'_{ij}(x^*) h_i h_j < 0$ a $\sum_{i,j=1}^n f'_{ij}(x^*) k_i k_j > 0$. Poněvadž f je třídy C^2 v bodě x^* , existuje okolí $\mathcal{O}_1(x^*)$

bodu x^* takové, že pro všechna $x \in \mathcal{O}_1(x^*)$ je $\sum_{i,j=1}^n f'_{ij}(x) h_i h_j < 0$ a $\sum_{i,j=1}^n f'_{ij}(x) k_i k_j > 0$.

Buď $\mathcal{O}_2(x^*)$ libovolné okolí bodu x^* , δ_h, δ_k taková kladná čísla, že $x_1 = x^* + \delta_h \vec{h} \in \mathcal{O}_1(x^*) \cap \mathcal{O}_2(x^*)$ a $x_2 = x^* + \delta_k \vec{k} \in \mathcal{O}_1(x^*) \cap \mathcal{O}_2(x^*)$.

S využitím 5.4.3 dostaneme

$$f(x_1) = f(x^*) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f'_{ij}(x^* + \vartheta \delta_h \vec{h}) \delta_h^2 h_i h_j < f(x^*),$$

$$f(x_2) = f(x^*) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f'_{ij}(x^* + \vartheta \delta_k \vec{k}) \delta_k^2 k_i k_j > f(x^*),$$

takže v bodě x^* není lokální extrém funkce f . $\square$

Je-li matice $(f'_{ij}(x^*))$ pozitivně nebo negativně semidefinitní, nelze o kvalitě stacionárního bodu rozhodnout.

5.5.8 Důsledek

Nechť funkce dvou proměnných f je třídy C^2 ve svém stacionárním bodě (x^*, y^*) . Jestliže

$$D(x^*, y^*) = f_{xx}(x^*, y^*) f_{yy}(x^*, y^*) - (f_{xy}(x^*, y^*))^2 > 0,$$

pak má funkce f v bodě (x^*, y^*) ostrý lokální extrém a to minimum, pokud $f_{xx}(x^*, y^*) > 0$ a maximum, pokud $f_{xx}(x^*, y^*) < 0$.

Jestliže $D(x^*, y^*) < 0$, pak v bodě (x^*, y^*) lokální extrém nenastává.

D.: První tvrzení bezprostředně plyne z 5.5.7 a z tvrzení o minorech v 5.5.6.

Nechť $D(x^*, y^*) < 0$. Uvažujme kvadratickou formu

$$\begin{aligned} \Phi(h_1, h_2) &= f_{xx}(x^*, y^*) h_1^2 + 2f_{xy}(x^*, y^*) h_1 h_2 + f_{yy}(x^*, y^*) h_2^2 = \\ &= h_2^2 \left(f_{xx}(x^*, y^*) \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 + 2f_{xy}(x^*, y^*) \frac{h_1}{h_2} + f_{yy}(x^*, y^*) \right). \end{aligned}$$

Poněvadž $D(x^*, y^*) < 0$ má kvadratický polynom $P(\lambda) = f_{xx}(x^*, y^*) \lambda^2 + 2f_{xy}(x^*, y^*) \lambda + f_{yy}(x^*, y^*)$ dva reálné různé kořeny, což znamená, že nabývá kladných i záporných hodnot. Existují tedy vektory $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$ a $(\hat{h}_1, \hat{h}_2)$ takové, že $\Phi(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) > 0$ a $\Phi(\hat{h}_1, \hat{h}_2) < 0$. To znamená, že forma Φ je indefinitní. $\square$

5.5.9 Definice

Buď f funkce n proměnných, $M \subseteq \text{Dom } f$. Řekneme, že funkce f nabývá v bodě $x^* \in M$ *globálního minima* (resp. *maxima*) na množině M , jestliže $f(x) \geq f(x^*)$ (resp. $f(x) \leq f(x^*)$) pro každé $x \in M$. Jsou-li nerovnosti ostré pro každé $x \neq x^*$, mluvíme o *ostrých globálních minimech* (resp. *maximech*) na M .

(Ostrá) globální maxima a minima nazýváme souhrnně (*ostré*) *globální extrémy* funkce f na množině M .

Místo slova „globální“ se někdy používá slovo „absolutní“.

5.5.10 Poznámka

Je-li bod globálního extrému x^* na množině M vnitřním bodem této množiny, pak je x^* bodem lokálního extrému.

Funkce f tedy může mít globální extrém na množině M v bodě lokálního extrému funkce f nebo v hraničním bodě množiny M , pokud tento bod do množiny M patří.

5.5.11 Poznámka

Nechť funkce f je třídy C^2 v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Grafem funkce $g : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x^0) + f'_1(x^0)(x_1 - x_1^0) + f'_2(x^0)(x_2 - x_2^0) + \dots + f'_n(x^0)(x_n - x_n^0)$ je podle 5.3.5.2 tečná nadrovinna ke grafu funkce f v bodě x^0 .

Nechť $A = (a_{ij}) = (f''_{ij}(x^0))$.

Stejným způsobem jako v důkazu věty 5.5.7 lze dokázat:

Je-li matice A pozitivně definitní, pak existuje okolí $\mathcal{O}(x^0)$ bodu x^0 takové, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x^0)$ je $f(x) > g(x)$. Body grafu funkce f v okolí bodu x^0 leží nad tečnou nadrovinou, funkce je v bodě x^0 konvexní.

Je-li matice A negativně definitní, pak existuje okolí $\mathcal{O}(x^0)$ bodu x^0 takové, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x^0)$ je $f(x) < g(x)$. Body grafu funkce f v okolí bodu x^0 leží pod tečnou nadrovinou, funkce je v bodě x^0 konkávní.

5.6 Implicitní funkce

5.6.1 Definice

Nechť F je funkce dvou proměnných, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ je takový bod, že $F(x_0, y_0) = 0$ a $\delta > 0$ je reálné číslo. Řekneme, že funkce $y = f(x)$ je na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ zadána implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$, jestliže pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je $F(x, f(x)) = 0$.

5.6.2 Věta

Nechť F je funkce dvou proměnných a jsou splněny předpoklady:

- existuje $(x_0, y_0) \in \text{Dom } F$, že $F(x_0, y_0) = 0$,
- existuje $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, že F je spojitá na množině $R = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - a, y_0 + a) \cap \text{Dom } F$,
- F má spojitou parciální derivaci podle y v bodě (x_0, y_0) a platí $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$.

Pak existuje kladné číslo δ a jediná spojitá funkce $y = f(x)$, která je na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ zadána implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$.

D.: Na $\mathbb{R}^2$ uvažujme metriku ρ_∞ a položme $d = F_y(x_0, y_0)$. Podle předpokladu je $d \neq 0$.

Poněvadž F_y je spojitá v bodě (x_0, y_0) , k $\frac{|d|}{2} > 0$ existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro

$(x, y) \in \mathcal{O}_\varepsilon(x_0, y_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ je $|F_y(x, y) - d| < \frac{|d|}{2}$,

neboli pro $(x, y) \in \mathcal{O}_\varepsilon(x_0, y_0)$ je

$$\left| 1 - \frac{F_y(x, y)}{d} \right| < \frac{1}{2}. \quad (5.1)$$

Buď $Q = \{g \in C[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] : g(x_0) = y_0, |g(x) - y_0| < \varepsilon \text{ pro } x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]\}$. Pro $g \in Q$ tedy platí $g(x_0) = y_0$, $F(x_0, g(x_0)) = F(x_0, y_0) = 0$, g i F jsou spojitě a tedy k ε existuje $\delta_1 > 0$ takové, že pro $x \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$ je

$$\left| g(x) - \frac{F(x, g(x))}{d} - y_0 \right| < \varepsilon. \quad (5.2)$$

Položme $\delta = \min\{\varepsilon, \delta_1\}$ a $P = Q \cap C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Množina P tedy obsahuje funkce z Q , jejichž definiční obor je zúžen na $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Definujme zobrazení $T : P \rightarrow C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ předpisem: $T(g)(x) = g(x) - \frac{F(x, g(x))}{d}$. Je-li funkce f

pevným bodem zobrazení T (sr. 4.5.13), pak $f(x) = f(x) - \frac{F(x, g(x))}{d}$ pro $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, neboli $F(x, f(x)) = 0$ pro $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, tj. f je spojitá funkce, která je na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ implicitně zadána rovnicí $F(x, y) = 0$.

Existenci jediné funkce f této vlastnosti dokážeme pomocí Banachovy věty o kontrakci 4.5.14.

Na P uvažujme metriku stejnoměrné konvergence ρ_C (viz 4.1.2.4). Pak

$$T(g)(x_0) = g(x_0) - \frac{F(x_0, g(x_0))}{d} = y_0 \text{ pro } g \in Q.$$

$$|T(g)(x) - y_0| < \varepsilon \text{ podle (5.2) pro } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \text{ tedy } T(g) \in P.$$

S využitím 2.3.4.1 dostaneme

$$\begin{aligned} \rho_C(T(g), T(h)) &= \max_{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta} |T(g)(x) - T(h)(x)| = \\ &= \max_{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta} \left| g(x) - \frac{F(x, g(x))}{d} - h(x) + \frac{F(x, h(x))}{d} \right| = \\ &= \max_{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta} \left| g(x) - h(x) - \frac{F_y(x, \xi)(g(x) - h(x))}{d} \right| = \\ &= \max_{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta} |g(x) - h(x)| \left| 1 - \frac{F_y(x, \xi)}{d} \right|. \end{aligned}$$

Přitom ξ leží mezi hodnotami $g(x)$ a $h(x)$, $g, h \in P$, tedy $\xi \in \mathcal{O}_\varepsilon(y_0)$, takže podle (5.1) je

$$\rho_C(T(g), T(h)) \leq \frac{1}{2} \max_{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta} |g(x) - h(x)| = \frac{1}{2} \rho_C(g, h),$$

což znamená, že T je kontrakce na P . $\square$

5.6.3 Poznámka

Jsou-li splněny předpoklady věty 5.6.2, existuje jediná spojitá funkce f daná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$. Kromě ní může existovat více nespojitých funkcí g , pro něž $F(x, g(x)) = 0$.

Např.: $F(x, y) = y(y - 1)$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$f(x) \equiv 0, \quad g_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \quad g_2(x) = \chi(x), \dots$$

5.6.4 Věta

Nechť jsou splněny předpoklady věty 5.6.2 a necht' navíc má F na R spojitě parciální derivace. Pak funkce $y = f(x)$, která je v okolí bodu (x_0, y_0) implicitně zadána rovnicí $F(x, y) = 0$ má v bodě x_0 derivaci a platí

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

D.: $F(x, f(x)) = 0$ na okolí bodu x_0 . Derivováním tohoto vztahu podle x (sr. 5.4.1) dostaneme

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0.$$

Dosazením x_0 za x a snadnou úpravou dostaneme dokazovaný vztah. $\square$

5.6.5 Poznámka

Nechť jsou splněny předpoklady věty 5.6.2 a necht' navíc má F na $\mathbb{R}$ spojitě druhé parciální derivace. Pak funkce $y = f(x)$, která je v okolí bodu (x_0, y_0) implicitně zadána rovnicí $F(x, y) = 0$ má v bodě x_0 druhou derivaci. Lze ji vypočítat postupem analogickým postupu při důkazu věty 5.6.4.

Analogicky lze postupovat při výpočtu derivací vyšších řádů.

5.6.6 Definice

Nechť F je funkce tří proměnných, $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ je takový bod, že $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ a $\delta > 0$ je reálné číslo. Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ je na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ zadána implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$, jestliže pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ je $F(x, y, f(x, y)) = 0$.

5.6.7 Věta

Nechť F je funkce tří proměnných a jsou splněny předpoklady:

- existuje $(x_0, y_0, z_0) \in \text{Dom } F$, že $F(x_0, y_0, z_0) = 0$,
- existuje $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, že F je spojitá na množině
 $R = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - a, y_0 + a) \times (z_0 - a, z_0 + a) \cap \text{Dom } F$,
- F má spojitou parciální derivaci podle z v bodě (x_0, y_0, z_0) a platí $\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \neq 0$.

Pak existuje kladné číslo δ a jediná spojitá funkce $z = f(x, y)$, která je na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ zadána implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$.

D.: Modifikovaný důkaz věty 5.6.2 $\square$

5.6.8 Věta

Nechť jsou splněny předpoklady věty 5.6.7 a nechť navíc má F na R spojitě parciální derivace. Pak funkce $z = f(x, y)$, která je v okolí bodu (x_0, y_0, z_0) implicitně zadána rovnicí $F(x, y, z) = 0$ má v bodě (x_0, y_0) parciální derivace a platí

$$f_x(x_0, y_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}, \quad f_y(x_0, y_0) = -\frac{F_y(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

D.: Přímým výpočtem jako u 5.6.4 $\square$

5.6.9 Poznámky

1. Má-li funkce F na R spojitě druhé parciální derivace, pak má i funkce $z = f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) druhé parciální derivace. Lze je vypočítat analogickým postupem. Analogicky lze postupovat při výpočtu derivací vyšších řádů.
2. Analogicky lze definovat implicitně zadanou funkci n proměnných, dokázat její jednoznačnou existenci a počítat její derivace.

5.7 Diferencovatelná zobrazení

Zobrazení $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Zobrazení F je určeno m funkcemi n proměnných $f_1, f_2, \dots, f_m$. Tyto funkce nazýváme *složky* nebo *souřadnicové funkce* zobrazení F , píšeme $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$.

$\text{Dom } F = \text{Dom } f_1 \times \text{Dom } f_2 \times \dots \times \text{Dom } f_m$.

5.7.1 Poznámka

Zobrazení $F = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je spojitě v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když všechny funkce $f_1, f_2, \dots, f_m$ jsou spojitě v tomto bodě.

D.: $\Rightarrow$: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{O}_\delta(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = (x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta) \times (x_2^0 - \delta, x_2^0 + \delta) \times \dots \times (x_n^0 - \delta, x_n^0 + \delta)$$

platí

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &\in \mathcal{O}_\varepsilon(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \\ &= (f_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) - \varepsilon, f_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \varepsilon) \times \\ &\quad \times (f_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) - \varepsilon, f_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \varepsilon) \times \dots \times \\ &\quad \times (f_m(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) - \varepsilon, f_m(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Jinými slovy: k $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{O}_\delta(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ je

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (f_j(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) - \varepsilon, f_j(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \varepsilon),$$

tedy f_j je spojitá funkce. To platí pro každé $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

$\Leftarrow$: K $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_j > 0$, že pro $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{O}_{\delta_j}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ je

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (f_j(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) - \varepsilon, f_j(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \varepsilon), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Položíme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$. Pak pro $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{O}_\delta(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ je

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{O}_\varepsilon(F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)). \quad \square$$

5.7.2 Definice

Řekneme, že zobrazení $F = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je *diferencovatelné v bodě* $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, jestliže každá z funkcí $f_1, f_2, \dots, f_m$ je diferencovatelná v tomto bodě.

Zobrazení $dF(x^0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dané předpisem

$$(h_1, h_2, \dots, h_n) \mapsto (df_1(x^0)(h_1, h_2, \dots, h_n), df_2(x^0)(h_1, h_2, \dots, h_n), \dots, df_m(x^0)(h_1, h_2, \dots, h_n))$$

se nazývá *diferenciál zobrazení F v bodě* $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Zobrazení F se nazývá *diferencovatelné*, je-li diferencovatelné v každém bodě z $\text{Dom } f$.

5.7.3 Poznámky

1. Diferenciál zobrazení $F = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ je lineární zobrazení určené maticí $A = (a_{ij}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) \right) = (f'_{i|j}(x^0))$.

D.:

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} df_1(x^0)(h_1, h_2, \dots, h_n) \\ df_2(x^0)(h_1, h_2, \dots, h_n) \\ \vdots \\ df_m(x^0)(h_1, h_2, \dots, h_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x^0) h_k \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(x^0) h_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(x^0) h_k \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \quad \square$$

2. Je-li $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkce n proměnných diferencovatelná v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, pak se podle 5.3.5.3 v okolí bodu x^0 „její přírůstek chová jako lineární funkce $df(x^0)$ “, $f(x) = f(x^0) \approx df(x^0)(x - x^0)$.
Je-li tedy $F(f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zobrazení diferencovatelné v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, pak pro x z okolí bodu x^0 platí

$$\begin{aligned} F(x) - F(x^0) &= \begin{pmatrix} f_1(x) - f_1(x^0) \\ f_2(x) - f_2(x^0) \\ \vdots \\ f_m(x) - f_m(x^0) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} df_1(x^0)(x - x^0) \\ df_2(x^0)(x - x^0) \\ \vdots \\ df_m(x^0)(x - x^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x^0)(x_k - x_k^0) \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(x^0)(x_k - x_k^0) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(x^0)(x_k - x_k^0) \end{pmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) \right) \cdot (x - x^0) = dF(x^0)(x - x^0). \end{aligned}$$

5.7.4 Definice

Nechť zobrazení $F = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Matice

$$F'(x^0) = (f'_{i|j}(x^0)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix}$$

se nazývá *Jacobiho matice zobrazení F v bodě x^0* (*derivace zobrazení F v bodě x^0*).

Je-li $n = m$ pak se determinant Jacobiho matice zobrazení F v bodě x^0 nazývá *Jacobián* (*Jacobiho determinant*) zobrazení F v bodě x^0 . Označuje se

$$J(F(x^0)), \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(x^0), \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(x^0).$$

5.7.5 Poznámka

Je-li $F = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferencovatelné zobrazení, pak zobrazení $x \mapsto F'(x)$ je zobrazením $\text{Dom } F$ do množiny matic typu $m \times n$. Značíme ho F' .

Je-li $F = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferencovatelné zobrazení, pak zobrazení $x \mapsto J(F(x))$ je funkcí n proměnných.

5.7.6 Věta (o derivaci složeného zobrazení)

Nechť $F = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $G = (g_1, g_2, \dots, g_p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ jsou diferencovatelná zobrazení. Pak složené zobrazení $H = (h_1, h_2, \dots, h_n) = G \circ F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ je také diferencovatelné a pro jeho Jacobiho matici platí

$$H'(x_1, x_2, \dots, x_n) = G'(F(x_1, x_2, \dots, x_n)) \cdot F'(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Je-li $n = m = p$, pak při označení $(y_1, y_2, \dots, y_m) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pro Jacobiány zobrazení F , G , H platí

$$J(H(x_1, x_2, \dots, x_n)) = J(G(y_1, y_2, \dots, y_m))J(F(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

D.: $h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_i(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)).$

Podle 5.4.1 je

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= \sum_{k=1}^p g'_{i|k}(f_1((x_1, x_2, \dots, x_n), f_2((x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))f'_{k|j}(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

pro $i = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Druhé tvrzení plyne z věty o determinantu součinu matic. $\square$

5.7.7 Věta (o lokální inverzi)

Nechť zobrazení $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je diferencovatelné v bodě $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ a $F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$. Je-li Jacobiho matice $F'(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ regulární (tj. $\det F'(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = J(F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)) \neq 0$), pak existuje okolí $\mathcal{O}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ bodu $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, v němž je zobrazení F prosté, tedy existuje inverzní zobrazení $F^{-1} : F(\mathcal{O}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Inverzní zobrazení F^{-1} je diferencovatelné v bodě $(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ a pro jeho Jacobiho matici platí

$$(F^{-1})'(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) = (F'(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0))^{-1}.$$

Náznak důkazu: Pokud $F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0$ tak na $\mathcal{O}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ platí

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx dF(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \dots, x_n - x_n^0).$$

Lineární zobrazení na pravé straně přibližné rovnosti je prosté právě tehdy, když jeho matice, tj. Jacobiho matice zobrazení F , je regulární.

Jacobiho matice identického zobrazení $F^{-1} \circ F$, $F^{-1} \circ F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ je jednotková matice E .

Podle 5.7.6 platí $E = (F^{-1})'(F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)) \cdot F'(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, z čehož bezprostředně plyne dokazovaný vztah. $\square$

5.7.8 Definice

Řekneme, že zobrazení $F = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je třídy C^k , $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, jestliže každá z funkcí $f_1, f_2, \dots, f_m$ je třídy C^k v bodě x^0 .

Řekneme, že zobrazení $F = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je třídy C^k , $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, jestliže je třídy C^k v každém bodě $\text{Dom } F$.

Poznámka: Je-li zobrazení F třídy C^k , pak $\text{Dom } F$ je otevřená množina.

5.7.9 Poznámka

Řekneme, že matice A o n sloupcích a m řádcích je *regulární* (v zobecněném smyslu), jestliže její hodnost je rovna $\min\{m, n\}$, tj. má-li maximální hodnost.

Tedy je-li $m = n$, $\det A \neq 0$ (jak je obvyklé v lineární algebře)

$n > m$, řádky matice A jsou lineárně nezávislé

$n < m$, sloupce matice A jsou lineárně nezávislé

Je-li $n < m$ a matice A je regulární, pak lineární zobrazení $\Phi : V_n \rightarrow V_m$, $\Phi(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$ je prosté. Kdyby totiž existovaly vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$ takové, že $\vec{u} \neq \vec{v}$ a $\Phi(\vec{u}) = \Phi(\vec{v})$, pak by

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi(\vec{u}) - \Phi(\vec{v}) = \Phi(\vec{u} - \vec{v}) = A \cdot (\vec{u} - \vec{v}).$$

Jinými slovy, existovala by lineární kombinace sloupců matice A s koeficienty, které by nebyly všechny nulové, rovnající se nulovému vektoru, což by znamenalo, že sloupce matice A nejsou lineárně nezávislé a to by byl spor.

5.7.10 Definice

Buď $F = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zobrazení. Řekneme, že zobrazení F je *regulární*, jestliže je třídy C^1 a pro každé $x \in \text{Dom } F$ je matice $F'(x)$ regulární.

Poznámka: Je-li zobrazení $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ regulární a $n < m$, pak ke každému bodu $x \in \text{Dom } F$ existuje okolí $\mathcal{O}(x) \subseteq \text{Dom } F$ takové, že F je na $\mathcal{O}(x)$ prosté.

Zdůvodnění plyne z 5.7.3.2 a z 5.7.9.

5.7.11 Věta (o implicitním zobrazení)

Nechť $F = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ je zobrazení, které splňuje předpoklady

- existuje bod $(x^0, y^0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0) \in \text{Dom } F$ takový, že $F(x^0, y^0) = 0$,
- existuje okolí $\mathcal{O}_a(x^0, y^0)$ bodu $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$ takové, že F je spojitě na $\mathcal{O}_a(x^0, y^0) \cap \text{Dom } F$,

- všechny prvky matice

$$F_y(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m}(x, y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x, y) & \frac{\partial f_m}{\partial y_2}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x, y) \end{pmatrix}$$

jsou spojité v bodě (x^0, y^0) a platí $\det F_y(x^0, y^0) \neq 0$.

Pak existuje okolí $\mathcal{O}_\delta(x^0)$ bodu $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ v $\mathbb{R}^n$ a jediné spojité zobrazení $G : \mathcal{O}_\delta(x^0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}_\delta(x^0)$ je $F(x, G(x)) = 0$.

Jsou-li navíc v bodě (x^0, y^0) spojité všechny prvky matice

$$F_x(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x, y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x, y) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x, y) \end{pmatrix},$$

pak je zobrazení G diferencovatelné v bodě x^0 a pro jeho Jacobiho matici platí

$$G'(x^0) = -(F_y(x^0, y^0))^{-1} \cdot F_x(x^0, y^0).$$

Názna důkazu: První tvrzení v podstatě říká, že za uvedených předpokladů lze z rovnice $F(x, y) = 0$ vypočítat $y = G(x)$.

