Obsah

Část I

Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné

Kapitola 1

Prekalkulus

1.1 Reálná čísla

- Přirozená čísla: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ Dospějeme k nim při počítání prvků nějaké množiny. Lze na nich definovat základní početní operace, uspořádání.
- Celá čísla: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ Doplnění množiny $\mathbb{N}$ tak, aby operace odčítání měla vždy výsledek.
- Racionální čísla: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ Doplnění množiny $\mathbb{Z}$ tak, aby operace dělení měla vždy výsledek.
- Iracionální čísla: $\mathbb{I}$ Čísla, která není možno vyjádřit ve tvaru $\frac{m}{n}$, kde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

Iracionální čísla potřebujeme. Např. $\log_{10} 3 \in \mathbb{I}$.

D.: Sporem. Připusťme, že $\log_{10} 3 = \frac{m}{n}$. Pak

$$\begin{aligned} 10^{\frac{m}{n}} &= 3 \\ 10^m &= 3^n \\ 2^m 5^m &= 3^n \end{aligned}$$

Dostali jsme dva různé rozklady jednoho čísla na prvočinitele. To je spor. □

Nebo $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$.

D.: Sporem. Připusťme, že $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Pak

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{m^2}{n^2} \\ 2n^2 &= m^2 \end{aligned}$$

V rozkladu na prvočinitele čísla stojícího na levé straně rovnosti je 2 v liché mocnině, v rozkladu na prvočinitele čísla stojícího na pravé straně rovnosti (tedy téhož čísla) je 2 v sudé mocnině. To je spor. □

1.1.1 Definice

Buď M množina, na níž je definováno uspořádání $\leq$. (Uspořádání je binární relace, která je

(i) reflexivní: $(\forall a \in M)\,(a \leq a)$

(ii) antisymetrická: $(\forall a, b \in M)\,(a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = b)$

(iii) transitivní: $(\forall a, b, c \in M)\,(a \leq b,\ b \leq c \Rightarrow a \leq c)$)

Buď $a \in M$, $A \subseteq M$. Řekneme, že a je *horní* (resp. *dolní*) *závora množiny A v množině M*, jestliže $x \leq a$ (resp. $a \leq x$) pro každé $x \in A$. Řekneme, že množina A je *ohraničená shora* (resp. *zdola*), jestliže existuje její horní (resp. dolní) závora. Řekneme, že množina A je *ohraničená*, je-li ohraničená shora i zdola.

1.1.2 Příklady

1. Množina $A = \{1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, ...\}$ je ohraničená zdola (dolní závora je např. 1) a není ohraničená shora: Při označení $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ je

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_4 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} > 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = 1 + \tfrac{2}{2} \\ a_8 &= a_4 + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} > 1 + \tfrac{2}{2} + \tfrac{4}{8} = 1 + \tfrac{3}{2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

   Indukcí lze dokázat, že $a_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$ a číslo $1 + \frac{n}{2}$ může být libovolně velké.

2. Množina $B = \{1, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}, ...\}$ je ohraničená shora, $b \le \frac{\pi^2}{6}$ pro každé $b \in B$. (Bude dokázáno později.)

1.1.3 Definice

Buď $A \subseteq M$, kde M je množina, na níž je definováno uspořádání $\le$. Řekneme, že $a \in A$ je *maximum* nebo *největší prvek* (*minimum* nebo *nejmenší prvek*) a píšeme $a = \max A$ ($a = \min A$), jestliže pro každé $x \in A$ platí $x \le a$ ($a \le x$).

1.1.4 Definice

Buď M množina, na níž je definováno uspořádání $\le$ a buď $A \subseteq M$. Řekneme, že $a \in M$ je *supremum* množiny A, jestliže je nejmenší horní závorou množiny A, t.j. jestliže platí

(s1) $(\forall x \in A)\,(x \le a)$,

(s2) $((\forall x \in A)\,(x \le b)) \Rightarrow a \le b$.

Píšeme $a = \sup A$.

1.1.5 Definice

Buď M množina, na níž je definováno uspořádání $\le$ a buď $A \subseteq M$. Řekneme, že $a \in M$ je *infimum* množiny A, jestliže je největší dolní závorou množiny A, t.j. jestliže platí

(i1) $(\forall x \in A)\,(a \le x)$,

(i2) $((\forall x \in A)\,(b \le x)) \Rightarrow b \le a$.

Píšeme $a = \inf A$.

1.1.6 Poznámky

1. Podmínku (s2) v 1.1.4 lze nahradit podmínkou

   (s2*) $(p \in M,\, p < a) \Rightarrow (\exists x \in A)\,(p < x)$.

   ($p < a$ je definováno jako $p \le a$ a současně $p \ne a$; v dalším budeme používat i symboly $\ge$, $>$.)

   D.: Nechť $a \in M$ splňuje (s2) a nechť $p \in M$, $p < a$. Pak p není horní závora množiny A (jinak by podle (s2) bylo $a \le p$). Odtud plyne, že existuje $x \in A$ takové, že $x > p$, tedy platí (s2*).
   Nechť $a \in M$ splňuje (s2*) a buď $b \in M$ horní závora množiny A. Kdyby $b < a$, pak by existovalo $x \in A$ takové, že $b < x$ a tedy b by nebyla horní závora množiny A. Je tedy $a \le b$. $\square$

2. Analogicky lze dokázat, že podmínku (i2) v 1.1.5 lze nahradit podmínkou

   (i2*) $(p \in M,\, p > a) \Rightarrow (\exists x \in A)\,(p > x)$.

3. Libovolná $A \subseteq M$ má nejvýše jedno supremum a nejvýše jedno infimum.

D.: Nechť $a = \sup A$, $b = \sup A$. b je podle (s1) horní závora množiny A, tedy $a \le b$ podle (s2). Analogicky a je horní závora A, tedy $b \le a$. Z antisymetrie relace $\le$ plyne $a = b$.

Analogicky se ukáže platnost tvrzení pro infimum. □

4. Jestliže existuje $\max A$ ($\min A$), pak existuje také $\sup A$ ($\inf A$) a platí $\sup A = \max A$ ($\inf A = \min A$).

D.: Nechť $a = \max A$.

a splňuje (s1) přímo podle definice maxima 1.1.3

Nechť b je horní závora množiny A. Pak $b \ge x$ pro každé $x \in A$, zejména tedy $b \ge a \in A$. Což znamená, že platí (s2).

Tvrzení pro infimum a minimum se dokáže analogicky. □

1.1.7 Definice

Množina reálných čísel je množina $\mathbb{R}$, na níž jsou definovány dvě binárním operace $+$ (sčítání), $\cdot$ (násobení) a jedna binární relace $<$ (menší než), které splňují podmínky

(R1) pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí $a + b = b + a$ (komutativní zákon pro sčítání)

(R2) pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $(a + b) + c = a + (b + c)$ (asociativní zákon pro sčítání)

(R3) existuje prvek $0 \in \mathbb{R}$ takový, že pro všechna $a \in \mathbb{R}$ platí $a + 0 = a$ (existence neutrálního prvku vzhledem ke sčítání)

(R4) ke každému $a \in \mathbb{R}$ existuje prvek $-a \in \mathbb{R}$ takový, že $a + (-a) = 0$ (existence opačného prvku)

(R5) pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí $a \cdot b = b \cdot a$ (komutativní zákon pro násobení)

(R6) pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (asociativní zákon pro násobení)

(R7) existuje prvek $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$ takový, že pro všechna $a \in \mathbb{R}$ platí $a \cdot 1 = a$ (existence neutrálního prvku vzhledem k násobení)

(R8) ke každému $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ existuje prvek $a^{-1} \in \mathbb{R}$ takový, že $a \cdot a^{-1} = 1$ (existence inversního prvku)

(R9) pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (distributivní zákon)

(R10) každé dva prvky z množiny $\mathbb{R}$ jsou srovnatelné, podrobněji: každá dvojice prvků $a, b \in \mathbb{R}$ splňuje právě jeden ze vztahů $a < b$, $a = b$, $b < a$ (zákon trichotomie)

(R11) jestliže pro $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $a < b$ a $b < c$, pak také $a < c$ (transitivita relace $<$)

(R12) jestliže pro $a, b \in \mathbb{R}$ platí $a < b$, pak pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $a + c < b + c$ (monotonie vzhledem ke sčítání)

(R13) jestliže pro $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $a < b$ a $0 < c$, pak $a \cdot c < b \cdot c$ (monotonie vzhledem k násobení)

(R14) je-li M neprázdná shora (zdola) ohraničená podmnožina množiny $\mathbb{R}$, pak existuje $\sup M \in \mathbb{R}$ ($\inf M \in \mathbb{R}$)

1.1.8 Poznámky

1. (R1) – (R4) a (R5) – (R8) jsou axiomy komutativní grupy

   (R1) – (R9) jsou axiomy pole

   (R1) – (R13) jsou axiomy uspořádaného pole

   (R1) – (R14) jsou axiomy spojitě uspořádaného pole

   Existuje jediné (až na isomorfismus) uspořádané pole. Axiom (R14) se nazývá axiom spojitosti.

2. Přímka, na níž je zvolen počátek (obraz reálného čísla 0), jednotková délka a orientace (obraz čísla 1) se nazývá *číselná osa*. Existuje prosté a vzájemně jednoznačné zobrazení množiny reálných čísel na číselnou osu.

3. Druhá část axiomu (R14) (existence infima) je důsledkem první části a ostatních axiomů.

D.: Nejdříve ukážeme, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ je $-(-a) = a$. Vyjdeme z (R4):

$$\begin{array}{rcll} (-a)+(-(-a)) & = & 0 & / \text{ přičteme } a \text{ zleva} \\ a+((-a)+(-(-a))) & = & a+0 & / \text{ (R2), (R3)} \\ (a+(-a))+(-(-a)) & = & a & / \text{ (R4)} \\ 0+(-(-a)) & = & a & / \text{ (R1), (R3)} \\ -(-a) & = & a & \end{array}$$

Dále ukážeme, že jestliže $a < b$ pak $-b < -a$:

$$\begin{array}{rcll} a & < & b & / +(-a) \text{ zprava} \\ a+(-a) & < & b+(-a) & / \text{ (R4)} \\ 0 & < & b+(-a) & / +(-b) \text{ zleva} \\ (-b)+0 & < & (-b)+(b+(-a)) & / \text{ (R3), (R2)} \\ -b & < & ((-b)+b)+(-a) & / \text{ (R1), (R4)} \\ -b & < & 0+(-a) & / \text{ (R1), (R3)} \\ -b & < & -a & \end{array}$$

Nechť nyní je $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ zdola ohraničená, b její dolní závora. Položme $M' = \{-x : x \in M\}$. Pak pro každé $x \in M$ platí $b \leq x$ a tedy podle druhého kroku důkazu je $-x \leq -b$ pro každé $-x \in M'$. To znamená, že M' je shora ohraničená a podle první části (R14) existuje $\sup M' = s \in \mathbb{R}$. Podle (R4) je $-s \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že $-s = \inf M$:

Buď $x \in M$ libovolné. Pak podle (s1) je $-x \leq s$ a podle pomocných tvrzení na začátku důkazu je $-s \leq x$. Poněvadž x bylo libovolné, je podmínka (i1) splněna.

Buď $c \in \mathbb{R}$ takové, že $c \leq x$ pro každé $x \in M$. Pak $-x \leq -c$ pro každé $-x \in M'$ a podle (s2) je $s \leq -c$, tedy $-(-c) \leq -s$. Podle prvního kroku důkazu je $c \leq -s$, což znamená, že i podmínka (i2) je splněna. $\square$

1.1.9 Příklad

Nechť $M = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N},\ m < n\}$. Ukažte, že $\sup M = 1$, $\inf M = 0$.

Ř.: Platnost podmínky (s1): $\frac{m}{n} \leq 1$ pro $m \leq n$.

Platnost podmínky (s2*): Buď $p \in M$, $p < 1$. Je-li $p \leq 0$, pak např. pro $\frac{1}{2} \in M$ platí $p < \frac{1}{2}$. Nechť tedy $p > 0$. Položme $n = 1 + [\frac{1}{1-p}]$. (Přitom $[x]$ označuje celou část z čísla x, t.j. celé číslo z takové, že $x \leq z < x+1$. Např. $[\pi] = 3$, $[\frac{3}{2}] = 1$, $[-3.5] = -4$ a p.) Pak

$$\begin{array}{rcl} n & > & \frac{1}{1-p} \\ n-np & > & 1 \\ n-1 & > & np \\ \frac{n-1}{n} & > & p \end{array}$$

a zřejmě $\frac{n-1}{n} \in M$.

Platnost podmínky (i1): $\frac{m}{n} > 0$ pro všechna m, $n \in \mathbb{N}$.

Platnost podmínky (i2*): Buď $p \in M$, $p > 0$. Je-li $p \geq 1$, pak např. pro $\frac{1}{2} \in M$ platí $\frac{1}{2} < p$. Nechť tedy $p < 1$. Položme $n = 1 + [\frac{1}{p}]$. Pak $n > \frac{1}{p}$ a tedy $p > \frac{1}{n} \in M$. $\square$

1.1.10 Definice

Množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ nazýváme *rozšířená množina reálných čísel*, symboly $-\infty$, ∞ nazýváme *nevlastní reálná čísla* (*nevlastní body číselné osy*). Klademe $-\infty < a < \infty$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Symboly $-\infty$, ∞ nejsou čísla, nedefinujeme pro ně početní operace.

1.1.11 Definice

Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Uzavřeným intervalem o krajních (koncových, hraničních) bodech* a, b rozumíme množinu

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\},$$

otevřeným intervalem množinu

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

polouzavřenými intervaly zprava (resp. zleva) množiny

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\},$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}.$$

Nekonečné intervaly definujeme jako množiny

$$\begin{aligned}
[a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\}, \\
(a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \\
(-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \le b\}, \\
(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}, \\
(-\infty, \infty) &= \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Je-li J interval jakéhokoliv typu a $x_0 \in J$, x_0 není krajní, řekneme, že x_0 je vnitřní bod intervalu J.

1.1.12 Definice

Okolím (podrobněji (*symetrickým*) δ-*okolím*, $\delta > 0$) *bodu* $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
Okolím bodu ∞ rozumíme interval (a, ∞), kde $a \in \mathbb{R}$.
Okolím bodu $-\infty$ rozumíme interval $(-\infty, a)$, kde $a \in \mathbb{R}$.

δ-okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ budeme označovat symbolem $\mathcal{O}_\delta(x_0)$, stručně $\mathcal{O}(x_0)$.

1.1.13 Věta

Okolí bodů z množiny $\mathbb{R}$ mají tyto vlastnosti:

(o1) Jsou-li $\mathcal{O}_1(x_0)$ a $\mathcal{O}_2(x_0)$ dvě okolí téhož bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$, pak $\mathcal{O}_1(x_0) \cap \mathcal{O}_2(x_0)$ je okolím bodu x_0.

(o2) Jsou-li $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$, $x_1 \ne x_2$, pak existují $\mathcal{O}(x_1)$ a $\mathcal{O}(x_2)$ taková, že $\mathcal{O}(x_1) \cap \mathcal{O}(x_2) = \emptyset$.

D.:

1.
   - $x_0 \in \mathbb{R}$, $\mathcal{O}_1(x_0) = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, $\mathcal{O}_2(x_0) = (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$. Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pak $\mathcal{O}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \mathcal{O}_1(x_0) \cap \mathcal{O}_2(x_0)$ je okolím bodu x_0.
   - $x_0 = \infty$, $\mathcal{O}_1(x_0) = (a_1, \infty)$, $\mathcal{O}_2(x_0) = (a_2, \infty)$. Položme $a = \max\{a_1, a_2\}$. Pak $\mathcal{O}(x_0) = (a, \infty) = \mathcal{O}_1(x_0) \cap \mathcal{O}_2(x_0)$ je okolím bodu ∞.
   - $x_0 = -\infty$. Platnost tvrzení ukážeme analogicky jako v předchozím případě.
2. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $x_1 < x_2$.
   - $-\infty < x_1 < x_2 < \infty$. Položme $\delta = \frac{1}{4}(x_2 - x_1)$. Pak $\mathcal{O}(x_1) = (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$, $\mathcal{O}(x_2) = (x_2 - \delta, x_2 + \delta)$ jsou okolí bodů x_1, x_2 s požadovanou vlastností. (Volba $\delta = \frac{1}{4}(x_2 - x_1)$ samozřejmě není jediná možná. Stačí volit $\delta = r(x_2 - x_1)$, kde $r \le \frac{1}{2}$.)
   - $-\infty < x_1 < x_2 = \infty$. Nechť $\delta > 0$ je libovolné a položme $a = x_1 + 2\delta$.
     Pak $\mathcal{O}(x_1) = (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$, $\mathcal{O}(x_2) = (a, \infty)$ mají požadovanou vlastnost.
   - Analogicky ukážeme platnost tvrzení v ostatních případech.

□

1.1.14 Definice

Buď $x_0 \in \mathbb{R}$. *Ryzím okolím* bodu x_0 rozumíme množinu $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Okolí nevlastního bodu je vždy ryzí.
Ryzí okolí bodu x_0 budeme označovat $\mathcal{O}'(x_0)$.

1.1.15 Definice

Buď $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. *Pravým* (resp. *levým*) *δ-okolím* bodu x_0 rozumíme interval $[x_0, x_0 + \delta)$ ($(x_0 - \delta, x_0]$). *Ryzím pravým* (resp. *levým*) *δ-okolím* bodu x_0 rozumíme otevřený interval $(x_0, x_0 + \delta)$ ($(x_0 - \delta, x_0)$).

Pravé (resp. levé) δ-okolí bodu x_0 budeme označovat $\mathcal{P}_\delta(x_0)$, stručně $\mathcal{P}(x_0)$ (resp. $\mathcal{L}_\delta(x_0)$, stručně $\mathcal{L}(x_0)$).
Ryzí pravé (resp. levé) δ-okolí bodu x_0 budeme označovat $\mathcal{P}'_\delta(x_0)$, stručně $\mathcal{P}'(x_0)$ (resp. $\mathcal{L}'_\delta(x_0)$, stručně $\mathcal{L}'(x_0)$).

1.1.16 Poznámky

1. Také pravá a levá okolí, ryzí okolí mají vlastnosti (o1), (o2) z věty 1.1.13.

   D.: Snadnou modifikací důkazu 1.1.13. □

2. Buď $J \subseteq \mathbb{R}$ interval a buď x_0 vnitřní bod intervalu J. Pak existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $\mathcal{O}(x_0) \subseteq J$.

   D.: Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$ jsou krajní body intervalu J.
   - Jsou-li $a, b \in \mathbb{R}$, položíme $\delta = \frac{1}{2}\min\{x_0 - a, b - x_0\}$. Pak $\delta > 0$ a $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je požadované okolí.
   - Jsou-li $a \in \mathbb{R}$ a $b = \infty$, položíme $\delta = \frac{1}{2}(x_0 - a)$. Pak $\delta > 0$ a $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je opět požadované okolí.
   - Analogicky ukážeme platnost tvrzení v ostatních případech.