Je-li F diferencovatelné v bodě (x^0, y^0) , pak podle 5.7.3.2 je

$$\begin{aligned} 0 &= F(x, y) \approx dF(x^0)(x - x^0, y - y^0) = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x^0, y^0)(x_k - x_k^0) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_1}{\partial y_j}(x^0, y^0)(y_j - y_j^0) \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(x^0, y^0)(x_k - x_k^0) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_2}{\partial y_j}(x^0, y^0)(y_j - y_j^0) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(x^0, y^0)(x_k - x_k^0) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_m}{\partial y_j}(x^0, y^0)(y_j - y_j^0) \end{pmatrix} = \\ &= F_x(x^0, y^0) \cdot (x - x^0) + F_y(x^0, y^0) \cdot (y - y^0). \end{aligned}$$

Z předpokladu $\det F_y(x^0, y^0) \neq 0$ plyne existence $(F_y(x^0, y^0))^{-1}$ a z přibližné rovnosti $0 \approx F_x(x^0, y^0) \cdot (x - x^0) + F_y(x^0, y^0)(y - y^0)$ plyne přibližná rovnost

$$y - y^0 \approx -(F_y(x^0, y^0))^{-1} \cdot (F_x(x^0, y^0) \cdot (x - x^0)) = -(F_y(x^0, y^0))^{-1} \cdot F_x(x^0, y^0) \cdot (x - x^0),$$

neboli

$$y \approx y^0 + -(F_y(x^0, y^0))^{-1} \cdot F_x(x^0, y^0) \cdot (x - x^0).$$

Takže y lze z rovnice $F(x, y)$ přibližně vypočítat.

Současně

$$y = G(x) \approx y^0 + dG(x^0)(x - x^0) = G'(x^0) \cdot (x - x^0),$$

takže Jacobiho matice zobrazení G v bodě x^0 je dána vzorcem z druhého tvrzení věty.

Přesný důkaz lze provést precizací uvedené myšlenky pomocí příslušných limitních přechodů.

Jiná metoda důkazu spočívá ve „vícerozměrné modifikaci“ důkazu věty 5.6.2. $\square$

5.8 Diferencovatelné variety

5.8.1 Definice

Buďte $m, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq m \leq n$. Řekneme, že množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je m -rozměrná nadplocha v n -rozměrném prostoru, jestliže ke každému $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in M$ existuje jeho okolí $\mathcal{O}(y)$ v $\mathbb{R}^n$, otevřená množina $U_y \subseteq \mathbb{R}^m$ a prosté spojitě zobrazení $F_y : U_y \rightarrow \mathbb{R}^n$ tak, že $y \in F_y(U_y) = \mathcal{O}(y) \cap M$.

Je-li každé ze zobrazení F_y , $y \in M$ navíc regulární, řekneme, že M je m -rozměrná (diferencovatelná) varieta v n -rozměrném prostoru.

Je-li každé z regulárních zobrazení F_y , $y \in M$ navíc třídy C^k , řekneme, že M je m -rozměrná varieta třídy C^k v n -rozměrném prostoru.

- n -rozměrné nadplochy (variety) v n -rozměrném prostoru jsou otevřené množiny.
- Jednorozměrné nadplochy se nazývají *křivky*, dvourozměrné nadplochy se nazývají *plochy*.
- Jednorozměrné variety se nazývají hladké křivky, dvourozměrné variety se nazývají hladké plochy.

Poznamenejme, že hladká jordanovská křivka definovaná v 2.6.6 a hladký oblouk $\{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in I\}$, kde I je otevřený interval jsou hladkými křivkami v právě uvedeném smyslu. Definice 2.6.6 je však poněkud obecnější, zahrnuje i oblouky s jedním nebo oběma krajními body.

5.8.2 Věta

Buďte $g_1, g_2, \dots, g_k$ diferencovatelné funkce n proměnných, $n > k$. Položme

$$M = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \text{Dom } g_1 \cap \text{Dom } g_2 \cap \dots \cap \text{Dom } g_k :$$

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \dots = g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0\}.$$

Jestliže v každém bodě $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$ je hodnota matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_k}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

rovna k , pak množina M je $(n - k)$ -rozměrnou diferencovatelnou varietou.

D.: Buď $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \in M$. Poněvadž matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\hat{x}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\hat{x}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\hat{x}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\hat{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(\hat{x}) & \frac{\partial g_k}{\partial x_2}(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(\hat{x}) \end{pmatrix}$$

je regulární, existují vesměs různé indexy $j_1, j_2, \dots, j_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ takové, že matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_{j_1}}(\hat{x}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_{j_2}}(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{j_k}}(\hat{x}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_{j_1}}(\hat{x}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_{j_2}}(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_{j_k}}(\hat{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_{j_1}}(\hat{x}) & \frac{\partial g_k}{\partial x_{j_2}}(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial x_{j_k}}(\hat{x}) \end{pmatrix}$$

je regulární. Označíme-li $i_1, i_2, \dots, i_{n-k}$ vesměs různé indexy z $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$, $x = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-k}})$, $y = (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k})$, pak jsou splněny předpoklady 5.7.11. Existuje tedy otevřená množina $U_{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)} = \mathcal{O}(\hat{x}) \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ a zobrazení $\varphi_{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)} : \mathcal{O}(\hat{x}) \rightarrow \mathcal{O}(\hat{y}) \subseteq \mathbb{R}^k$ takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x)$ je $(x, \varphi_{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)}(x)) \in M$. Položíme $F_{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)}(x) = (x, \varphi_{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)}(x))$. Stejnou konstrukci lze provést v každém bodě z M . $\square$

Řekneme, že varieta M z věty 5.8.2 je zadána rovnicemi $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$.

5.8.3 Heuristická úvaha

Buď g diferencovatelná funkce dvou proměnných. Pak $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ je jednorozměrná diferencovatelná varieta (hladká křivka). Buď $(\hat{x}, \hat{y}) \in M$ takový, že $\frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$. Pak podle 5.6.2 existuje funkce $y = y(x)$ taková, že v okolí $\hat{x}$ její graf splývá s M . Tečna ke grafu funkce $y(x)$ v bodě $(\hat{x}, \hat{y})$ je dána rovnicí

$$y - \hat{y} = y'(\hat{x})(x - \hat{x}).$$

Přitom $y'(\hat{x}) = -\frac{g_x(\hat{x}, \hat{y})}{g_y(\hat{x}, \hat{y})}$, takže obecná rovnice tečny je

$$g_x(\hat{x}, \hat{y})x + g_y(\hat{x}, \hat{y})y - g_x(\hat{x}, \hat{y})\hat{x} - g_y(\hat{x}, \hat{y})\hat{y} = 0.$$

Normálový vektor ke grafu funkce $y(x)$ v bodě $(\hat{x}, \hat{y})$ tedy je $(g_x(\hat{x}, \hat{y}), g_y(\hat{x}, \hat{y})) = \text{grad } g(\hat{x}, \hat{y}) = g'(\hat{x}, \hat{y})$. Tečný vektor ke křivce M v bodě $(\hat{x}, \hat{y})$ je tedy kolmý k vektoru $\text{grad } g(\hat{x}, \hat{y})$.

5.8.4 Pojmy z lineární algebry

Nechť V_n je n -rozměrný unitární prostor (vektorový prostor se skalárním součinem) a $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in V_n$. Označme $\text{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ podprostor prostoru V_n generovaný vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ (lineární obal množiny vektorů $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$).

Je-li $W \subseteq V_n$ vektorový podprostor, označme $W^\perp$ jeho ortogonální doplněk (vektorový podprostor, jehož každý prvek je kolmý k libovolnému prvku z W), tzn. je-li $\vec{u} \in W$ a $\vec{v} \in W^\perp$, pak $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

5.8.5 Definice

Nechť funkce $g_1, g_2, \dots, g_k$ splňují předpoklady 5.8.2, M je diferencovatelná varieta zadaná rovnicemi $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$ a nechť $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \in M$. Vektorový prostor

$$\mathcal{N}_M(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) = \text{Lin}(g'_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n), g'_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n), \dots, g'_k(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n))$$

nazýváme *normálový prostor k M v bodě $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$* .

Vektorový prostor

$$\mathcal{T}_M(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) = (\mathcal{N}_M(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n))^\perp$$

nazýváme *tečný prostor k M v bodě $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$* .

5.8.6 Věta

Buď M diferencovatelná varieta zadaná rovnicemi $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$ a necht' $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \in M$ je pevně zvolený bod, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$ je libovolný.

Pak existuje vektor $\vec{h} \in \mathcal{T}_M(\hat{x})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a zobrazení $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ takové, že $x - \hat{x} = \alpha \vec{h} + \Phi(\alpha)$ a $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Phi(\tau)}{\tau} = \vec{o}$ (nulový vektor).

D.: Libovolný vektor $\vec{r} \in V_n$ lze vyjádřit ve tvaru $\vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$, kde $\vec{p} \in \mathcal{T}_M(\hat{x})$, $\vec{q} \in \mathcal{T}_M(\hat{x})^\perp = \mathcal{N}_M(\hat{x})$. Tedy také $x - \hat{x} = \vec{u} + \vec{w}$, kde $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathcal{T}_M(\hat{x})$, $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathcal{N}_M(\hat{x})$.

Položme $\alpha = \|x - \hat{x}\|$ a pro $\alpha \neq 0$ položme $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n) = \frac{\vec{u}}{\alpha}$, tedy $\vec{u} = \alpha \vec{h}$.

Dále označme $\Phi(\alpha) = (\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \dots, \varphi_n(\alpha)) = (w_1, w_2, \dots, w_n)$.

Je-li $\alpha = 0$, pak $x = \hat{x}$, $\vec{u} = \vec{w} = \vec{o}$ a tedy $\Phi(0) = \vec{o}$.

Necht' vektory $\vec{v}^j = (v_1^j, v_2^j, \dots, v_n^j)$, $j = 1, 2, \dots, n - k$ tvoří bázi tečného prostoru $\mathcal{T}_M(\hat{x})$. Poněvadž $\hat{x} = x - \vec{u} - \vec{w} = x - \alpha \vec{h} - \Phi(\alpha) \in M$ a $\Phi(\alpha) \perp \vec{v}^j$ pro každé $j = 1, 2, \dots, n - k$, musí $\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \dots, \varphi_n(\alpha)$ splňovat systém rovnic

$$\begin{aligned} g_i(x_1 - \alpha h_1 - \varphi_1(\alpha), x_2 - \alpha h_2 - \varphi_2(\alpha), \dots, x_n - \alpha h_n - \varphi_n(\alpha)) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \\ v_1^j \varphi_1(\alpha) + v_2^j \varphi_2(\alpha) + \dots + v_n^j \varphi_n(\alpha) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n - k \end{aligned} \quad (5.3)$$

Levou stranu tohoto systému lze považovat za zobrazení $G : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, jímž zobrazujeme $(n + 1)$ -tice čísel $(\alpha, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$.

Budeme aplikovat větu o implicitním zobrazení 5.7.11 a používat označení v ní zavedené.

$$G_\Phi(\alpha, \varphi_1, \dots, \varphi_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1 - \alpha h_1 - \varphi_1, \dots, x_n - \alpha h_n - \varphi_n) & \dots & -\frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x_1 - \alpha h_1 - \varphi_1, \dots, x_n - \alpha h_n - \varphi_n) \\ -\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x_1 - \alpha h_1 - \varphi_1, \dots, x_n - \alpha h_n - \varphi_n) & \dots & -\frac{\partial g_2}{\partial x_n}(x_1 - \alpha h_1 - \varphi_1, \dots, x_n - \alpha h_n - \varphi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial g_k}{\partial x_1}(x_1 - \alpha h_1 - \varphi_1, \dots, x_n - \alpha h_n - \varphi_n) & \dots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_n}(x_1 - \alpha h_1 - \varphi_1, \dots, x_n - \alpha h_n - \varphi_n) \\ v_1^1 & \dots & v_n^1 \\ v_1^2 & \dots & v_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{n-k} & \dots & v_n^{n-k} \end{pmatrix}.$$

Prvních k řádků této matice je lineárně nezávislých podle 5.8.2, posledních $n - k$ řádků je také lineárně nezávislých, neboť vektory $\vec{v}^1, \vec{v}^2, \dots, \vec{v}^{n-k}$ tvoří bázi vektorového podprostoru. Libovolný z posledních $n - k$ řádků je lineárně nezávislý na libovolné lineární kombinaci prvních k řádků, neboť je to vektor ortogonální k libovolnému z nich. Podobně libovolný z prvních k řádků je lineárně nezávislý na libovolné lineární kombinaci posledních $n - k$ řádků. Matice G_Φ je tedy regulární, jsou splněny předpoklady věty 5.7.11, takže $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ lze ze soustavy rovnic (5.3) vyjádřit jako funkce proměnné α .

Máme tedy definováno zobrazení $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ takové, že $\Phi(0) = \vec{o}$.

Dále platí

$$G_\alpha(\alpha, \varphi_1, \dots, \varphi_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} -h_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1 - \alpha h_1 - \varphi_1, \dots, x_n - \alpha h_n - \varphi_n) - \dots - h_n \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x_1 - \alpha h_1 - \varphi_1, \dots, x_n - \alpha h_n - \varphi) \\ -h_1 \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x_1 - \alpha h_1 - \varphi_1, \dots, x_n - \alpha h_n - \varphi_n) - \dots - h_n \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(x_1 - \alpha h_1 - \varphi_1, \dots, x_n - \alpha h_n - \varphi) \\ \vdots \\ -h_1 \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(x_1 - \alpha h_1 - \varphi_1, \dots, x_n - \alpha h_n - \varphi_n) - \dots - h_n \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(x_1 - \alpha h_1 - \varphi_1, \dots, x_n - \alpha h_n - \varphi) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

takže

$$G_\alpha(0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = \left(-\vec{h} \cdot g'_1(\hat{x}), -\vec{h} \cdot g'_2(\hat{x}), \dots, -\vec{h} \cdot g'_k(\hat{x}), 0, 0, \dots, 0 \right)^T = \vec{o},$$

neboť vektory $\vec{h}$ a $g'_i(\hat{x})$ jsou kolmé pro jakékoliv $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Odtud podle 5.7.11 plyne, že $\varphi'_1(0) = \varphi'_2(0) = \dots = \varphi'_n(0) = 0$ a dále podle 2.3.6

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\varphi_j(\tau)}{\tau} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad \square$$

5.9 Vázané extrémy

5.9.1 Definice

Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \text{Dom } f$. Řekneme, že funkce f *nabývá v bodě* $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \in M$ *lokálního maxima* (resp. *minima*) *vzhledem k množině* M , jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(\hat{x})$ bodu x takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}(\hat{x}) \cap M$ platí $f(x) \leq f(\hat{x})$ (resp. $f(x) \geq f(\hat{x})$).

Jsou-li nerovnosti pro $x \neq \hat{x}$ ostré, mluvíme o *ostrém lokálním maximu* (resp. *minimu*) *vzhledem k množině* M . (Ostrá) lokální maxima a minima nazýváme souhrnně (*ostré*) *lokální extrémy vzhledem k množině* M .

Nechť $f, g_1, g_2, \dots, g_m$ jsou funkce n proměnných třídy C^1 , $m < n$. Úlohu: najít lokální extrémy funkce f vzhledem k diferencovatelné varietě zadané rovnicemi $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $n = 1, 2, \dots, m$, tj.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\rightarrow \text{extrém} \\ g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

nazýváme *konečnědimenzionální hladkou extremální úlohou s omezeními typu rovnosti*. Stručně *úlohou na vázaný (podmíněný) extrém*.

5.9.2 Definice

Funkci $\mathcal{L} : \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ danou předpisem

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \lambda_0 f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k g_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

nazýváme *Lagrangeovou funkcí úlohy* (5.4), čísla $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ nazýváme *Lagrangeovy multiplikátory*.

5.9.3 Věta (Lagrange 1797)

Je-li $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ řešením úlohy (5.4), pak existují Lagrangeovy multiplikátory $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$, z nichž alespoň jeden je nenulový tak, že

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{L}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \dots = \frac{\partial}{\partial x_n} \mathcal{L}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = 0. \quad (5.5)$$

D.: Nechť $\hat{x}$ je bodem lokálního minima úlohy (5.4).

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{L}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \lambda_0 \frac{\partial}{\partial x_j} f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial}{\partial x_j} g_k(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n),$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

Podmínka (5.5) má tedy ve vektorovém zápisu tvar

$$\lambda_0 f'(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k g'_k(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) = \vec{0}.$$

Připustíme, že vektory $f'(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n), g'_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n), g'_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n), \dots, g'_m(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ jsou lineárně nezávislé.

Uvažujme zobrazení $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ dané předpisem $F(x) = \begin{pmatrix} f(x) - f(\hat{x}) \\ g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix}.$

Podle našeho předpokladu je hodnota matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(\hat{x}) & \frac{\partial}{\partial x_2} f(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f(\hat{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_1(\hat{x}) & \frac{\partial}{\partial x_2} g_1(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} g_1(\hat{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_2(\hat{x}) & \frac{\partial}{\partial x_2} g_2(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} g_2(\hat{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_m(\hat{x}) & \frac{\partial}{\partial x_2} g_m(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} g_m(\hat{x}) \end{pmatrix}$$

rovna $m+1$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že proměnné jsou očíslovány tak, že

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(\hat{x}) & \frac{\partial}{\partial x_2} f(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{m+1}} f(\hat{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_1(\hat{x}) & \frac{\partial}{\partial x_2} g_1(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{m+1}} g_1(\hat{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_2(\hat{x}) & \frac{\partial}{\partial x_2} g_2(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{m+1}} g_2(\hat{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_m(\hat{x}) & \frac{\partial}{\partial x_2} g_m(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{m+1}} g_m(\hat{x}) \end{pmatrix} \neq 0.$$

To znamená, že zobrazení $G : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ dané předpisem

$$G(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) = \begin{pmatrix} f(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \hat{x}_{m+2}, \hat{x}_{m+3}, \dots, \hat{x}_n) - f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \\ g_1(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \hat{x}_{m+2}, \hat{x}_{m+3}, \dots, \hat{x}_n) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \hat{x}_{m+2}, \hat{x}_{m+3}, \dots, \hat{x}_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \hat{x}_{m+2}, \hat{x}_{m+3}, \dots, \hat{x}_n) \end{pmatrix}$$

splňuje předpoklady 5.7.7. Odtud plyne, že ke každému dostatečně malému $\varepsilon > 0$ existují $x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \dots, x_{m+1}(\varepsilon)$ takové, že

$$\begin{aligned} f(x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \dots, x_{m+1}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \hat{x}_{m+3}, \dots, \hat{x}_n) - f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) &= -\varepsilon \\ g_1(x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \dots, x_{m+1}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \hat{x}_{m+3}, \dots, \hat{x}_n) &= 0 \\ g_2(x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \dots, x_{m+1}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \hat{x}_{m+3}, \dots, \hat{x}_n) &= 0 \\ &\vdots \\ g_m(x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \dots, x_{m+1}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \hat{x}_{m+3}, \dots, \hat{x}_n) &= 0. \end{aligned}$$

Nášli jsme tedy bod $(x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \dots, x_{m+1}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \hat{x}_{m+3}, \dots, \hat{x}_n) \in \mathcal{O}(\hat{x}) \cap M$ takový že $f(x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \dots, x_{m+1}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \hat{x}_{m+3}, \dots, \hat{x}_n) = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) - \varepsilon < f(\hat{x})$, což znamená, že $\hat{x}$ není bodem lokálního minima úlohy (5.4) a to je spor.

Vektory $f'(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n), g'_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n), g'_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n), \dots, g'_m(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ jsou tedy lineárně závislé, z čehož plyne tvrzení věty.

Pro lokální minimum se důkaz provede analogicky. $\square$

5.9.4 Poznámky

1. Věta 5.9.3 poskytuje návod na vyhledání bodu „podezřelého z toho“, že v něm může mít úloha (5.4) lokální extrém: Řešíme soustavu $n + m$ rovnic

$$\begin{aligned} \lambda_0 \frac{\partial}{\partial x_i} f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial}{\partial x_i} g_k(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ g_j(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (5.6)$$

pro $n + m + 1$ neznámých $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$. Má-li tato soustava řešení takové, že $\lambda_l \neq 0$ pro nějaké $l \in \{0, 1, \dots, m\}$, pak $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ je bod, v němž úloha (5.4) může mít lokální extrém.

Soustava rovnic (5.6) je pro Lagrangeovy multiplikátory $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ lineární. To znamená, že multiplikátory jsou určeny jednoznačně až na nenulovou multiplikativní konstantu. Stačí tedy položit $\lambda_l = 1$ a řešit $n + m$ rovnic pro $n + m$ neznámých.

2. λ_0 nemusí být nenulový.

Uvažujme například úlohu najít lokální extrém funkce $f(x, y) = x$ za podmínky $g(x, y) = x^2 + y^2 = 0$. Pak $(\hat{x}, \hat{y}) = (0, 0)$ je řešením této úlohy (neboť je to jediný bod vyhovující podmínce).

Kdyby $\lambda_0 = 1$, pak by $\mathcal{L}(x, y, 1, \lambda) = x + \lambda(x^2 + y^2)$ a systém rovnic (5.5) by měl tvar

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda\hat{x} &= 0, \\ 2\lambda\hat{y} &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice dostaneme $\lambda \neq 0$, potom $\hat{x} = -\frac{1}{2\lambda}$ a ze druhé rovnice $\hat{y} = 0$. Pak ale $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = \frac{1}{4\lambda^2} \neq 0$.

3. Jsou-li vektory $g'_1(\hat{x}), g'_2(\hat{x}), \dots, g'_m(\hat{x})$ lineárně nezávislé, pak $\lambda_0 \neq 0$ a tedy lze položit $\lambda_0 = 1$. (Toto tvrzení plyne z důkazu věty 5.9.3)

4. Geometrický význam podmínky (5.5) pro případ $n = 2, m = 1$ a rovnicí $g(x, y) = 0$ je určena hladká křivka:

Podle předchozí poznámky je $\lambda_0 \neq 0$ a tedy $f'(\hat{x}, \hat{y}) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} g'(\hat{x}, \hat{y})$, což znamená, že vektory $f'(\hat{x}, \hat{y})$ (směr nejrychlejšího růstu funkce f v bodě $(\hat{x}, \hat{y})$) a $g'(\hat{x}, \hat{y})$ (směr normály ke křivce dané rovnicí $g(x, y) = 0$ v bodě $(\hat{x}, \hat{y})$) jsou rovnoběžné.

5.9.5 Věta

Nechť $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \in M$, $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, \lambda_0 = 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ splňují (5.5) a nechť funkce $f, g_1, g_2, \dots, g_m$ jsou třídy C^2 v bodě $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$. Označme $\mathcal{L}'' = \left(\frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} \mathcal{L}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \right)$. ($\mathcal{L}''$ je čtvercová

matice řádu n .)

Jestliže pro každý vektor $\vec{h} \in \mathcal{T}_m(\hat{x})$ platí $\vec{h}^T \cdot \mathcal{L}'' \cdot \vec{h} > 0$ (resp. $\vec{h}^T \cdot \mathcal{L}'' \cdot \vec{h} < 0$), pak v bodě $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ nabývá funkce f lokálního minima (resp. maxima) vzhledem k množině M .

Jestliže existují vektory $\vec{h}, \vec{k} \in \mathcal{T}_m(\hat{x})$ takové, že $\vec{h}^T \cdot \mathcal{L}'' \cdot \vec{h} < 0 < \vec{k}^T \cdot \mathcal{L}'' \cdot \vec{k}$, pak v bodě $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ funkce f lokálního extrému vzhledem k množině M nenabývá.

Náznak důkazu: Podle 5.8.6 lze vektor $x - \hat{x}$ pro libovolný bod $x \in m$ vyjádřit ve tvaru $x - \hat{x} = \alpha \vec{h} + \Phi(\alpha)$, kde $\vec{h}$ je jednotkový vektor z $\mathcal{T}_m(\hat{x})$ a $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Phi(\alpha)}{\alpha} = 0$.

Pro každý bod $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$ je $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n, 1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$.

Funkci $\mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n, 1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ budeme považovat za funkci n proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$. Poněvadž platí (5.5), je $d\mathcal{L}(x, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = 0$ a tedy s využitím 5.4.3 pro $x \in M$ platí:

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{L}(x, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \mathcal{L}(\hat{x}, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m) + \frac{1}{2!} d^2 \mathcal{L}(x + \vartheta(x - \hat{x}), 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m)(x - \hat{x}) = \\ &= f(\hat{x}) + \frac{1}{2!} d^2 \mathcal{L}(x + \vartheta(x - \hat{x}), 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m)(\alpha \vec{h} + \Phi(\alpha)) = \\ &= f(\hat{x}) + \frac{\alpha^2}{2!} d^2 \mathcal{L}(x + \vartheta(x - \hat{x}), 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m)(\vec{h}) + \frac{1}{2!} d^2 \mathcal{L}(x + \vartheta(x - \hat{x}), 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m)(\Phi(\alpha)). \end{aligned}$$

Tedy

$$f(x) - f(\hat{x}) = \frac{\alpha^2}{2!} d^2 \mathcal{L}(x + \vartheta(x - \hat{x}), 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m)(\vec{h}) + \frac{1}{2!} d^2 \mathcal{L}(x + \vartheta(x - \hat{x}), 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m)(\Phi(\alpha)).$$

Druhý sčítanec na pravé straně je v absolutní hodnotě malý pro malé α , znaménko prvního sčítance je pro x dostatečně blízké $\hat{x}$ stejné, jako znaménko výrazu $\vec{h}^T \cdot \mathcal{L}'' \cdot \vec{h}$. $\square$

5.9.6 Poznámka

Z vět 5.9.3 a 5.9.5 plyne návod na řešení úlohy (5.4) v případě, že vektory $g'_1(x), g'_2(x), \dots, g'_m(x)$ jsou lineárně nezávislé pro jakékoliv $x \in \mathbb{R}^n$:

(i) Vytvoříme Lagrangeovu funkci

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k g_k(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

(ii) Najdeme $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ jako řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{L}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ g_k(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

(iii) Ze systému lineárních rovnic

$$\frac{\partial g_k(\hat{x})}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial g_k(\hat{x})}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial g_k(\hat{x})}{\partial x_n} h_n = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

vypočteme m z proměnných $h_1, h_2, \dots, h_n$ v závislosti na $n - m$ zbývajících.

(iv) Vypočítáme druhý diferenciál Lagrangeovy funkce

$$d^2 \mathcal{L}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, 1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)(h_1, h_2, \dots, h_n),$$

přičemž $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ je vektor vypočítaný v předchozím kroku a určíme jeho znaménko. Je-li kladné, nastává v bodě $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ lokální minimum úlohy (5.4), je-li záporné, pak maximum.

5.10 Vektorové funkce, skalární a vektorová pole

5.10.1 Poznámky o vektorech v $\mathbb{R}^3$

1. Označení:

$\vec{a}, \vec{b}, \dots$ — vektory, $\vec{o}$ — nulový vektor

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \dots$ — složky vektorů

$\alpha = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \beta = |\vec{b}|, \dots$ — velikost vektorů

$\vec{a}^0 = \frac{1}{\alpha}\vec{a}, \dots$ — jednotkový vektor stejné orientace, jako vektor $\vec{a}$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ ($\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$)

Pokud nebude hrozit nedorozumění, nebudeme rozlišovat mezi vektorem a jeho umístěním.

Úhlem vektorů rozumíme orientovaný dutý úhel, která tyto vektory svírají.

$\varphi = \widehat{\vec{a}\vec{b}}$ — úhel vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ v tomto pořadí.

2. Skalární součin vektorů $\vec{a}, \vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha\beta \cos \widehat{\vec{a}\vec{b}} = \alpha\beta \cos \varphi$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha\beta \cos \varphi = \alpha(\beta \cos \varphi) = \beta(\alpha \cos \varphi)$: Skalární součin vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ je součin velikosti jednoho z vektorů a velikosti kolmého průmětu druhého z vektorů do směru prvního.

Pro libovolné vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ platí:

$$(i) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{o} \text{ nebo } \vec{b} = \vec{o} \text{ nebo } \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$(ii) \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = \alpha^2 \cos 0 = \alpha^2, \quad \alpha = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}, \quad \vec{a}^0 \cdot \vec{a}^0 = 1$$

$$(iii) \quad \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\alpha\beta} = \vec{a}^0 \cdot \vec{b}^0$$

$$(iv) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}, \quad s(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (s\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (s\vec{b}) \text{ pro libovolný skalár } s$$

$$(v) \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

Je-li $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ortonormální báze, tj. $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ (a tak tomu bude v tomto odstavci vždy), pak

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \cdot (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = \\ &= a_1b_1\vec{i} \cdot \vec{i} + a_1b_2\vec{i} \cdot \vec{j} + a_1b_3\vec{i} \cdot \vec{k} + a_2b_1\vec{j} \cdot \vec{i} + a_2b_2\vec{j} \cdot \vec{j} + \\ &\quad + a_2b_3\vec{j} \cdot \vec{k} + a_3b_1\vec{k} \cdot \vec{i} + a_3b_2\vec{k} \cdot \vec{j} + a_3b_3\vec{k} \cdot \vec{k} = \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{aligned}$$

3. Pravotočivý systém tří vektorů:

Systém vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ v tomto pořadí je pravotočivý, jestliže $\widehat{\vec{a}\vec{b}} \in (0, \pi), \widehat{\vec{b}\vec{c}} \in (0, \pi)$.

4. Vektorový součin vektorů $\vec{a}, \vec{b}$:

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{v}$, kde $|\vec{v}| = \alpha\beta \sin \widehat{\vec{a}\vec{b}}, \vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{b} \cdot \vec{v} = 0$ a systém vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}$ je pravotočivý. (Je to vektor kolmý k rovině určené vektory $\vec{a}, \vec{b}$, jehož velikost je číselně rovna ploše rovnoběžníku určeného vektory $\vec{a}, \vec{b}$ a orientovaný podle pravidla pravé ruky.)

Pro libovolné vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ platí:

$$(i) \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = \alpha\beta \sin \varphi = \alpha(\beta \sin \varphi) = \alpha\beta', \quad (\varphi = \widehat{\vec{a}\vec{b}}).$$

Je-li tedy $\vec{b}'$ kolmý průmět vektoru $\vec{b}$ do roviny kolmé k vektoru $\vec{a}$, je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}'$

$$(ii) \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$(iii) \quad s(\vec{a} \times \vec{b}) = (s\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (s\vec{b}) \text{ pro libovolný skalár } s$$

$$(iv) \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

D.: geometricky.

$\vec{a}$ kolmý k rovině papíru, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$ kolmé průměty vektorů $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Označme $\varphi_1 = \widehat{\vec{c}'\vec{b}'}$, $\varphi_2 = \widehat{\vec{b}'(\vec{a} \times \vec{c})}$, $\varphi_3 = \widehat{(\vec{a} \times \vec{c})(\vec{a} \times \vec{b})}$

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{b}' + \vec{c}') &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b}' + (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}' + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}' + (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{c}' = \\ &= 0 + \alpha\gamma'\beta' \cos(-\varphi_2) + \alpha\beta'\gamma' \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + 0 = \\ &= \alpha\beta'\gamma'(\cos \varphi_2 + \cos(\pi - \varphi_2)) = \alpha\beta'\gamma'(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_2) = 0 \end{aligned}$$

a tedy $(\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}) \perp (\vec{b}' + \vec{c}')$, což znamená $\vec{a} \times (\vec{b}' + \vec{c}')^0 = (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c})^0$.

Dále rovnoběžník určený vektory $\vec{c}'$ a $\vec{b}'$ je podobný rovnoběžníku určenému vektory $\vec{a} \times \vec{c}$ a $\vec{a} \times \vec{b}$ a poněvadž $|\vec{a} \times \vec{b}| = \alpha\beta'$, $|\vec{a} \times \vec{c}| = \alpha\gamma'$, platí

$$|\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}| = \alpha|\vec{b}' + \vec{c}'| = |\vec{a} \times (\vec{b}' + \vec{c}')|.$$

Tedy $\vec{a} \times (\vec{b}' + \vec{c}') = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ a vzhledem k (i) je tvrzení dokázáno. $\square$

(v) $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$ nebo $\vec{b} = 0$ nebo $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (tj. $\vec{a} = \kappa\vec{b}$ pro nějaký skalár κ)

(vi) Je-li ortonormální báze $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ navíc pravotočivá (tj. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$) pak

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = \\ &= a_1b_1\vec{i} \times \vec{i} + a_2b_1\vec{j} \times \vec{i} + a_3b_1\vec{k} \times \vec{i} + a_1b_2\vec{i} \times \vec{j} + a_2b_2\vec{j} \times \vec{j} + a_3b_2\vec{k} \times \vec{j} + \\ &\quad + a_1b_3\vec{i} \times \vec{k} + a_2b_3\vec{j} \times \vec{k} + a_3b_3\vec{k} \times \vec{k} = \\ &= -a_2b_1\vec{k} + a_3b_1\vec{j} + a_1b_2\vec{k} - a_3b_2\vec{i} - a_1b_3\vec{j} + a_2b_3\vec{i} = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \end{aligned}$$

$$\text{Vektorový součin lze tedy symbolicky zapsat } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

5. Ještě jedna interpretace vektorového součinu:

Nechť nějaké těleso rotuje kolem pevné osy s úhlovou rychlostí ω . Zavedeme vektor $\vec{\omega}$ tak, aby byl rovnoběžný s osou rotace, měl velikost ω a byl orientován tak, že položíme-li na osu rotace pravou ruku s prsty ve směru rotace, bude $\vec{\omega}$ směřovat na stranu palce.

Na ose rotace zvolíme vztahný bod O a polohu libovolného bodu tělesa popíšeme směrovým vektorem $\vec{r}$. Nechť $\vec{r} = \vec{b} + \vec{a}$, kde $\vec{b}$ leží v ose rotace a $\vec{a}$ je na něj kolmý.

Velikost rychlosti bodu určeného polohovým vektorem $\vec{r}$ je $|\vec{v}| = \omega|\vec{a}|$. Vektor $\vec{v}$ je kolmý k vektoru $\vec{\omega}$ i k vektoru $\vec{a}$ a systém vektorů $\vec{\omega}$, $\vec{a}$, $\vec{v}$ je pravotočivý. Lze tedy psát $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{b}) = \vec{\omega} \times \vec{r} - \vec{\omega} \times \vec{b} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, neboť $\vec{b} \parallel \vec{\omega}$.

6. Smíšený součin vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Označme $\varphi = \widehat{\vec{b}\vec{c}}$, $\vartheta = \widehat{\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})}$. Pak $|\vec{b} \times \vec{c}| = \beta\gamma \sin \varphi$,

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \alpha\beta\gamma \sin \varphi \cos \vartheta = (\alpha \cos \vartheta)(\beta\gamma \sin \varphi),$$

tedy $|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ je objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Úhel ϑ může být větší než pravý. V tom případě by vektor $\vec{a}$ směřoval na opačnou stranu, než na obrázku, systém vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ by nebyl pravotočivý.

Platí:

(i) Jestliže $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) > 0$ pak je systém vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ pravotočivý.

(ii) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

D.: Podle 4.(vi) je

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

□

5.10.2 Definice

Zobrazení $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ nazýváme *vektorovou funkcí*.

Reálnou funkci jedné reálné proměnné budeme někdy nazývat *skalární funkcí*.

Poznámky: $\vec{f}$ je spojitá v t_0 právě tehdy, když f_1, f_2, f_3 jsou spojité v t_0

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{a} \text{ právě tehdy, když } \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) = a_1, \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) = a_2, \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t) = a_3.$$

$$\text{Derivace: } \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) = \vec{f}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0} = f'_1(t_0)\vec{i} + f'_2(t_0)\vec{j} + f'_3(t_0)\vec{k}.$$

Má-li vektorová funkce $\vec{f}$ derivaci v bodě t_0 je v t_0 spojitá.

5.10.3 Věta

Buďte $\vec{f}, \vec{g}$ vektorové funkce mající derivaci, φ skalární funkce mající derivaci. Pak

1. $\frac{d(\vec{f} \pm \vec{g})}{dt} = \frac{d\vec{f}}{dt} \pm \frac{d\vec{g}}{dt}$
2. $\frac{d(\varphi \vec{f})}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{f} + \varphi \frac{d\vec{f}}{dt}$
3. $\frac{d(\vec{f} \cdot \vec{g})}{dt} = \frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \vec{g} + \vec{f} \cdot \frac{d\vec{g}}{dt}$
4. $\frac{d(\vec{f} \times \vec{g})}{dt} = \frac{d\vec{f}}{dt} \times \vec{g} + \vec{f} \times \frac{d\vec{g}}{dt}$

D.: 1. a 2. jsou přímé důsledky 2.1.5.

$$\begin{aligned} 3. \quad \frac{d}{dt}(\vec{f} \cdot \vec{g}) &= \frac{d}{dt}(f_1g_1 + f_2g_2 + f_3g_3) = f'_1g_1 + f_1g'_1 + f'_2g_2 + f_2g'_2 + f'_3g_3 + f_3g'_3 = \frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \vec{g} + \vec{f} \cdot \frac{d\vec{g}}{dt} \\ 4. \quad \frac{d}{dt}(\vec{f} \times \vec{g}) &= \frac{d}{dt} \left((f_2g_3 - f_3g_2)\vec{i} - (f_1g_3 - f_3g_1)\vec{j} + (f_1g_2 - f_2g_1)\vec{k} \right) = \\ &= (f'_2g_3 + f_2g'_3 - f'_3g_2 - f_3g'_2)\vec{i} - (f'_1g_3 + f_1g'_3 - f'_3g_1 - f_3g'_1)\vec{j} + (f'_1g_2 + f_1g'_2 - f'_2g_1 - f_2g'_1)\vec{k} = \\ &= (f'_2g_3 - f'_3g_2)\vec{i} - (f'_1g_3 - f'_3g_1)\vec{j} + (f'_1g_2 - f'_2g_1)\vec{k} + (f_2g'_3 - f_3g'_2)\vec{i} - (f_1g'_3 - f_3g'_1)\vec{j} + (f_1g'_2 - f_2g'_1)\vec{k} = \\ &= \vec{f}' \times \vec{g} + \vec{f} \times \vec{g}' \end{aligned}$$

□

5.10.4 Věta

Buď $\vec{f}$ nekonstantní jednotková funkce, tj. $\vec{f}(t) \cdot \vec{f}(t) = 1$ pro každé $t \in \text{Dom } \vec{f}$, která má v každém $t \in \text{Dom } \vec{f}$ derivaci. Pak vektory $\vec{f}(t)$ a $\vec{f}'(t)$ jsou kolmé pro každé $t \in \text{Dom } \vec{f}$.

D.:

$$\begin{aligned} \vec{f} \cdot \vec{f} &= 1 \quad / \quad \frac{d}{dt} \\ \frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \vec{f} + \vec{f} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt} &= 0 \\ 2 \left(\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \vec{f} \right) &= 0 \quad \text{z čehož plyne tvrzení.} \quad \square \end{aligned}$$

Podle 5.10.3.2 je $\frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{d(\varphi\vec{f}^0)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{f}^0 + \varphi\frac{d\vec{f}^0}{dt}$ a podle 5.10.4 je $\vec{f}^0 \perp \frac{d\vec{f}^0}{dt}$. Dostali jsme tedy rozklad derivace vektorové funkce na složku rovnoběžnou s touto funkcí a na složku na ni kolmou.

5.10.5 Poznámka

Graf spojitě vektorové funkce $\vec{r}$ je křivka v prostoru $\mathbb{R}^3$. Má-li funkce $\vec{r}$ v bodě t_0 derivaci různou od $\vec{0}$, pak přímka o parametrické rovnici

$$\vec{p}(t) = \vec{r}(t_0) + (t - t_0)\vec{r}'(t_0)$$

je tečnou ke křivce $\vec{r} = \vec{r}(t)$ v bodě $\vec{r}(t_0)$:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{p}(t)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) - (t - t_0)\vec{r}'(t_0)}{t - t_0} = \vec{r}'(t_0) - \vec{r}'(t_0) = 0.$$

5.10.6 Definice

Funkci $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme *skalární pole*, zobrazení $\vec{g}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ nazýváme *vektorové pole*.

$\vec{r} = (x, y, z)$ — polohový vektor bodu (x, y, z)

$f(x, y, z) = f(\vec{r})$, $\vec{g}(x, y, z) = \vec{g}(\vec{r})$

Složky vektorového pole jsou skalární pole.

5.10.7 Diferenciální operátory

Hamiltonův operátor (symbolický vektor) $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$. (čte se „nabla“)

Je-li f skalární pole, definujeme jeho *gradient*: $\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$.

Gradient skalárního pole je vektorovým polem.

Je-li $\vec{f}$ vektorové pole, definujeme jeho

$$\text{divergenci: } \text{div } \vec{g} = \nabla \cdot \vec{g} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) \cdot (g_1\vec{i} + g_2\vec{j} + g_3\vec{k}) = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z}$$

$$\text{rotaci: } \text{rot } \vec{g} = \nabla \times \vec{g} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial g_3}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$\text{gradient: } \text{grad } \vec{g} = \nabla \vec{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} & \frac{\partial g_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Divergence vektorového pole je skalární pole, rotace vektorového pole je vektorové pole.

Laplaceův operátor $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ přiřadí skalárnímu poli skalární pole, vektorovému poli vektorové pole.

5.10.8 Věta

Nechť φ , ψ jsou skalární a $\vec{u}$, $\vec{v}$ vektorová pole. Pak platí

1. $\text{grad}(\varphi\psi) = \psi \text{grad } \varphi + \varphi \text{grad } \psi$.

$$\mathbf{D.}: \quad \text{grad}(\varphi\psi) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi\psi)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi\psi)\vec{k} = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\vec{i} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial y}\vec{j} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k} + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial z}\vec{k} \quad \square$$

$$2. \quad \text{div}(\varphi\vec{v}) = \text{grad } \varphi \cdot \vec{v} + \varphi \text{div } \vec{v}$$

$$\mathbf{D.}: \quad \text{div}(\varphi\vec{v}) = \frac{\partial \varphi v_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi v_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi v_3}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}v_1 + \varphi \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}v_2 + \varphi \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}v_3 + \varphi \frac{\partial v_3}{\partial z} \quad \square$$

$$3. \quad \text{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \text{rot } \vec{u} - \vec{u} \cdot \text{rot } \vec{v}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D.}: \quad \text{div}(\vec{u} \times \vec{v}) &= \frac{\partial}{\partial x}(u_2v_3 - u_3v_2) - \frac{\partial}{\partial y}(u_1v_3 - u_3v_1) + \frac{\partial}{\partial z}(u_1v_2 - u_2v_1) = \\ &= \frac{\partial u_2}{\partial x}v_3 + \frac{\partial v_3}{\partial x}u_2 - \frac{\partial u_3}{\partial x}v_2 - \frac{\partial v_2}{\partial x}u_3 - \frac{\partial u_1}{\partial y}v_3 - \frac{\partial v_3}{\partial y}u_1 + \frac{\partial u_3}{\partial y}v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial y}u_3 + \\ &\quad + \frac{\partial u_1}{\partial z}v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial z}u_1 - \frac{\partial u_2}{\partial z}v_1 - \frac{\partial v_1}{\partial z}u_2 = \\ &= v_1 \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) + v_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) + v_3 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \\ &\quad + u_1 \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) + u_2 \left(\frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) + u_3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

□

4. $\text{grad}(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{u} + \vec{u} \cdot \text{grad } \vec{v}$. Přitom $\cdot$ na pravé straně rovnosti značí maticové násobení, vektory považujeme za řádkové.

$$\begin{aligned} \mathbf{D.}: \quad \text{grad}(\vec{u} \cdot \vec{v}) &= \text{grad}(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) = \text{grad} \sum_{i=1}^3 u_i v_i = \\ &= \left(\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} v_i + u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right), \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} v_i + u_i \frac{\partial v_i}{\partial y} \right), \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial z} v_i + u_i \frac{\partial v_i}{\partial z} \right) \right) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial u_i}{\partial x}, \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial u_i}{\partial y}, \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial u_i}{\partial z} \right) + \left(\sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial v_i}{\partial x}, \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial v_i}{\partial y}, \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial v_i}{\partial z} \right) = \\ &= (v_1, v_2, v_3) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} + (u_1, u_2, u_3) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

5.10.9 Definice

Vektorová čára vektorového pole $\vec{g} = \vec{g}(\vec{r})$ je křivka v $\mathbb{R}^3$ taková, že vektor $\vec{g}(\vec{r})$ je tečným vektorem k této křivce v bodě určeném polohovým vektorem $\vec{r}$.

Je-li vektorové pole modelem proudění kapaliny, vektorové čáry se nazývají *proudnice*. Je-li vektorové pole modelem silového pole (gravitačního, elektromagnetického, ...), vektorové čáry se nazývají *siločáry*.

Má-li vektorová čára pole $\vec{g}$ parametrické rovnice $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, pak podle 5.10.5 je $\frac{dx}{dt} = g_1$, $\frac{dy}{dt} = g_2$, $\frac{dz}{dt} = g_3$, neboli

$$\frac{dx}{g_1} = \frac{dy}{g_2} = \frac{dz}{g_3}.$$

Tato rovnice se nazývá *diferenciální rovnice vektorové čáry*.

Naopak, jestliže diferenciály složek vektoru $\vec{r} = \vec{r}(t)$ splňují předchozí rovnici, pak

$$g_2 dx - g_1 dy = 0, \quad g_3 dy - g_2 dz = 0, \quad g_3 dx - g_1 dz = 0.$$

Odtud

$$\vec{o} = (g_3 dy - g_2 dz)\vec{i} - (g_3 dx - g_1 dz)\vec{j} + (g_2 dx - g_1 dy)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & dz \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = d\vec{r} \times \vec{g},$$

tedy vektory $d\vec{r}$ a $\vec{g}$ jsou rovnoběžné.

5.10.10 Definice

Buď $\vec{g} = \vec{g}(\vec{r})$ vektorové pole. Existuje-li skalární pole $f = f(\vec{r})$ takové, že $\vec{g} = -\text{grad } f$, pak se $\vec{g}$ nazývá *potenciálové pole* a f se nazývá *potenciál* vektorového pole $\vec{g}$.

5.10.11 Věta

Vektorové pole $\vec{g} = \vec{g}(\vec{r})$ je potenciálové s potenciálem třídy C^2 právě tehdy, když $\text{rot } \vec{g} = \vec{o}$ v každém bodě $\text{Dom } \vec{g}$.