   □

1.1.17 Věta

1. Mezi dvěma libovolnými reálnými čísly $x_1,\ x_2,\ x_1 < x_2$ leží racionální i iracionální číslo.
2. V libovolném okolí libovolného čísla $x_0 \in \mathbb{R}$ leží racionální i iracionální číslo.

(Stručně: Množina $\mathbb{Q}$ i množina $\mathbb{I}$ je hustá v množině $\mathbb{R}$.)

D.:

1. - Položme $n = [\frac{1}{x_2 - x_1}] + 1,\ m = [nx_1] + 1$. Pak $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ a tedy $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Dále platí

     $$\begin{array}{rcl} m & > & nx_1 \\ x_1 & < & \frac{m}{n} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} m & \leq & nx_1 + 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} n & > & \frac{1}{x_2 - x_1} \\ nx_2 - nx_1 & > & 1 \\ nx_2 & > & nx_1 + 1 \end{array}$$

     Odtud $x_1 < \frac{m}{n} \leq \frac{nx_1 + 1}{n} < \frac{nx_2}{n} = x_2$, což znamená, že q je racionální číslo mezi čísly x_1 a x_2.
   - Položme $s = [\frac{\sqrt{2}}{x_2 - x_1}] + 1,\ r = [\frac{s}{\sqrt{2}} x_1] + 1$. Pak $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$ a $w = \frac{\sqrt{2}\ r}{s} \in \mathbb{I}$, neboť v opačném případě by $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, což by byl spor s tvrzením dokázaným v úvodu tohoto odstavce. Dále platí

     $$\begin{array}{rcl} r & > & \frac{s}{\sqrt{2}} x_1 \\ x_1 & < & \frac{\sqrt{2}\ r}{s} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} r & \leq & \frac{s}{\sqrt{2}} x_1 + 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} s & > & \frac{\sqrt{2}}{x_2 - x_1} \\ \frac{s}{\sqrt{2}} x_2 & > & \frac{s}{\sqrt{2}} x_1 + 1 \end{array}$$

     Odtud $x_1 < \frac{\sqrt{2}\ r}{s} \leq \dfrac{\sqrt{2}\ (\frac{s}{\sqrt{2}} x_1 + 1)}{s} < \dfrac{\sqrt{2}\ \frac{s}{\sqrt{2}} x_2}{s} = x_2$, což znamená, že w je iracionální číslo mezi čísly x_1 a x_2.
2. je důsledkem 1., neboť mezi čísly $x_0 - \delta$ a $x_0 + \delta$ leží racionální i iracionální číslo.

□

1.2 Funkce a jejich základní vlastnosti

1.2.1 Definice

Funkce f (podrobněji *reálná funkce jedné reálné proměnné*) je zobrazení z množiny $\mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}$.
Množina $\operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} : (\exists y \in \mathbb{R})((x, y) \in f)\}$ se nazývá *definiční obor funkce f*. (Domain)
Množina $\operatorname{Im} f = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in \mathbb{R})((x, y) \in f)\}$ se nazývá *obor hodnot funkce f*. (Image)

Je-li f funkce, pak zobrazení $f : \operatorname{Dom} f \to \operatorname{Im} f$ je surjekce (zobrazení na).

Je-li $(x, y) \in f$, píšeme $y = f(x),\ x \mapsto y,\ x \overset{f}{\mapsto} y$.

Prvky z $\operatorname{Dom} f$ se nazývají hodnoty nezávisle proměnné, argument.

Prvky z $\operatorname{Im} f$ se nazývají hodnoty závisle proměnné, funkční hodnota.

Pokud není explicitně uvedeno jinak, definičním oborem rozumíme největší (vzhledem k množinové inklusi) množinu, pro jejíž prvky lze funkční hodnotu vypočítat.

1.2.2 Definice

Grafem funkce f rozumíme množinu $\mathcal{G} = \{(x, f(x)) : x \in \operatorname{Dom} f\}$, kde (x, y) značí orthogonální kartézské souřadnice bodu v rovině.

1.2.3 Příklad

1. $f(x) = |x| = \max\{x, -x\}$, $\quad \operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} f = [0, \infty)$.

2. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\quad \operatorname{Dom} f = (-1, 1)$, neboť musí platit
$$\begin{array}{rcl} 1 - x^2 & > & 0 \\ 1 & > & x^2 \\ 1 & > & |x| \end{array}$$
$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$, neboť pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ je
$$\begin{array}{rcl} r & = & \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ (1 - x^2)r^2 & = & x^2 \\ r^2 & = & (1 + r^2)x^2 \\ x_{1,2} & = & \pm\frac{|r|}{\sqrt{1+r^2}} \end{array}$$
Znaménko u x musí být stejné jako znaménko u r, tedy $x = \dfrac{r}{\sqrt{1 + r^2}}$

3. $f(x) = [x]$, kde $[x]$ je celá část z čísla x, to jest celé číslo takové, že $[x] \le x < [x] + 1$.

   $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R},\ \operatorname{Im} f = \mathbb{Z}$.

4. Dirichletova funkce $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$.

   $\operatorname{Dom} \chi = \mathbb{R},\ \operatorname{Im} \chi = \{0, 1\}$.

1.2.4 Definice

Buďte f, g funkce, $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \neq \emptyset$. Pak definujeme
součet funkcí f, g předpisem: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pro $x \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$,
rozdíl funkcí f, g předpisem: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ pro $x \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$,
součin funkcí f, g předpisem: $(fg)(x) = f(x)g(x)$ pro $x \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$,
podíl funkcí f, g předpisem: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ pro $x \in \operatorname{Dom} f \cap (\operatorname{Dom} g \setminus \{x \in \operatorname{Dom} g : g(x) = 0\})$,
absolutní hodnotu funkce f předpisem $|f|(x) = |f(x)| = \max\{f(x), -f(x)\}$ pro $x \in \operatorname{Dom} f$.

1.2.5 Definice

Funkce f se nazývá *ohraničená* (*shora ohraničená*, *zdola ohraničená*), je-li množina $\operatorname{Im} f$ ohraničená (shora ohraničená, zdola ohraničená) podmnožina množiny $\mathbb{R}$.

Funkce f je ohraničená právě tehdy, když existují $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $a \leq f(x) \leq b$ pro každé $x \in \operatorname{Dom} f$, což nastane právě tehdy, když existuje $h \in \mathbb{R}$ takové, že $|f(x)| \leq h$ pro každé $x \in \operatorname{Dom} f$. Analogická tvrzení platí pro funkci ohraničenou shora nebo zdola.

1.2.6 Definice

Funkce f se nazývá *sudá*, jestliže $x \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow -x \in \operatorname{Dom} f,\ f(-x) = f(x)$.
Funkce f se nazývá *lichá*, jestliže $x \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow -x \in \operatorname{Dom} f,\ f(-x) = -f(x)$.

Příklady sudé funkce: x^{2n}, kde $n \in \mathbb{N}$, $|x|$, $\cos x$.
Příklady liché funkce: x^{2n+1}, kde $n \in \mathbb{N}$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$.

Buď f sudá funkce, G její graf, $(x, y) \in G$. Pak $(-x, y) \in G$. Body (x, y) a $(-x, y)$ jsou symetrické podle osy y, graf sudé funkce je symetrický podle osy y.
Buď f lichá funkce, G její graf, $(x, y) \in G$. Pak $(-x, -y) \in G$. Body (x, y) a $(-x, -y)$ jsou symetrické podle počátku souřadného systému, graf liché funkce je symetrický podle počátku souřadného systému.

1.2.7 Věta

Má-li funkce f vlastnost: $x \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow -x \in \operatorname{Dom} f$, pak ji lze vyjádřit jako součet funkce sudé a liché.

D.: $f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$
$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$; $g(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = g(x)$; $g(x)$ je sudá,
$h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$; $h(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = -h(x)$; $h(x)$ je lichá. $\square$

1.2.8 Definice

Buď $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$. Řekneme, že funkce f je *periodická s periodou* p, jestliže
$x \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow x + p \in \operatorname{Dom} f,\ f(x + p) = f(x)$.

Příklady: $\sin x$, $\cos x$ — perioda 2π,
$\operatorname{tg} x$ — perioda π,
$\sin \frac{x}{2\pi}$ — perioda 1,
konstatntní funkce $f(x) = c \in \mathbb{R}$ — periodou je jakékoliv $p \in (0, \infty)$.

Buď f funkce periodická s periodou $p > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Pak f je periodická s periodou np.

D.: $x \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow x + p \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow x + p + p = x + 2p \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow \cdots \Rightarrow x + np \in \operatorname{Dom} f$.
$f(x+np) = f(x+(n-1)p+p) = f(x+(n-1)p) = f(x+(n-2)p+p) = f(x+(n-2)p) = \cdots = f(x)$. $\square$

Množina period periodické funkce f je nekonečná, tedy neprázdná a zdola ohraničená nulou. Podle 1.1.7 (R14) existuje $p_0 = \inf\{p : p \text{ je perioda funkce } f\}$. Pokud p_0 je periodou funkce f, nazýváme ji *nejmenší* nebo *základní* periodou funkce f. Periodická funkce nemusí mít nejmenší periodu. Např. periodou Dirichletovy funkce je každé kladné racionální číslo.

1.2.9 Definice

Funkce f se nazývá *rostoucí v bodě* $x_0 \in \operatorname{Dom} f$, jestliže existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $\mathcal{O}(x_0) \subseteq \operatorname{Dom} f$ a platí

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{O}(x_0),\ x < x_0 \quad &\Rightarrow \quad f(x) < f(x_0) \\ x \in \mathcal{O}(x_0),\ x > x_0 \quad &\Rightarrow \quad f(x) > f(x_0), \end{aligned}$$

stručně: jestliže pro $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $(x - x_0)(f(x) - f(x_0)) > 0$.
Funkce f se nazývá *neklesající v bodě* $x_0 \in \operatorname{Dom} f$, jestliže existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $\mathcal{O}(x_0) \subseteq \operatorname{Dom} f$ a platí

$$\begin{array}{lcl} x \in \mathcal{O}(x_0),\ x < x_0 & \Rightarrow & f(x) \leq f(x_0) \\ x \in \mathcal{O}(x_0),\ x > x_0 & \Rightarrow & f(x) \geq f(x_0), \end{array}$$

stručně: jestliže pro $x \in \mathcal{O}(x_0)$ platí $(x - x_0)(f(x) - f(x_0)) \geq 0$.
Analogicky definujeme funkci *klesající* a *nerostoucí v bodě* $x_0 \in \operatorname{Dom} f$.
Funkce, která je v bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ nerostoucí nebo neklesající, se nazývá *monotonní v bodě* $x_0 \in \operatorname{Dom} f$.
Funkce, která je v bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ rostoucí nebo klesající, se nazývá *ryze monotonní v bodě* $x_0 \in \operatorname{Dom} f$.

Funkce rostoucí v bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ nemusí být rostoucí v žádném jiném bodě z $\operatorname{Dom} f$.

1.2.10 Definice

Řekneme, že funkce je *rostoucí* na intervalu J, jestliže $J \subseteq \operatorname{Dom} f$ a pro libovolná $x_1, x_2 \in J$ platí $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
Řekneme, že funkce je *neklesající* na intervalu J, jestliže $J \subseteq \operatorname{Dom} f$ a pro libovolná $x_1, x_2 \in J$ platí $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
Analogicky definujeme funkci *klesající* a *nerostoucí* na intervalu J.
Funkce rostoucí nebo klesající na intervalu se nazývá *ryze monotonní na intervalu*, funkce nerostoucí nebo neklesající na intervalu se nazývá *monotonní na intervalu*.

Monotonie v bodě — *lokální vlastnost*
Monotonie na intervalu — *globální vlastnost*

Slova „interval J“ v předchozí definici lze nahradit slovy „množina $M \subseteq \operatorname{Dom} f$“.

1.2.11 Věta

Funkce f je rostoucí na otevřeném intervalu $J \subseteq \operatorname{Dom} f$ právě tehdy, když je rostoucí v každém bodě tohoto intervalu.

D.: „$\Rightarrow$“ Nechť f je rostoucí na J a nechť $x_0 \in J$. J je otevřený $\Rightarrow$ x_0 je vnitřní bod $\Rightarrow$(podle 1.1.16.2) existuje $\mathcal{O}(x_0) \subseteq J$. Tedy $\mathcal{O}(x_0) \subseteq \operatorname{Dom} f$. Je-li $x \in \mathcal{O}(x_0),\ x < x_0$, je $f(x) < f(x_0)$; je-li $x \in \mathcal{O}(x_0),\ x > x_0$, je $f(x) > f(x_0)$. Tedy f je rostoucí v bodě x_0.

„$\Leftarrow$“ Nechť f je rostoucí v každém bodě intervalu J. Připusťme, že f není rostoucí na J. Existují tedy $x_1, x_2 \in J$, že $x_1 < x_2$ a $f(x_1) \geq f(x_2)$. Označme $M = \{x \in [x_1, x_2] : f(x) > f(x_1)\}$. Platí

a) $M \neq \emptyset$, neboť f rostoucí v $x_1 \Rightarrow$ ex. $\mathcal{O}(x_1)$, že pro každé $x > x_1$ je $f(x) > f(x_1)$.
b) M je shora ohraničená, neboť x_2 je horní závora M.

Podle 1.1.7 (R14) existuje $x_0 = \sup M \leq x_2$.

- Předpokládejme $x_0 = x_2$. f je rostoucí v bodě $x_2 \Rightarrow$ existuje $\mathcal{O}(x_2) = (x_2 - \delta, x_2 + \delta) \subseteq \operatorname{Dom} f$, že pro $x \in \mathcal{O}(x_2)$, $x < x_2$ platí $f(x) < f(x_2)$.
  Podle 1.1.6(s2*) existuje $x \in M$, $x > x_2 - \delta$. Poněvadž $x \in M$, je $x \leq x_2$. Jest $x \in \mathcal{O}(x_2)$. Pokud $x < x_2$, pak $f(x) < f(x_2)$, pokud $x = x_2$, pak $f(x) = f(x_2)$. Tedy $f(x) \leq f(x_2)$.
  Současně $x \in M$ a tedy $f(x) > f(x_1) \geq f(x_2)$. Odtud $f(x) > f(x_2)$ — spor.
- Musí tedy být $x_0 < x_2$. Poněvadž f je rostoucí v x_0, existuje $\mathcal{O}(x_0)$, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $(x - x_0)(f(x) - f(x_0)) > 0$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat $\mathcal{O}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq [x_1, x_2]$. Podle 1.1.6(s2*) existuje $x \in M$, $x > x_0 - \delta$ takové, že $x \leq x_0$. $x \in \mathcal{O}(x_0)$ a tedy $f(x) \leq f(x_0)$. Současně $f(x) > f(x_1)$, neboť $x \in M$. Odtud plyne

$$f(x_1) < f(x_0).$$

  Zvolme $x \in \mathcal{O}(x_0)$, $x > x_0$. Pak $f(x) > f(x_0)$. Přitom $x \notin M$, neboť $x > x_0 = \sup M$. Tedy $f(x) \leq f(x_1)$. Odtud plyne

$$f(x_1) > f(x_0).$$

  To je spor. □

1.2.12 Poznámky

1. Analogická věta platí pro neklesající, klesající a nerostoucí funkci.
2. Pro uzavřený interval věta neplatí:
   Např. $f(x) = \sin(x)$, $J = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. f je rostoucí na celém J, ale není rostoucí v krajních bodech.
3. Ve druhé části důkazu jsme nevyužili předpoklad, že interval J je otevřený. Platí tedy: Je-li funkce f rostoucí v každém bodě libovolného intervalu J, pak je rostoucí na celém intervalu J.

1.2.13 Definice

Buďte f, φ funkce a nechť platí $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \operatorname{Dom} f$. Pak

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (\exists u \in \mathbb{R})((x, u) \in \varphi, (u, y) \in f)\}$$

se nazývá *složená funkce*.
Funkce φ se nazývá *vnitřní složka* funkce F, funkce f se nazývá *vnější složka* funkce F.

$$x \mapsto \varphi(x) = u \mapsto f(u) = f(\varphi(x))$$

Podmínka $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \operatorname{Dom} f$ je nutná a dostatečná pro existenci složené funkce. Není-li tato podmínka splněna, lze jí někdy dosáhnout vhodným zúžením $\operatorname{Dom}\varphi$.

1.2.14 Příklady

1. $\varphi(x) = x^2$, $\operatorname{Im}\varphi = [0, \infty)$
   $f(u) = \sin(u)$, $\operatorname{Dom} f = (-\infty, \infty)$. Tedy $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \operatorname{Dom} f$, $F(x) = f(\varphi(x)) = \sin x^2$
2. $\varphi(x) = 1 - x^2$, definujeme $\operatorname{Dom} f = [-1, 1]$. Pak $\operatorname{Im}\varphi = [0, 1]$.
   $f(u) = \sqrt{u}$, $\operatorname{Dom} f = [0, \infty)$. $[0, 1] \subseteq [0, \infty)$, $F(x) = f(\varphi(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
3. $\varphi(x) = -x^2$, $\operatorname{Im}\varphi = (-\infty, 0]$
   $f(x) = \log u$, $\operatorname{Dom} f = (0, \infty)$. Složená funkce neexistuje.

Proces skládání funkcí lze opakovat a vytvářet funkce vícenásobně složené. Např.:
$y = \log^2 \sqrt{\sin x}$: $y = u^2$
$u = \log v$
$v = \sqrt{w}$
$w = \sin x$

1.2.15 Definice

Nechť f je funkce, která je bijekcí. Pak

$$f^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in f\}$$

se nazývá *inversní funkce* k funkci f.

Z definice plyne: $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Im} f^{-1}$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Dom} f^{-1}$, $\quad x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$.
Zobrazení $f : \operatorname{Dom} f \to \operatorname{Im} f$ je surjekce. Aby toto zobrazení bylo bijekcí, musí být injekcí (prostým zobrazením), t.j. $x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} f$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

1.2.16 Poznámky

1. Graf inversní funkce f^{-1} je symetrický s grafem funkce f podle osy prvního a třetího kvadrantu.
2. Je-li funkce f ryze monotonní, pak je prostá.

   D.: Nechť pro určitost je f rostoucí a buďte $x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} f$, $x_1 \neq x_2$. Pokud $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) < f(x_2)$, pokud $x_1 > x_2$ pak $f(x_1) > f(x_2)$ a tedy $f(x_1) \neq f(x_2)$. $\square$

1.2.17 Věta

Nechť funkce f je rostoucí (resp. klesající) na množině $\operatorname{Dom} f$. Pak funkce f^{-1} je rostoucí (resp. klesající) na množině $\operatorname{Im} f$.

D.: Nechť f je rostoucí na $\operatorname{Dom} f$ a buďte $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} f,\ y_1 < y_2$.
Označme $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$, t.j. $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$.
Jest $x_1 \neq x_2$ podle 1.2.16.2. Kdyby $x_1 > x_2$, pak by $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$, což by byl spor. Platí tedy $x_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}y_2 = x_2$. □

1.3 Posloupnosti

1.3.1 Definice

Posloupnost je funkce f, pro niž $\operatorname{Dom} f = \mathbb{N}$. (t.j. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$)

Označení: $f_n = f(n)$, častěji $a_n,\ b_n, \ldots$
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, stručně $\{a_n\}$ — posloupnost
a_n — *člen posloupnosti*

Posloupnosti mohou mít vlastnosti: ohraničenost, monotonie, periodicita (s periodou $p \in \mathbb{N}$) zavedené v 1.2. Naopak pojmy inversní nebo složená posloupnost nemají smysl.