D.: Nechtě $\vec{g}$ je potenciálové pole a f je jeho potenciál. Pak

$$g_1 = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad g_2 = -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad g_3 = -\frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{a tedy} \quad \frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{\partial g_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial g_1}{\partial z} = \frac{\partial g_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial z} = \frac{\partial g_3}{\partial y}.$$

$$\text{Odtud } \text{rot } \vec{g} = \left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial g_3}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) \vec{k} = \vec{o}.$$

Opačná implikace plyne z 5.3.9. $\square$

5.10.12 Poznámka (ospravedlnění pojmu rotace)

Nechtě tuhé těleso rotuje kolem pevné osy procházející počátkem soustavy souřadnic úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$. (sr. 5.10.1.5)

Rychlost každého bodu tělesa o polohovém vektoru $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ je $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, neboli

$$v_1 = \omega_2 z - \omega_3 y, \quad v_2 = \omega_3 x - \omega_1 z, \quad v_3 = \omega_1 y - \omega_2 x.$$

Úhlová rychlost $\vec{\omega}$ nezávisí na $\vec{r}$ a tedy

$$\frac{\partial v_2}{\partial z} = -\omega_1, \quad \frac{\partial v_3}{\partial y} = \omega_1, \quad \rightarrow \quad \omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} = \omega_2, \quad \frac{\partial v_3}{\partial x} = -\omega_2, \quad \rightarrow \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = -\omega_3, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = \omega_3, \quad \rightarrow \quad \omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)$$

Odtud plyne, že

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \vec{k} \right) = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}.$$

Úhlová rychlost rotace (ve významu „otáčení“) tuhého tělesa je rovna polovině rotace (ve významu „diferenciální operátor“) rychlosti jeho bodů.

Představíme-li si vektorové pole jako proudící kapalinu a je-li alespoň v jednom bodě rotace tohoto pole nenulová, lze si okolí tohoto bodu představit jako tuhé těleso, které rotuje. Neboli že v kapalině je vír.

Proto pole $\vec{g}$, které má (alespoň v jisté oblasti) nenulovou rotaci, se nazývá *vírové*. Potenciálové pole se někdy nazývá *nevírové*.

5.11 Cvičení

Zjistěte, zda existuje limita funkce $y = f(x, y)$ v daném bodě (x_0, y_0) ; pokud ano, vypočítejte ji.

- 1) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 - (x - y)^2}, (0, 0),$ 2) $f(x, y) = \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}, (0, 0),$
- 3) $f(x, y) = \frac{x^2 + y(y - 1)^2}{x^2 + (y - 1)^2}, (0, 1),$ 4) $f(x, y) = \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy}, (0, \infty),$
- 5) $f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x + y}, (\infty, \infty),$ 6) $f(x, y) = \log_x(x + y), (1, 0).$

Vypočítejte parciální derivace prvního a druhého řádu funkcí

- 7) $f(x, y) = xy + \frac{x}{y},$ 8) $f(x, y) = \ln(x + y^2),$ 9) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy},$

- 10) $f(x, y) = x^y,$ 11) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$ 12) $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z.$

13) Ukažte, že funkce $f(x, y) = \ln \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ (resp. $f(x, y, z) = 1/\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$) splňuje Laplaceovu rovnici $f_{xx} + f_{yy} = 0$ (resp. $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$).

14) Najděte derivaci funkce $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ ve směru jednotkového vektoru, který svírá úhel α s kladným směrem osy x , v bodě $(1, 1)$. Pro jaké α je tato derivace největší, nejmenší, rovna nule?

15) Vypočítejte směrovou derivaci funkce $f(x, y) = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ v bodě $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$, ve směru jednotkového vektoru vnitřní normály ke křivce $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ v bodě $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$.

16) Vypočítejte úhel mezi gradienty funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ v bodech $(\varepsilon, 0, 0), (0, \varepsilon, 0)$.

17) Najděte příklad funkce $z = f(x, y)$, která je v bodě $(0, 0)$ spojitá, má v něm derivaci, ale nemá diferenciál.

Vypočítejte první diferenciál dané funkce v daném bodě

- 18) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}, (\sqrt{3}, 1),$ 19) $f(x, y, z) = x^{y^z}, (e, 1, 0).$

20) Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ v bodě (x_1, y_1, z_1) .

Zjistěte, zda následující výrazy jsou diferenciály nějaké kmenové funkce. Pokud ano, určete ji.

- 21) $\frac{dx}{1 + x^2} + \frac{dy}{1 + y^2},$ 22) $\frac{ydx - xdy}{2x^2 + 2xy + y^2},$

23) $(3x^2 - 3yz + 2)dx + (3y^2 - 3xz + \ln y + 1)dy + (3z^2 - 3xy + 1)dz.$

Najděte první a druhé parciální derivace složených funkcí

- 24) $u(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right),$ 25) $u(x, y) = f\left(xy, \frac{x}{y}\right),$ 26) $u(x, y, z) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right).$

Ukažte, že funkce u splňuje danou rovnici (φ, ψ jsou libovolné funkce).

27) $yu_x - xu_y = 0, u(x, y) = \varphi(x^2 + y^2),$ 28) $xu_x + \alpha yu_y + \beta zu_z = nu, u(x, y, z) = x^n \varphi\left(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta}\right),$

29) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0, u(x, y) = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y).$

Postupným derivováním eliminujte z výrazů funkce φ, ψ .

30) $u(x, y) = x + \varphi(xy),$ 31) $u(x, y, z) = \varphi(x - y, y - z),$ 32) $u(x, y) = \varphi(x)\psi(y).$

Diferenciální rovnice transformujte do nových proměnných ξ, η .

33) $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0, \xi = \frac{y}{x}, \eta = xy.$

34) $y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} - 2xy u_{xy} = xu_x + yu_y, \xi = \sqrt{x^2 + y^2}, \eta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$

35) $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0, \xi = \ln|y + \sqrt{1 + y^2}|, \eta = \ln|x + \sqrt{1 + x^2}|.$

Určete Taylorův polynom 2. stupně s daným středem následujících funkcí

36) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{1 + x + y}{1 - x + y}, (0, 0),$ 37) $f(x, y) = x^y, (1, 1),$

38) $f(x, y, z) = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} - xyz, (1, 1, 1).$

Najděte stacionární body daných funkcí a určete jejich druh

39) $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2y - 1,$ 40) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 1,$

41) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy,$ 42) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + \frac{z^2}{2} - 3xz - 2y + 2z,$

43) $f(x, y, z) = xy^2 z^3 (1 - x - 2y - 3z),$ 44) $f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z).$

45) dokažte, že rovnice $x^4 - xy + y^4 = 1$ vyjadřuje v okolí bodu $(0, 1)$ jistou funkci $y = y(x)$. Zjistěte, zda je tato funkce v bodě 0 konvexní nebo konkávní.

46) Vyšetřete průběh funkce $y = y(x)$ dané implicitně rovnicí $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

Vypočítejte druhý diferenciál funkce $z = z(x, y)$, dané implicitně, v obecném bodě

47) $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$, 48) $xyz = x + y + z$.

Najděte lokální extrémy funkce $z = z(x, y)$ dané implicitně rovnicí

49) $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z = 2$, 50) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

51) Napište rovnici tečny ke kružnici, která je průnikem roviny $x + y + z = 0$ se sférou $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, v bodě $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

52) Najděte extrémní vzdálenosti počátku souřadnic od bodů křivky dané rovnicí $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

53) Buďte φ, ψ skalární pole. Vypočítejte $\text{div}(\varphi \text{ grad } \psi)$.

54) Buď $\vec{v}$ vektorové pole. Vypočítejte $\text{grad div } \vec{v}$.

Výsledky: 1) neexistuje 2) 0 3) 1 4) neexistuje 5) neexistuje 6) neexistuje 7) $f_x = y + \frac{1}{y}, f_y = x - \frac{x}{y^2}$,

$f_{xx} = 0, f_{yy} = \frac{2x}{y^3}, f_{xy} = 1 - \frac{1}{y^2}$ 8) $f_x = \frac{1}{x+y^2}, f_y = \frac{2y}{x+y^2}, f_{xx} = \frac{-1}{(x+y^2)^2}, f_{yy} = \frac{2x-2y^2}{(x+y^2)^2}, f_{xy} = \frac{-2y}{(x+y^2)^2}$

9) $f_x = \frac{1}{x^2+1}, f_y = \frac{1}{y^2+1}, f_{xx} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}, f_{yy} = \frac{-2y}{(y^2+1)^2}, f_{xy} = 0$ 10) $f_x = yx^{y-1}, f_y = x^y \ln x$,

$f_{xx} = (y^2 - y)x^{y-2}, f_{yy} = x^y (\ln x)^2, f_{xy} = x^{y-1}(1 + y \ln x)$ 11) $f_x = \frac{-x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, f_y = \frac{-y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$

$f_z = \frac{-z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, f_{xx} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}, f_{yy} = \frac{-x^2+2y^2-z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}, f_{zz} = \frac{-x^2-y^2+2z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}},$

$f_{xy} = \frac{3xy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}, f_{xz} = \frac{3xz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}, f_{yz} = \frac{3yz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$ 12) $f_x = \frac{z}{x} \left(\frac{x}{y}\right)^z, f_y = -\frac{z}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^z, f_z = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln \frac{x}{y},$

$f_{xx} = \frac{z^2-z}{x^2} \left(\frac{x}{y}\right)^z, f_{yy} = \frac{z^2+z}{y^2} \left(\frac{x}{y}\right)^z, f_{zz} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \left(\ln \frac{x}{y}\right)^2, f_{xy} = -\frac{z^2}{xy} \left(\frac{x}{y}\right)^z, f_{xz} = \frac{1+z \ln \frac{x}{y}}{x} \left(\frac{x}{y}\right)^z,$

$f_{yz} = -\frac{1+z \ln \frac{x}{y}}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^z$ 14) $\cos \alpha + \sin \alpha, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ nebo $\frac{7\pi}{4}$ 15) $\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{ab}$ 16) $\frac{\pi}{2}$

17) $f(x, y) = \begin{cases} 2x^2 - y, & x > 0, y \in [x^2, 2x^2) \\ 2y - x^2, & x > 0, y \in \left(\frac{x^2}{2}, x^2\right) \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$ 18) $\frac{dx}{4} + \frac{dy}{2}$ 19) dx 20) $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1$ 21) $\arctg \frac{x+y}{1-xy}$

22) $-\arctg \frac{x+y}{x}$ 23) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2x + z + y \ln y$ 24) $u_x = -\frac{y}{x^2} f' \left(\frac{y}{x}\right), u_y = \frac{1}{x} f' \left(\frac{y}{x}\right),$

$u_{xx} = \frac{y}{x^3} (2f' \left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} f'' \left(\frac{y}{x}\right)), u_{yy} = \frac{1}{x^2} f'' \left(\frac{y}{x}\right), u_{xy} = -\frac{1}{x^2} (f' \left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} f'' \left(\frac{y}{x}\right))$ 25) $u_x = y f'_1 + \frac{1}{y} f'_2,$

$u_y = x f'_1 - \frac{x}{y^2} f'_2, u_{xx} = y^2 f''_{11} + 2f''_{12} + \frac{1}{y^2} f''_{22}, u_{yy} = x^2 f''_{11} - 2\frac{x^2}{y^2} f''_{12} + \frac{x^2}{y^4} f''_{22} + \frac{2x}{y^3} f'_2,$

$u_{xy} = xy f''_{11} - \frac{x}{y^3} f''_{22} + f'_1 - \frac{1}{y^2} f'_2$ 26) $u_x = \frac{1}{y} f'_1, u_y = -\frac{x}{y^2} f'_1 + \frac{1}{z} f'_2, u_z = -\frac{y}{z^2} f'_2, u_{xx} = \frac{1}{y^2} f''_{11},$

$u_{yy} = \frac{x^2}{y^4} f''_{11} - \frac{2x}{y^2 z} f''_{12} + \frac{1}{z^2} f''_{22} + \frac{x}{y^3} f'_1, u_{zz} = \frac{y^2}{z^4} f''_{22} + \frac{2y}{z^3} f'_2, u_{xy} = -\frac{x}{y^3} f''_{11} + \frac{1}{yz} f''_{12} - \frac{1}{y^2} f'_1, u_{xz} = -\frac{1}{z^2} f''_{12},$

$u_{yz} = \frac{x}{yz^2} f''_{12} - \frac{y}{z^3} f''_{22} - \frac{1}{z^2} f'_2$ 30) $xu_x - yu_y = x$ 31) $u_x + u_y + u_z = 0$ 32) $uu_{xy} = u_x u_y$ 33) $u_{\xi\eta} = \frac{1}{2\eta} u_{\xi}$

34) $u_{\eta\eta} = 0$ 35) $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$ 36) $\frac{\pi}{4} + x - xy$ 37) $1 - y + xy$

38) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (x-1)(y-1) - (x-1)(z-1) - (y-1)(z-1)$ 39) $(0, 1)$ sedlo

40) na přímce $y = x+1$ (neostře) lokální minimum 41) $(1, 1)$ ostré lokální minimum, $(0, 0)$ sedlo 42) $(2, 1, 4)$ ostré lokální minimum, $(1, 1, 1)$ sedlo 43) $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right)$ ostré lokální maximum, $(0, y, \frac{1}{3}(2y-1)), (x, 0, y), (x, y, 0)$ nejsou ostré lokální extrémy 44) $\left(\frac{2k+1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi\right)$ ostré lokální maximum, $(k\pi, k\pi, k\pi)$ ostré lokální minimum

45) konkávní 46) Bernoulliho lemniskáta 47) $\frac{-z^2(ydx-xdy)^2}{y^2(x+z)^3}$ 48) $\frac{2}{(1-xy)^2} (y(yz-1)dx^2 + 2zxdxdy + x(xz-1)dy^2)$

49) $z_{\min} = z(-3-\sqrt{6}, -3-\sqrt{6}) = -4-2\sqrt{6}, z_{\max} = z(-3+\sqrt{6}, -3+\sqrt{6}) = -4+2\sqrt{6}$

50) $z_{\min} = z(0, 0) = -a, z_{\max} = z(0, 0) = a$. 51) $x = \frac{\sqrt{6}}{6} + t, y = \frac{\sqrt{6}}{6} - t, z = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ 52) Nejmenší vzdálenost 1 je od bodů $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; největší vzdálenost 2 je od bodů $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 53) $\nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \varphi\Delta\psi$

54) $\text{rot rot } \vec{v} + \Delta\vec{v}$

Kapitola 6

Integrální počet funkcí více proměnných

Pojem míry podmnožiny prostoru $\mathbb{R}^k$ sjednocuje a zobecňuje pojem obsahu rovinných obrazců a objemu prostorových těles. Např. obsah rovinného obrazce je mírou v $\mathbb{R}^2$. Pro $A \subseteq \mathbb{R}^n$ označme $m(A)$ míru množiny A ; lze ji chápat jako zobrazení z množiny podmnožin $\mathbb{R}^k$ do množiny nezáporných reálných čísel. Míra by měla splňovat následující přirozené podmínky:

- (i) Jsou-li množiny A, B shodné, pak $m(A) = m(B)$.
- (ii) Je-li $A \subseteq B$, pak $m(A) \leq m(B)$.
- (iii) Je-li $A \cap B = \emptyset$, pak $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

Obecnou míru v prostoru $\mathbb{R}^n$ jako první zkonstruoval Camille Jordan (1838–1922). Pro názornost podrobně ukážeme konstrukci Jordanovy míry v $\mathbb{R}^2$.

6.1 Jordanova míra v $\mathbb{R}^2$

6.1.1 Definice

Nechť $n, j, k \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Čtverec řádu n definujeme jako množinu

$$W_{j,k}^n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{j}{2^n} \leq x \leq \frac{j+1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \leq y \leq \frac{k+1}{2^n} \right\}.$$

Množinu všech čtverců řádu n nazveme *síť řádu n* a síť řádu 0 nazveme *základní síť*.

Konečné sjednocení čtverců řádu n nazveme *elementární množina řádu n* .

Reálné číslo

$$m(W_{j,k}^n) = m(W^n) = \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{4^n}$$

nazveme mírou čtverce řádu n . Dále klademe $m(\emptyset) = 0$.

Je-li $M = \bigcup_{(j,k) \in I} W_{j,k}^n$ elementární množina řádu n , pak klademe

$$m(M) = m\left(\bigcup_{(j,k) \in I} W_{j,k}^n\right) = \sum_{(j,k) \in I} m(W_{j,k}^n) = \frac{1}{4^n} \sum_{(j,k) \in I} 1,$$

tj. *míra elementární množiny řádu n* je součtem měr všech čtverců, které ji tvoří.

Poznámky:

Pokud nebude záležet na umístění čtverce, tedy na dolních indexech j, k , budeme je často vynechávat.

Poněvadž každý čtverec řádu n je sjednocením čtyř čtverců řádu $n+1$, platí $m(W^n) = 4m(W^{n+1})$.

Snadno ověříme, že míra elementárních množin splňuje podmínky (i)–(iii) z úvodu kapitoly.

6.1.2 Definice

Bud' $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ohraničená množina.

Jádro řádu n množiny A značené $\mathcal{K}_n(A)$ definujeme jako největší (vzhledem k množinové inkluzi) elementární množinu řádu n , která je obsažena ve vnitřku množiny A , tj.

$$\mathcal{K}_n(A) = \bigcup \{W^n : W^n \subseteq A^\circ\}.$$

Obal řádu n množiny A značený $\mathcal{C}_n(A)$ definujeme jako nejmenší (vzhledem k množinové inkluzi) elementární množinu řádu n , jejíž vnitřek obsahuje uzávěr množiny A , tj.

$$\mathcal{C}_n(A) = \bigcup \{W^n : \overline{A} \cap W^n \neq \emptyset\}.$$

Neexistuje-li čtverec řádu n , který by byl částí A° , klademe $\mathcal{K}_n(A) = \emptyset$. Je-li $A = \emptyset$, klademe $\mathcal{C}_n(A) = \emptyset$.

Poznámky: Z definice bezprostředně plynou inkluze

$$\mathcal{K}_n(A) \subseteq A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A} \subseteq \mathcal{C}_n(A).$$

Dále zřejmě platí: Ke každé ohraničené množině $A \subseteq \mathbb{R}^2$ lze sestavit posloupnosti měř

$$\{m(\mathcal{K}_n(A))\}_{n=0}^\infty \quad \text{a} \quad \{m(\mathcal{C}_n(A))\}_{n=0}^\infty.$$

6.1.3 Věta

Bud' $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ohraničená množina. Pak pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$m(\mathcal{K}_n(A)) \leq m(\mathcal{K}_{n+1}(A)), \quad m(\mathcal{C}_n(A)) \geq m(\mathcal{C}_{n+1}(A)).$$

D.: Nerovnosti plynou ze zřejmých inkluzí $\mathcal{K}_n(A) \subseteq \mathcal{K}_{n+1}(A)$, $\mathcal{C}_n(A) \supseteq \mathcal{C}_{n+1}(A)$. $\square$

6.1.4 Důsledek

Posloupnosti měř $\{m(\mathcal{K}_n(A))\}_{n=0}^\infty$ a $\{m(\mathcal{C}_n(A))\}_{n=0}^\infty$ mají (vlastní) limitu.

D.: Plyne z věty o monotonních posloupnostech 1.3.9, neboť $\{m(\mathcal{K}_n(A))\}_{n=0}^\infty$ je neklesající a shora ohraničená hodnotou $m(\mathcal{K}_0(A))$; $\{m(\mathcal{C}_n(A))\}_{n=0}^\infty$ je nerostoucí a zdola ohraničená hodnotou 0. $\square$

Toto tvrzení nás opravňuje k následující definici:

6.1.5 Definice

Bud' $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ohraničená množina. Číslo

$$m_*(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(\mathcal{K}_n(A))$$

se nazývá *vnitřní Jordanova míra množiny A* a číslo

$$m^*(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(\mathcal{C}_n(A))$$

se nazývá *vnější Jordanova míra množiny A* .

Poznamenejme, že vždy platí $0 \leq m_*(A) \leq m^*(A)$.

6.1.6 Věta

Bud' $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ ohraničené množiny. Pak platí

1. Je-li $A \subseteq B$ pak $m_*(A) \leq m_*(B)$ a $m^*(A) \leq m^*(B)$.
2. $m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B)$.
3. Je-li $A \cap B = \emptyset$ pak $m_*(A) + m_*(B) \leq m_*(A \cup B)$.

D.: První tvrzení plyne z 4.2.2.4, druhé z 4.2.2.5 a třetí z faktu, že $\mathcal{K}_n(A) \cup \mathcal{K}_n(B) \subseteq \mathcal{K}_n(A \cup B)$. $\square$

6.1.7 Definice

Buď $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ohraničená množina. Jestliže $m_*(A) = m^*(A)$, pak řekneme, že množina A je *Jordanovsky měřitelná* a číslo $m(A) = m_*(A) = m^*(A)$ se nazývá *Jordanova míra množiny* A .

6.1.8 Příklady

1) Míra obdélníka

Buďte a_1, b_1, a_2, b_2 reálná čísla taková, že $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2$. Obdélník

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2\}$$

je měřitelnou množinou a $m(Q) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$.

D.: Připomeňme, že $[x]$ označuje celou část čísla x . Platí

$$\begin{aligned} m(\mathcal{K}_n(Q)) &\geq \left[\frac{b_1 - a_1}{\frac{1}{2^n}} - 1 \right] \cdot \left[\frac{b_2 - a_2}{\frac{1}{2^n}} - 1 \right] \cdot \frac{1}{4^n} \geq (2^n(b_1 - a_1) - 2)(2^n(b_2 - a_2) - 2) \frac{1}{4^n} = \\ &= \left((b_1 - a_1) - \frac{1}{2^{n-1}} \right) \left((b_2 - a_2) - \frac{1}{2^{n-1}} \right) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) - \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 + b_2 - a_1 - a_2) + \frac{1}{4^{n-1}}, \\ m(\mathcal{C}_n(Q)) &\leq \left[\frac{b_1 - a_1}{\frac{1}{2^n}} + 2 \right] \left[\frac{b_2 - a_2}{\frac{1}{2^n}} + 2 \right] \frac{1}{4^n} \leq (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) + \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 + b_2 - a_1 - a_2) + \frac{1}{4^{n-1}}. \end{aligned}$$

Tedy

$$m_*(Q) \geq (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \geq m^*(Q),$$

avšak $m_*(Q) \leq m^*(Q)$, z čehož plyne $m_*(Q) = m^*(Q) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$. $\square$

2) Množina, která není Jordanovsky měřitelná

Množina $A = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ není Jordanovsky měřitelná.

D.: Pak $A^\circ = \emptyset$ a tedy také $\mathcal{K}_n(A) = \emptyset$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. To znamená, že $m_*(A) = 0$. Dále $\bar{A} = [0, 1] \times [0, 1] = W_{0,0}^0$ a tedy

$$\begin{aligned} m(\mathcal{C}_0(A)) &= 1 + 8 \cdot 1 = 1 + \frac{2 \cdot 4}{2^0}, \\ m(\mathcal{C}_1(A)) &= 1 + 12 \cdot \frac{1}{4} = 1 + \frac{3 \cdot 4}{2^2}, \\ m(\mathcal{C}_2(A)) &= 1 + 20 \cdot \frac{1}{16} = 1 + \frac{5 \cdot 4}{2^4}, \\ &\vdots \\ m(\mathcal{C}_n(A)) &= 1 + (4 \cdot 2^n + 4) \cdot \left(\frac{1}{2^n} \right)^2 = 1 + \frac{(2^n + 1)4}{2^{2n}} = 1 + 4 \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}} \right). \end{aligned}$$

Tedy $m^*(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 4 \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}} \right) \right) = 1$. Poněvadž $m_*(A) = 0 < 1 = m^*(A)$, není množina A měřitelná. $\square$

6.1.9 Věta

Je-li $m^*(A) = 0$, pak množina A je měřitelná a platí $m(A) = 0$.

D.: Plyne bezprostředně z poznámky za definicí 6.1.5. $\square$

6.1.10 Věta

Konečná množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná a platí $m(A) = 0$.

D.: Nechť $A = \{a\}$ je jednoprvková množina. Bod a je prvkem nejvýše čtyř čtverců řádu n , tedy

$$m^*(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \frac{1}{4^n} = 0. \text{ Podle 6.1.9 je } A \text{ měřitelná a } m(A) = 0. \text{ Důkaz nyní dokončíme indukcí. } \square$$

Poznámka: Opačné tvrzení samozřejmě neplatí; z $m(A) = 0$ neplyne, že by množina A byla konečná.

Pr.: $A = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}$, $m^*(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 \cdot 2^n + 4) \frac{1}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{4^{n-1}} \right) = 0$ a tedy $m(A) = 0$.

6.1.11 Věta

Ohraničená množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná právě tehdy, když $m(\partial A) = 0$.

D.: nejprve dokážeme pomocné tvrzení: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $m(\mathcal{C}_n(\partial A)) = m(\mathcal{C}_n(A)) - m(\mathcal{K}_n(A))$.

Čtverce, které tvoří elementární množinu $\mathcal{C}_n(A)$ můžeme rozdělit do dvou disjunktních skupin: ty, které obsahují hraniční body množiny A a ty, které je neobsahují. Čtverce z první skupiny tvoří elementární množinu $\mathcal{C}_n(\partial A)$ a čtverce z druhé skupiny tvoří elementární množinu $\mathcal{K}_n(A)$. Z vlastnosti (iii) míry elementárních množin nyní plyne $m(\mathcal{K}_n(A)) + m(\mathcal{C}_n(\partial A)) = m(\mathcal{C}_n(A))$, a tedy i dokazovaná rovnost.

Z ní plyne $m^*(\partial A) = m^*(A) - m_*(A)$ a tato rovnost je ekvivalentní s tvrzením. $\square$

6.1.12 Věta

Buďte $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ měřitelné množiny. Pak platí

1. Je-li $A \subseteq B$ pak $m(A) \leq m(B)$.
2. Je-li $A \cap B = \emptyset$ pak množina $A \cup B$ je měřitelná a platí $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

D.: První tvrzení plyne z 6.1.6.1. Je-li $A \cap B = \emptyset$ pak s využitím 6.1.6.3 a 6.1.6.2 dostaneme

$$m_*(A) + m_*(B) \leq m_*(A \cup B) \leq m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B),$$

tedy

$$m(A) + m(B) = m(A \cup B) = m(A \cup B) = m(A) + m(B).$$

$\square$

Jordanova míra tedy má vlastnosti (ii) a (iii) z úvodu kapitoly.

6.1.13 Věta

Jsou-li množiny A, B měřitelné, pak také množiny $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ jsou měřitelné.

D.: Podle 6.1.11 je $m(\partial A) = m(\partial B) = 0$.

Poněvadž $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$, s využitím 6.1.6.1 a 6.1.6.2 dostaneme

$$0 \leq m^*(\partial(A \cup B)) \leq m^*(\partial A \cup \partial B) \leq m^*(\partial A) + m^*(\partial B) = 0.$$

Podobně, poněvadž $\partial(A \cap B) \subseteq \partial A \cup \partial B$, dostaneme $m^*(\partial(A \cap B)) = 0$.

Dále $\partial(A \setminus B) = \partial(A \cap (\mathbb{R}^2 \setminus B)) \subseteq \partial A \cup \partial(\mathbb{R}^2 \setminus B) = \partial A \cup \partial B$, takže opět $m^*(\partial(A \setminus B)) = 0$. $\square$

6.1.14 Věta

Jsou-li A, B měřitelné množiny, pro něž $m(A \cap B) = 0$, pak $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

D.: Poněvadž $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ a $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, z 6.1.12 plyne $m(A \cup B) = m(A) + m(B \setminus A)$.

Dále $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ a $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$, takže $m(B) = m(B \setminus A) + m(A \cap B)$.

Odečtením těchto rovnic dostaneme

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B),$$

z čehož plyne tvrzení. $\square$

Z této věty také plyne vlastnost (iii) z úvodu kapitoly.

6.1.15 Lemma

Buď $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ohraničená množina, $F : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ lipschitzovské zobrazení (tj. existuje nezáporná konstanta L taková, že pro každé dva body $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ platí $\rho(F(x_1, y_1), F(x_2, y_2)) \leq L\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ kde ρ je euklidovská metrika nebo metrika s euklidovskou ekvivalentní). Pak $m^*(F(A)) \leq 4L^2 m^*(A)$.

D.: Buď l_n počet čtverců řádu n tvořících obal množiny A . Míra čtverce řádu n je $\frac{1}{4^n}$. Tedy $m(C_n(A)) = l_n \frac{1}{4^n}$; odtud $l_n = 4^n m(C_n(A))$.

Euklidovská vzdálenost každých dvou bodů $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ležících ve čtverci řádu n je nejvýše rovna úhlopříčce tohoto čtverce, tj. $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq \frac{\sqrt{2}}{2^n}$. Pro vzdálenost jejich obrazů platí

$$\rho(F(x_1, y_1), F(x_2, y_2)) \leq L\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq \frac{L\sqrt{2}}{2^n} < \frac{L}{2^{n-1}}.$$

Část množiny A , která leží ve čtverci řádu n se zobrazí do kruhu o průměru $\frac{L}{2^{n-1}}$, tedy do čtverce K_n se stranami délky $\frac{L}{2^{n-1}}$ a rovnoběžnými se souřadnými osami. Podle 6.1.8.1) je míra tohoto čtverce rovna

$$m(K_n) = \frac{L^2}{2^{2n-2}} = \frac{L^2}{4^{n-1}}.$$

Množina $K = F(C_n(A))$ je sjednocením všech čtverců K_n . Podle 6.1.6.2 je

$$m^*(K) \leq l_n m(K_n) = 4^n m(C_n(A)) \frac{L^2}{4^{n-1}} = 4L^2 m(C_n(A)).$$

Dále, poněvadž $F(A) \subseteq F(C_n(A)) = K$, podle 6.1.6.1 je $m^*(F(A)) \leq 4L^2 m(C_n(A))$. Odtud limitním přechodem $n \rightarrow \infty$ dostaneme tvrzení věty. $\square$

6.1.16 Důsledky

1. Má-li množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ míru 0 a zobrazení $F : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ je lipschitzovské, pak $m(F(A)) = 0$.
2. Buď f funkce definovaná na uzavřeném intervalu $[a, b]$, která je lipschitzovská s konstantou l . Pak graf této funkce má míru 0, tj. $m(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, y = f(x)\}) = 0$.

D.: Označme $A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b\}$ a definujme zobrazení $F : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ předpisem $F(x, 0) = (x, f(x))$. Pak pro libovolná $x_1, x_2 \in [a, b]$ platí

$$\begin{aligned} \rho(F(x_1, 0), F(x_2, 0)) &= \rho((x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (f(x_2) - f(x_1))^2} \leq \\ &\leq \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + l^2(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{1 + l^2} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0^2} = \sqrt{1 + l^2} \rho((x_1, 0), (x_2, 0)). \end{aligned}$$

Zobrazení F je tedy lipschitzovské s konstantou $\sqrt{1 + l^2}$. Podle 6.1.15 pro míru grafu funkce f platí

$$m(F(A)) \leq 4(1 + l^2)m^*(A).$$

Dále platí

$$m^*(A) \leq m(C_n(A)) \leq 2[2^n(b - a) + 2] \frac{1}{4^n} < \frac{b - a}{2^{n-1}}.$$

Poněvadž poslední výraz má pro $n \rightarrow \infty$ limitu 0, je $m^*(A) = 0$. Tím je důkaz úplný. $\square$

Obrazec v rovině je nějaká podmnožina $\mathbb{R}^2$, jejíž hranice je rovinná křivka. Tuto křivku lze obvykle rozdělit na konečně mnoho částí, z nichž každou lze vyjádřit jako graf nějaké funkce jedné proměnné x nebo y . Je-li každá z takových funkcí lipschitzovská, je míra hranice obrazce podle posledního tvrzení nulová a to podle 6.1.11 znamená, že takový obrazec je měřitelnou množinou.

6.1.17 Věta

Buď $A \subseteq \mathbb{R}^2$ měřitelná množina, $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometrické zobrazení. Pak je množina $F(A)$ měřitelná a platí $m(F(A)) = m(A)$.

D.: Poněvadž F je isometrické, tj. $\rho(F(x_1, y_1), F(x_2, y_2)) = \rho((x_1, y_1), (x_2, y_2))$, je toto zobrazení také lipschitzovské s konstantou 1 a zejména je tedy spojitě.

Ze spojitosti zobrazení F plyne $F(\partial A) = \partial F(A)$ a z měřitelnosti množiny A plyne $m(\partial A) = 0$. Podle 6.1.16.1 je tedy také $m(\partial F(A)) = 0$, což podle 6.1.11 znamená, že množina $F(A)$ je měřitelná. Analogicky ukážeme, že pro čtverec W^n řádu n je množina $F(W^n)$ měřitelná. (Pozn.: Množina $F(W^n)$ je zase čtverec o straně délky 2^{-n} , ale jeho strany obecně nejsou rovnoběžné s osami, takže jeho míru nelze vypočítat podle 6.1.8.1.)

Je-li $m(A) = 0$, je $m(F(A)) = 0$ podle 6.1.16.

Nechť $m(A) > 0$. Položme $\kappa_F = \frac{m(F(W^n))}{m(W^n)}$.

Číslo κ_F nezávisí na n , neboť podle 6.1.14 je $\frac{m(F(W^n))}{m(W^n)} = \frac{4m(F(W^{n+1}))}{4m(W^{n+1})}$. Počet množin $F(W^n)$ tvořících množinu $F(K_n(A))$ je stejný jako počet čtverců W^n tvořících množinu $K_n(A)$, neboť zobrazení F je podle 4.1.11 prosté. Tedy $\frac{m(F(K_n(A)))}{m(K_n(A))} = \kappa_F$. Podobnou úvahou dostaneme $\frac{m(F(C_n(A)))}{m(C_n(A))} = \kappa_F$. Odtud

$$m(F(K_n(A))) = \kappa_F m(K_n(A)) \leq \kappa_F m_*(A) = \kappa_F m^*(A) \leq \kappa_F m(C_n(A)) = m(F(C_n(A))).$$

Limitním přechodem $n \rightarrow \infty$ dostaneme

$$\kappa_F m(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(F(K_n(A))) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} m(F(C_n(A))) = \kappa_F m(A),$$

tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} m(F(K_n(A))) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(F(C_n(A)))$. Poněvadž $F(K_n(A)) \subseteq F(A) \subseteq F(C_n(A))$, dále platí

$$m(F(K_n(A))) \leq m(F(A)) \leq m(F(C_n(A))),$$

takže z předchozí rovnosti a z věty o třech posloupnostech 1.3.7 dostaneme $m(F(A)) = \kappa_F m(A)$. Tento vztah platí pro libovolnou měřitelnou množinu A , zejména tedy pro jednotkový kruh. Avšak isometrické zobrazení převádí jednotkový kruh na jednotkový kruh. Z toho plyne, že $\kappa_F = 1$. $\square$

Z věty zejména plyne, že Jordanova míra splňuje požadavek (i) z úvodu kapitoly.

6.2 Závislost míry na transformaci souřadnic

6.2.1 Lemma

Jordanova míra rovnoběžníku P o straně a a výšce v na ni spuštěné je $m(P) = av$.

D.: Nejprve poznamenejme, že hranice rovnoběžníku je tvořena čtyřmi úsečkami, což jsou podle 6.1.16 množiny Jordanovy míry 0, takže podle 6.1.11 je rovnoběžník měřitelnou množinou.

Označme α jeden vnitřní úhel rovnoběžníku a dále $\kappa = \tan \alpha$. Rotace a posunutí jsou isometrická zobrazení. Podle 6.1.17 tedy stačí určit míru rovnoběžníku P s vrcholy $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(v\kappa, v)$, $(v\kappa + a, v)$.

Buď $n \in \mathbb{N}$. Do uvažovaného rovnoběžníku lze vepsat soustavu obdélníků

$$\left[(i+1) \frac{v}{n\kappa}, i \frac{v}{n\kappa} + a \right] \times \left[i \frac{v}{n}, (i+1) \frac{v}{n} \right], \quad i = 0, 1, \dots, (n-1)$$

a lze mu opsat soustavu obdélníků

$$\left[i \frac{v}{n\kappa}, (i+1) \frac{v}{n\kappa} + a \right] \times \left[i \frac{v}{n}, (i+1) \frac{v}{n} \right], \quad i = 0, 1, \dots, (n-1).$$

Podle 6.1.8.1) je míra každého vepsaného obdélníku $\frac{v}{n} \left(a - \frac{v}{n\kappa} \right)$ a míra každého opsaného obdélníku je $\frac{v}{n} \left(a + \frac{v}{n\kappa} \right)$.

Označme U_n sjednocení všech opsaných obdélníků a V_n sjednocení všech vepsaných obdélníků. Množiny U_n a V_n jsou měřitelné a platí $U_n \subseteq P \subseteq V_n$,

$$m(U_n) = n \frac{v}{n} \left(a - \frac{v}{n\kappa} \right) = v \left(a - \frac{v}{n\kappa} \right), \quad m(V_n) = v \left(a + \frac{v}{n\kappa} \right).$$

Podle 6.1.12.1 je

$$av - \frac{v^2}{n\kappa} \leq m(P) \leq av + \frac{v^2}{n\kappa}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$ a tedy $m(P) = av$. $\square$

6.2.2 Lemma

Míra rovnoběžníku P určeného vektory $\vec{u} = (x_1, x_2)$ a $\vec{v} = (y_1, y_2)$ je rovna absolutní hodnotě determinantu

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

D.: Podle 6.2.1 je Jordanova míra rovnoběžníku dána formulí známou ze střední školy. Označíme-li tedy α úhel vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$, můžeme psát

$$m(P) = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\sin \alpha|.$$

Označme dále γ úhel vektorů $(0, 1)$ a $\vec{u}$, β úhel vektorů $(0, 1)$ a $\vec{v}$. Pak je

$$\sin \gamma = \frac{y_1}{|\vec{u}|}, \quad \cos \gamma = \frac{x_1}{|\vec{u}|}, \quad \sin \beta = \frac{y_2}{|\vec{v}|}, \quad \cos \beta = \frac{x_2}{|\vec{v}|},$$

a tedy

$$|\sin \alpha| = |\sin(\beta - \gamma)| = |\sin \beta \cos \gamma - \sin \gamma \cos \beta| = \left| \frac{y_2}{|\vec{v}|} \frac{x_1}{|\vec{u}|} - \frac{y_1}{|\vec{u}|} \frac{x_2}{|\vec{v}|} \right| = \frac{1}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} |x_1 y_2 - x_2 y_1|,$$

což je dokazované tvrzení. $\square$

6.2.3 Věta (o závislosti míry množiny na lineární transformaci)

Buď $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ regulární lineární zobrazení s maticí (ℓ_{ij}) (tj. $D = \det(\ell_{ij}) \neq 0$). Je-li $A \subseteq \mathbb{R}^2$ měřitelná množina, pak je i $L(A)$ měřitelná množina a platí

$$m(L(A)) = |\det(\ell_{ij})| m(A) = |\ell_{11}\ell_{22} - \ell_{12}\ell_{21}| m(A).$$

D.: Označme $(u_1, u_2) = L(x, y)$, tedy $u_1 = \ell_{11}x + \ell_{12}y$, $u_2 = \ell_{21}x + \ell_{22}y$.

Poněvadž zobrazení L je lineární, transformuje systém rovnoběžných, stejně vzdálených přímk na jiný systém rovnoběžných stejně vzdálených přímek. To znamená, že zobrazení L transformuje síť čtverců řádu n na soustavu shodných rovnoběžníků. Určíme $m(L(W_{0,0}^n))$.

Čtverec $W_{0,0}^n$ je určen vektory $\frac{1}{2^n}(1, 0)$, $\frac{1}{2^n}(0, 1)$, rovnoběžník $L(W_{0,0}^n)$ je určen vektory $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$, kde $u_1 = \frac{1}{2^n}\ell_{11}$, $u_2 = \frac{1}{2^n}\ell_{12}$, $v_1 = \frac{1}{2^n}\ell_{21}$, $v_2 = \frac{1}{2^n}\ell_{22}$. Tedy podle 6.2.2 je

$$m(L(W_{0,0}^n)) = \left| \begin{vmatrix} \frac{1}{2^n}\ell_{11} & \frac{1}{2^n}\ell_{12} \\ \frac{1}{2^n}\ell_{21} & \frac{1}{2^n}\ell_{22} \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2^{2n}} |\det(\ell_{ij})| = |\det(\ell_{ij})| \cdot m(W^n).$$

Nechť jádro $\mathcal{K}_n(A)$ množiny A se skládá z k čtverců řádu n , tj. $\mathcal{K}_n(A) = \bigcup_{(p,q) \in I} W_{p,q}^n$, kde I je nějaká k -prvková množina dvojic celých čísel. Pak platí

$$m_*(L(A)) \geq m_*(L(\mathcal{K}_n(A))) = m_* \left(L \left(\bigcup_{(p,q) \in I} W_{p,q}^n \right) \right),$$

neboť z inkluze $\mathcal{K}_n(A) \subseteq A$ plyne stejná inkluze pro obrazy množin, tj. $L(\mathcal{K}_n(A)) \subseteq L(A)$ a nerovnost tedy vyplývá z 6.1.6.1. Dále snadno ověříme, že $\bigcup_{(p,q) \in I} L(W_{p,q}^n) \subseteq L\left(\bigcup_{(p,q) \in I} W_{p,q}^n\right)$. Každá z množin $L(W_{p,q}^n)$ je měřitelná a tyto množiny mají společnou nejvýše hranici, tedy množinu Jordanovy míry 0. Z předchozí inkluze a z 6.1.12.2 dostaneme

$$\begin{aligned} m_*(L(A)) &\geq m_*\left(L\left(\bigcup_{(p,q) \in I} W_{p,q}^n\right)\right) \geq m_*\left(\bigcup_{(p,q) \in I} L(W_{p,q}^n)\right) = \sum_{(p,q) \in I} m(L(W_{p,q}^n)) = \\ &= \sum_{(p,q) \in I} |\det(\ell_{ij})| m(W_{p,q}^n) = |\det(\ell_{ij})| \sum_{(p,q) \in I} m(W_{p,q}^n) = |\det(\ell_{ij})| m(\mathcal{K}_n(A)). \end{aligned}$$

Celkem tedy $m_*(L(A)) \geq |\det(\ell_{ij})| m(\mathcal{K}_n(A))$. Analogicky ověříme platnost nerovnosti $m^*(L(A)) \leq |\det(\ell_{ij})| m(\mathcal{C}_n(A))$. Platí tedy nerovnosti

$$|\det(\ell_{ij})| m(\mathcal{K}_n(A)) \leq m_*(L(A)) \leq m^*(L(A)) \leq |\det(\ell_{ij})| m(\mathcal{C}_n(A)),$$

ze které limitním přechodem $n \rightarrow \infty$ a s využitím 1.3.7 dostaneme tvrzení. $\square$

6.3 Jordanova míra v $\mathbb{R}^k$

Jordanovu míru v $\mathbb{R}^k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, lze konstruovat stejně jako míru v $\mathbb{R}^2$. Místo čtverců řádu n se uvažují k -rozměrné krychle řádu n

$$W_{m_1, \dots, m_k}^n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : \frac{m_1}{2^n} \leq x_1 \leq \frac{m_1+1}{2^n}, \frac{m_2}{2^n} \leq x_2 \leq \frac{m_2+1}{2^n}, \dots, \frac{m_k}{2^n} \leq x_k \leq \frac{m_k+1}{2^n} \right\}.$$

Jejich Jordanovu míru definujeme vztahem $m(W^n) = \frac{1}{2^{kn}}$.

Krychle řádu n obsahuje 2^k krychlí řádu $n+1$.

Všechny věty z předchozích dvou odstavců po příslušné úpravě předpokladů zůstávají v platnosti.

Tentýž geometrický útvar může mít různou míru v prostorech různé dimenze. Např. jednotková úsečka

- v prostoru $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ je krychlí řádu 0 a její míra je tedy 1;
- v prostoru $\mathbb{R}^2$ je podle poznámky za 6.1.10 její míra 0.

Všechny známé plochy obrazců a objemy těles vyjadřují příslušnou Jordanovu míru.

Míru m na prostoru $\mathbb{R}^k$ se nazývá *konečně aditivní*, má-li následující vlastnost: Jsou-li množiny $A_1, A_2, \dots, A_m$ měřitelné a po dvou disjunktní, pak i množina $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$ je měřitelná a platí

$$m(A) = \sum_{i=1}^m m(A_i).$$

Jordanova míra je podle 6.1.12.2 konečně aditivní.

6.4 Riemannův integrál

6.4.1 Definice

Budte $i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{Z}$. Množinu

$$C_{i_1, i_2, \dots, i_k}^n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : \frac{i_1}{2^n} \leq x_1 < \frac{i_1+1}{2^n}, \dots, \frac{i_k}{2^n} \leq x_k < \frac{i_k+1}{2^n} \right\}$$

nazýváme *krychlová množina řádu n* .

Krychlová množina řádu n se liší od krychle řádu n tím, že není uzavřená. Krychlové množiny pokrývají celý prostor $\mathbb{R}^k$ a jsou po dvou disjunktní, tj. každý bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ je prvkem právě jedné z nich.

Každá krychlová množina řádu n je měřitelná a její míra je $m(C^n) = \frac{1}{2^{kn}}$, sr. 6.1.11, 6.1.13.

6.4.2 Definice

Buď $A \subseteq \mathbb{R}^k$ měřitelná množina a buďte $C_1^n, C_2^n, \dots, C_m^n$ všechny krychlové množiny řádu n takové, že $D_1^n = C_1^n \cap A \neq \emptyset, \dots, D_m^n = C_m^n \cap A \neq \emptyset$. Systém množin $\mathcal{S}_n = \{D_1^n, D_2^n, \dots, D_m^n\}$ nazveme *pokrytím řádu n množiny A* .

Každá z množin D_j^n je podle 6.1.13 měřitelná, neboť je průnikem dvou měřitelných množin. Míra množiny A je podle 6.1.14 rovna

$$m(A) = \sum_{j=1}^m m(D_j^n).$$

Jsou-li $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$, je pokrytí $\mathcal{S}_q$ *zjemněním* pokrytí $\mathcal{S}_p$ v tom smyslu, že ke každé množině $D^q \in \mathcal{S}_q$ existuje množina $D^p \in \mathcal{S}_p$ tak, že $D^q \subseteq D^p$.

6.4.3 Definice

Buď $A \subseteq \mathbb{R}^k$ měřitelná množina, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ohraničená funkce a $\mathcal{S}_n = \{D_1^n, D_2^n, \dots, D_m^n\}$ pokrytí řádu n množiny A . Označme

$$\alpha_j = \inf \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_j^n\}, \beta_j = \sup \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_j^n\}.$$

Pak číslo

$$s_n(A, f) = \sum_{j=1}^m \alpha_j m(D_j^n) \quad \text{resp.} \quad S_n(A, f) = \sum_{j=1}^m \beta_j m(D_j^n)$$

nazýváme *dolní*, resp. *horní*, *součet řádu n příslušný k množině A a funkci f* .

Poněvadž $\alpha_j \leq \beta_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, platí $s_n(A, f) \leq S_n(A, f)$.

6.4.4 Věta

Posloupnost $\{s_n(A, f)\}_{n=1}^\infty$ je neklesající, posloupnost $\{S_n(A, f)\}_{n=1}^\infty$ je nerostoucí.

D.: Nechtě $\mathcal{S}_n = \{D_1^n, D_2^n, \dots, D_m^n\}$, $\mathcal{S}_{n+1} = \{D_1^{n+1}, D_2^{n+1}, \dots, D_l^{n+1}\}$.

Ke každému $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ vybereme z pokrytí $\mathcal{S}_{n+1}$ ty prvky, které jsou podmnožinou množiny D_k^n .