Platí: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí $\Leftrightarrow$ $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n < a_{n+1})$
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající $\Leftrightarrow$ $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq a_{n+1})$
a podobně.

1.3.2 Definice

Řekneme, že *posloupnost* $\{a_n\}$ *má limitu* a a píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, nebo stručněji $\lim a_n = a,\ a_n \to a$, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$.
Posloupnost, která má limitu, se nazývá *konvergentní*.

1.3.3 Věta (o jednoznačnosti limity)

Libovolná posloupnost má nejvýše jednu limitu.

D.: Připusťme, že pro $\{a_n\}$ platí $\lim a_n = a,\ \lim a_n = b,\ a \neq b$.
Nechť pro určitost $a < b$. Položme $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$. Pak $\varepsilon > 0$.
Tedy existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že $n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$
a existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že $n \geq n_2 \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon$
Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak pro $n \geq n_0$ platí $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,\ b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon$,
tedy $b - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ a poněvadž $b - \varepsilon = b - \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{b+a}{2}$

$$a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

platí $\dfrac{b+a}{2} < \dfrac{b+a}{2}$, což je spor. □

1.3.4 Věta

Konvergentní posloupnost je ohraničená.

D.: Nechť $\lim a_n = a$ a buď $\varepsilon > 0$. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.
Buď $h = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, a + \varepsilon\}$, $d = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, a - \varepsilon\}$.
Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $d \leq a_n \leq h$. □

1.3.5 Poznámky

1. Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ konvergentní posloupnosti, $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Jestliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$, pak $a \leq b$.

   D.: Připusťme $a > b$ a položme $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$. Pak $\varepsilon > 0$ a existují
   $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_1$ je $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$,
   $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_2$ je $b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$.
   Pro $n > n_3 = \max\{n_1, n_2, n_0\}$ nyní je $a - \varepsilon = \dfrac{a+b}{2} < a_n < b_n < b + \varepsilon = \dfrac{a+b}{2}$ — spor. □

   Tvrzení zůstane v platnosti i za předpokladu $a_n \leq b_n$ pro $n \geq n_0$.

2. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je *skorostacionární*, jestliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $a_n = a$.
   Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je *stacionární*, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = a$.
   (Skoro)stacionární posloupnost je konvergentní a platí $\lim a_n = a$.

3. Buď $\{a_n\}$ konvergentní posloupnost, $\lim a_n = 0$ a $\{b_n\}$ buď ohraničená posloupnost. Pak $\lim a_n b_n = 0$.

   D.: $\{b_n\}$ je ohraničená $\Rightarrow$ existuje $h \in \mathbb{R}$, že $|b_n| < h$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
   Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K $\dfrac{\varepsilon}{h} > 0$ existuje n_0 takové, že pro $n \geq n_0$ je $|a_n| = |a_n - 0| < \dfrac{\varepsilon}{h}$.
   Pro $n \geq n_0$ platí $|a_n b_n| = |a_n||b_n| < \dfrac{\varepsilon}{h} h = \varepsilon$, tedy $\lim a_n b_n = 0$. □

4. Jestliže posloupnost $\{a_n\}$ je monotonní a neohraničená, pak $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$.

   D.: Buď $\{a_n\}$ neklesající a $\varepsilon > 0$ libovolné.
   Poněvadž je $\{a_n\}$ neohraničená, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > \dfrac{1}{\varepsilon}$.
   Poněvadž $\{a_n\}$ je neklesající, pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n \geq a_{n_0} > \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$.
   Odtud plyne, že pro $n \geq n_0$ platí $\left|\dfrac{1}{a_n} - 0\right| = \left|\dfrac{1}{a_n}\right| = \dfrac{1}{a_n} < \varepsilon$, tedy $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$.
   Pro nerostoucí posloupnost se důkaz provede analogicky. □

1.3.6 Věta

Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ konvergentní posloupnosti, $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Pak

1. existuje $\lim |a_n|$ a platí $\lim |a_n| = |a|$,
2. existuje $\lim(a_n + b_n)$ a platí $\lim(a_n + b_n) = a + b$,
3. existuje $\lim a_n b_n$ a platí $\lim a_n b_n = ab$,
4. existuje $\lim(a_n - b_n)$ a platí $\lim(a_n - b_n) = a - b$,
5. pokud $b \neq 0$, pak existuje $\lim \dfrac{a_n}{b_n}$ a platí $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

D.:

1. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$.
   Pro $n \geq n_0$ tedy platí $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$, což znamená $\lim |a_n| = a$.
2. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_1$ je $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, a existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   Pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí $|(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \leq |a_n-a|+|b_n-b| < \dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ a tedy $\lim(a_n + b_n) = a + b$.

3. Je-li $a = 0$, plyne tvrzení z 1.3.4 a z 1.3.5.3.
   Nechť $a \neq 0$ a buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle 1.3.4 existuje $h \in \mathbb{R}$ takové, že $|b_n| < h$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
   K $\frac{\varepsilon}{2h} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_1$ je $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2h}$.
   K $\frac{\varepsilon}{2|a|} > 0$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}$.
   Pro $n \geq n_0 \max\{n_1, n_2\}$ platí obě nerovnosti současně, tedy
   $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab| = |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| <$
   $< \frac{\varepsilon}{2h} h + |a| \frac{\varepsilon}{2|a|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

4. Plyne z 2., 3. a 1.3.5.2.

5. Podle 1. je $\lim |b_n| = |b|$ a podle předpokladu $|b| > 0$. Tedy k $\frac{|b|}{2} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_1$ je $||b_n| - |b|| < \frac{|b|}{2}$, neboli $|b_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$. Odtud plyne, že pro $n \geq n_1$ je $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$.
   Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K $\frac{b^2\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $|b_n - b| < \frac{b^2\varepsilon}{2}$.
   Pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ je $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b||b_n|} < \frac{b^2\varepsilon}{2} \frac{1}{|b|} \frac{2}{|b|} = \varepsilon$ a tedy $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$.
   Podle 3. je $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim a_n \lim \frac{1}{b_n} = a\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

□

Poznamenejme, že z 1.3.6.3 a z 1.3.5.2 plyne: Jsou-li $c \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ konvergentní posloupnost s $\lim a_n = a$, pak existuje $\lim(ca_n) = c \lim a_n = ca$.

1.3.7 Věta (o třech posloupnostech, o sevření)

Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ posloupnosti takové, že existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_1$ je $a_n \leq b_n \leq c_n$. Jestliže $\lim a_n = \lim c_n = a$, pak také $\lim b_n = a$.

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $|a_n - a| < \varepsilon$, neboli $a_n > a - \varepsilon$.
Dále existuje $n_3 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_3$ je $|c_n - a| < \varepsilon$, neboli $c_n < a + \varepsilon$.
Pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ platí $a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$, neboli $a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$, což znamená $\lim b_n = a$.□

1.3.8 Příklad

Pro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

D.:

- Pro $a = 1$ plyne tvrzení z 1.3.5.2.
- Buď $a > 1$. Pak $\sqrt[n]{a} \geq 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, neboli $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$, kde $\alpha_n \geq 0$.
  Dále $a = (1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \binom{n}{2}\alpha_n^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}\alpha_n^{n-1} + \alpha_n^n \geq 1 + n\alpha_n$.
  Odtud $\alpha_n \leq \frac{a-1}{n}$. Celkem $0 \leq \alpha_n \leq \frac{a-1}{n}$. Podle 1.3.5.4 je $\lim \frac{a-1}{n} = a \lim \frac{1}{n} - \lim \frac{1}{n} = 0$ a tedy podle 1.3.7 a 1.3.5.2 je $\lim \alpha_n = 0$. Podle 1.3.5.2 a 1.3.6.2 je $\lim \sqrt[n]{a} = 1 + \lim \alpha_n = 1$.
- Buď $0 < a < 1$. Pak $b = \frac{1}{a} > 1$ a tedy $\lim \sqrt[n]{b} = 1$. Avšak podle 1.3.6.5 je $1 = \lim \sqrt[n]{b} = \frac{\lim 1}{\lim \sqrt[n]{a}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{a}}$, z čehož plyne $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

□

1.3.9 Věta (o monotonních posloupnostech)

Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající a shora ohraničená, pak je konvergentní a platí $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí a zdola ohraničená, pak je konvergentní a platí $\lim a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Je-li monotonní posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená, pak je konvergentní.

D.: Buď $\{a_n\}$ neklesající a shora ohraničená posloupnost. Podle 1.1.7(R14) existuje $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak $a - \varepsilon < a$ a podle 1.1.6(s2*) existuje $a_{n_0} \in \{a_n\}$ takové, že $a_{n_0} > a - \varepsilon$. Poněvadž $\{a_n\}$ je neklesající, je $a_n > a - \varepsilon$ pro každé $n \geq n_0$. Tedy pro $n \geq n_0$ je $a - \varepsilon < a_n \leq a < a + \varepsilon$, neboli $\lim a_n = a$.
Druhé tvrzení se dokáže analogicky, třetí je důsledkem prvního a druhého. □

1.3.10 Příklad

Posloupnost $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a konvergentní.
(Značíme $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$, jest $\mathrm{e} = 2.71828182846\cdots$.)

D.: S využitím binomické věty a vztahu $\frac{l}{n+1} < \frac{l}{n}$, neboli $1 - \frac{l}{n+1} > 1 - \frac{l}{n}$ pro všechna $n, l \in \mathbb{N}$ dostaneme:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} > \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-k+2)}{k!} \frac{1}{(n+1)^k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{k!} \frac{1}{(n+1)^{k-1}} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n+1} \cdots \frac{n-k+2}{n+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) > \\
&> \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^{k-1}} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

To znamená, že posloupnost $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí.

Položme $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Pak $a_n \geq 0$ a s využitím nerovnosti $(1+x)^m \geq 1 + mx$ pro $x \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$ (viz. 1.3.8) dostaneme:

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right)^{n+2} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+2} = \\
&= \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \geq \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{n+2}{n(n+2)}\right) = \frac{n}{n+1}\frac{n+1}{n} = 1.
\end{aligned}$$

Tedy $a_n \geq a_{n+1}$, posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí, zdola ohraničená nulou. Podle 1.3.9 je konvergentní. Dále podle 1.3.6.2 a 1.3.5.4 platí $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ a tedy podle 1.3.6.5 existuje

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \ \square$$

1.3.11 Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *nevlastní limitu* ∞ a píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (stručněji $\lim a_n = \infty$, $a_n \to \infty$) jestliže ke každému $h \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n > h$.
Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *nevlastní limitu* $-\infty$ a píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (stručněji $\lim a_n = -\infty$, $a_n \to -\infty$) jestliže ke každému $h \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n < h$.
Má-li posloupnost $\{a_n\}$ nevlastní limitu, řekneme, že je *určitě divergentní*.
Nemá-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu ani nevlastní limitu, řekneme, že je *oscilující*.

Nahradíme-li v tvrzeních 1.3.3, 1.3.5.1, 1.3.7 slovo „limita“ slovem „nevlastní limita“, zůstanou tato tvrzení v platnosti.

1.3.12 Poznámky

1. Buď $\{a_n\}$ konvergentní posloupnost, $\lim a_n = 0$. Jestliže existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_1$ je $a_n > 0$ (resp. $a_n < 0$, resp. $a_n \neq 0$), pak $\lim \frac{1}{a_n} = \infty$ (resp. $\lim \frac{1}{a_n} = -\infty$, resp. $\lim \frac{1}{|a_n|} = \infty$).

   D.: Buď $h > 0$ libovolné. Poněvadž $\lim a_n = 0$, existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_2$ je $|a_n| < \frac{1}{h}$.
   Pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{|a_n|} > h$, a tedy $\lim \frac{1}{a_n} = \infty$.
   Druhé tvrzení se dokáže analogicky, třetí je jejich důsledkem. $\square$

2. Nechť $\lim a_n = \infty$, (resp. $\lim a_n = -\infty$) a nechť posloupnost $\{b_n\}$ je zdola (resp. shora) ohraničená. Pak $\lim(a_n + b_n) = \infty$ (resp. $\lim(a_n + b_n) = -\infty$).

   D.: Existuje $k \in \mathbb{R}$, že $b_n > k$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Buď $h \in \mathbb{R}$ libovolné.
   Poněvadž $\lim a_n = \infty$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ je $a_n > h - k$. Tedy pro $n \geq n_0$ je $a_n + b_n > h - k + k = h$, což znamená $\lim(a_n + b_n) = \infty$.
   Druhé tvrzení se dokáže analogicky. $\square$

3. Nechť $\lim a_n = \infty$ a nechť $\{b_n\}$ je posloupnost taková, že existují $n_1 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ taková, že pro $n \geq n_1$ je $b_n > \delta$ (resp. $b_n < -\delta$). Pak $\lim a_n b_n = \infty$ (resp. $\lim a_n b_n = -\infty$).
   Nechť $\lim a_n = -\infty$ a nechť $\{b_n\}$ je posloupnost taková, že existují $n_1 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ taková, že pro $n \geq n_1$ je $b_n > \delta$ (resp. $b_n < -\delta$). Pak $\lim a_n b_n = -\infty$ (resp. $\lim a_n b_n = \infty$).

   D.: Buď $h \in \mathbb{R}$ libovolné. Existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $a_n > \frac{h}{\delta}$.
   Pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí $a_n b_n > \frac{h}{\delta}\delta = h$, což znamená $\lim a_n b_n = \infty$.
   Zbývající tvrzení se dokáží analogicky. $\square$

   Předpoklad $b_n > \delta$ pro $n \geq n_1$ nelze zeslabit na $b_n > 0$ pro $n \geq n_1$. Například pro $\{a_n\} = \{n\}$, $\{b_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ je podle 1.3.5.4 $\lim a_n b_n = \lim \frac{1}{n} = 0$.

4. Nechť $\lim |a_n| = \infty$ a $\{b_n\}$ je ohraničená posloupnost. Pak $\lim \frac{1}{a_n} = 0$ a $\lim \frac{b_n}{a_n} = 0$.

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_0$ je $|a_n| > \dfrac{1}{\varepsilon}$, tedy $\left|\dfrac{1}{a_n} - 0\right| = \left|\dfrac{1}{a_n}\right| = \dfrac{1}{|a_n|} < \varepsilon$.
Druhé tvrzení nyní plyne z 1.3.5.3. □

5. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ neklesající (resp. nerostoucí) a není ohraničená shora (resp. zdola), pak je určitě divergentní a $\lim a_n = \infty$ (resp. $\lim a_n = -\infty$).

   D.: Buď $h \in \mathbb{R}$ libovolné.
   Poněvadž $\{a_n\}$ není ohraničená shora, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > h$.
   Poněvadž $\{a_n\}$ je neklesající, pro $n \geq n_0$ je $a_n \geq a_{n_0} > h$, tedy $\lim a_n = \infty$.
   Druhé tvrzení se dokáže analogicky. □

1.3.13 Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá *vybraná* z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Například $\{a_{2n}\} = \{a_2, a_4, a_6, \dots\}$, $\{a_{n^2}\} = \{a_1, a_4, a_9, \dots\}$, $\{a_n\}_{n=m}^{\infty} = \{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots\}$ jsou posloupnosti vybrané z $\{a_n\}$.

Poznámka: Snadno ověříme, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, ohraničená shora, ohraničená zdola, ohraničená, stacionární právě tehdy, když každá posloupnost $\{a_{n_k}\}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$ má stejnou vlastnost.

1.3.14 Věta

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ vybranou z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

D.:

„$\Rightarrow$“ Nechť $a \in \mathbb{R}$ a buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_n - a| < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_0$. Poněvadž $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k_0} \geq n_0$ a $n_k \geq n_{k_0}$ pro každé $k \geq k_0$. Tedy pro každé $k \geq k_0$ je $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$, což znamená $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Pro $a = \infty$ nebo $a = -\infty$ dokážeme tvrzení analogicky.

„$\Leftarrow$“ je triviální. Je-li $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ pro každou $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, platí to zejména pro $n_k = k$.

□

1.3.15 Definice

Číslo $a \in \mathbb{R}$ nazveme *hromadným bodem posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže ke každému $n_0 \in \mathbb{N}$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje $n \geq n_0$ takové, že $|a_n - a| < \varepsilon$.

a je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$ právě tehdy, když existuje nekonečně mnoho indexů $m \in \mathbb{N}$ takových, že $|a_m - a| < \varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$.

Například posloupnost $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$ má dva hromadné body -1 a 1.

1.3.16 Věta

Číslo $a \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$ právě tehdy, když existuje posloupnost $\{a_{n_k}\}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$, která konverguje k číslu a.

D.: „$\Rightarrow$“ Nechť a je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$.
K $\varepsilon_1 = 1,\ n_0 = 1$ existuje $n_1 \in \mathbb{N},\ n_1 \geq 1$ takové, že $|a_{n_1} - a| < 1$.
K $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ a k $n_1 + 1 \in \mathbb{N}$ existuje $n_2 \in \mathbb{N},\ n_2 > n_1$ takové, že $|a_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$.
K $\varepsilon_3 = \frac{1}{3}$ a k $n_2 + 1 \in \mathbb{N}$ existuje $n_3 \in \mathbb{N},\ n_3 > n_2$ takové, že $|a_{n_3} - a| < \frac{1}{3}$.
Tímto způsobem postupujeme dále. Výsledkem konstrukce je rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ takových, že $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$.
Poněvadž $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|\frac{1}{k} - 0| = \frac{1}{k} < \varepsilon$ pro každé $k \geq k_0$.
Tedy pro $k \geq k_0$ platí $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k} < \varepsilon$, což znamená $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

„$\Leftarrow$“ Jestliže existuje $\{a_{n_k}\}$ taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \geq k_0$ — tedy pro nekonečně mnoho indexů k — platí $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$, což znamená, že a je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$. $\square$

Z 1.3.14 plyne: Je-li $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, pak a je jediným hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$.

1.3.17 Lemma

Buď $\{a_n\}$ posloupnost a M množina hromadných bodů této posloupnosti. Nechť $M \neq \emptyset$. Je-li M shora (resp. zdola) ohraničená, pak existuje $\max M$ (resp. $\min M$).

D.: Podle 1.1.7(R14) existuje $a = \sup M$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak $a - \varepsilon < a$ a podle 1.1.6(s2*) existuje hromadný bod $m \in M$ takový, že $m > a - \varepsilon$. Tedy $\varepsilon_1 = m - a + \varepsilon > 0$.
Dále $m - \varepsilon_1 = m - (m - a + \varepsilon) = a - \varepsilon,\ m + \varepsilon_1 = m + (m - a + \varepsilon) \leq a + a - a + \varepsilon = a + \varepsilon$, neboť $a = \sup M \geq m$. Odtud plyne, že $(m - \varepsilon_1, m + \varepsilon_1) \subseteq (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.
Podle definice hromadného bodu leží v $(m - \varepsilon_1, m + \varepsilon_1)$ nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$, tedy i v $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$, což znamená, že a je hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$, $a \in M$ a tedy podle 1.1.6.4 $a = \max M$.
Druhá část tvrzení se dokáže analogicky. $\square$

1.3.18 Věta (Bolzano [1781 – 1848], Weierstrass [1815 – 1897])

Každá ohraničená posloupnost má alespoň jeden hromadný bod.