Označíme je $D_{k_1}^{n+1}, D_{k_2}^{n+1}, \dots, D_{k_h}^{n+1}$, tj. $D_k^n = \bigcup_{j=1}^h D_{k_j}^{n+1}$. Pak

$$\alpha_k = \inf \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_k^n\} \leq \inf \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_{k_j}^{n+1}\}$$

pro každé $j \in \{1, 2, \dots, h\}$, neboť $D_{k_j}^{n+1} \subseteq D_k^n$. Označme $\tilde{\alpha}_{k_j} = \inf \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_{k_j}^{n+1}\}$. Platí

$$\alpha_k m(D_k^n) = \alpha_k \sum_{j=1}^h m(D_{k_j}^{n+1}) \leq \sum_{j=1}^h \tilde{\alpha}_{k_j} m(D_{k_j}^{n+1}).$$

Sečtením těchto rovnic pro $k = 1, 2, \dots, m$ dostaneme $s_n(A, f) \leq s_{n+1}(A, f)$, což je první tvrzení. Druhé dokážeme analogicky. $\square$

6.4.5 Věta

Pro všechna $p, q \in \mathbb{N}$ platí $s_p(A, f) \leq s_q(A, f)$.

D.: Je-li $p \leq q$, pak $s_p(A, f) \leq s_q(A, f) \leq S_q(A, f)$, je-li $p > q$, pak $S_q(A, f) \geq S_p(A, f) \geq s_p(A, f)$. $\square$

6.4.6 Důsledek

Pro všechna $p, q \in \mathbb{N}$ platí $s_1(A, f) \leq s_p(A, f) \leq S_q(A, f) \leq S_1(A, f)$.

Tvrzení 6.4.4 a 6.4.6 říkají, že posloupnosti $\{s_n(A, f)\}_{n=1}^\infty$, $\{S_n(A, f)\}_{n=1}^\infty$ jsou monotonní a ohraničené. Tato skutečnost spolu s 1.3.9 nás opravňuje k následující definici.

6.4.7 Definice

Buď $A \subseteq \mathbb{R}^k$ měřitelná množina, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ohraničená funkce. Definujeme *dolní*, resp. *horní*, *integrál z funkce f přes množinu A* jako

$$\int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(A, f), \quad \text{resp.} \quad \overline{\int}_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(A, f).$$

Je-li $\int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \overline{\int}_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, řekneme, že *funkce f je na množině A integrovatelná (integrabilní) v Riemannově smyslu*. Společnou hodnotu horního a dolního integrálu nazýváme *Riemannovým integrálem z funkce f přes množinu A* . Značíme jej $\int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$; podrobněji $\int_A \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 dx_2 \cdots dx_k$ nebo v případě $k = 2$ $\iint_A f(x, y) dx dy$.

6.4.8 Poznámka

Uvedená definice je v souladu s definicí 3.2.6.

D.: Buď $k = 1$, $A = [a, b]$.

Nechť funkce f je integrovatelná podle definice 3.2.6. Položme

$$D_n = \left([a, b] \cap \left\{ \frac{i}{2^n} : i \in \mathbb{Z} \right\} \right) \cup \{a, b\}.$$

Pak D_n je dělením uzavřeného intervalu $[a, b]$, $D_n \in \vartheta([a, b])$ a $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ je nulová posloupnost dělení intervalu $[a, b]$. Podle 3.2.9 tedy platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(D_n, f) = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(D_n, f).$$

Avšak $s(D_n, f) = s_n([a, b], f)$, $S(D_n, f) = S_n([a, b], f)$ jak vidíme porovnáním definic 3.2.2 a 6.4.3, tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n([a, b], f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n([a, b], f),$$

což znamená, že funkce f je integrovatelná i podle definice 6.4.7.

Nechť je nyní funkce f integrovatelná podle definice 6.4.7. Poněvadž

$$\{s_n([a, b], f) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{s(D, f) : D \in \vartheta([a, b])\},$$

platí

$$\begin{aligned} \int_{[a, b]} f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n([a, b], f) = \sup \{s_n([a, b], f) : n \in \mathbb{N}\} \leq \\ &\leq \sup \{s(D, f) : D \in \vartheta([a, b])\} = \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Analogicky ukážeme platnost nerovnosti

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_{[a,b]} f(x)d(x),$$

takže celkem máme

$$\int_{[a,b]} f(x)d(x) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_{[a,b]} f(x)d(x).$$

Odtud plyne $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$, takže funkce f je integrovatelná i podle definice 3.2.6. $\square$

6.4.9 Příklady

1. Funkce konstantní na měřitelné množině $A \subseteq \mathbb{R}^k$, tj. $f(x) = \alpha$ pro $x \in A$, je integrovatelná na A a platí $\int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \alpha m(A)$.

D.: Je-li $\mathcal{S}_n = \{D_1^n, D_2^n, \dots, D_m^n\}$ pokrytí řádu n množiny A , pak

$$\int_A \alpha d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(A, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \alpha m(D_j^n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n m(D_j^n) = \alpha m(A).$$

Analogicky $\int_A \alpha d\mathbf{x} = \alpha m(A)$. $\square$

2. Buď $k = 2$, $A = [0, 1] \times [0, 1]$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$. Pak funkce f není integrovatelná, neboť

$$s_n(A, f) = \sum_{j=1}^{4^n} 0 \cdot \frac{1}{4^n} = 0, \quad S_n(A, f) = \sum_{j=1}^{4^n} 1 \cdot \frac{1}{4^n} = 1.$$

6.5 Vlastnosti Riemannova integrálu

Všechny funkce uvažované v tomto odstavci jsou funkcemi k proměnných, tj. $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. Množinami rozumíme podmnožiny prostoru $\mathbb{R}^k$.

6.5.1 Věta (aditivita integrálu vzhledem k integrovaným funkcím)

Jsou-li funkce f a g integrovatelné na množině A , pak také funkce $f + g$ je integrovatelná na A a platí

$$\int_A (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_A g(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

D.: Buď $\mathcal{S}_n = \{D_1^n, D_2^n, \dots, D_m^n\}$ pokrytí řádu n množiny A . Označme

$$u_j = \inf \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_j^n\}, \quad v_j = \inf \{g(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_j^n\}, \quad w_j = \inf \{f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_j^n\}.$$

Pak je $u_j + v_j \leq f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ pro každé $\mathbf{x} \in D_j^n$, tedy $u_j + v_j \leq w_j$. Odtud dostaneme

$$u_j m(D_j^n) + v_j m(D_j^n) \leq w_j m(D_j^n).$$

Sečtením těchto rovností pro $j = 1, 2, \dots, m$ dostaneme $s_n(A, f) + s_n(A, g) \leq s_n(A, f + g)$ a tedy podle 1.3.5.1 je $\int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_A g(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leq \int_A (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}))d\mathbf{x}$.

Analogicky ukážeme, že $\int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_A g(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leq \int_A (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}))d\mathbf{x}$.

Celkem máme

$$\begin{aligned} \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_A g(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_A g(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leq \int_A (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \leq \\ &\leq \int_A (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \leq \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_A g(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_A g(\mathbf{x})d\mathbf{x} \end{aligned}$$

□

6.5.2 Věta (homogenita integrálu vzhledem k integrovaným funkcím)

Je-li funkce f integrovatelná na množině $A \subseteq \mathbb{R}^k$ a $c \in \mathbb{R}$ je konstanta, pak také funkce cf je integrovatelná na A a platí

$$\int_A cf(\mathbf{x})d\mathbf{x} = c \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

D.: Buď $\mathcal{S}_n = \{D_1^n, D_2^n, \dots, D_m^n\}$ pokrytí řádu n množiny A . Označme

$$u_j = \inf \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_j^n\}, \quad v_j = \inf \{cf(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_j^n\},$$

$$U_j = \sup \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_j^n\}, \quad V_j = \sup \{cf(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_j^n\}.$$

Nechť nejprve $c \geq 0$. Pak $cu_j = v_j$, $cU_j = V_j$, takže $s_n(A, cf) = cs_n(A, f)$, $S_n(A, cf) = cS_n(A, f)$. Odtud plyne

$$\int_A cf(\mathbf{x})d\mathbf{x} = c \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = c \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad \int_A cf(\mathbf{x})d\mathbf{x} = c \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = c \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Pokud $c < 0$, pak $cu_j = V_j$, $cU_j = v_j$, takže $s_n(A, cf) = cS_n(A, f)$, $S_n(A, cf) = cs_n(A, f)$. Odtud plyne

$$\int_A cf(\mathbf{x})d\mathbf{x} = c \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = c \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad \int_A cf(\mathbf{x})d\mathbf{x} = c \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = c \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

□

6.5.3 Důsledek (linearita integrálu)

Budte $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ konstanty a $f_1, f_2, \dots, f_m$ funkce integrovatelné na měřitelné množině A . Pak je i funkce $c_1f_1 + c_2f_2 + \dots + c_mf_m$ integrovatelná na množině A a platí

$$\int_A (c_1f_1(\mathbf{x}) + c_2f_2(\mathbf{x}) + \dots + c_mf_m(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = c_1 \int_A f_1(\mathbf{x})d\mathbf{x} + c_2 \int_A f_2(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \dots + c_m \int_A f_m(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

D.: Úplnou indukcí s využitím 6.5.1 a 6.5.2. □

6.5.4 Věta (monotonie integrálu vzhledem k integrovaným funkcím)

Jsou-li funkce f, g integrovatelné na měřitelné množině A a platí-li $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ pro každé $\mathbf{x} \in A$, pak

$$\int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leq \int_A g(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

D.: Podle 6.5.3 je funkce $g - f$ integrovatelná na množině A . Poněvadž $g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in A$, je každý dolní součet $s_n(A, g - f) \geq 0$. Odtud plyne

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(A, g - f) = \int_A (g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = \int_A g(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

□

6.5.5 Věta

Je-li funkce f integrovatelná na měřitelné množině A , pak je i funkce $|f|$ integrovatelná na množině A a platí

$$\left| \int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq \int_A |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}.$$

D.: Buď $\mathcal{S}_n = \{D_1^n, D_2^n, \dots, D_m^n\}$ pokrytí řádu n množiny A . Položme

$$u_j = \inf \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_j^n\}, \quad U_j = \sup \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_j^n\},$$

$$v_j = \inf \{|f(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in D_j^n\}, \quad V_j = \sup \{|f(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in D_j^n\}.$$

Buďte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D_j^n$. Pak je

$$|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)| \leq U_j - u_j,$$

$$|f(\mathbf{x}_1)| = |f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2) + f(\mathbf{x}_2)| \leq |f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)| + |f(\mathbf{x}_2)| \leq U_j - u_j + |f(\mathbf{x}_2)|.$$

Nechť $\mathbf{x}_2$ je zvoleno libovolně ale pevně. Poslední nerovnost platí pro každé $\mathbf{x}_1 \in D_j^n$ a tedy

$$V_j \leq U_j - u_j + |f(\mathbf{x}_2)|.$$

Poslední nerovnost platí pro každé $\mathbf{x}_2 \in D_j^n$ a tedy platí $V_j \leq U_j - u_j + v_j$, neboli $V_j - v_j \leq U_j - u_j$. Odtud plyne

$$0 \leq S_n(A, |f|) - s_n(A, |f|) = \sum_{j=1}^m V_j m(D_j^n) - \sum_{j=1}^m v_j m(D_j^n) = \sum_{j=1}^m (V_j - v_j) m(D_j^n) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^m (U_j - u_j) m(D_j^n) = S_n(A, f) - s_n(A, f) \rightarrow 0$$

pro $n \rightarrow \infty$ a tedy funkce $|f|$ je integrovatelná.

Z nerovnosti $-|f| \leq f \leq |f|$ a z věty 6.5.5 plyne

$$-\int_A |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq \int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int_A |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x},$$

což je dokazovaná nerovnost. $\square$

6.5.6 Věta

Jsou-li funkce f, g integrovatelné na měřitelné množině A , pak je i funkce fg integrovatelná na množině A .

D.: Nechť nejprve jsou obě funkce nezáporné na množině A . Buď $\mathcal{S}_n = \{D_1^n, D_2^n, \dots, D_m^n\}$ pokrytí řádu n množiny A . Označme

$$u_j = \inf \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_j^n\}, \quad U_j = \sup \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_j^n\},$$

$$v_j = \inf \{g(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_j^n\}, \quad V_j = \sup \{g(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_j^n\},$$

$$w_j = \inf \{f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_j^n\}, \quad W_j = \sup \{f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_j^n\},$$

Pak je $u_j v_j \leq w_j \leq U_j V_j$. Odtud

$$W_j - w_j \leq U_j V_j - u_j v_j = U_j V_j - V_j u_j + u_j V_j - u_j v_j = V_j(U_j - u_j) + u_j(V_j - v_j).$$

Poněvadž funkce f, g jsou ohraničené na množině A , existuje $\alpha > 0$ tak, že $|f(\mathbf{x})| < \alpha$, $|g(\mathbf{x})| < \alpha$ pro $\mathbf{x} \in A$. Tedy $W_j - w_j < \alpha(U_j - u_j) + \alpha(V_j - v_j) = \alpha(U_j - u_j + V_j - v_j)$.

Odtud plyne $0 \leq S_n(A, fg) - s_n(A, fg) \leq \alpha(S_n(A, f) - s_n(A, f) + S_n(A, g) - s_n(A, g))$. Pravá strana pro $n \rightarrow \infty$ konverguje k 0, z čehož vyplývá tvrzení.

Vynechejme nyní předpoklad, že funkce f, g jsou na množině A nezáporné. Poněvadž jsou omezené, existuje číslo $\beta > 0$ takové, že funkce $\beta - f$, $\beta - g$ jsou nezáporné. Tyto funkce jsou podle 6.5.3 integrovatelné a tedy podle již dokázaného tvrzení, příkladu 6.4.9.1 a důsledku 6.5.3 také funkce

$$(\beta - f)(\beta - g) - \beta^2 - \beta(f + g) = fg$$

je integrovatelná. $\square$

6.5.7 Věta (o střední hodnotě)

Budte f, g funkce integrovatelné na měřitelné množině A takové, že $\alpha \leq f(\mathbf{x}) \leq \beta$, $0 \leq g(\mathbf{x})$ pro $\mathbf{x} \in A$. Pak existuje konstanta μ , $\alpha \leq \mu \leq \beta$ taková, že

$$\int_A f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \mu \int_A g(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

D.: Pro $\mathbf{x} \in A$ platí: $\alpha g(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \leq \beta g(\mathbf{x})$.

Podle 6.5.6 je funkce fg integrovatelná na množině A ; podle 6.5.4 platí:

$$\alpha \int_A g(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leq \int_A f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leq \beta \int_A g(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Je-li $\int_A g(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0$, pak také $\int_A f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0$ a za μ lze vzít libovolné číslo. Je-li $\int_A g(\mathbf{x})d\mathbf{x} > 0$, položíme

$$\mu = \frac{\int_A f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x}}{\int_A g(\mathbf{x})d\mathbf{x}}.$$

□

6.5.8 Věta (monotonie integrálu vzhledem k integračnímu oboru)

Je-li funkce f integrovatelná na množině A , pak je integrovatelná na každé měřitelné podmnožině $B \subseteq A$.

D.: Buď $\mathcal{S}_n = \{D_1^n, D_2^n, \dots, D_m^n\}$ pokrytí řádu n množiny A . Pak $\{D_1^n \cap B, D_2^n \cap B, \dots, D_m^n \cap B\}$ je pokrytí řádu n množiny B a $\{D_1^n \cap (A \setminus B), D_2^n \cap (A \setminus B), \dots, D_m^n \cap (A \setminus B)\}$ je pokrytí řádu n množiny $A \setminus B$. Pro příslušné horní a dolní součty platí

$$s_n(A, f) \leq s_n(B, f) + s_n(A \setminus B, f), \quad S_n(A, f) \geq S_n(B, f) + S_n(A \setminus B, f).$$

Limitním přechodem $n \rightarrow \infty$ dostaneme

$$\int_B f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{A \setminus B} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geq \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geq \int_B f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{A \setminus B} f(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

neboli

$$0 \geq \int_B f(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int_B f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geq \int_{A \setminus B} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int_{A \setminus B} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geq 0,$$

což je možné jen tak, že $\int_B f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_B f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$, $\int_{A \setminus B} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{A \setminus B} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$. □

6.5.9 Věta (aditivita integrálu vzhledem k integračnímu oboru)

Budte A, B disjunktní měřitelné množiny, f funkce integrovatelná na množině A i na množině B . Pak je funkce f integrovatelná také na množině $A \cup B$ a platí

$$\int_{A \cup B} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_B f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

D.: Poněvadž obě množiny A i B jsou měřitelné, je podle 6.1.14 také množina $A \cup B$ měřitelná.

Poněvadž funkce f je ohraničená na množině A i na množině B , je ohraničená i na sjednocení množin $A \cup B$. Označme $\alpha = \sup \{|f(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in A \cup B\}$.

Buď $\mathcal{S}_n = \{D_1^n, D_2^n, \dots, D_m^n\}$ pokrytí řádu n množiny $A \cup B$. Dále necht' jsou

$D_1^n, D_2^n, \dots, D_p^n$ všechny prvky pokrytí $\mathcal{S}_n$ takové, že jsou současně prvky pokrytí řádu n množiny A ,
 $D_{p+1}^n, D_{p+2}^n, \dots, D_q^n$ všechny prvky pokrytí $\mathcal{S}_n$ takové, že jsou současně prvky pokrytí řádu n množiny B ,
 $D_{q+1}^n, D_{q+2}^n, \dots, D_m^n$ ostatní prvky pokrytí $\mathcal{S}_n$.

Každá z množin $D_{q+1}^n, D_{q+2}^n, \dots, D_m^n$ má neprázdný průnik jak s množinou A tak i s množinou B , každá z nich obsahuje některé hraniční body společné množinám A a B .

Buď H množina všech hraničních bodů společných množinám A a B . Množina H je průnikem hranic dvou měřitelných množin, tedy podle 6.1.11 průnikem dvou množin nulové míry, takže podle 6.1.13 a 6.1.12.1 je sama měřitelná a její míra je $m(H) = 0$.

Poněvadž $D_{q+1}^n \cup D_{q+2}^n \cup \dots \cup D_m^n \subseteq \mathcal{C}(H)$, platí také

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(D_{q+1}^n \cup D_{q+2}^n \cup \dots \cup D_m^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=q+1}^m m(D_i^n) = 0.$$

Nyní platí

$$\begin{aligned} |S_n(A \cup B, f) - (S_n(A, f) + S_n(B, f))| &= \left| \sum_{i=q+1}^m \sup \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_i^n\} m(D_i^n) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=q+1}^m |\sup \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_i^n\}| m(D_i^n) \leq \alpha \sum_{i=q+1}^m m(D_i^n) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

pro $n \rightarrow \infty$. To znamená, že

$$\overline{\int_{A \cup B} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} = \int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_B f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Analogicky lze ukázat, že

$$\underline{\int_{A \cup B} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} = \int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_B f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

□

6.6 Integrovatelné funkce

6.6.1 Věta

Buď f funkce ohraničená na množině A míry nula. Pak je funkce f na množině A integrovatelná a platí $\int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$.

D.: Buď $|f(\mathbf{x})| \leq \alpha$ pro $\mathbf{x} \in A$, $\mathcal{S}_n = \{D_1^n, D_2^n, \dots, D_m^n\}$ pokrytí řádu n množiny A . Pak je

$$\begin{aligned} -\alpha \sum_{j=1}^m m(D_j^n) &\leq \sum_{j=1}^m m(D_j^n) \inf \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_j^n\} = s_n(A, f) \leq \\ &\leq S_n(A, f) = \sum_{j=1}^m m(D_j^n) \sup \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D_j^n\} \leq \alpha \sum_{j=1}^m m(D_j^n), \end{aligned}$$

a poněvadž $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m m(D_j^n) = m(A) = 0$, máme tvrzení věty. □

6.6.2 Důsledek

Budte A, B měřitelné množiny takové, že jejich průnik je měřitelný a platí $m(A \cap B) = 0$. Je-li funkce f integrovatelná na množině A i na množině B , pak je integrovatelná také na množině $A \cup B$ a platí

$$\int_{A \cup B} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_B f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

D.: Plyne z 6.5.9 a 6.6.1, neboť $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$, přičemž sjednocení na pravé straně je disjunktní. $\square$

6.6.3 Věta

Je-li ohraničená funkce f spojitá na měřitelné množině A , pak je na množině A integrovatelná.

D.: Je-li $m(A) = 0$, tvrzení plyne z 6.6.1.

Nechť $m(A) > 0$ a buď $\alpha > 0$ takové číslo, že $|f(\mathbf{x})| < \alpha$ pro $\mathbf{x} \in A$. Dále buď $\varepsilon \in (0, 4\alpha m(A))$ libovolné číslo.

Poněvadž $m(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(K_n(A))$, existuje jádro $B = K_{n_0}(A)$ takové, že $m(B) > m(A) - \frac{\varepsilon}{4\alpha}$, tedy $m(A \setminus B) = m(A) - m(B) < m(A) - m(A) + \frac{\varepsilon}{4\alpha} = \frac{\varepsilon}{4\alpha}$.

Množina B je uzavřená a ohraničená, tedy podle 4.4.8 kompaktní. Podle 4.5.8 je funkce f na množině B spojitá stejnoměrně. To znamená, že ke zvolenému kladnému číslu ε existuje číslo δ takové, že pro libovolné body $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B$, $\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) < \delta$ (ρ označuje některou metriku ekvivalentní s euklidovskou) platí

$$|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2m(B)}. \quad (6.1)$$

Buď $n_1 \in \mathbb{N}$ takové číslo, že pro $n > n_1$ je průměr krychle W^n řádu n menší než δ . Pak předchozí nerovnost platí na libovolné krychli $W^n \subseteq B$ pro libovolné $n > n_1$.

Označme B_0 množinu, kterou dostaneme z jádra množiny B , když v něm každou krychli W^n nahradíme krychlovou množinou C^n , $B_0 = \bigcup_{j=1}^m C_j^n$. Označme dále

$$u_j = \inf \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in C_j^n\}, \quad U_j = \sup \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in C_j^n\}.$$

Z nerovnosti (6.1) plyne, že $U_j - u_j \leq \frac{\varepsilon}{2m(B)}$, a tedy pro $n > n_1$ platí

$$0 \leq S_n(B_0, f) - s_n(B_0, f) = \sum_{j=1}^m (U_j - u_j) m(C_j^n) \leq \frac{\varepsilon}{2m(B)} \sum_{j=1}^m m(C_j^n) = \frac{\varepsilon}{2},$$

neboť $m(B) = m(B_0) = \sum_{j=1}^m m(C_j^n)$. Celkem pro $n > \max\{n_0, n_1\}$ dostáváme

$$\begin{aligned} 0 \leq S_n(A, f) - s_n(A, f) &= S_n(B_0, f) + S_n(A \setminus B_0, f) - s_n(B_0, f) - s_n(A \setminus B_0, f) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\alpha m(A \setminus B_0) < \frac{\varepsilon}{2} + 2\alpha \frac{\varepsilon}{4\alpha} = \varepsilon, \end{aligned}$$

což znamená, že funkce f je na množině A integrovatelná. $\square$

6.6.4 Definice

Řekneme, že funkce $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ má skoro všude na množině A vlastnost $\mathcal{V}$, jestliže existuje podmnožina $B \subseteq A$ taková, že $m(B) = 0$ a funkce f má vlastnost $\mathcal{V}$ ve všech bodech množiny $A \setminus B$.

Příklad: Funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} n, & \frac{1}{n+1} < x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \\ 0, & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

je spojitá skoro všude na $\mathbb{R}^2$. Přitom je nespojitá v každém bodě každé z kružnic $\{(x, y) : x^2 + y^2 = \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$ a v bodě $(0, 0)$ dokonce není definována.

6.6.5 Věta

Je-li funkce f ohraničená na měřitelné množině A a skoro všude na množině A je $f(\mathbf{x}) = 0$, pak je funkce f na množině A integrovatelná a platí $\int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0$.