D.: Buď $\{a_n\}$ ohraničená posloupnost, $h \leq a_n \leq H$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
Položme $M_k = \{a_n : n > k\}$. $M_k \neq \emptyset$, M_k je shora ohraničená (H je její horní závora). Existuje tedy $b_k = \sup M_k$. Zřejmě $b_k \geq h$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a poněvadž $M_k \supseteq M_{k+1}$, platí $b_k \geq b_{k+1}$. Tedy posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je nerostoucí a zdola ohraničená. Podle 1.3.9 je $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergentní, $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$.
Ukážeme, že b je hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$.
Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Existuje $k_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $k \geq k_0$ jest $|b_k - b| < \varepsilon$, neboli $b_k < b + \varepsilon$. Pro $k \geq k_0$ je také $b_k = \sup\{a_n : n \geq k\} \geq a_k$. Celkem $a_k \leq b_k < b + \varepsilon$.
Připusťme, že b není hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$. Pak v intervalu $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ leží pouze konečný počet členů této posloupnosti. To vzhledem k poslední nerovnosti znamená, že existuje $n_0 \geq k_0$ takové, že pro $k \geq n_0$ je $a_k \leq b - \varepsilon$. Tedy i $b_k = \sup\{a_n : n \geq k\} \leq b - \varepsilon$.
Podle 1.3.5.1 je $b = \lim\limits_{k\to\infty} b_k \leq b - \varepsilon$, což je spor. $\square$

1.3.19 Důsledky

1. Z každé ohraničené posloupnosti lze vybrat posloupnost konvergentní.

   D.: plyne z 1.3.16. $\square$

2. Je-li množina hromadných bodů posloupnosti prázdná, je posloupnost neohraničená.

1.3.20 Definice

Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost a M množina jejích hromadných bodů.

- Nechť $M \neq \emptyset$. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ ohraničená shora, klademe $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup a_n = \max M$, je-li $\{a_n\}$ ohraničená zdola, klademe $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf a_n = \min M$. Není-li $\{a_n\}$ ohraničená shora, klademe $\limsup a_n = \infty$, není-li $\{a_n\}$ ohraničená zdola, klademe $\liminf a_n = -\infty$.
- Nechť $M = \emptyset$. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ ohraničená shora, klademe $\limsup a_n = \liminf a_n = -\infty$, je-li $\{a_n\}$ ohraničená zdola, klademe $\limsup a_n = \liminf a_n = \infty$. Není-li $\{a_n\}$ ohraničená shora ani zdola, klademe $\limsup a_n = \infty$, $\liminf a_n = -\infty$.

Číslo $\limsup a_n$ se nazývá *limes superior posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, číslo $\liminf a_n$ se nazývá *limes inferior posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Stručně: $\limsup a_n$ je největší hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$, pokud je tato posloupnost ohraničená shora,
$\liminf a_n$ je nejmenší hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$, pokud je tato posloupnost ohraničená zdola.
1.3.17 ukazuje, že definice je korektní.

Analogickou úvahou jako v důkazu věty 1.3.18 lze ukázat, že

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} &= \lim_{k\to\infty}\left(\sup\{a_n : n > k\}\right),\\ \liminf_{n\to\infty} &= \lim_{k\to\infty}\left(\inf\{a_n : n > k\}\right).\end{aligned}$$

Zřejmě platí: $\liminf a_n \leq \limsup a_n$. $\liminf a_n = \limsup a_n$ právě tehdy, když existuje vlastní nebo nevlastní limita $\lim a_n$.

1.3.21 Definice

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *cauchyovská*, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ a každé $m \geq n_0$ platí $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

1.3.22 Věta (Cauchyovo – Bolzanovo kriterium konvergence)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní právě tehdy, když je cauchyovská.

D.:

„$\Rightarrow$“ Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní, $\lim a_n = a$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné.
K $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ a pro $m \geq n_0$ je $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Tedy pro $n \geq n_0$ a $m \geq n_0$ platí $|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

„$\Leftarrow$“ Nechť $\{a_n\}$ je cauchyovská. K číslu 1 existuje $\tilde{n}$ takové, že pro $n \geq \tilde{n}$ platí $|a_n - a_{\tilde{n}}| < 1$, tedy $a_{\tilde{n}} - 1 < a_n < a_{\tilde{n}} + 1$.
Položme $h = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{\tilde{n}-1}, a_{\tilde{n}} - 1\}$, $H = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{\tilde{n}-1}, a_{\tilde{n}} + 1\}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $h \leq a_n \leq H$, tedy $\{a_n\}$ je ohraničená a podle 1.3.19.1 existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a \in \mathbb{R}$.
Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K $\frac{\varepsilon}{2}$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \geq k_0$ je $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Současně existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $m, n \geq n_0$ je $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Buď $n \geq n_0$ libovolné. Zvolme $k_1 \geq k_0$ takové, že $n_{k_1} \geq n_0$. Pak
$|a_n - a| = |a_n - a_{n_{k_1}} + a_{n_{k_1}} - a| \leq |a_n - a_{n_{k_1}}| + |a_{n_{k_1}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$,
tedy $\lim a_n = a$.

□

1.4 Diferenční a sumační počet

1.4.1 Definice

Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost. Posloupnost $\{\Delta a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jejíž členy jsou dány vztahem $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ nazýváme *(první) diference (vpřed)* posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Zřejmě platí: Posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí (klesající) právě tehdy, když všechny členy posloupnosti $\{\Delta a_n\}$ jsou kladné (záporné).

1.4.2 Definice

Řekneme, že $k \in \mathbb{N}$ je *uzel posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže $a_k = 0$ nebo $a_k a_{k-1} < 0$.

1.4.3 Věta

Buď $\{a_n\}$ posloupnost, $k \in \mathbb{N}$. Jestliže $a_k > a_{k-1}$ a $a_k \geq a_{k+1}$, pak k je uzel posloupnosti $\{\Delta a_n\}$; jestliže $a_k < a_{k-1}$ a $a_k \leq a_{k+1}$, pak k je uzel posloupnosti $\{\Delta a_n\}$.

D.: Nechť $a_k > a_{k-1},\ a_k > a_{k+1}$. Pak $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k < 0$, $\Delta a_{k-1} = a_k - a_{k-1} > 0$, tedy $(\Delta a_k)(\Delta a_{k-1}) < 0$.
Nechť $a_k > a_{k-1},\ a_k = a_{k+1}$. Pak $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k = 0$.
Analogicky lze ukázat platnost druhého tvrzení. □

1.4.4 Věta

Buďte $\{a_n\}, \{b_n\}$ posloupnosti, $c \in \mathbb{R}$. Pak platí

1. $\Delta(ca_n) = c\Delta a_n$,
2. $\Delta(a_n + b_n) = \Delta a_n + \Delta b_n$,
3. $\Delta(a_n - b_n) = \Delta a_n - \Delta b_n$,
4. $\Delta(a_n b_n) = (\Delta a_n)b_{n+1} + a_n(\Delta b_n) = (\Delta a_n)b_n + a_{n+1}(\Delta b_n)$,
5. Pokud $b_n b_{n+1} \neq 0$, pak $\Delta\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{(\Delta a_n)b_n - a_n(\Delta b_n)}{b_n b_{n+1}}$.

D.:

1. $\Delta(ca_n) = ca_{n+1} - ca_n = c(a_{n+1} - a_n) = c\Delta a_n$.
2. $\Delta(a_n + b_n) = (a_{n+1} + b_{n+1}) - (a_n + b_n) = (a_{n+1} - a_n) + (b_{n+1} - b_n) = \Delta a_n + \Delta b_n$.
3. Plyne z 1. a 2.
4. Platí

$$\begin{aligned}\Delta(a_n b_n) &= a_{n+1}b_{n+1} - a_n b_n = a_{n+1}b_{n+1} - a_n b_{n+1} + a_n b_{n+1} - a_n b_n = \\ &= (a_{n+1} - a_n)b_{n+1} + a_n(b_{n+1} - b_n) = (\Delta a_n)b_n + a_{n+1}(\Delta b_n)\,,\end{aligned}$$

   takže první vztah platí. Druhý plyne z prvního a z komutativity násobení.

5. $\Delta\left(\dfrac{1}{b_n}\right) = \dfrac{1}{b_{n+1}} - \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{b_n - b_{n+1}}{b_n b_{n+1}} = -\dfrac{\Delta b_n}{b_n b_{n+1}}$.
   Podle 4. nyní je $\Delta\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\Delta a_n}{b_{n+1}} + a_n \Delta\left(\dfrac{1}{b_n}\right) = \dfrac{\Delta a_n}{b_{n+1}} - a_n \dfrac{\Delta b_n}{b_n b_{n+1}} = \dfrac{(\Delta a_n)b_n - a_n(\Delta b_n)}{b_n b_{n+1}}$.

□

1.4.5 Definice

Buďte $\{a_n\}$ posloupnost, $m, k \in \mathbb{N},\ m \leq k$. *Sumu členů posloupnosti* $\{a_n\}$ *v mezích od* m *do* k definujeme vztahem

$$\sum_{i=m}^{k} a_i \;=\; a_m + a_{m+1} + \cdots + a_k\,.$$

1.4.6 Věta

Buďte $\{a_n\},\ \{b_n\}$ posloupnosti, $c \in \mathbb{R},\ m, k \in \mathbb{N},\ m \leq k$. Pak

$$\sum_{i=m}^{k} c a_i \;=\; c \sum_{i=m}^{k} a_i\,,$$

$$\sum_{i=m}^{k} (a_i \pm b_i) \;=\; \sum_{i=m}^{k} a_i \pm \sum_{i=m}^{k} b_i\,.$$

D.: Plyne přímo z distributivního a asociativního zákona. □

1.4.7 Věta

Buďte $\{a_n\}$ posloupnost, $m, k \in \mathbb{N},\ m \leq k$. Označme $[a_n]_{n=m}^{k} = a_k - a_m$. Pak platí

$$\sum_{i=m}^{k} \Delta a_i \;=\; [a_i]_{i=m}^{k+1}\,.$$

D.: $\sum\limits_{i=m}^{k} \Delta a_n = (a_{m+1} - a_m) + (a_{m+2} - a_{m+1}) + \cdots + (a_k - a_{k-1}) + (a_{k+1} - a_k) = a_{k+1} - a_m$. □

Věta ukazuje, že diference a sumace jsou v jistém smyslu inversní operátory.

1.4.8 Věta (Sumace "per partes")

Buďte $\{a_n\},\ \{b_n\}$ posloupnosti, $m, k \in \mathbb{N},\ m \leq k$. Pak platí

$$\sum_{i=m}^{k} a_i \Delta b_i \;=\; [a_n b_n]_{n=m}^{k+1} - \sum_{i=m}^{k} (\Delta a_i) b_{i+1}\,.$$

D.: Podle 1.4.7 a 1.4.4.4 platí

$$[a_n b_n]_{n=m}^{k+1} \;=\; \sum_{i=m}^{k} \Delta(a_i b_i) \;=\; \sum_{i=m}^{k} \left((\Delta a_i) b_{i+1} + a_i \Delta b_i\right) \;=\; \sum_{i=m}^{k} (\Delta a_i) b_{i+1} + \sum_{i=m}^{k} a_i \Delta b_i\,.$$

□

Příklad: Najděte součet $1 + 4 + 9 + \cdots + n^2$.

Ř.:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^2 \;&=\; \sum_{i=1}^{n} i^2((i+1) - i) \;=\; \sum_{i=1}^{n} i^2 \Delta i \;=\; \left[i^3\right]_{i=1}^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta i^2\right)(i+1) \;= \\
&=\; (n+1)^3 - 1 - \sum_{i=1}^{n} \left((i+1)^2 - i^2\right)(i+1) \;=\; n^3 + 3n^2 + 3n - \sum_{i=1}^{n} (2i+1)(i+1) \;= \\
&=\; n^3 + 3n^2 + 3n - \sum_{i=1}^{n} (2i^2 + 3i + 1) \;=\; n^3 + 3n^2 + 3n - \sum_{i=1}^{n} 1 - 3\sum_{i=1}^{n} i - 2\sum_{i=1}^{n} i^2 \;= \\
&=\; n^3 + 3n^2 + 3n - n - 3\frac{n(n+1)}{2} - 2\sum_{i=1}^{n} i^2 \;=\; \frac{2n^3 + 6n^2 + 4n - 3n^2 - 3n}{2} - 2\sum_{i=1}^{n} i^2\,.
\end{aligned}$$

Odtud
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 \;=\; \frac{2n^3+3n^2+n}{6} \;=\; \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$
□

1.4.9 Věta (Sztolz [1842 – 1903])

1. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ryze monotonní posloupnost taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = c \in \mathbb{R}^*$, pak také $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c$.
2. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $\{b_n\}$ je neohraničená rostoucí posloupnost. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = c \in \mathbb{R}^*$, pak také $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c$.

D.: 1. Nechť pro určitost je $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající.

- $c \in \mathbb{R}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N},\ k \geq n_0$ platí
$$c-\varepsilon < \frac{a_{k+1}-a_k}{b_{k+1}-b_k} = \frac{a_k-a_{k+1}}{b_k-b_{k+1}} < c+\varepsilon,$$
a poněvadž $b_{k+1} < b_k$, platí
$$(c-\varepsilon)(b_k-b_{k+1}) < a_k - a_{k+1} < (c+\varepsilon)(b_k-b_{k+1}).$$
Tato nerovnost platí pro každé $k \geq n_0$, tedy pro každé $m, n \in \mathbb{N},\ m > n > n_0$ platí:
$$\begin{array}{rcccl} (c-\varepsilon)(b_n-b_{n+1}) & < & a_n-a_{n+1} & < & (c+\varepsilon)(b_n-b_{n+1}) \\ (c-\varepsilon)(b_{n+1}-b_{n+2}) & < & a_{n+1}-a_{n+2} & < & (c+\varepsilon)(b_{n+1}-b_{n+2}) \\ & \vdots & & \vdots & \\ (c-\varepsilon)(b_{m-1}-b_m) & < & a_{m-1}-a_m & < & (c+\varepsilon)(b_{m-1}-b_m). \end{array}$$
Seštením těchto nerovností dostaneme
$$(c-\varepsilon)(b_n-b_m) < a_n - a_m < (c+\varepsilon)(b_n-b_m).$$
Podle 1.3.5.2 a 1.3.6 je $\lim\limits_{m\to\infty}(c-\varepsilon)(b_n-b_m) = (c-\varepsilon)(b_n - \lim\limits_{m\to\infty} b_m) = (c-\varepsilon)b_n$. Podobně $\lim\limits_{m\to\infty}(c+\varepsilon)(b_n-b_m) = (c+\varepsilon)b_n,\ \lim\limits_{m\to\infty}(a_n-a_m) = a_n$. Tedy podle 1.3.5.1 je
$$(c-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (c+\varepsilon)b_n\ .$$
Poněvadž $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, je $b_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a tedy
$$c-\varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq c+\varepsilon\ .$$
Tato nerovnost platí pro každé $n > n_0$, což znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c$.
- $c = \infty$. Buď $K \in \mathbb{R}$ libovolné. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N},\ k \geq n_0$ platí
$$\frac{a_{k+1}-a_k}{b_{k+1}-b_k} = \frac{a_k-a_{k+1}}{b_k-b_{k+1}} > K\ .$$
Odtud pro každé $m, n \in \mathbb{N},\ m > n > n_0$ dostaneme:
$$\begin{array}{rcll} a_k - a_{k+1} & > & K(b_k-b_{k+1}) & \quad / \ \sum\limits_{k=n}^{m-1} \\ a_n - a_m & > & K(b_n-b_m) & \quad / \ \lim\limits_{m\to\infty} \\ a_n & \geq & Kb_n & \quad / \ \dfrac{1}{b_n} \\ \dfrac{a_n}{b_n} & \geq & K\ , & \end{array}$$

což znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$.

- $c = -\infty$. Analogicky jako předchozí případ.

Je-li $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí, provedeme důkaz analogicky.

2.
- Nejdříve dokážeme pomocné tvrzení: Jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ reálná čísla a $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ kladná reálná čísla, $m, M \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ platí $m < \dfrac{\alpha_i}{\beta_i} < M$, pak

$$m < \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k}{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k} < M\,.$$

Důkaz provedem úplnou indukcí vzhledem ke k.
$m < \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} < M$ je splněno triviálně.
Z indukčního předpokladu $m < \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1}}{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{k-1}} < M$, neboli

$$m(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{k-1}) < \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1} < M(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{k-1})$$

a z předpokladu tvrzení

$$m\beta_k < \alpha_k < M\beta_k$$

dostaneme sečtením dokazovanou nerovnost.

- $c \in \mathbb{R}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_1$ platí

$$c - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < c + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Poněvadž $\{b_n\}$ je podle předpokladu neohraničená a rostoucí, lze bez újmy na obecnosti předpokládat $b_{n_1} \geq 0$.
Položme $\alpha_1 = a_{n_1+1} - a_{n_1}$, $\alpha_1 = a_{n_1+2} - a_{n_1+1}, \ldots, \alpha_k = a_n - a_{n-1}$,
$\beta_1 = b_{n_1+1} - b_{n_1}$, $\beta_1 = b_{n_1+2} - b_{n_1+1}, \ldots, \beta_k = b_n - b_{n-1}$.
Podle pomocného tvrzení je $c - \dfrac{\varepsilon}{2} < \dfrac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}} < c + \dfrac{\varepsilon}{2}$, neboli

$$\left| \frac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}} - c \right| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Dále platí

$$\begin{aligned}
\left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| &= \left| \frac{a_n - a_{n_1}}{b_n} + \frac{a_{n_1}}{b_n} - c \right| = \left| \frac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}} \frac{b_n - b_{n_1}}{b_n} + \frac{a_{n_1}}{b_n} - c \right| = \\
&= \left| \left(\frac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}} - c \right) \frac{b_n - b_{n_1}}{b_n} + \frac{b_n - b_{n_1}}{b_n} c + \frac{a_{n_1}}{b_n} - c \right| = \\
&= \left| \left(\frac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}} - c \right) \frac{b_n - b_{n_1}}{b_n} + \frac{(b_n - b_{n_1})c + a_{n_1} - cb_n}{b_n} \right| = \\
&= \left| \left(\frac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}} - c \right) \left(1 - \frac{b_{n_1}}{b_n} \right) + \frac{a_{n_1} - cb_{n_1}}{b_n} \right| \leq \\
&\leq \left| \frac{a_n - a_{n_1}}{b_n - b_{n_1}} - c \right| \left| 1 - \frac{b_{n_1}}{b_n} \right| + \left| \frac{a_{n_1} - cb_{n_1}}{b_n} \right|\,.
\end{aligned}$$

Poněvadž podle 1.3.12.5 a 1.3.12.4 je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{n_1}}{b_n} = 0$ a pro $n > n_1$ je $\dfrac{b_{n_1}}{b_n} \geq 0$, tak existuje $n_2 \in \mathbb{N},\ n_2 > n_1$ takové, že pro $n \geq n_2$ platí $0 \leq 1 - \dfrac{b_{n_1}}{b_n} \leq 1$, neboli

$$\left| 1 - \frac{b_{n_1}}{b_n} \right| \leq 1\,.$$

Poněvadž $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n_1} - cb_{n_1}}{b_n} = 0$, existuje $n_3 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_3$ platí

$$\left| \frac{a_{n_1} - cb_{n_1}}{b_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Tedy pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ platí

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,,$$

což znamená, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$.

- $c = \infty$. Buďte $h \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolná čísla.
Poněvadž $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \infty$, existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $k \geq n_1$ je

$$\frac{a_{k+1} - a_k}{b_{k+1} - b_k} > 2(h + \varepsilon) \,,$$

neboli vzhledem k tomu, že $b_{k+1} - b_k > 0$

$$a_{k+1} - a_k > 2(h + \varepsilon)(b_{k+1} - b_k) \,.$$

Sečtením těchto nerovnic pro k od n_1 do $n - 1$ dostaneme

$$\begin{aligned} a_n - a_{n_1} &> 2(h + \varepsilon)(b_n - b_{n_1}) \\ \frac{a_n}{b_n} &> 2(h + \varepsilon)\left(1 - \frac{b_{n_1}}{b_n}\right) + \frac{a_{n_1}}{b_n} \,. \end{aligned}$$

Poněvadž podle 1.3.12.5 a 1.3.12.4 je $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n_1}}{b_n} = 0$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n_1}}{b_n} = 0$, existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_2$ platí

$$\left| \frac{b_{n_1}}{b_n} \right| < \frac{1}{2}, \quad \text{neboli} \quad 1 - \frac{b_{n_1}}{b_n} > \frac{1}{2}$$

a existuje $n_3 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_3$ platí

$$\frac{a_{n_1}}{b_n} > -\varepsilon \,.$$

Tedy pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ platí

$$\frac{a_n}{b_n} > 2(h + \varepsilon)\frac{1}{2} - \varepsilon = h \,,$$

což znamená, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

- $c = -\infty$. Analogicky jako předchozí případ.

□

Poznámky:

- Předpoklad o ryzí monotonii posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ v první části věty obecně nelze vynechat.

Je-li například $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}}{(-1)^{n+1}(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \frac{n - n - 1}{n + n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 1} = 0$ podle 1.3.12.4, avšak $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{n}} = (-1)^n$ a posloupnost $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$ je oscilující.

• Jestliže neexistuje vlastní ani nevlastní $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ a ostatní předpoklady Sztolzovy věty jsou splněny, nelze nic tvrdit o existenci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

Je-li například $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\{b_n\}$ je klesající a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Přitom

$$\frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} - \dfrac{(-1)^n}{n^2}}{\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}} = \frac{(-1)^{n+1}\dfrac{n^2+(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}}{\dfrac{n-(n+1)}{n(n+1)}} = (-1)^n\frac{2n^2+2n+1}{n^2+n}$$

a posloupnost $\left\{(-1)^n\dfrac{2n^2+2n+1}{n^2+n}\right\} = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{13}{6}, -\frac{25}{12}, \frac{41}{20}, -\frac{61}{30}, \frac{85}{42}, \dots\right\}$ nemá limitu. Ale

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(-1)^n}{n^2}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0\,.$$

Příklad: Rozhodněte, zda posloupnost $\left\{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\right\}$ je konvergentní a pokud ano, určete její limitu.

Ř.: Označme $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$ a

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{4(n+\frac{1}{2})} = \frac{1}{4}+\frac{1}{8(n+\frac{1}{2})} \leq \\ &\leq \frac{1}{4}+\frac{1}{8(1+\frac{1}{2})} \leq \frac{1}{4}+\frac{1}{12} = \frac{5}{12} < 1\,,\end{aligned}$$

neboli $a_{n+1} < a_n$. To znamená, že $\{a_n\}$ je klesající, zdola ohraničená posloupnost a tedy podle 1.3.9 existuje $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$.

Posloupnost $\{(2n)!\}$ je rostoucí a neohraničená, tedy

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2-(n!)^2}{(2n+2)!-(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2((n+1)^2-1)}{((2n)!)^2((2n+2)(2n+1)-1)} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{4n^2+6n+1} = a\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{4+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}} = a\frac{1}{4}\,,\end{aligned}$$

neboli $a = \frac{1}{4}a$. Odtud $a = 0$. □

1.5 Elementární funkce

A. Polynomy

1.5.1 Definice

Buďte $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. *Polynom* (*racionální funkce celistvá*) je funkce tvaru $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$.
Číslo n se nazývá *stupeň polynomu*, značíme $n = \operatorname{st} P$.
Čísla $a_0, a_1, \dots, a_n$ se nazývají *koeficienty polynomu*.
Je-li $\operatorname{st} P = 1$, polynom se nazývá *lineární*.
Je-li $\operatorname{st} P = 2$, polynom se nazývá *kvadratický*.
Je-li $\operatorname{st} P = 3$, polynom se nazývá *kubický*.

Je-li $\operatorname{st} P = 4$, polynom se nazývá *bikvadratický*.
Číslo 0 nazveme *nulovým polynomem*. Nepřiřazujeme mu stupeň.

$$\operatorname{Dom} P = \mathbb{R},\ \operatorname{Im} P = \begin{cases} (-\infty, \infty), & \operatorname{st} P \text{ je lichý} \\ [a, \infty), & \operatorname{st} P \text{ je sudý},\ a_n > 0 \\ (-\infty, a], & \operatorname{st} P \text{ je sudý},\ a_n < 0 \end{cases}.$$

Komplexní čísla: $\mathbb{C} = \{a + ib :\ a, b \in \mathbb{R}\}$, kde $i^2 = -1$
$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_2 b_1 + a_1 b_2)$
Je-li $\alpha = a + ib \in \mathbb{C},\ \beta \in \mathbb{C}$ pak
$\bar{\alpha} = a - ib$ — číslo komplexně sdružené (konjugované)
$|\alpha| = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ — absolutní hodnota (modul) komplexního čísla
$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$
$\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$
$\overline{\alpha^n} = \bar{\alpha}^n$ pro $n \in \mathbb{N}$
$\alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow \alpha = \bar{\alpha}$

Množina komplexních čísel s operacemi $+$, $\cdot$ splňuje (R1) – (R9) z 1.1.7. Tvoří tedy pole. Toto pole nelze uspořádat.

1.5.2 Definice

Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ se nazývá *kořen* (*nulový bod*) polynomu P, jestliže platí $P(\alpha) = 0$.
Je-li α kořenem polynomu P, pak lineární polynom $x - \alpha$ nazveme *kořenovým faktorem* polynomu P.

1.5.3 Základní věta algebry

Každý polynom stupně $n \geq 1$ s komplexními koeficienty má komplexní kořen.

Tato věta je známá od 17. století. První (chybný) pokus o důkaz publikoval d'Alembert roku 1746, větu dokázal Gauss roku 1799.

1.5.4 Věta

Buď $P(x)$ polynom, $\operatorname{st} P = n \geq 1$. Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ je kořenem polynomu P právě tehdy, když existuje polynom Q, $\operatorname{st} Q = n - 1$ takový, že $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.

D.:

„$\Rightarrow$“ Nechť $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, α je kořenem P. Pak

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x) - 0 = P(x) - P(\alpha) = \\ &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 - (a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0) = \\ &= a_n (x^n - \alpha^n) + a_{n-1} (x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \cdots + a_1 (x - \alpha) + a_0 (1 - 1). \end{aligned}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $(x^k - \alpha^k) : (x - \alpha) = x^{k-1} + x^{k-2}\alpha + x^{k-3}\alpha^2 + \cdots + x\alpha^{k-2} + \alpha^{k-1}$. Tedy $P(x) = a_n (x-\alpha)(x^{n-1} + x^{n-2}\alpha + \cdots + \alpha^{n-1}) + a_{n-1}(x-\alpha)(x^{n-2} + x^{n-3}\alpha + \cdots + \alpha^{n-2}) + \cdots + a_1 (x-\alpha)$.
Označíme $Q(x) = a_n (x^{n-1} + x^{n-2}\alpha + \cdots + \alpha^{n-1}) + a_{n-1}(x^{n-2} + x^{n-3}\alpha + \cdots + \alpha^{n-2}) + \cdots + a_1$ a dostaneme tvrzení.

„$\Leftarrow$“ je zřejmé.

$\square$

$P(x)$, $\operatorname{st} P = n \geq 1$. Podle 1.5.3 má P kořen α_1, a tedy $P(x) = (x - \alpha_1)Q_1(x)$.
Je-li $\operatorname{st} Q_1 \geq 1$, pak $Q_1(x) = (x - \alpha_2)Q_2(x)$, tedy $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)Q_2(x)$.
Analogicky pokračujeme a po n krocích dostaneme $P(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$.
Může se stát, že $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k$, $k \leq n$. Pak $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_k) = (x - \alpha_1)^k$. Celkem $P(x) = a_n (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \cdots (x - \alpha_m)^{k_m}$, přičemž $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$, $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$.

1.5.5 Definice

Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ se nazývá *k-násobný kořen* polynomu $P(x)$, jestliže $P(x) = (x-\alpha)^k Q(x)$, kde $Q(x)$ je polynom nemající kořen α.
(1-násobný kořen se nazývá *jednoduchý*.)

1.5.6 Věta (o rozkladu polynomu na kořenové faktory)

Nechť $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom, st $P = n \geq 1$. Nechť $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ jsou všechny jeho navzájem různé kořeny, přičemž α_1 je k_1-násobný, α_2 je k_2-násobný,..., α_m je k_m-násobný. Pak

$$
\begin{aligned}
&P(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_m)^{k_m},\\
&k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{N},\ k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n\,.
\end{aligned}
$$

Důsledek: Polynom stupně n má právě n kořenů, jestliže k-násobný kořen počítáme k krát.

1.5.7 Příklad

$$
\begin{aligned}
P(x) &= x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 = x^3(x^2+x+1) - (x^2+x+1) = (x^3-1)(x^2+x+1) = \\
&= (x-1)(x^2+x+1)(x^2+x+1) = (x-1)\left(x - \left(-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \left(x - \left(-\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2
\end{aligned}
$$

1.5.8 Věta

Nechť polynom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ má reálné koeficienty a komplexní kořen α. Pak má také komplexně sdružený kořen $\bar{\alpha}$ a násobnosti kořenů α a $\bar{\alpha}$ jsou stejné.

D.: Pro $x \in \mathbb{R}$ je $\bar{x} = x$ a tedy $\overline{P(x)} = \bar{a}_n \bar{x}^n + \bar{a}_{n-1}\bar{x}^{n-1} + \cdots + \bar{a}_0 = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = P(x)$.
Podle 1.5.6 je $P(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_m)^{k_m}$ a tedy
$\overline{P(x)} = a_n(x-\bar{\alpha}_1)^{k_1}(x-\bar{\alpha}_2)^{k_2}\cdots(x-\bar{\alpha}_m)^{k_m}$. Z rovnosti $\overline{P(x)} = P(x)$ plyne tvrzení. □

Polynom s reálnými koeficienty se nazývá *reálný polynom*.

1.5.9 Věta (o rozkladu reálného polynomu v reálném oboru na ireducibilní polynomy)

Buď $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ reálný polynom, st $P = n \geq 1$. Nechť $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ jsou všechny jeho reálné kořeny, přičemž α_1 je k_1-násobný, ..., α_m je k_m-násobný. Nechť $a_1 \pm ib_1, a_2 \pm ib_2, \ldots, a_r \pm ib_r$ jsou všechny jeho imaginární kořeny, přičemž $a_1 \pm ib_1$ je l_1-násobný, ..., $a_r \pm ib_r$ je l_r násobný. Pak je

$$
\begin{aligned}
&P(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_m)^{k_m}[(x-a_1)^2+b_1^2]^{l_1}[(x-a_2)^2+b_2^2]^{l_2}\cdots[(x-a_r)^2+b_2^r]^{l_r}\,,\\
&k_1 + k_2 + \cdots + k_m + 2l_1 + 2l_2 + \cdots + 2l_r = n\,.
\end{aligned}
$$

D.: Podle 1.5.6 a 1.5.8 v rozkladu polynomy $P(x)$ vystupuje součin faktorů
$(x-(a_j+ib_j))^{l_j}(x-(a_j-ib_j))^{l_j} = (x^2 - (a_j+ib_j)x - (a_j-ib_j)x + (a_j+ib_j)(a_j-ib_j))^{l_j} =$
$= (x^2 - 2a_j x + a_j^2 + b_j^2 + i(a_j b_j - a_j b_j))^{l_j} = (x^2 - 2a_j x + a_j^2 + b_j^2)^{l_j} = [(x-a_j)^2 + b_j^2]^{l_j}$. □

Faktory $(x-a_j)^2 + b_j^2$ se někdy nahrazují kvadratickým polynomem $x^2 + p_j x + q_j$ se záporným diskriminantem $p_j^2 - 4q_j$.

1.5.10 Příklad

Viz též 1.5.7.
$x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 = (x-1)\left(x - \left(-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \left(x - \left(-\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 = (x-1)\left(\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}\right)^2$
nebo $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 = (x-1)(x^2+x+1)^2$.

B. Racionální funkce

1.5.11 Definice

Buďte $P(x),\ Q(x)$ nenulové polynomy. Funkce $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se nazývá *racionální lomená funkce.*
Je-li $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, funkce R se nazývá *ryze lomená*; je-li $\operatorname{st} P \geq \operatorname{st} Q$, funkce R se nazývá *neryze lomená.*

$\operatorname{Dom} R = \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$, kde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ jsou všechny reálné kořeny polynomu $Q(x)$.

Je-li $R(x)$ neryze lomená, lze provést naznačené dělení. Výsledkem je polynom $S(x)$ a zbytek — polynom $T(x)$, který je buď nulový nebo $\operatorname{st} T < \operatorname{st} Q$. Tedy $R(x) = S(x)$ nebo $R(x) = S(x) + \dfrac{T(x)}{Q(x)}$. Odtud plyne, že platí

1.5.12 Poznámka

Neryze lomená funkce je buď polynomem nebo ji lze vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené funkce.

1.5.13 Lemma

Buď $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ryze lomená racionální funkce a nechť α je reálný k-násobný kořen polynomu $Q(x)$, tj. $Q(x) = (x-\alpha)^k Q_1(x),\ Q_1(\alpha) \neq 0$. Pak existují reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_k$ taková, že pro všechna $x \in \operatorname{Dom} R$ platí

$$R(x) = \frac{P(x)}{(x-\alpha)^k Q_1(x)} = \frac{a_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{a_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,,$$

kde $P_1(x)$ je buď nulový polynom, nebo $\operatorname{st} P_1 < \operatorname{st} Q_1$.

D.: Pro každé $a \in \mathbb{R}$ je $\dfrac{P(x)}{(x-\alpha)^k Q_1(x)} = \dfrac{a}{(x-\alpha)^k} + \dfrac{P(x) - aQ_1(x)}{(x-\alpha)^k Q_1(x)}$.
Položme $a = a_k = \dfrac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$. Pak $P(\alpha) - a_k Q_1(\alpha) = 0$.
Je-li $P(x) - a_k Q_1(x)$ nulový polynom, tvrzení platí.
Nechť $P(x) - a_k Q_1(x)$ není nulový. Pak α je jeho kořen a podle 1.5.4 je $P(x) - \alpha_k Q_1(x) = (x-\alpha) P_k(x)$,
$\dfrac{P(x)}{(x-\alpha)^k Q_1(x)} = \dfrac{a_k}{(x-\alpha)^k} + \dfrac{P_k(x)}{(x-\alpha)^{k-1} Q_1(x)}$.
Stejný postup aplikujeme na racionální funkci $\dfrac{P_k(x)}{(x-\alpha)^{k-1} Q_1(x)}$ a po k krocích dostaneme tvrzení. □

1.5.14 Lemma

Buď $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ryze lomená racionální funkce a nechť $\alpha = a + ib$ je imaginární r-násobný kořen polynomu $Q(x)$, tj. $Q(x) = [(x-a)^2 + b^2]^r Q_1(x),\ Q_1(a+ib) \neq 0$. Pak existují reálná čísla $m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots, m_r, n_r$, taková, že pro všechna $x \in \operatorname{Dom} R$ platí

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{P(x)}{[(x-a)^2+b^2]^r Q_1(x)} = \\ &= \frac{m_r x + n_r}{[(x-a)^2+b^2]^r} + \frac{m_{r-1} x + n_{r-1}}{[(x-a)^2+b^2]^{r-1}} + \cdots + \frac{m_2 x + n_2}{[(x-a)^2+b^2]^2} + \frac{m_1 x + n_1}{(x-a)^2+b^2} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,, \end{aligned}$$

kde $P_1(x)$ je buď nulový polynom, nebo $\operatorname{st} P_1 < \operatorname{st} Q_1$.

D.: Pro každá dvě $m, n \in \mathbb{R}$ je $\dfrac{P(x)}{[(x-a)^2+b^2]^r Q_1(x)} = \dfrac{mx+n}{[(x-a)^2+b^2]^r} + \dfrac{P(x)-(mx+n)Q_1(x)}{[(x-a)^2+b^2]^r Q_1(x)}$.