D.: Buď $B = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) \neq 0\}$. Podle předpokladu je $m(B) = 0$ a tedy podle 6.6.1 je $\int_B f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0$.

Na množině $A \setminus B$, která je podle 6.1.13 měřitelná, je $f(\mathbf{x}) = 0$ a tedy podle 6.4.9 je $\int_{A \setminus B} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0$.

Podle 6.5.9 nyní je $\int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_B f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{A \setminus B} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0$. $\square$

6.6.6 Věta

Nechť nezáporná funkce f je integrovatelná na měřitelné množině A a platí $\int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0$. Pak $f(\mathbf{x}) = 0$ skoro všude na množině A .

D.: Buď $B = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) > 0\}$ a připustíme, že $m(B) > 0$. Kdyby pro každé přirozené číslo n a každou krychli W^n řádu n platilo, že $W^n \cap (\mathbb{R}^k \setminus B^\circ) \neq \emptyset$, pak by jádro $\mathcal{K}_n(B)$ řádu n množiny B bylo prázdné pro každé $n \in \mathbb{N}$ a platilo by $m_*(B) = 0$. To by byl spor s předpokladem $m(B) > 0$. Existuje tedy číslo n_1 a krychle $W_{\mathbf{m}}^{n_1}$ řádu n_1 tak, že $W_{\mathbf{m}}^{n_1} \subseteq \mathcal{K}_{n_1}(B)$.

Množina $W_{\mathbf{m}}^{n_1}$ je podle 4.4.8 kompaktní a tedy podle 4.5.4 existuje $\alpha_{\mathbf{m}} = \min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in W_{\mathbf{m}}^{n_1}\}$. Je $\alpha_{\mathbf{m}} > 0$, neboť v opačném případě by $W_{\mathbf{m}}^{n_1} \cap \overline{\mathbb{R}^k \setminus B} = \emptyset$, což by bylo ve sporu s inkluzí $W_{\mathbf{m}}^{n_1} \subseteq B^\circ$. Nyní podle 6.5.4, 6.5.8 a 6.6.2 platí

$$0 = \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{W_{\mathbf{m}}^{n_1}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{A \setminus W_{\mathbf{m}}^{n_1}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geq \alpha_{\mathbf{m}} m(W_{\mathbf{m}}^{n_1}) = \alpha_{\mathbf{m}} \frac{1}{2^{kn_1}} > 0,$$

což je spor. $\square$

Poznámka: Analogické tvrzení platí i pro nekladnou funkci.

6.6.7 Věta

Je-li funkce f integrovatelná na měřitelné množině A a funkce g je ohraničená na A a skoro všude na A platí $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$. Pak funkce g je integrovatelná na množině A a platí $\int_A g(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$.

D.: Buď $B \subseteq A$ taková, že $m(B) = 0$ a $f(\mathbf{x}) \neq g(\mathbf{x})$ pro $\mathbf{x} \in B$. Pak s využitím 6.5.9 a 6.6.1 dostaneme

$$\int_A g(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_B g(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{A \setminus B} g(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0 + \int_{A \setminus B} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_B f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{A \setminus B} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

$\square$

6.6.8 Věta

Je-li funkce f ohraničená na měřitelné množině A a skoro všude na A spojitá, pak je funkce f na množině A integrovatelná.

D.: Označme B množinu bodů nespojitosti funkce f . Podle předpokladu je B měřitelná a podle 6.1.14 je $m(A \setminus B) = m(A) - m(B) = m(A)$.

Funkce f je na množině $A \setminus B$ podle 6.6.3 integrovatelná a na množině B je integrovatelná podle 6.6.1.

Podle 6.5.9 je tedy f integrovatelná na množině $A = (A \setminus B) \cup B$. $\square$

6.7 Fubiniova věta

Budte $p, q \in \mathbb{N}$, $p + q = k$. Prostor $\mathbb{R}^k$ lze chápat jako součin prostorů $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Je-li $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^k$, pak $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_q)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$.

6.7.1 Definice

Buď $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Definujeme množiny

$$A_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A\} \text{ — řez množinou } A \text{ pro konstantní } \mathbf{x},$$

$$A_{\mathbf{x}}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : \text{existuje } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^q, \text{ že } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A\} \text{ — průmět množiny } A \text{ do prostoru } \mathbb{R}^p.$$

Označení: $m_p(B)$, resp. $m_q(C)$ — míra množiny $B \subseteq \mathbb{R}^p$, resp. $C \subseteq \mathbb{R}^q$, v prostoru $\mathbb{R}^q$, resp. $\mathbb{R}^q$.
Pro $A \subseteq \mathbb{R}^k$ je $m(A) = m_k(A)$.

6.7.2 Věta (Guido Fubini, 1879–1943)

Buď $A \subseteq \mathbb{R}^k$ měřitelná množina, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ funkce integrovatelná na množině A . Buďte $p, q \in \mathbb{N}$, $p + q = k$. Označme $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_q)$. Pak platí

$$\int_A f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{A_{\mathbf{x}}^\perp} \left(\int_{\overline{A_{\mathbf{x}}}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} = \int_{A_{\mathbf{x}}^\perp} \left(\overline{\int_{A_{\mathbf{x}}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}} \right) d\mathbf{x}.$$

D.: Buď nejprve A množina, která je sjednocením konečného počtu krychlových množin nultého řádu. Pokrytím $\mathcal{C}_n$ je pro každé $n \in \mathbb{N}$ konečný počet krychlových množin řádu n . Každou krychlovou množinu $Z_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^n$, $\mathbf{i} \in I$, $\mathbf{j} \in J$ řádu n v $\mathbb{R}^k$ lze považovat za kartézský součin $Z_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^n = X_{\mathbf{i}}^n \times Y_{\mathbf{j}}^n$ krychlových množin $X_{\mathbf{i}}^n$ řádu n v $\mathbb{R}^p$ a $Y_{\mathbf{j}}^n$ řádu n v $\mathbb{R}^q$. Přitom $\frac{1}{2^{kn}} = m(Z_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^n) = m(X_{\mathbf{i}}^n) m(Y_{\mathbf{j}}^n) = \frac{1}{2^{pn}} \frac{1}{2^{qn}}$. Zvolme $\xi \in A_{\mathbf{x}}^\perp$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^q$ a uvažujme funkci $f(\xi, \cdot) : A_\xi \rightarrow \mathbb{R}$ danou předpisem $\mathbf{y} \mapsto f(\xi, \mathbf{y})$. Položme

$$F(\mathbf{x}) = \int_{\overline{A_{\mathbf{x}}}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad G(\mathbf{x}) = \overline{\int_{A_{\mathbf{x}}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}}.$$

Pak je

$$F(\xi) \geq s_n(A_\xi, f(\xi, \cdot)) = \sum_{\mathbf{j} \in J} \inf \{f(\xi, \mathbf{y}) : \mathbf{y} \in Y_{\mathbf{j}}^n\} m_q(Y_{\mathbf{j}}^n).$$

Poněvadž pro $\xi \in X_{\mathbf{i}}^n$ platí $\inf \{f(\xi, \mathbf{y}) : \mathbf{y} \in Y_{\mathbf{j}}^n\} \geq \inf \{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in Z_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^n\}$, platí také nerovnost

$$F(\xi) \geq \sum_{\mathbf{j} \in J} \inf \{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in Z_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^n\} m(Y_{\mathbf{j}}^n).$$

Odtud plyne

$$\inf \{F(\xi) : \xi \in X_{\mathbf{i}}^n\} \geq \sum_{\mathbf{j} \in J} \inf \{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in Z_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^n\} m_q(Y_{\mathbf{j}}^n),$$

takže

$$\begin{aligned} s_n(A_{\mathbf{x}}^\perp, F) &\geq \sum_{\mathbf{i} \in I} \left(\sum_{\mathbf{j} \in J} \inf \{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in Z_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^n\} m_q(Y_{\mathbf{j}}^n) \right) m_q(X_{\mathbf{i}}^n) = \\ &= \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in I \times J} \inf \{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in Z_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^n\} m(Z_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^n) = s_n(A, f). \end{aligned}$$

Odtud limitním přechodem pro $n \rightarrow \infty$ dostaneme nerovnost

$$\int_{A_{\mathbf{x}}^\perp} F(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq \int_A f(\mathbf{z}) d\mathbf{z}.$$

Analogickým způsobem dokážeme nerovnost

$$\int_{A_{\mathbf{x}}^{\perp}} G(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int_A f(\mathbf{z}) d\mathbf{z}.$$

Poněvadž $F(\mathbf{x}) \leq G(\mathbf{x})$ pro každé $\mathbf{x} \in A_{\mathbf{x}}^{\perp}$, platí pro tato $\mathbf{x}$ nerovnosti

$$\int_{\overline{A_{\mathbf{x}}^{\perp}}} G(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq \int_{\overline{A_{\mathbf{x}}^{\perp}}} F(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq \int_A f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \geq \int_{A_{\mathbf{x}}^{\perp}} G(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq \int_{A_{\mathbf{x}}^{\perp}} F(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

z nichž plyne integrovatelnost funkcí F , G i dokazovaná rovnost.

Buď nyní $A \subseteq \mathbb{R}^k$ libovolná měřitelná množina a W množina popsaná v první části důkazu a obsahující množinu A . Definujme funkci g předpisem

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A, \\ 0, & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in W \setminus A. \end{cases}$$

Podle 6.1.13 je i $W \setminus A$ měřitelná množina a podle předchozí části důkazu, podle 6.6.1 a 6.5.9 je funkce g integrovatelná na množině A i na množině $W \setminus A$. Proto platí

$$\int_A f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_A g(\mathbf{z}) d\mathbf{z} + \int_{W \setminus A} g(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_W g(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{W_{\mathbf{x}}^{\perp}} \left(\int_{\overline{W_{\mathbf{x}}}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} = \int_{W_{\mathbf{x}}^{\perp}} \left(\int_{\overline{W_{\mathbf{x}}}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}.$$

Dále je

$$\int_{W_{\mathbf{x}}^{\perp}} \left(\int_{\overline{W_{\mathbf{x}}}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} = \int_{A_{\mathbf{x}}^{\perp} \cup (W_{\mathbf{x}}^{\perp} \setminus A_{\mathbf{x}}^{\perp})} \left(\int_{\overline{W_{\mathbf{x}}}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} = \int_{A_{\mathbf{x}}^{\perp}} \left(\int_{\overline{W_{\mathbf{x}}}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x},$$

neboť pro každé $\mathbf{x} \in W_{\mathbf{x}}^{\perp} \setminus A_{\mathbf{x}}^{\perp}$ je $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ a tedy podle 6.6.5 je i $\int_{\overline{W_{\mathbf{x}}}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0$ pro tato $\mathbf{x}$.

Pokračujeme v úpravách

$$\int_{A_{\mathbf{x}}^{\perp}} \left(\int_{\overline{W_{\mathbf{x}}}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} = \int_{A_{\mathbf{x}}^{\perp}} \left(\int_{A_{\mathbf{x}} \cup (\overline{W_{\mathbf{x}}} \setminus A_{\mathbf{x}})} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} = \int_{A_{\mathbf{x}}^{\perp}} \left(\int_{\overline{A_{\mathbf{x}}}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}.$$

Tím je dokázáno

$$\int_A f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{A_{\mathbf{x}}^{\perp}} \left(\int_{\overline{A_{\mathbf{x}}}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}.$$

Analogicky dokážeme

$$\int_A f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{A_{\mathbf{x}}^{\perp}} \left(\int_{\overline{A_{\mathbf{x}}}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}.$$

□

6.7.3 Poznámky

1. Z toho, že funkce f je integrovatelná na množině $A \subseteq \mathbb{R}^k$, neplyne, že tato funkce je integrovatelná v $\mathbb{R}^q$ na každé podmnožině množiny $A_{\mathbf{x}}$. Z věty 6.7.2 však plyne, že rozdíl horního a dolního integrálu je tak malý, že integrál z něho přes množinu $A_{\mathbf{x}}^{\perp}$ je nulový.
2. Ve větě 6.7.2 není podstatné to, že se za $\mathbf{x}$ bere $(x_1, x_2, \dots, x_p)$, tj. prvních p souřadnic. Stejně bychom mohli volit libovolných p přirozených čísel $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq k$ a položit $\mathbf{x} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p})$.

6.7.4 Důsledky

1. Buďte φ, ψ funkce spojité na intervalu $[a, b]$, $\varphi(x) < \psi(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Nechť

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

je měřitelná množina. Buď $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ funkce spojitá. Pak je

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

D.: $A_x = [\varphi(x), \psi(x)]$, $A_x^\perp = [a, b]$. Funkce $f(x, \cdot)$ je na množině A_x ohraničená a spojitá, tedy podle 6.6.8 je integrovatelná. $\square$

2. Buďte φ, ψ funkce spojité na intervalu $[a, b]$, $\varphi(x) < \psi(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Nechť množina $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ je měřitelná v $\mathbb{R}^2$. Dále buďte Φ, Ψ funkce spojité na množině A takové, že $\Phi(x, y) < \Psi(x, y)$ pro každé $(x, y) \in A$. Nechť množina

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, \Phi(x, y) \leq z \leq \Psi(x, y)\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), \Phi(x, y) \leq z \leq \Psi(x, y)\} \end{aligned}$$

je měřitelná v $\mathbb{R}^3$. Buď f funkce spojitá na množině B . Pak je

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int_{\Phi(x, y)}^{\Psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

D.:

$$\begin{aligned} \int_B f(x, y, z) dx dy dz &= \int_{B_{xy}^\perp} \left(\int_{B_{xy}} f(x, y, z) dz \right) dx dy = \int_{B_{xy}^\perp} \left(\int_{\Phi(x, y)}^{\Psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy = \\ &= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int_{\Phi(x, y)}^{\Psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx. \end{aligned}$$

$\square$

6.8 Transformace integrálu

6.8.1 Heuristická úvaha

Buď $A \subseteq \mathbb{R}^k$ měřitelná množina, $\mathcal{S}_n = \{D_1^n, D_2^n, \dots, D_m^n\}$ její pokrytí řádu n . Označme pro stručnost jednu libovolnou množinu z $\mathcal{S}_n$ symbolem D a buď $\mathbf{u}_0 \in D$. Dále nechť $G : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ je diferencovatelné zobrazení takové, že $G(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$.

Definujme lineární zobrazení $\tilde{G} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ předpisem $\tilde{G}(\mathbf{u}) = \mathbf{x}_0 + G'(\mathbf{u}_0)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)$, kde G' značí Jacobiho matici zobrazení G (sr. 5.7.4). Pak $\tilde{G}$ je nejlepší lineární aproximací zobrazení G (sr. 5.7.3). Je-li tedy množina D malá, budou se na ní zobrazení G a $\tilde{G}$ lišit málo, $G(\mathbf{u}) \approx \tilde{G}(\mathbf{u})$ pro $\mathbf{u} \in D$ a tedy také bude

$$m(G(D)) \approx m(\tilde{G}(D)).$$

Podle 6.2.3 (s příslušnou úpravou pro $\mathbb{R}^k$) je

$$m(\tilde{G}(D)) = |\det G'(\mathbf{u}_0)| m(D) = |J(G(\mathbf{u}_0))| m(D),$$

kde $J(G(\mathbf{u}_0))$ je Jacobián zobrazení G v bodě $\mathbf{u}_0$.

Buď $f : G(A) \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá funkce. Na malé množině $G(D)$ lze tuto funkci považovat za přibližně konstantní, $f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0)$ pro $\mathbf{x} \in G(D)$; na malé množině D lze považovat za přibližně konstantní funkci $f \circ G |J(G)|$, $f(G(\mathbf{u})) |J(G(\mathbf{u}))| \approx f(G(\mathbf{u}_0)) |J(G(\mathbf{u}_0))|$ pro $\mathbf{u} \in D$. Platí tedy přibližné rovnosti

$$\int_{G(D)} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \approx f(\mathbf{x}_0) m(G(D)) \approx f(G(\mathbf{u}_0)) |J(G(\mathbf{u}_0))| m(D) \approx \int_D f(G(\mathbf{u})) |J(G(\mathbf{u}))| \, d\mathbf{u}.$$

Je-li zobrazení G na množině A prosté, tj. když platí $J(G(\mathbf{u})) \neq 0$ pro $\mathbf{u} \in A$ (podle 5.7.7), pak

$$G(A) = G(D_1^n) \cup G(D_2^n) \cup \dots \cup G(D_m^n)$$

a toto sjednocení je disjunktní. Tedy podle 6.5.9 a předchozí přibližné rovnosti platí

$$\int_{G(A)} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \int_{G(D_i^n)} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^n \int_{G(D_i^n)} f(G(\mathbf{u})) |J(G(\mathbf{u}_0))| \, d\mathbf{u} = \int_A f(G(\mathbf{u})) |J(G(\mathbf{u}))| \, d\mathbf{u}.$$

6.8.2 Věta (o transformaci integrálu)

Buď $A \subseteq \mathbb{R}^k$ měřitelná množina, $G : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ diferencovatelné zobrazení, f funkce integrovatelná na množině $G(A)$. Nechť existuje množina $P \subseteq A$ taková, že $m(P) = 0$ a že pro zobrazení G platí:

- 1) G je prosté na množině $M \setminus P$,
- 2) $J(G(\mathbf{u})) \neq 0$ na množině $M \setminus P$.

Pak je funkce $f \circ G$ integrovatelná na množině A a platí

$$\int_{G(A)} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_A f(G(\mathbf{u})) |J(G(\mathbf{u}))| \, d\mathbf{u}.$$

D.: Viz např. M. Ráb: Riemannův integrál v $\mathbb{E}^n$, str. 70–74

nebo D. Krupka, J. Musilová: Integrální počet na euklidovských prostorech a diferencovatelných varietách, str. 75–79. $\square$

6.8.3 Transformace integrálu v $\mathbb{R}^2$ do polárních souřadnic

Zobrazení $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je dáno předpisem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \text{stručněji} \quad \begin{matrix} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{matrix}$$

$$J(G(r, \varphi)) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r \neq 0 \quad \text{pro } r \neq 0.$$

6.8.4 Transformace integrálu v $\mathbb{R}^3$ do cylindrických (válcových) souřadnic

Zobrazení $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je dáno předpisem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = G(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{stručněji} \quad \begin{matrix} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{matrix}$$

$$J(G(r, \varphi, z)) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \neq 0 \quad \text{pro } r \neq 0.$$

6.8.5 Transformace integrálu v $\mathbb{R}^3$ do sférických (kulových) souřadnic

Zobrazení $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je dáno předpisem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = G(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \text{stručněji} \quad \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \vartheta, \\ y &= r \sin \varphi \cos \vartheta, \\ z &= r \sin \vartheta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(G(r, \varphi, \vartheta)) &= \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \cos \vartheta & -r \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & 0 & r \cos \vartheta \end{vmatrix} = \\ &= \sin \vartheta \begin{vmatrix} -r \sin \varphi \cos \vartheta & -r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta \end{vmatrix} + r \cos \vartheta \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta \end{vmatrix} = \\ &= r^2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + r^2 \cos^3 \vartheta (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) = r^2 \cos \vartheta (\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) = r^2 \cos \vartheta \neq 0 \end{aligned}$$

pro $r \neq 0$ a $\vartheta \neq (2m+1)\frac{\pi}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$.

6.8.6 Transformace integrálu v $\mathbb{R}^k$ do sférických souřadnic

Zobrazení $G : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ je dáno předpisem

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix} = G(r, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{k-2}) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \vartheta_1 \cdots \cos \vartheta_{k-2} \\ r \sin \varphi \cos \vartheta_1 \cdots \cos \vartheta_{k-2} \\ r \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \cdots \cos \vartheta_{k-2} \\ \vdots \\ r \sin \vartheta_{k-3} \cos \vartheta_{k-2} \\ r \sin \vartheta_{k-2} \end{pmatrix},$$

$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi \cos \vartheta_1 \cdots \cos \vartheta_{k-2}, \\ x_2 &= r \sin \varphi \cos \vartheta_1 \cdots \cos \vartheta_{k-2}, \\ x_3 &= r \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \cdots \cos \vartheta_{k-2}, \\ &\vdots \\ x_{k-1} &= r \sin \vartheta_{k-3} \cos \vartheta_{k-2}, \\ x_k &= r \sin \vartheta_{k-2}. \end{aligned}$

stručněji

Označme

$$G = F_k = \begin{pmatrix} r f_1(\varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{k-2}) \\ r f_2(\varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{k-2}) \\ \vdots \\ r f_k(\varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{k-2}) \end{pmatrix};$$

přitom $f_1, \dots, f_k$ jsou trigonometrické polynomy. Jacobián zobrazení $G = F_k$ je

$$J(F_k) = \begin{vmatrix} f_1 & r \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} & r \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_1} & \cdots & r \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_{k-2}} \\ f_2 & r \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} & r \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_1} & \cdots & r \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_{k-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_k & r \frac{\partial f_k}{\partial \varphi} & r \frac{\partial f_k}{\partial \vartheta_1} & \cdots & r \frac{\partial f_k}{\partial \vartheta_{k-2}} \end{vmatrix}.$$

Při tomto označení je $J(F_2) = r$ (Jacobián polárních souřadnic, 6.8.3), $J(F_3) = r^2 \cos \vartheta = r^2 \cos \vartheta_1$ (Jacobián sférických souřadnic v $\mathbb{R}^3$, 6.8.5) a dále

$$F_{k+1} = \begin{pmatrix} r f_1(\varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{k-2}) \cos \vartheta_{k-1} \\ r f_2(\varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{k-2}) \cos \vartheta_{k-1} \\ \vdots \\ r f_k(\varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{k-2}) \cos \vartheta_{k-1} \\ r \sin \vartheta_{k-1} \end{pmatrix},$$

$$J(F_{k+1}) = \begin{vmatrix} f_1 \cos \vartheta_1 & r \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \cos \vartheta_{k-1} & r \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_1} \cos \vartheta_{k-1} & \cdots & r \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_{k-2}} \cos \vartheta_{k-1} & -r f_1 \sin \vartheta_{k-1} \\ f_2 \cos \vartheta_1 & r \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \cos \vartheta_{k-1} & r \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_1} \cos \vartheta_{k-1} & \cdots & r \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_{k-2}} \cos \vartheta_{k-1} & -r f_2 \sin \vartheta_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_k \cos \vartheta_1 & r \frac{\partial f_k}{\partial \varphi} \cos \vartheta_{k-1} & r \frac{\partial f_k}{\partial \vartheta_1} \cos \vartheta_{k-1} & \cdots & r \frac{\partial f_k}{\partial \vartheta_{k-2}} \cos \vartheta_{k-1} & -r f_k \sin \vartheta_{k-1} \\ \sin \vartheta_{k-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & r \cos \vartheta_{k-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{k+3} r (\sin \vartheta_{k-1})^2 (\cos \vartheta_{k+1})^{k-1} \begin{vmatrix} r \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} & r \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_1} & \cdots & r \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_{k-2}} & f_1 \\ r \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} & r \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_1} & \cdots & r \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_{k-2}} & f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r \frac{\partial f_k}{\partial \varphi} & r \frac{\partial f_k}{\partial \vartheta_1} & \cdots & r \frac{\partial f_k}{\partial \vartheta_{k-2}} & f_k \end{vmatrix} +$$

$$+ r (\cos \vartheta_{k-1})^{k+1} \begin{vmatrix} f_1 & r \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} & r \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_1} & \cdots & r \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_{k-2}} \\ f_2 & r \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} & r \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_1} & \cdots & r \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_{k-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_k & r \frac{\partial f_k}{\partial \varphi} & r \frac{\partial f_k}{\partial \vartheta_1} & \cdots & r \frac{\partial f_k}{\partial \vartheta_{k-2}} \end{vmatrix} =$$

$$= r (\sin \vartheta_{k-1})^2 (\cos \vartheta_{k+1})^{k-1} J(F_k) + r (\cos \vartheta_{k-1})^{k+1} J(F_k) = r (\cos \vartheta_{k-1})^{k-1} J(F_k).$$

Z této rekurentní formule plyne

$$J(F_4) = r^3 \cos \vartheta_1 \cos^2 \vartheta_2, \quad J(F_5) = r^4 \cos \vartheta_1 \cos^2 \vartheta_2 \cos^3 \vartheta_3, \quad \dots$$

$$\dots, J(F_k) = r^{k-1} \cos \vartheta_1 \cos^2 \vartheta_2 \cos^3 \vartheta_3 \cdots \cos^{k-2} \vartheta_{k-2}.$$

6.9 Integrály závislé na parametru

Buďte $p, q \in \mathbb{N}$, $p + q = k$, $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_q) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Budte dále $B \subseteq \mathbb{R}^q$, $A \subseteq \mathbb{R}^p$ měřitelné množiny. Necht pro všechna $\mathbf{y} \in B$ je funkce $f(\cdot, y)$ integrovatelná na A . Definujme funkci $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$g(\mathbf{y}) = \int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}.$$

6.9.1 Věta

Necht funkce f je spojitá na množině $A \times B$, kde $A \subseteq \mathbb{R}^p$, $B \subseteq \mathbb{R}^q$ jsou kompaktní měřitelné množiny. Pak je funkce $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$g(\mathbf{y}) = \int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}$$

spojitá na B , tj.