Nechť $\dfrac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} = \dfrac{P(a+ib)}{Q_1(a+ib)} = p + iq$. Položme $m = m_r = \dfrac{q}{b}$, $n = n_r = \dfrac{pb-qa}{b}$. Pak je

$$\begin{aligned} P(\alpha) - (m_r\alpha + n_r)Q_1(\alpha) &= P(\alpha) - \left(\frac{q}{b}a + i\frac{q}{b}b + p - \frac{qa}{b}\right) Q_1(\alpha) \;=\; P(\alpha) - (p+iq)Q_1(\alpha) \;= \\ &= P(\alpha) - \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} Q_1(\alpha) \;=\; 0\ . \end{aligned}$$

Je-li $P(x) - (m_r x + n_r)Q_1(x)$ nulový polynom, tvrzení platí.
Nechť $P(x) - (m_r x + n_r)Q_1(x)$ není nulový. Pak je číslo α jeho kořenem. Podle 1.5.8 je také $\bar{\alpha}$ jeho kořenem a $P(x) - (m_r x + n_r)Q_1(x) = (x-\alpha)(x-\bar{\alpha})P_r(x) = [(x-a)^2+b^2]P_r(x)$,

$$\frac{P(x)}{[(x-a)^2+b^2]^r Q_1(x)} = \frac{m_r x + n_r}{[(x-a)^2+b^2]^r} + \frac{P_r(x)}{[(x-a)^2+b^2]^{r-1}}\ .$$

Stejný postup aplikujeme na racionální funkci $\dfrac{P_r(x)}{[(x-a)^2+b^2]^{r-1}}$ a po r krocích obdržíme tvrzení. $\square$

Zlomky tvaru $\dfrac{a}{(x-\alpha)^k}$, $\dfrac{mx+n}{[(x-a)^2+b^2]^r - 1}$ nazýváme *parciální zlomky.*

Z 1.5.13 a 1.5.14 plyne

1.5.15 Věta (o rozkladu racionální funkce na parciální zlomky)

Každou ryze lomenou racionální funkci lze rozložit na součet parciálních zlomků. Každému reálnému k-násobnému kořenu α jmenovatele odpovídá skupina zlomků

$$\frac{a_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{a_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{a_1}{x-\alpha}$$

a každému imaginárnímu r-násobnému kořenu $a + ib$ jmenovatele odpovídá skupina zlomků

$$\frac{m_r x + n_r}{[(x-a)^2+b^2]^r} + \frac{m_{r-1}x + n_{r-1}}{[(x-a)^2+b^2]^{r-1}} + \cdots + \frac{m_2 x + n_2}{[(x-a)^2+b^2]^2} + \frac{m_1 x + n_1}{(x-a)^2+b^2}\ .$$

1.5.16 Poznámka

Koeficienty v rozkladu racionální funkce lze vypočítat postupem naznačeným v důkazech pomocných vět 1.5.13 a 1.5.14. V praxi se však používá *metoda neurčitých koeficientů*:

Napíšeme formální tvar rozkladu se zatím neurčenými konstantami. Celou rovnost vynásobíme polynomem $Q(x)$. Tím obdržíme rovnost mezi polynomy platnou pro všechna x s výjimkou kořenů $Q(x)$. Porovnáním určitých koeficientů na levé straně a neurčitých koeficientů na pravé straně obdržíme rovnice pro neznámé konstanty.

Do zmíněné rovnosti mezi polynomy lze též dosazovat konkrétní reálná nebo komplexní čísla. Výhodné je například dosazování reálných kořenů jmenovatele $Q(x)$.

Příklad: Rozložte na parciální zlomky funkci $\dfrac{3x^2-5x+8}{x^3-2x^2+x-2}$.

Ř.: Rozklad jmenovatele: $x^3 - 2x^2 + x - 2 = x^2(x-2) + x - 2 = (x^2+1)(x-2)$

Formální tvar rozkladu:
$$\begin{aligned} \frac{3x^2-5x+8}{x^3-2x^2+x-2} &= \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\ 3x^2-5x+8 &= A(x^2+1) + (Bx+C)(x-2) \\ 3x^2-5x+8 &= (A+B)x^2 + (C-2B)x + (A-2C) \end{aligned}$$

Dosadíme $x = 2$: $12 - 10 + 8 = A \cdot 5 \quad \rightarrow \quad A = 2$

Koeficient u x^0: $8 = A - 2C \quad \rightarrow \quad C = \dfrac{A-8}{2} = -3$

Koeficient u x^2: $3 = A + B \quad \rightarrow \quad B = 3 - A = 1$.

Celkem: $\dfrac{3x^2-5x+8}{x^3-2x^2+x-2} = \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{x-3}{x^2+1}$. $\square$

C. Funkce exponenciální a logaritmická

Jde o zavedení obecné mocniny a^x pro $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ x \in \mathbb{R}$.

$x = n \in \mathbb{N}\ :\ a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ krát}}$

$x = 0\ :\ a^0 = 1;$

$x = -n \in \mathbb{Z}\ :\ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$x = \dfrac{1}{n} \in \mathbb{Q}\ :\ a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ je číslo splňující $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a;$

$x = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}\ :\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

Pro všechna $x, y \in \mathbb{Q},\ a > 0$ platí:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$
$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a > 1,\ x < y \Rightarrow a^x < a^y$$
$$0 < a < 1,\ x < y \Rightarrow a^x > a^y$$

Poznamenejme, že podle 1.1.17 ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje posloupnost racionálních čísel $\{x_n\}$ s $\lim x_n = x$.

1.5.17 Lemma

Buď $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Je-li $\{x_n\}$ libovolná posloupnost racionálních čísel taková, že $\lim x_n = x$, pak existuje $\lim a^{x_n} = \alpha \in \mathbb{R}$. Při tom je $\alpha > 0$ a α nezávisí na volbě posloupnosti $\{x_n\}$.

D:
- Nechť $a > 1$. Buď $\{x_n\}$ neklesající posloupnost racionálních čísel s limitou x.
  Z $x_1 \le x_2 \le x_3 \cdots$ plyne $a^{x_1} \le a^{x_2} \le a^{x_3} \cdots$ a tedy $\{a^{x_n}\}$ je neklesající.
  Buď $t \in \mathbb{Q},\ t \ge x$. Pak $t \ge x_n$ pro každé n a tedy $a^t \ge a^{x_n}$ pro každé n, což znamená, že $\{a^{x_n}\}$ je shora ohraničená a tedy podle 1.3.4 existuje $\lim a^{x_n} = \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \ge a^{x_n} > 0$.
  Buď $\{y_n\}$ libovolná posloupnost racionálních čísel s limitou x.
  Položíme $z_n = y_n - x_n$. Pak $y_n = z_n + x_n$ a podle 1.3.6 je $\lim z_n = \lim y_n - \lim x_n = x - x = 0$, $a^{y_n} = a^{z_n + x_n} = a^{z_n} a^{x_n}$. Ukážeme, že $\lim a^{z_n} = 1$:
  Podle 1.3.8 je $\lim \sqrt[n]{a} = \lim a^{\frac{1}{n}} = 1$. Tedy $\lim a^{-\frac{1}{n}} = \lim \dfrac{1}{a^n} = 1$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro $n \ge n_1$ je $1 - \varepsilon < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$, a existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro $n \ge n_2$ je $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$.
  Tedy pro $m = \max\{n_1, n_2\}$ platí $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{m}} < 1 < a^{\frac{1}{m}} < 1 + \varepsilon$.
  Poněvadž $\lim z_n = 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \ge n_0$ je $-\frac{1}{m} < z_n < \frac{1}{m}$ a tedy
  $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{m}} < a^{z_n} < a^{\frac{1}{m}} < 1 + \varepsilon$, což znamená, že $\lim a^{z_n} = 1$.
- Nechť $a = 1$. Tvrzení je triviální, neboť $1^{x_n} = 1$ pro každé $x_n \in \mathbb{Q}$.
- Nechť $0 < a < 1$. Pak $b = \frac{1}{a} > 1$. Je-li $\{x_n\}$ libovolná posloupnost racionálních čísel s limitou x, pak podle první části důkazu existuje $\beta = \lim b^{x_n}$, přičemž $\beta > 0$ a β nezávisí na volbě posloupnosti $\{x_n\}$. Podle 1.3.6.5 existuje $\lim a^{x_n} = \lim \dfrac{1}{b^{x_n}} = \dfrac{1}{\beta}$. $\square$

1.5.18 Definice

Buď $a \in \mathbb{R},\ a > 0$. *Exponenciální funkce* $f(x) = a^x$ je definována pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisem $a^x = \lim a^{x_n}$, kde $\{x_n\}$ je libovolná posloupnost racionálních čísel s limitou x.

1.5.19 Věta

Nechť $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \ne 1$. Exponenciální funkce $f(x) = a^x$ má vlastnosti:

1. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R},\ \operatorname{Im} f \subseteq (0, \infty)$.

2. Pro každá dvě $x, y \in \mathbb{R}$ platí: $a^x a^y = a^{x+y}$,

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

3. Pro $a > 1$ je rostoucí, pro $0 < a < 1$ je klesající.

D: 1. Plyne přímo z definice a z 1.5.17.

2. Tvrzení platí pro $x, y \in \mathbb{Q}$. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$ a $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ takové, že $x_n \to x,\ y_n \to y$.
$a^x a^y = \lim a^{x_n} \lim a^{y_n} = \lim a^{x_n} a^{y_n} = \lim a^{x_n+y_n} = a^{x+y}$, neboť $\lim(x_n + y_n) = x + y$.
$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ analogicky.
$y = n \in \mathbb{N}$: $(a^x)^y = (a^x)^n = \underbrace{a^x \cdot a^x \cdot \cdots \cdot a^x}_{n \text{ krát}} = a^{x+x+\cdots+x} = a^{nx}$
$y = -n \in \mathbb{Z}$: $(a^x)^y = (a^x)^{-n} = \dfrac{1}{(a^x)^n} = \dfrac{1}{a^{nx}} = a^{-nx} = a^{xy}$
$y = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$: $(a^x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^x)^m} = \sqrt[n]{a^{xm}}$
současně $(a^{xy})^n = \left(a^{x\frac{m}{n}}\right) = a^{xm} \ \Rightarrow\ \sqrt[n]{a^{xm}} = a^{xy}$,
takže $a^{xy} = (a^x)^{\frac{m}{n}} = (a^x)^y$.
$y \in \mathbb{I}$: zvolme $\{y_n\} \subseteq \mathbb{Q},\ y_n \to y$. Pak $(a^x)^y = \lim (a^x)^{y_n} = \lim a^{xy_n} = a^{xy}$
podle 1.5.20 (tuto poznámku totiž můžeme považovat v této chvíli již za dokázanou, neboť v jejím důkazu je využit pouze první vztah z části 2., který je již dokázán), neboť $\lim xy_n = x \lim y_n = xy$.

3. Nechť $a > 1,\ x, y \in \mathbb{R},\ x < y$. Zvolme $u, v \in \mathbb{Q},\ x \leq u < v \leq y$. Platí $a^u < a^v$.
Buď $\{x_n\}$ neklesající posloupnost racionálních čísel s limitou x a buď $\{y_n\}$ nerostoucí posloupnost racionálních čísel s limitou y. Pak
$x_n \leq x \leq u$, což znamená, že $a^{x_n} \leq a^u$ a tedy $\lim a^{x_n} = a^x \leq u$.
$v \leq y \leq y_n$, což znamená, že $a^{y_n} \geq a^v$ a tedy $\lim a^{y_n} = a^y \geq v$.
Z nerovnosti $a^u < a^v$ plyne $a^x < a^y$.
Případ $0 < a < 1$ analogicky. □

Později (1.7.17) bude dokázáno, že $\operatorname{Im} f = (0, \infty)$.

1.5.20 Poznámky

1. Je-li $x = \dfrac{m}{p} \in \mathbb{Q}$, definice 1.5.18 souhlasí s definicí $a^{\frac{m}{p}}$. (Stačí volit $x_n = \dfrac{m}{p}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.)

2. Je-li $\{x_n\}$ libovolná posloupnost reálných čísel s $\lim x_n = x$, pak $\lim a^{x_n} = a^x$.

   D.: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolíme $y_n \in \mathbb{Q}$ tak, aby $x_n - \frac{1}{n} < y_n \leq x_n$ (to lze podle 1.1.17).
   Podle 1.3.7 je $\lim y_n = x$. Tedy $\lim a^{y_n} = a^x$ a dále
   $\lim a^{x_n} = \lim a^{y_n + x_n - y_n} = \lim a^{y_n} \lim a^{x_n - y_n} = a^x \lim a^{x_n - y_n}$
   a analogicky jako v důkazu 1.5.17 ukážeme, že $\lim a^{x_n - y_n} = 1$. □

Z exponenciálních funkcí má největší význam funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$, kde $\mathrm{e} = \lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Někdy se označuje $\mathrm{e}^x = \exp x$. Tuto funkci nazýváme *přirozená exponenciální funkce.*

1.5.21 Definice

Buď $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$. Inversní funkce k funkci $f(x) = a^x$ se nazývá *logaritmická funkce.* Značíme ji $\log_a x$.

1.5.22 Věta

Buď $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$. Funkce $f(x) = \log_a x$ má vlastnosti:

1. $\operatorname{Dom} f = (0, \infty),\ \operatorname{Im} f = (-\infty, \infty)$.

2. Pro každá dvě $x, y \in (0, \infty)$ platí: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$,
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,$$
pro $x \in (0, \infty)$ a $y \in \mathbb{R}$ platí: $\log_a x^y = y \log_a x$.

3. Je rostoucí pro $a > 1$ a klesající pro $0 < a < 1$.

D: 1., 3. Plyne z 1.5.19 a obecných vlastností inversních funkcí.

2. Označme $\log_a x = u,\ \log_a y = v$. Pak $a^u = x,\ a^v = y$ a
$xy = a^u a^v = a^{u+v}$, tedy $\log_a(xy) = u + v = \log_a x + \log_a y$,
$\dfrac{x}{y} = \dfrac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$, tedy $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = u - v = \log_a x - \log_a y$,
$x^y = (a^u)^y = a^{uy}$, tedy $\log_a x^y = uy = y \log_a x$. $\square$

1.5.23 Poznámka

Buďte $a, b \in \mathbb{R},\ a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1 \neq b$. Pro každé $x \in (0, \infty)$ platí $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

D.: $y = \log_b x$. Pak $b^y = x$ a tedy $y \log_a b = \log_a b^y = \log_a x$. Odtud $y = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$. $\square$

Podobně jako u exponenciální funkce má největší význam logaritmická funkce $\log_{\mathrm{e}} x$. Značí se $\ln x$ a nazývá *přirozená* nebo *přirozený logaritmus*.

Libovolný logaritmus lze převést na přirozený: $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.
Také obecnou exponenciální funkci lze převést na přirozenou, neboť pro $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ x \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathrm{e}^{x \ln a} = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^x = a^x .$$

D. Mocninná funkce

1.5.24 Definice

Buď $a \in \mathbb{R}$. Funkce $f(x) = x^a$ definovaná vztahem $x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}$ se nazývá *obecná mocninná funkce.*

1.5.25 Věta

Buď $a \in \mathbb{R}$. Mocninná funkce $f(x) = x^a$ má vlastnosti:

1. $\operatorname{Dom} f = (0, \infty),\ \operatorname{Im} f = (0, \infty)$.

2. Pro každá dvě $x, y \in (0, \infty)$ platí: $(xy)^a = x^a y^a,\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^a = \dfrac{x^a}{y^a}$.

3. Je rostoucí pro $a > 0$ a klesající pro $a < 0$.

D: 1. Plyne z 1.5.19.1 a z 1.5.22.1.

2. $(xy)^a = \mathrm{e}^{a \ln xy} = \mathrm{e}^{a(\ln x + \ln y)} = \mathrm{e}^{a \ln x}\mathrm{e}^{a \ln y} = x^a y^a$.
   Druhý vztah analogicky.

3. Buď $a > 0, 0 < x < y$. Pak podle 1.5.22.3 je $\ln x < \ln y$ a tedy $a \ln x < a \ln y$. Podle 1.5.19.3 je také $\mathrm{e}^{a \ln x} < e^{a \ln y}$, tj. $x^a < y^a$.
   Pro $a < 0$ analogicky. $\square$

1.5.26 Poznámka

Mocninná funkce $f(x) = x^a$ má v některých speciálních případech definiční obor širší než $(0, \infty)$. Zejména:
Je-li $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pak $\operatorname{Dom} f = (-\infty, \infty)$.
Je-li $a \in \mathbb{Z},\ a < 0$, pak $\operatorname{Dom} f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
Je-li $a = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ m, n$ nesoudělná a n liché, pak pro
  $a \geq 0$ je $\operatorname{Dom} f = (-\infty, \infty)$,
  $a < 0$ je $\operatorname{Dom} f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

E. Funkce goniometrické a cyklometrické

Na jednotkovou kružnici se středem v počátku naneseme od bodu $A = (1, 0)$ oblouk délky $|x|$ v kladném smyslu pro $x \geq 0$ a v záporném smyslu pro $x < 0$. Obdržíme bod B, jehož první souřadnici označíme $\cos x$ a druhou $\sin x$. Dále klademe $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Tento popis není definicí, neboť se používá vágní pojem „délka oblouku“, který nebyl přesně zaveden. *Goniometrické funkce* sin, cos, tg, cotg tedy nejsou zatím přesně definovány. Poněvadž jsou ale velice užitečné, budeme je používat již před jejich přesným definováním.

Vlastnosti goniometrických funkcí:

1. $\operatorname{Dom} \sin = \operatorname{Dom} \cos = \mathbb{R}$,
   $\operatorname{Im} \sin = \operatorname{Im} \cos = [-1, 1]$,
   $\operatorname{Dom} \operatorname{tg} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$, $\operatorname{Dom} \operatorname{cotg} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$,
   $\operatorname{Im} \operatorname{tg} = \operatorname{Im} \operatorname{cotg} = \mathbb{R}$.

2. $\sin,\ \cos$ jsou periodické se základní periodou 2π,
   $\operatorname{tg},\ \operatorname{cotg}$ jsou periodické se základní periodou π.

3. sin je rostoucí na $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, klesající na $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.
   cos je rostoucí na $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$, klesající na $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.
   tg je rostoucí na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
   cotg je klesající na $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. $\sin,\ \cos,\ \operatorname{tg},\ \operatorname{cotg}$ jsou liché, cos je sudá funkce

5. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1$, $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$
   pro všechna přípustná x.

6. Součtové vzorce:
   $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$, $\quad \sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$,
   $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, $\quad \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$,
   $\operatorname{tg}(x + y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$,
   $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,
   $|\sin \frac{x}{2}| = \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$, $\quad |\cos \frac{x}{2}| = \sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}$,
   $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\quad \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$,
   $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$,
   $\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y))$,
   $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y))$, $\quad \sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$.

7. Jsou-li $A, B \in \mathbb{R},\ A \neq 0$ pak $A\sin x + B\cos x = P\sin(x+q)$, kde $P = \sqrt{A^2+B^2},\ \operatorname{tg} q = \dfrac{B}{A}$.

   D.:

$$\operatorname{tg} q = \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{B}{A} = \frac{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}},$$

$$-1 < \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} < 1 \quad , \quad -1 < \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} < 1,$$

$$\cos q = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad , \quad \sin q = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$\begin{aligned} A\sin x + B\cos x &= \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x\right) = \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\,(\cos q\sin x + \sin q\cos x) = \sqrt{A^2+B^2}\,\sin(x+q). \end{aligned}$$

   $\square$

Funkce cyklometrické jsou funkce inversní k funkcím goniometrickým.

Ve všech případech je nutno zúžit definiční obor příslušné goniometrické funkce tak, aby funkce byla ryze monotonní (tedy prostá). Je přirozené tento interval vzít „co nejblíže počátku“.

$$\text{Pro} \quad \begin{array}{l} \sin \\ \cos \\ \operatorname{tg} \\ \operatorname{cotg} \end{array} \quad \text{vezmeme interval} \quad \begin{array}{l} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ [0, \pi] \\ (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ (0, \pi) \end{array} \quad .$$

Funkce cyklometrické se nazývají *arcus* a značí se arcsin, arccos, arctg, arccotg.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

1. $\operatorname{Dom}\arcsin = \operatorname{Dom}\arccos = [-1,1],\ \operatorname{Im}\arcsin = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ \operatorname{Im}\arccos = [0,\pi]$
   $\operatorname{Dom}\operatorname{arctg} = \operatorname{Dom}\operatorname{arccotg} = \mathbb{R},\ \operatorname{Im}\operatorname{arctg} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ \operatorname{Im}\operatorname{arccotg} = (0,\pi)$.

2. Pro každé $x \in [-1,1]$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

   D.: $y = \arcsin x$, $x = \sin y = \cos(\frac{\pi}{2} - y) \Rightarrow \arccos x = \frac{\pi}{2} - y$; $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \frac{\pi}{2} - y \in [0,\pi]$. $\square$

3. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.

   D.: $x \in \mathbb{R}$, $y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow x = \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin y}{\cos y} = \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2} - y)}{\sin(\frac{\pi}{2} - y)} = \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - y) \Rightarrow \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - y$. $\square$

F. Dodatek

- **Polární souřadnice** $r,\ \varphi$.
  Transformace kartézských souřadnic na polární:
  $r = \sqrt{x^2+y^2}$
  φ je řešením soustavy rovnic $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$\text{tj. } \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 2k\pi, & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} + k\pi, & x = 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + (2k+1)\pi, & x < 0 \end{cases}$$

  Transformace polárních souřadnic na kartézské: $x = r\cos\varphi$
  $y = r\sin\varphi$

- **Parametrické vyjádření**
  Buďte $\varphi,\ \psi$ funkce, $J \subseteq \operatorname{Dom}\varphi \cap \operatorname{Dom}\psi$ interval.

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \quad t \in J \end{aligned}$$

  je tzv. parametrické vyjádření nějaké podmnožiny $\mathbb{R}^2$.

1.6 Limita funkce

1.6.1 Definice

Řekneme, že *funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $a \in \mathbb{R}^*$* a píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(a)$ čísla a existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ čísla x_0 takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) \in \mathcal{O}(a)$.

Definice dostane konkrétní tvar podle toho, zda $x_0 \in \mathbb{R}$ nebo $x_0 = \pm\infty$ a $a \in \mathbb{R}$ nebo $a = \pm\infty$:

1. Vlastní limita ve vlastním bodě
   - $x_0 \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}:\quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \ \Leftrightarrow\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$
2. Nevlastní limita ve vlastním bodě
   - $x_0 \in \mathbb{R},\ a = \infty:\quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \ \Leftrightarrow\ (\forall h \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > h)$
   - $x_0 \in \mathbb{R},\ a = -\infty:\quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \ \Leftrightarrow\ (\forall h \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < h)$
3. Vlastní limita v nevlastním bodě
   - $x_0 = \infty,\ a \in \mathbb{R}:\quad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a \ \Leftrightarrow\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x)(x > h \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$
   - $x_0 = -\infty,\ a \in \mathbb{R}:\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a \ \Leftrightarrow\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x)(x < h \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$
4. Nevlastní limita v nevlastním bodě
   - $x_0 = \infty,\ a = \infty:\quad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \ \Leftrightarrow\ (\forall h \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x)(x > k \Rightarrow f(x) > h)$
   - $x_0 = -\infty,\ a = \infty:\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty \ \Leftrightarrow\ (\forall h \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x)(x < k \Rightarrow f(x) > h)$
   - $x_0 = \infty,\ a = -\infty:\quad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow\ (\forall h \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x)(x > k \Rightarrow f(x) < h)$
   - $x_0 = -\infty,\ a = -\infty:\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow\ (\forall h \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x)(x < k \Rightarrow f(x) < h)$

1.6.2 Poznámky

1. V definici 1.6.1 se nevyskytuje žádný požadavek na $f(x_0)$. Existence a hodnota $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ nezávisí na tom, zda $x_0 \in \operatorname{Dom} f$, a pokud ano, tak nezávisí na hodnotě $f(x_0)$.
   Existuje-li však $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, musí být funkce f definována v nějakém ryzím okolí bodu x_0.
2. Buďte f, g funkce, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$. Jestliže existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) = g(x)$, pak existuje také $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ a platí $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$.
3. Logickou negací definice 1.6.1 obdržíme výrok „neplatí $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$“: Existuje okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a takové, že v každém okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 existuje číslo x takové, že $f(x) \notin \mathcal{O}(a)$.
   Jestliže neplatí $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, pak buď $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b \neq a$ nebo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ neexistuje.
4. Existence a hodnota limity funkce f v bodě x_0 je lokální vlastností této funkce.

1.6.3 Příklady

1. $\lim_{x \to 0} x^2 = 0.$

   D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Položme $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Je-li $0 < |x - 0| = |x| < \delta = \sqrt{\varepsilon}$, pak $|x^2 - 0| = |x^2| = |x|^2 < \varepsilon$. $\square$

2. $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ pro $g = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

   D.: Stejně jako v 1. $\square$

3. $\lim_{x \to 0} \chi(x)$ neexistuje.

   D.: Připusťme, že $\lim_{x \to 0} \chi(x) = a \in \mathbb{R}$.

   Nechť $a \neq 0$. Položme $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2} > 0$. Buď $\delta > 0$ libovolné a $x \in (-\delta, \delta) \cap \mathbb{I}$. Pak $\chi(x) = 0 \notin \left(a - \dfrac{|a|}{2}, a + \dfrac{|a|}{2}\right)$.

   Je tedy $a = 0$. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$. Buď $\delta > 0$ libovolné a $x \in (-\delta, \delta) \cap \mathbb{Q}$. Pak $\chi(x) = 1 \notin (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

   Nemůže tedy být $\lim_{x \to 0} \chi(x) = a \in \mathbb{R}$.

   Připusťme, že $\lim_{x \to 0} \chi(x) = \infty$. Avšak pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ je $\chi(x) \in \{0, 1\}$, tedy pro $h > 1$ nemůže být $\chi(x) > h$ pro žádné $x \in \mathbb{R}$.

   Z podobných důvodů nemůže být $\lim_{x \to 0} \chi(x) = -\infty$. $\square$

1.6.4 Věta (Heineova podmínka [1821 – 1881])

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $a \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \operatorname{Dom} f$ takovou, že $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ a $x_n \neq x_0$ pro $n \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$.

D.:

„$\Rightarrow$“ Nechť $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$ a nechť $\{x_n\}$ je posloupnost splňující předpoklady.
Buď $\mathcal{O}(a)$ libovolné. Pak existuje ryzí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ takové, že pro $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) \in \mathcal{O}(a)$.
Poněvadž $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ jest $x_n \in \mathcal{O}(x_0)$ a tedy $f(x_n) \in \mathcal{O}(a)$, což znamená, že $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$.

„$\Leftarrow$“ Nechť platí tvrzení věty.
Zvolme libovolnou $\{x_n\}$, $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$. Pak existuje $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a \in \mathbb{R}^*$. Ukážeme, že $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$.
Připusťme, že existuje $\mathcal{O}(a)$ takové, že v každém ryzím okolí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 existuje x takové, že $f(x) \notin \mathcal{O}(a)$.

	$x_0 \in \mathbb{R}$	$\mathcal{O}_n(x_0) = (x_0 - \frac{1}{n}, x_0) \cup (x_0, x_0 + \frac{1}{n})$
Je-li	$x_0 = \infty$ položíme	$\mathcal{O}_n(x_0) = (n, \infty)$
	$x_0 = -\infty$	$\mathcal{O}_n(x_0) = (-\infty, -n)$

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ existuje $y_n \in \mathcal{O}_n(x_0)$ takové, že $f(y_n) \notin \mathcal{O}(a)$. Z konstrukce $\mathcal{O}_n(x_0)$ plyne, že $y_n \to x_0$, $y_n \neq x_0$ a tedy $\lim_{n \to \infty} f(y_n) = a$. To ovšem není možné, neboť $f(y_n) \notin \mathcal{O}(a)$.

$\square$

1.6.5 Poznámka

Nechť $\lim_{x \to \infty} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$ a nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = f(n)$. Pak $\lim_{n \to \infty} a_n = a$.

D.: Buď $\mathcal{O}(a)$ libovolné. Pak existuje $k \in \mathbb{R}$ takové, že pro $x > k$ je $f(x) \in \mathcal{O}(a)$.
Volme $n_0 = [k] + 1$. Pak pro $n \geq n_0$ je $a_n = f(n) \in \mathcal{O}(a)$ a tedy $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$. $\square$

Heineova podmínka umožňuje převádět vlastnosti limity a nevlastní limity posloupnosti na vlastnosti limity funkce:

1.6.6 Věta (Cauchyovo – Bolzanovo kriterium pro existenci vlastní limity)

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $a \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 takové, že pro každé dva body $x_1, x_2 \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

D.: 1.3.22 a 1.6.4 □

1.6.7 Věta (vlastnosti limity)

1. Každá funkce má v libovolném bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.
   (viz 1.3.3)

2. Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ vlastní limitu, pak existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž je funkce f ohraničená.
   (viz 1.3.4)
   Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a > 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a < 0$), pak existuje ryzí okolí $\mathcal{O}'(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}'(x_0)$ je $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$).

   D.: Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a > 0$ a buď $\varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0$. Existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ je $f(x) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, zejména tedy $f(x) > a - \varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0$. Platnost druhého tvrzení ukážeme analogicky. □

3. Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0,\ x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž je funkce g ohraničená. Pak je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.
   (viz 1.3.5.3)

4. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}$. Pak

   - existuje $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |a|$,
   - existuje $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x))$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$,
   - existuje $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x))$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = a - b$,
   - existuje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab$,
   - pokud $b \neq 0$ existuje $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$.

   (viz 1.3.6)

5. Nechť f, g, h jsou funkce, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a \in \mathbb{R}^*$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$.
   (viz 1.3.7)

6. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž je $f(x) \neq 0$ (resp. $f(x) > 0$, resp. $f(x) < 0$). Pak $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{|f(x)|} = \infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$, resp. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$).
   (viz 1.3.12.1)

7. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \infty$. Pak $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.
   (viz 1.3.12.4)

8. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$) a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž je funkce g zdola (resp. shora) ohraničená. Pak $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = -\infty$).
(viz 1.3.12.2)

9. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž je $g(x) \geq \delta > 0$ (resp. $g(x) \leq \delta < 0$). Pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = -\infty$).
Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž je $g(x) \geq \delta > 0$ (resp. $g(x) \leq \delta < 0$). Pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = -\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \infty$).
(viz 1.3.12.3)

10. Funkce *signum* (znaménko) je pro každé $x \in \mathbb{R}$ definována předpisem $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$
Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž je $g(x) \neq 0$ a $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} g(x)$ (resp. $\operatorname{sgn} f(x) = -\operatorname{sgn} g(x)$). Pak $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$).
(viz 1.3.12.1 a předchozí tvrzení)

11. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$ a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž je $f(x) < g(x)$. Pak $a \leq b$.
(viz 1.3.5.1)

1.6.8 Věta (o limitě složené funkce)

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \alpha \in \mathbb{R}^*$ a $\lim\limits_{y\to \alpha} f(y) = a \in \mathbb{R}^*$. Nechť existuje ryzí okolí $\mathcal{O}_1(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0, v němž platí $\varphi(x) \neq \alpha$. Pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = a$. (Tj. $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = \lim\limits_{y\to \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)} f(y) = a$.)

D.: Buď $\mathcal{O}(a)$ libovolné okolí bodu a. K němu existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(\alpha) \setminus \{\alpha\}$ takové, že pro $y \in \mathcal{O}(\alpha) \setminus \{\alpha\}$ je $f(y) \in \mathcal{O}(a)$.
K $\mathcal{O}(\alpha)$ existuje ryzí okolí $\mathcal{O}_2(x_0) \setminus \{x_0\}$ takové, že pro $x \in \mathcal{O}_2(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $\varphi(x) \in \mathcal{O}(\alpha)$.
Položme $\mathcal{O}(x_0) = (\mathcal{O}_1(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap (\mathcal{O}_2(x_0) \setminus \{x_0\})$. Pak pro $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $\varphi(x) \in \mathcal{O}(\alpha)$ a $\varphi(x) \neq \alpha$, tj. $\varphi(x) \in \mathcal{O}(\alpha) \setminus \{\alpha\}$. Tedy $f(\varphi(x)) \in \mathcal{O}(a)$, neboli $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = a$. □

1.6.9 Příklady

1. Nechť $f(x) = c \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $x_0 \in \mathbb{R}^*$ jest $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$.

   D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné, $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ libovolné ryzí okolí x_0. Pro $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. □

2. Nechť $f(x) = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$ jest $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ a dále $\lim\limits_{x\to \infty} x = \infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$.

   D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné a $\delta = \varepsilon$. Pak pro $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ je $|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$.
   Buď $h \in \mathbb{R}$ libovolné a $k = h$. Pak pro $x > k$ je $f(x) = x > k = h$ a pro $x < k$ je $f(x) = x < k = h$.
   □

3. Buď $P(x)$ polynom. Pak pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}$ jest $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.

   D.: S využitím předchozího výsledku a 1.6.7.4 jest

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} x^n &= \lim_{x\to x_0} x x^{n-1} = \lim_{x\to x_0} x \lim_{x\to x_0} x^{n-1} = x_0 \lim_{x\to x_0} x^{n-1} = x_0 \lim_{x\to x_0} x \lim_{x\to x_0} x^{n-2} = \\ &= x_0 x_0 \lim_{x\to x_0} x^{n-2} = \ldots = x_0^{n-1} \lim_{x\to x_0} x = x_0^n\,.\end{aligned}$$

Tvrzení nyní plyne z 1.6.7.4. $\square$

4. Buď $R(x)$ racionální lomená funkce a $x_0 \in \operatorname{Dom} R$. Pak $\lim\limits_{x\to x_0} R(x) = R(x_0)$.

   D.: plyne z 3. a 1.6.7.4. $\square$

5. $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^3-1}$.

   Pro $x \neq 1$ platí $\dfrac{x^4-1}{x^3-1} = \dfrac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}$ a tedy podle 1.6.2.4 a předchozího výsledku je $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^3-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}$.

6. Buď $a > 0,\ f(x) = a^x$. Pak pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}$ je $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.

   D.: plyne z 1.5.20.2 a 1.6.4. $\square$

7. Buď $a > 0,\ f(x) = x^a,\ x_0 \in \operatorname{Dom} f$. Pak $\lim\limits_{x\to x_0} x^a = x_0^a$.

   D.: plyne z 1.5.24, předchozího tvrzení a 1.6.8. $\square$

8. Pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}$ je $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0,\ \lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$.
   Plyne z geometrického názoru. (Funkce sin a cos nebyly přesně definovány.)

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

   D.: Pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí: $0 < \sin x$. Plocha kruhové výseče OAC je $P_0 = \frac{1}{2}x$, plocha trojúhelníka OAC je $P_1 = \frac{1}{2}\sin x$ a plocha trojúhelníka OAB je $P_2 = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Jest $P_1 < P_0 < P_2$, neboli

$$\begin{array}{ccccc} \sin x & < & x & < & \operatorname{tg} x \\ 1 & < & \dfrac{x}{\sin x} & < & \dfrac{1}{\cos x} \\ \cos x & < & \dfrac{\sin x}{x} & < & 1 \end{array}$$

   Všechny funkce v poslední nerovnosti jsou sudé, to znamená, že tato nerovnost platí i pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Dále podle předchozího $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$. Tvrzení nyní plyne z 1.6.7.5. $\square$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2}\dfrac{1}{1+\cos x} = 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

1.6.10 Poznámka

Předpoklad o existenci ryzího okolí $\mathcal{O}_1(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 nelze v 1.6.8 obecně vynechat.

Např. pro $\varphi(x) = 0,\ f(y) = \begin{cases} 0, & y \neq 0 \\ 1, & y = 0 \end{cases}$ platí

$f(\varphi(x)) = 1$ a tedy podle 1.6.9.1 pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = 1$,

avšak $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0,\ \lim\limits_{y\to 0} f(y) = 0$.

1.6.11 Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ *limitu zprava* (resp. *zleva*) rovnou $a \in \mathbb{R}^*$ a píšeme $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = a$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = a$), jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a existuje pravé (resp. levé) ryzí okolí $(x_0, x_0+\delta)$ (resp. $(x_0-\delta, x_0)$) takové, že pro každé $x \in (x_0, x_0+\delta)$ (resp. $x \in (x_0-\delta, x_0)$) platí $f(x) \in \mathcal{O}(a)$.
Limita zprava a limita zleva se souhrnně nazývají *jednostranné limity*.

- $a \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = a \;\Leftrightarrow\; (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)(0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$
  $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = a \;\Leftrightarrow\; (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)(0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$
- $a = \infty$: $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \infty \;\Leftrightarrow\; (\forall h \in \mathbb{R})(\exists\delta > 0)(\forall x)(0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) > h)$
  $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \infty \;\Leftrightarrow\; (\forall h \in \mathbb{R})(\exists\delta > 0)(\forall x)(0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) > h)$
- $a = -\infty$: $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = -\infty \;\Leftrightarrow\; (\forall h \in \mathbb{R})(\exists\delta > 0)(\forall x)(0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) < h)$
  $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = -\infty \;\Leftrightarrow\; (\forall h \in \mathbb{R})(\exists\delta > 0)(\forall x)(0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) < h)$

1.6.12 Věta

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když má v tomto bodě limitu zprava i zleva a platí $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = a$.

D.: plyne přímo z definic limity a jednostranných limit a z faktu $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$. $\square$

1.6.13 Poznámka

I pro jednostranné limity platí analogie Heineovy podmínky 1.6.4:
$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = a \;\Leftrightarrow\;$ pro každou $\{x_n\}$ takovou, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0,\ x_n > x_0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$,
$\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = a \;\Leftrightarrow\;$ pro každou $\{x_n\}$ takovou, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0,\ x_n < x_0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

V důsledku toho i pro jednostranné limity platí 1.6.6, 1.6.7 a 1.6.8.