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0} \int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} = \int_A \left(\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) d\mathbf{x}.$$

D.: Nejprve poznamenejme, že podle 4.5.4 a 4.4.7 je funkce f ohraničená a tedy podle 6.6.3 integrovatelná. To znamená, že funkce g je zavedena korektně.

Je-li $m(A) = 0$, pak podle 6.6.1 je $g(\mathbf{y}) = 0$ pro každé $\mathbf{y} \in B$ a tvrzení je triviální.

Necht $m(A) > 0$. Buď $\mathbf{y}_0 \in B$ libovolný bod a $\varepsilon > 0$ libovolné číslo. Položme

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2m(A)}.$$

Poněvadž funkce f je spojitá na kompaktní množině, je zde podle 4.5.8 spojitá stejnoměrně. To znamená, že k $\varepsilon_1 > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$|f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) - f(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)| < \varepsilon_1$$

pro všechna $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \in A \times B$ takové, že $\varrho((\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)) < \delta$. Odtud s využitím 6.5.3, 6.5.5 a 6.5.4 dostaneme, že pro libovolné $\mathbf{y} \in B$ takové, že $\varrho(\mathbf{y}, \mathbf{y}_0) < \delta$, platí

$$\begin{aligned} |g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{y}_0)| &= \left| \int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} - \int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) d\mathbf{x} \right| = \left| \int_A (f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)) d\mathbf{x} \right| \leq \\ &\leq \int_A |f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)| d\mathbf{x} \leq \int_A \varepsilon_1 d\mathbf{x} = \varepsilon_1 m(A) = \frac{\varepsilon}{2m(A)} m(A) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

To znamená, že funkce g je spojitá v bodě $\mathbf{y}_0$. $\square$

6.9.2 Věta

Necht $A \subseteq \mathbb{R}^p$ je kompaktní měřitelná množina a necht funkce f je spojitá na množině $A \times [c, d]$ a má na této množině spojitou parciální derivaci podle poslední proměnné. Pak funkce $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$g(y) = \int_A f(\mathbf{x}, y) d\mathbf{x}$$

má na intervalu (c, d) spojitou derivaci a platí

$$g'(y) = \int_A \frac{\partial f(\mathbf{x}, y)}{\partial y} d\mathbf{x}, \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial}{\partial y} \int_A f(\mathbf{x}, y) d\mathbf{x} = \int_A \frac{\partial f(\mathbf{x}, y)}{\partial y} d\mathbf{x}.$$

D.: Buď $y \in [c, d]$ libovolné číslo. Definujme funkci $\varphi : A \times [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$, kde $\delta = \min\{d - y, y - c\}$, předpisem

$$\varphi(\mathbf{x}, y) = \begin{cases} \frac{f(\mathbf{x}, y + h) - f(\mathbf{x}, y)}{h}, & h \neq 0 \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}, y)}{\partial y}, & h = 0. \end{cases}$$

Ze spojitosti parciální derivace f_y plyne spojitost funkce φ . Podle 6.9.1 je spojitá funkce $\gamma : [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$, definovaná jako

$$\gamma(h) = \int_A \varphi(\mathbf{x}, h) d\mathbf{x},$$

tedy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \gamma(h) = \int_A \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(\mathbf{x}, h) d\mathbf{x} = \int_A \frac{\partial f(\mathbf{x}, y)}{\partial y} d\mathbf{x}.$$

Odtud dále plyne, že

$$\begin{aligned} g'(y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(y + h) - g(y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_A \frac{f(\mathbf{x}, y + h) - f(\mathbf{x}, y)}{h} d\mathbf{x} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_A \varphi(\mathbf{x}, h) d\mathbf{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \gamma(h) = \int_A \frac{\partial f(\mathbf{x}, y)}{\partial y} d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

tj. funkce g má v bodě y derivaci. Spojitost této derivace na intervalu (c, d) plyne ze spojitosti parciální derivace f_y na $A \times [c, d]$ a věty 6.9.1. $\square$

6.9.3 Věta

Nechť funkce f je spojitá na množině $A \times B$, kde $A \subseteq \mathbb{R}^p$, $B \subseteq \mathbb{R}^q$ a množiny A , B , $A \times B$ jsou měřitelné. Pak platí

$$\int_B \left(\int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y} = \int_A \left(\int_B f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}.$$

D.: Ze spojitosti funkce f plyne, že $f(\cdot, \mathbf{y})$ je integrovatelná na A pro každé $\mathbf{y} \in B$ a $f(\mathbf{x}, \cdot)$ je integrovatelná na B pro každé $\mathbf{x} \in A$. Pro $\mathbf{x} \in A$ je

$$(A \times B)_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A \times B\} = B,$$

$$(A \times B)_{\mathbf{x}}^{\perp} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : (\exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}^q) (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A \times B\} = A.$$

Z Fubiniovy věty 6.7.2 a z integrability funkce $f(\mathbf{x})$ pro každé $\mathbf{x} \in A$ nyní plyne

$$\int_{A \times B} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = \int_A \left(\int_B f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}.$$

Analogicky ukážeme, že

$$\int_{A \times B} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = \int_B \left(\int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y}.$$

Z těchto dvou rovností plyne tvrzení. $\square$

6.9.4 Věta

Nechť funkce f je spojitá na $(a, b) \times (c, d) \subseteq \mathbb{R}^2$ a má zde spojitou parciální derivaci podle druhé proměnné. Nechť φ, ψ jsou funkce definované na intervalu (c, d) , které zde mají derivaci a platí

$$0 < \varphi(y) < b, \quad 0 < \psi(y) < b$$

pro každé $y \in (c, d)$. Pak funkce $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$g(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$$

má derivaci na intervalu (c, d) a platí

$$g'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y).$$

D.: Definujme funkci $h : (c, d)^3 \rightarrow \mathbb{R}$ vztahem

$$h(y, u, v) = \int_u^v f(x, y) dx.$$

Podle 6.9.2 je

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \int_u^v \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$$

a podle věty o derivaci integrálu jako funkce horní meze 3.4.3 je

$$\frac{\partial h}{\partial v} = f(v, y), \quad \frac{\partial h}{\partial u} = -f(u, y).$$

Ztěchto vzorců přímo plyne, že funkce h je třídy C^1 a podle věty o derivaci složené funkce 5.4.1 platí

$$\frac{dh}{dy} = h_y + h_u \frac{\partial u}{\partial y} + h_v \frac{\partial v}{\partial y} = \int_u^v \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx - f(u, y)u' + f(v, y)v'.$$

Odtud plyne dokazovaná formule, neboť $g(y) = h(y, \varphi(y), \psi(y))$. $\square$

6.10 Aplikace Riemannova integrálu

6.10.1 Míra množiny — plocha obrazce, objem tělesa

$$m(A) = \int_A dx$$

6.10.2 Aplikace v mechanice

Buď $A \subseteq \mathbb{R}^k$ kompaktní měřitelná množina, $\rho : A \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá funkce. Fyzikálně lze A chápat jako těleso mající v bodě $\mathbf{x}$ hustotu $\rho(\mathbf{x})$. V mechanice mají základní význam pojmy:

- Hmotnost m tělesa A

$$m = \int_A \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

V rovině:

- statické momenty M_x, M_y rovinného tělesa vzhledem k osám x a y

$$M_x = \iint_A y\rho(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad \text{a} \quad M_y = \iint_A x\rho(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

- momenty setrvačnosti J_x, J_y rovinného tělesa vzhledem k osám x a y

$$J_x = \iint_A y^2\rho(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad \text{a} \quad J_y = \iint_A x^2\rho(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

- těžiště $T = (x_0, y_0)$ rovinného tělesa

$$x_0 = \frac{M_y}{m}, \quad y_0 = \frac{M_x}{m}.$$

V prostoru

- statické momenty tělesa vzhledem k souřadným osám

$$M_{yz} = \iiint_A x\rho(x, y, z)dxdydz, \quad M_{zx} = \iiint_A y\rho(x, y, z)dxdydz, \quad M_{xy} = \iiint_A z\rho(x, y, z)dxdydz,$$

- momenty setrvačnosti tělesa vzhledem k souřadným osám

$$J_x = \iiint_A (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz, \quad J_y = \iiint_A (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz,$$

$$J_z = \iiint_A (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dxdydz,$$

- těžiště $T = (x_0, y_0, z_0)$ tělesa

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_0 = \frac{M_{zx}}{m}, \quad z_0 = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Funkce Γ

6.10.3 Poznámky

1. Nevlastní integrál $\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ absolutně konverguje pro každé $x > 0$.

D.: Je-li $x \geq 1$, integrál $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ není nevlastní.

Je-li $x < 1$, vezmeme $\delta \in (0, x)$. Pak $\lim_{t \rightarrow 0+} t^{1-\delta} |e^{-t}t^{x-1}| = \lim_{t \rightarrow 0+} e^{-t}t^{x-\delta} = 0$ a podle limitního srovnávacího kritéria pro nevlastní integrály druhého druhu 3.5.15 a vzhledem k tomu, že nevlastní integrál $\int_0^1 t^{-k}dt$ konverguje pro $k < 1$ podle 3.5.12, také nevlastní integrál $\int_0^1 |e^{-t}t^{x-1}| dt$ konverguje. Dále je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ((x+1) \ln t - t) = \lim_{\tau \rightarrow 0+} \left((x+1) \ln \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau} \right) = - \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{(x+1)\tau \ln \tau + 1}{\tau} = -\infty,$$

neboť podle de l'Hospitalova pravidla 2.3.6 platí

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+} \tau \ln \tau = \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{\ln \tau}{\frac{1}{\tau}} = \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{\tau}}{-\frac{1}{\tau^2}} = - \lim_{\tau \rightarrow 0+} \tau = 0,$$

takže podle věty o limitě složené funkce 1.6.8 dostaneme

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 |e^{-t} t^{x-1}| = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} t^{x+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(x+1) \ln t - t} = 0 < \infty.$$

Podle limitního srovnávacího kritéria pro nevlastní integrály prvního druhu 3.5.5 a z toho, že podle 3.5.2.1 nevlastní integrál $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ konverguje, nyní dostáváme, že také integrál $\int_1^{\infty} |e^{-t} t^{x-1}| dt$ konverguje.

□

2. Pro $x > 0$ položme

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (6.2)$$

Pro každé $x > 0$ a každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ pak platí

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1) \cdots (x+n)}. \quad (6.3)$$

D.: Úplnou indukcí:

S využitím de l'Hospitalova pravidla 2.3.6 vidíme, že platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} t^x = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^x}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x t^{x-1}}{e^t} = \cdots = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(x-1) \cdots (x-[x]) t^{x-[x]-1}}{e^t} = 0;$$

přitom $[x]$ značí celou část z čísla x . Nyní integraci „per partes“ dostaneme

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = -[e^{-t} t^x]_{t=0}^{\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x \Gamma(x),$$

takže (6.3) platí pro $n = 0$.

Podobně $\Gamma(x+n+2) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x+n+1} dt = -[e^{-t} t^{x+n+1}]_{t=0}^{\infty} + (x+n+1) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x+n} dt = (x+n+1) \Gamma(x+n+1)$, což je indukční krok. □

Podle (6.2) je

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -[e^{-t}]_0^{\infty} = 1. \quad (6.4)$$

Z (6.3) nyní pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ plyne

$$1 = \Gamma(1) = \frac{\Gamma(n+2)}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)} = \frac{\Gamma(n+2)}{(n+1)!}, \quad \text{tj. } \Gamma(n+2) = (n+1)!,$$

tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\Gamma(n) = (n-1)!$.

6.10.4 Definice

Funkce Γ je pro každé $x > 0$ definována vztahem (6.2), pro $x < 0$, $x \notin \mathbb{Z}$ je funkce Γ definována vztahem (6.3), kde za n vezmeme $[-x] = -[x] - 1$, t.j.

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x-[x])}{x(x+1) \cdots (x-[x]-1)}.$$

$\text{Dom } \Gamma = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

6.10.5 Věta

Pro každé $x \in \text{Dom } \Gamma$ platí

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{neboli} \quad \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$$

a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\Gamma(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-n)\Gamma(x-n).$$

D.: Pro $x > 0$ byl první vztah dokázán v 6.10.3.2, pro $x \in (-1, 0)$ je podle definice $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$, což je první vztah a pro $x < -1$ je

$$x\Gamma(x) = x \frac{\Gamma(x-[x])}{x(x+1)\cdots(x-[x]-1)} = \frac{\Gamma(x+1-[x+1])}{(x+1)(x+2)\cdots(x+1-[x+1]-1)} = \Gamma(x+1),$$

což je opět první vztah. Ten druhý z něho plyne indukci. $\square$

Známe-li $\Gamma(x)$ pro $x \in (0, 1]$, lze podle věty 6.10.5 vypočítat $\Gamma(x)$ pro jakékoliv $x \in \text{Dom } \Gamma$. Již víme, že $\Gamma(1) = 1$.

6.10.6 Věta

Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \Gamma(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \Gamma(x) = -\infty.$$

D.: Buď $\varepsilon \in (0, 1)$ libovolné číslo. Poněvadž pro $t > 0$ a $x > 0$ je $e^{-t}t^{x-1} > 0$, platí

$$\Gamma(x) = \int_0^\varepsilon e^{-t}t^{x-1}dt + \int_\varepsilon^1 e^{-t}t^{x-1}dt + \int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt > \int_\varepsilon^1 e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Dále podle 6.9.1 dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \int_\varepsilon^1 e^{-t}t^{x-1}dt = \int_\varepsilon^1 \left(\lim_{x \rightarrow 0+} e^{-t}t^{x-1} \right) dt = \int_\varepsilon^1 e^{-t}t^{-1}dt.$$

Pro $t \in [\varepsilon, 1]$ je $e^{-t} \geq e^{-1}$, takže podle 3.3.6 platí

$$\int_\varepsilon^1 e^{-t}t^{-1}dt \geq \frac{1}{e} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{t}dt = -\frac{1}{e} \ln \varepsilon.$$

Celkem tedy je

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \Gamma(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0+} \int_\varepsilon^1 e^{-t}t^{x-1}dt = \int_\varepsilon^1 e^{-t}t^{-1}dt \geq -\frac{1}{e} \ln \varepsilon$$

pro každé $\varepsilon > 0$. Limitním přechodem $\varepsilon \rightarrow 0+$ dostaneme z této nerovnosti $\lim_{x \rightarrow 0+} \Gamma(x) = \infty$.

Dále je

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \Gamma(1) \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

$\square$

Na závěr bez důkazu uvedeme, že platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}}{\Gamma(x)} = 1,$$

takže pro velká n lze psát

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Tento vzorec se nazývá *Stirlingova formule*.

Funkce B (beta)

6.10.7 Poznámky

1. Nevlastní integrál $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ konverguje pro libovolné $x \geq a > 0$ a libovolné $y \geq b > 0$.

D.: Pro libovolné $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ podle 3.3.10 platí

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt = \mu(\varepsilon) \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} t^{a-1}dt = \mu(\varepsilon) \left[\frac{t^a}{a} \right]_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}$$

kde $\mu(\varepsilon)$ leží mezi čísly $(1-\varepsilon)^{b-1}$ a $(\frac{1}{2})^{b-1}$, takže

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(\varepsilon) \left(\frac{1}{a2^a} - \frac{\varepsilon^a}{a} \right) \leq \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max \left\{ (1-\varepsilon)^{b-1}, \left(\frac{1}{2} \right)^{b-1} \right\} \left(\frac{1}{a2^a} - \frac{\varepsilon^a}{a} \right) = \max \left\{ 1, \left(\frac{1}{2} \right)^{b-1} \right\} \frac{1}{a2^a} < \infty. \end{aligned}$$

Analogicky ukážeme, že také integrál

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$$

konverguje. Tvzení nyní plyne ze srovnávacího kriteriia pro nevlastní integrály druhého druhu 3.5.14, neboť $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \leq t^{a-1}(1-t)^{b-1}$. $\square$

2. Nevlastní integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$$

konverguje a platí

$$\int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

D.: Substitucí $u = \frac{t}{1-t}$ dostaneme

$$\int_1^c \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{c}{1+c}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

Limita pravé strany této rovnosti pro $c \rightarrow \infty$ existuje, neboť podle prvního tvrzení konverguje integrál $\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$. Je tedy

$$\int_1^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} = \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

Analogicky ukážeme, že platí

$$\int_0^1 \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

□

6.10.8 Definice

Funkce B je pro všechna $x > 0$, $y > 0$ definována předpisem

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

6.10.9 Věta

Pro všechna $x > 0$, $y > 0$ platí $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

D.: Buď $v > 0$. Pak substitucí $t = vu$ v integrálu definujícím funkci Γ pro kladné hodnoty argumentu dostaneme

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = v \int_0^{\infty} e^{-vu} (vu)^{x-1} du = v^x \int_0^{\infty} e^{-vu} u^{x-1} du,$$

tedy

$$\frac{\Gamma(x)}{v^x} = \int_0^{\infty} e^{-vu} u^{x-1} du. \quad (6.5)$$

Když v této rovnosti budeme psát $x+y$ místo x a $1+v$ místo v , dostaneme

$$\frac{\Gamma(x+y)}{(1+v)^{x+y}} = \int_0^{\infty} e^{-(1+v)u} u^{x+y-1} du.$$

Tuto rovnici vynásobíme v^{x-1} :

$$\Gamma(x+y) \frac{v^{x-1}}{(1+v)^{x+y}} = v^{x-1} \int_0^{\infty} e^{-(1+v)u} u^{x+y-1} du.$$

Podle 6.10.7.2. existuje nevlastní integrál z levé strany poslední rovnosti (integrujeme podle proměnné v v mezích od 0 do ∞) a je roven $\Gamma(x+y)B(x, y)$. Proto existuje i nevlastní integrál z pravé strany. Upravíme ho s využitím (6.5):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} v^{x-1} \left(\int_0^{\infty} e^{-(1+v)u} u^{x+y-1} du \right) dv &= \int_0^{\infty} e^{-u} u^{x+y-1} \left(\int_0^{\infty} v^{x-1} e^{-uv} dv \right) du = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-u} u^{x+y-1} \frac{\Gamma(x)}{u^x} du = \Gamma(x) \int_0^{\infty} e^{-u} u^{y-1} du = \Gamma(x)\Gamma(y). \end{aligned}$$

Celkem tedy máme $\Gamma(x+y)B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)$, což je ekvivalentní s dokazovanou rovností. □

Substitucí $t = \sin u$ dostaneme

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin u \cos u}{\sin u \cos u} du = \pi.$$

Podle 6.10.9 je $\pi = \frac{(\Gamma(\frac{1}{2}))^2}{\Gamma(1)}$, takže podle (6.4) dostaneme

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Odtud také plyne (použijeme substituci $x = \sqrt{t}$)

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Integrál na levé straně se nazývá *Laplaceův*.

6.11 Cvičení

- 1) Zaměňte pořadí integrace: $\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx \right) dy$.
- 2) Dvojný integrál $\iint_{x^2+y^2 \leq x} f\left(\frac{y}{x}\right) dx dy$ vyjádřete pomocí integrálu jednoduchého.
- 3) Vypočítejte $\iint_A f(x, y) dx dy$, jestliže $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq A, b \leq y \leq B\}$, $f(x, y) = F_{xy}(x, y)$.
- 4) $\iint_A \frac{dx dy}{\sqrt{4-x}}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$.
- 5) $\iint_A (x^2 + y^2) dx dy$, A je vnitřek kružnice $x^2 + y^2 = 2ax$.
- 6) $\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy \right) dx$, $a > 0$.
- 7) $\iint_{x^2 \leq y \leq 4} \sqrt{[y-x^2]} dx dy$; $[a]$ je celá část čísla a .
- 8) Vypočítejte míru množiny $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x + y < 1\}$.
- 9) Vypočítejte souřadnice těžiště homogenního rovinného tělesa ohraničeného čarami

$$y^2 = 4x + 4, \quad y^2 = -2x + 4.$$

- 10) Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose x homogenního rovinného tělesa ohraničeného čarami

$$x + y = 2, \quad x = 2, \quad y = 2.$$

- 11) Zaměňte pořadí integrace: $\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$.
- 12) Trojnásobný integrál $\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{x+y} f(z) dz \right) dy \right) dx$ nahraďte integrálem jednoduchým.
- 13) $\iiint_A \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$.

14) $\iiint_A \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1\}$.

15) $\iiint_A z dx dy dz$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, z \leq v, z^2 \geq \frac{v^2}{R^2}(x^2 + y^2)\}$.

16) $\iiint_A z^2 dx dy dz$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz\}$.

17) $\iiint_A (x + y + z)^2 dx dy dz$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2az, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2\}$.

18) Vypočítejte objem tělesa $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1, x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$.

19) Jak mnoho kapaliny zůstane v nádobě válcového tvaru výšky v , jejíž základna má poloměr r , nakloníme-li ji tak, že hladina kapaliny prochází středem základny?

20) Vypočítejte souřadnice těžiště části elipsoidu $x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^3 \leq 1$ ležící v prvním oktantu.

Výsledky: 1) $\int_{-1}^0 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x, y) dy \right) dx$ 2) $\frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi f(\operatorname{tg} \varphi) d\varphi$

3) $F(A, B) + F(a, b) - F(a, B) - F(A, b)$ 4) $\frac{32}{3}$ 5) $\frac{3\pi a^4}{2}$ 6) $\frac{\pi a^3}{6}$ 7) $\frac{16}{3}(1 + \sqrt{3}) - 4\sqrt{2}$

8) $\frac{1}{4}(3\pi + 2)$ 9) $(\frac{2}{5}, 0)$ 10) 4

11) $\int_{-1}^1 \left(\int_{|x|}^1 \left(\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x, y, z) dy \right) dz \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{-z}^z \left(\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz$

12) $\frac{1}{2} \int_0^1 \left(2f(z) + (1 - 2z)f(z + 1) + z^2(f(z + 1) - f(z)) \right) dz$ 13) $\frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right)$ 14) $\frac{4}{5} \pi abc$ 15) $\frac{\pi}{4} R^2 v^2$

16) $\frac{59}{480} \pi R^5$ 17) $\frac{\pi a^5}{5} (18\sqrt{3} - \frac{97}{6})$ 18) $\frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{6}$ 19) $\frac{2}{3} r^2 v$ 20) $(\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8})$