1.6.14 Příklad

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$

Ř.:

- Podle 1.3.10 posloupnost $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ je rostoucí a její limita je e, takže podle 1.3.9 pro každé $n \in \mathbb{N}$
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}\,.$$
- Vyšetříme $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$:
  Buďte $x \in (0, \frac{1}{2})$, $n = \left[\dfrac{1}{x}\right]$, tedy $\dfrac{1}{n+1} < x \le \dfrac{1}{n}$.
  Podle 1.3.10 a prvního kroku řešení je
$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$$
  a tedy podle 1.5.19.3 je $\mathrm{e}^x \le \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} < 1 + \dfrac{1}{n-1}$, $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}} > 1 + \dfrac{1}{n+1}$.
  Poněvadž $n \le \dfrac{1}{x}$, jest $n + 1 \le \dfrac{1}{x} + 1 = \dfrac{1+x}{x}$, tedy $\dfrac{x}{1+x} \le \dfrac{1}{n+1}$.
  Poněvadž $n + 1 > \dfrac{1}{x}$, jest $n - 1 > \dfrac{1}{x} - 2 = \dfrac{1-2x}{x}$, tedy $\dfrac{x}{1-2x} > \dfrac{1}{n-1}$.
  Celkem
$$\begin{array}{rcccl} 1 + \dfrac{x}{1+x} & < & \mathrm{e}^x & < & 1 + \dfrac{x}{1-2x} \\ \dfrac{x}{1+x} & < & \mathrm{e}^x - 1 & < & \dfrac{x}{1-2x} \\ \dfrac{1}{1+x} & < & \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & < & \dfrac{1}{1-2x} \end{array}$$

a podle 1.6.7.5 je $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

- Vyšetříme $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{e^x - 1}{x}$:
  Buď $x \in (-\dfrac{1}{2}, 0)$ Položíme $y = -x$. Pak $y \in (0, \frac{1}{2})$ a s využitím předchozího kroku dostaneme

$$\begin{array}{ccccc}
1 + \dfrac{y}{1+y} & < & e^y & < & 1 + \dfrac{y}{1-2y} \\
\dfrac{1+2y}{1+y} & < & e^y & < & \dfrac{1-y}{1-2y} \\
\dfrac{1-2y}{1-y} & < & e^{-y} & < & \dfrac{1+y}{1+2y} \\
\dfrac{1+2x}{1+x} & < & e^x & < & \dfrac{1-x}{1-2x} \\
\dfrac{x}{1+x} & < & e^x - 1 & < & \dfrac{x}{1-2x} \\
\dfrac{1}{1+x} & > & \dfrac{e^x - 1}{x} & > & \dfrac{1}{1-2x}
\end{array}$$

  a podle 1.6.7.5 je $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Nyní $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ podle 1.6.12. □

1.6.15 Věta

Nechť funkce f je monotonní v nějakém levém (resp. pravém) ryzím okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$).
Podrobněji:

1. Nechť funkce f je neklesající v nějakém levém ryzím okolí $\mathcal{L}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Je-li f shora ohraničená v $\mathcal{L}(x_0)$, je $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in \mathcal{L}(x_0)\}$, není-li f shora ohraničená v $\mathcal{L}(x_0)$, je $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \infty$.

2. Nechť funkce f je nerostoucí v nějakém levém ryzím okolí $\mathcal{L}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Je-li f zdola ohraničená v $\mathcal{L}(x_0)$, je $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \inf\{f(x) : x \in \mathcal{L}(x_0)\}$, není-li f zdola ohraničená v $\mathcal{L}(x_0)$, je $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = -\infty$.

3. Nechť funkce f je neklesající v nějakém pravém ryzím okolí $\mathcal{P}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Je-li f zdola ohraničená v $\mathcal{P}(x_0)$, je $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in \mathcal{P}(x_0)\}$, není-li f zdola ohraničená v $\mathcal{P}(x_0)$, je $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = -\infty$.

4. Nechť funkce f je nerostoucí v nějakém pravém ryzím okolí $\mathcal{P}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Je-li f shora ohraničená v $\mathcal{P}(x_0)$, je $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \sup\{f(x) : x \in \mathcal{P}(x_0)\}$, není-li f shora ohraničená v $\mathcal{P}(x_0)$, je $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \infty$.

D.: Provedeme pouze pro tvrzení 1. Důkazy ostatních lze provést analogicky.

- Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a f je shora ohraničená v $\mathcal{L}(x_0) = (x_0 - \alpha, x_0)$.
  Množina $\{f(x) : x \in \mathcal{L}(x_0)\}$ je neprázdná a shora ohraničená, tedy podle 1.1.7 (R14) existuje $\sup\{f(x) : x \in \mathcal{L}(x_0)\} = a \in \mathbb{R}$.
  Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle 1.1.6 (s2*) existuje $x_1 \in \mathcal{L}(x_0)$ takové, že $f(x_1) > a - \varepsilon$. Položíme

$\delta = x_0 - x_1$. Pak je $(x_1, x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \subseteq \mathcal{L}(x_0)$.
Poněvadž f je na $\mathcal{L}(x_0)$ neklesající, pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ platí $f(x) \geq f(x_1) > a - \varepsilon$.
Poněvadž $a = \sup\{f(x) : x \in \mathcal{L}(x_0)\}$, pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ platí $f(x) \leq a$.
Celkem pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $a - \varepsilon < f(x) \leq a$, což znamená $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = a$.

- Nechť $x_0 = \infty$ a f je shora ohraničená v $\mathcal{L}(x_0) = (\alpha, \infty)$. Zopakujeme úvahy z předchozího kroku s tím rozdílem, že nedefinujeme δ. Dojdeme k tomu, že pro $x \in (x_1, \infty)$ je $a - \varepsilon < f(x) \leq a$.
- Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a f není shora ohraničená v $\mathcal{L}(x_0) = (x_0 - \alpha, x_0)$.
Buď $h \in \mathbb{R}$ libovolné. Poněvadž f není shora ohraničená, v $(x_0 - \alpha, x_0)$, existuje $x_1 \in (x_0 - \alpha, x_0)$ takové, že $f(x_1) > h$. Položíme $\delta = x_0 - x_1$.
Poněvadž f je neklesající na $(x_0 - \alpha, x_0)$, pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ platí $f(x) \geq f(x_1) > h$, což znamená $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \infty$.
- Nechť $x_0 = \infty$ a f není shora ohraničená v $\mathcal{L}(x_0) = (\alpha, \infty)$. Zopakujeme úvahy z předchozího kroku s tím rozdílem, že nedefinujeme δ. Pak pro $x \in (x_1, \infty)$ je $f(x) > h$.

□

Poznámka: (Oboustranná) limita nemusí existovat.

1.6.16 Definice

Řekneme, že $a \in \mathbb{R}$ je *limitní bod* funkce f pro $x_0 \in \mathbb{R}^*$, jestliže existuje posloupnost$\{x_n\}$ taková, že $x_n \neq x_0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ a $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$.
Označme $\Omega(f, x_0)$ množinu limitních bodů funkce f pro $x_0 \in \mathbb{R}^*$.
Je-li funkce f ohraničená shora v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $\Omega(f, x_0) \neq \emptyset$, klademe $\limsup\limits_{x \to x_0} f(x) = \sup \Omega(f, x_0)$.
Je-li funkce f ohraničená shora v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $\Omega(f, x_0) = \emptyset$, klademe $\limsup\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.
Není-li funkce f ohraničená shora v každém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$, klademe $\limsup\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.
Je-li funkce f ohraničená zdola v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $\Omega(f, x_0) \neq \emptyset$, klademe $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) = \inf \Omega(f, x_0)$.
Je-li funkce f ohraničená zdola v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $\Omega(f, x_0) = \emptyset$, klademe $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.
Není-li funkce f ohraničená zdola v každém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$, klademe $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Snadno ověříme, že $\limsup\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} (\sup\{f(\xi) : 0 < |x_0 - \xi| < |x_0 - x|\})$
$\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} (\inf\{f(\xi) : 0 < |x_0 - \xi| < |x_0 - x|\})$.

Jestliže $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$, pak a je limitním bodem funkce f pro $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

Zřejmým způsobem lze zavést pravé a levé limitní body a $\limsup\limits_{x \to x_0+} f(x)$, $\limsup\limits_{x \to x_0-} f(x)$, $\liminf\limits_{x \to x_0+} f(x)$, $\liminf\limits_{x \to x_0-} f(x)$.

Přímo z definice plyne

1.6.17 Věta

$\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \limsup\limits_{x \to x_0} f(x)$. Rovnost nastane právě tehdy, když existuje vlastní nebo nevlastní $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

1.7 Spojité funkce

1.7.1 Definice

Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$ *zprava* (resp. *zleva*), jestliže $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$).

1.7.2 Poznámky

1. Z definice 1.7.1 bezprostředně plyne:
   Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2. Je-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, pak je v nějakém okolí tohoto bodu ohraničená.

3. Spojitost je definována pouze v bodech z $\mathbb{R}$. Nelze definovat spojitost v nevlastním bodě.

4. Spojitost funkce je lokální vlastností této funkce.

1.7.3 Terminologická poznámka

Není-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a je při tom definovaná na nějakém okolí (případně ryzím okolí) bodu x_0, mohou nastat možnosti:

A) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ neexistuje

A1) $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ existují a jsou reálné různé — *bod nespojitosti 1. druhu*
(Např.: $f(x) = [x],\ x_0 = 1$)

A2) Alespoň jedna z jednostranných limit neexistuje — *bod nespojitosti 2. druhu*
(Např.: $f(x) = \sin \frac{1}{x},\ x_0 = 0; \quad \chi(x),\ x_0$ libovolné)

A3) $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ existují, jsou různé a alespoň jedna z nich je nevlastní
(Např.: $f(x) = \operatorname{tg}(x),\ x_0 = \frac{\pi}{2}$)

B) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$, $a \neq f(x_0)$

B1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ je nevlastní
(Např.: $f(x) = \frac{1}{x^2},\ x_0 = 0$)

B2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ a $f(x_0) \neq a$ nebo $x_0 \notin \operatorname{Dom} f$ — *bod odstranitelné nespojitosti*
Nespojitost lze odstranit změnou $f(x_0)$ nebo dodefinováním $f(x_0)$:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \operatorname{Dom} f \setminus \{x_0\} \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x), & x = x_0 \end{cases}.$$

(Např.: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},\ x_0 = 0, \quad g(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1},\ x_0 = 1$
Nespojitost odstraníme definováním $\tilde{f}(0) = 0,\ \tilde{g}(1) = \frac{1}{2}$)

1.7.4 Věta

Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když je v tomto bodě spojitá zprava i zleva.

D.: plyne z 1.6.12. $\square$

1.7.5 Věta

Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ platí $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.
Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ zprava (resp. zleva) právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $x_n \geq x_0$ (resp. $x_n \leq x_0$) a $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ platí $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

D.: plyne z 1.6.4 a 1.6.13. $\square$

1.7.6 Věta

Jsou-li funkce f a g spojité v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, pak jsou také funkce $|f|$, $f+g$, $f-g$, fg spojité v bodě x_0. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, je i funkce $\frac{f}{g}$ spojitá v bodě x_0.

D.: plyne z 1.6.7.4 $\square$

1.7.7 Věta

Nechť funkce φ je spojitá v bodě x_0 a funkce f je spojitá v bodě $\varphi(x_0)$. Pak je také funkce $x \mapsto f(\varphi(x))$ spojitá v bodě x_0.

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu existuje $\eta > 0$ takové, že pro $y \in (\varphi(x_0) - \eta, \varphi(x_0) + \eta)$ platí $|f(y) - f(\varphi(x_0))| < \varepsilon$.
K $\eta > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \eta$.
Tedy pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je $|f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))| < \varepsilon$, což znamená $\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(\varphi(x_0))$. $\square$

Tato věta není důledkem 1.6.8, neboť má jiné předpoklady.

1.7.8 Definice

Řekneme, že funkce f je *spojitá na intervalu* $I \subseteq \operatorname{Dom} f$, jestliže platí

(i) f je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I.

(ii) Patří-li levý (resp. pravý) krajní bod intervalu I do tohoto intervalu, pak je v něm funkce f spojitá zprava (resp. zleva).

Zejména: Funkce f je spojitá na otevřeném intervalu (a, b) právě tehdy, když je spojitá v každém bodě tohoto intervalu.
Funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$ právě tehdy, když je spojitá v každém bodě intervalu (a, b), v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Spojitost na intervalu je globální vlastnost.

1.7.9 Věta

Nechť funkce f je spojitá a ryze monotonní na intervalu I_1 a zobrazuje tento interval na interval I_2. Pak funkce inversní f^{-1} je spojitá na intervalu I_2.

D.: Nechť f je rostoucí na I_1, $y_0 \in I_2$, y_0 není levý koncový bod I_2. Ukážeme, že f^{-1} je spojitá zleva v bodě $y_0 = f(x_0)$:
Buď $\varepsilon > 0$ libovolné takové, že $x_0 - \varepsilon \in I_1$. Pak $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0)$. Označme $\delta = f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon) > 0$.
Buď $y \in (y_0 - \delta, y_0]$ libovolný. Poněvadž podle 1.2.17 je f^{-1} rostoucí, je $f^{-1}(y_0 - \delta) < f^{-1}(y)$.
$f^{-1}(y_0 - \delta) = f^{-1}(f(x_0) - f(x_0) + f(x_0 - \varepsilon)) = x_0 - \varepsilon$, tedy $x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y)$, neboli $f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y) < \varepsilon$.
Ostatní možnosti rozebereme analogicky. $\square$

Z této věty, z 1.7.6, 1.7.7 a z 1.6.9 bezprostředně plyne

1.7.10 Důsledek

Elementární funkce jsou spojité na svém definičním oboru.

1.7.11 Věta (1. Weierstrassova [1815 – 1897])

Funkce spojitá na uzavřeném intervalu je na tomto intervalu ohraničená.

D.: Sporem. Připusťme, že funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$ není ohraničená shora.
Pak ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in [a,b]$ takové, že $f(x_n) > n$. Takto definovaná posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená ($a \le x_n \le b$) a tedy podle 1.3.19.1 existuje posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z ní vybraná a taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$.
Poněvadž $a \le x_{n_k} \le b$, podle 1.3.5.1 je $a \le x_0 \le b$, neboli $x_0 \in [a,b]$.
Poněvadž f je spojitá (případně jednostranně spojitá), podle 1.7.5 je $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \in \mathbb{R}$.
Současně ale $f(x_{n_k}) > n_k$, $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$, a tedy podle 1.3.5.1 a poznámky za 1.3.11 je $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$.
To je spor.
Analogicky vyloučíme možnost, že by funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$ nebyla ohraničená zdola. □

Poznámka: Oba předpoklady jsou podstatné.

1.7.12 Věta (2. Weierstrassova [1815 – 1897])

Funkce spojitá na uzavřeném intervalu nabývá na tomto intervalu své největší i nejmenší hodnoty.

D.: Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a,b]$. Podle 1.7.11 je na tomto intervalu ohraničená a tedy existuje $m = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Ukážeme, že existuje $x_1 \in [a,b]$, že $f(x_1) = m$.
Připusťme, že $f(x) < m$ pro každé $x \in [a,b]$. Pak $m - f(x) > 0$ a tedy podle 1.7.6 je funkce $x \mapsto \dfrac{1}{m-f(x)}$ spojitá. Podle 1.7.11 existuje $K \in \mathbb{R}$, že $\dfrac{1}{m-f(x)} < K$ pro každé $x \in [a,b]$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $K > 0$. Tedy $f(x) < m - \dfrac{1}{K}$. Podle 1.1.6 (s2*) existuje $x_0 \in [a,b]$, že $f(x_0) \ge m - \dfrac{1}{K}$, neboli $m - f(x_0) \le \dfrac{1}{K}$, $K \le \dfrac{1}{m-f(x_0)}$, což je spor.
Analogicky ukážeme, že existuje $x_2 \in [a,b]$, že $x_2 = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$. □

1.7.13 Věta (1. Bolzanova [1781 – 1848])

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$ a nechť platí $f(a)f(b) < 0$. Pak existuje $c \in (a,b)$, že $f(c) = 0$.

D.: Položme $d = \dfrac{b-a}{2}$. Pak $d \in (a,b)$. Pokud $f(d) = 0$, je $c = d$.
Nechť $f(d) \ne 0$. Jestliže $f(a)f(d) < 0$, položme $a_1 = a,\ b_1 = d$; jestliže $f(a)f(d) > 0$, položme $a_1 = d,\ b_1 = b$.
Jest $b_1 - a_1 = \dfrac{b-a}{2}$, $f(a)f(b_1) < 0, f(a_1)f(b) < 0, a_1 \ge a,\ b_1 \le b$.
Dále položme $d_1 = \dfrac{b_1 - a_1}{2}$. Pak $d_1 \in (a_1,b_1) \subseteq (a,b)$. Pokud $f(d_1) = 0$, je $c = d_1$.
Nechť $f(d_1) \ne 0$. Jestliže $f(a_1)f(d_1) < 0$, položme $a_2 = a_1,\ b_2 = d_1$; jestliže $f(a_1)f(d_1) > 0$, položme $a_2 = d_1,\ b_2 = b_1$.
Jest $b_2 - a_2 = \dfrac{b-a}{2^2}$, $f(a)f(b_2) < 0, f(a_2)f(b) < 0, a_2 \ge a_1,\ b_2 \le b_1$.
Analogicky postupujeme dále. Buď po konečném počtu kroků nalezneme d_k takové, že $f(d_k) = 0$, nebo dostaneme dvě posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ takové, že $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, $f(a)f(b_n) < 0$, $f(a_n)f(b) < 0$.
V prvním případě je $c = d_k$. Nechť nastane druhý případ.
$\{a_n\}$ je neklesající, ohraničená shora číslem b a tedy podle 1.3.9 existuje $c_1 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \le b$. $\{b_n\}$ je nerostoucí, ohraničená zdola číslem a a tedy existuje $c_2 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \ge a$.
Platí $c_1 - c_2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a-b}{2^n} = 0$, tedy $c_1 = c_2 = c \in [a,b]$.

Kdyby $f(a)f(c) < 0$ a $f(c)f(b) < 0$, pak by $f(a)f(c)f(c)f(b) > 0$, neboli $f(a)f(b) > 0$, což by byl spor.
Pokud $f(a)f(c) \geq 0$, pak podle 1.3.5.1 je $0 \leq f(a) \lim f(b_n) = \lim f(a)f(b_n) \leq 0$, tedy $f(a)f(c) = 0$, což je možné jen tak, že $f(c) = 0$.
Pokud $f(c)f(b) \geq 0$, pak $0 \leq (\lim f(a_n))f(b) = \lim f(a_n)f(b) \leq 0$, tedy $f(c)f(b) = 0$, což je možné jen tak, že $f(c) = 0$. $\square$

1.7.14 Důsledek (Speciální případ Brouwerovy [1881 – 1966] věty o pevném bodě)

Buď f spojitá funkce zobrazující uzavřený interval $[a, b]$ do sebe. Pak existuje $c \in [a, b]$ takové, že $f(c) = c$.

D.: Platí $f(a) \geq a,\ f(b) \leq b$. Pokud $f(a) = a$, položíme $c = a$, pokud $f(b) = b$, položíme $c = b$.
Nechť $f(a) > a,\ f(b) < b$. Definujme funkci g předpisem $g(x) = x - f(x)$.
Funkce g je spojitá na $[a, b],\ g(a) < 0,\ g(b) > 0$, takže podle 1.7.13 existuje $c \in (a, b)$ takové, že $g(c) = c - f(c) = 0$. $\square$

1.7.15 Věta (2. Bolzanova [1781 – 1848])

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Pak na tomto intervalu nabývá všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.

D.: Buďte $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\},\ m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\},\ p \in \mathbb{R}$ takové, že $m < p < M$.
Podle 1.7.12 existují $x_1 \in [a, b],\ x_2 \in [a, b]$ takové, že $f(x_1) = M,\ f(x_2) = n$.
$f(x_1) - p > 0,\ f(x_2) - p < 0$, tedy $(f(x_1) - p)(f(x_2) - p) < 0$. Podle 1.7.13 existuje v uzavřeném intervalu s krajními body x_1 a x_2 číslo c takové, že $0 = (f - p)(c) = f(c) - p$, tedy $f(c) = p$. $\square$

1.7.16 Důsledek

Spojitým obrazem uzavřeného intervalu je buď jednoprvková množina nebo uzavřený interval.

1.7.17 Poznámka

Nyní můžeme dokázat tvrzení uvedené za 1.5.19: Je-li $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1,\ f(x) = a^x$, pak $\operatorname{Im} f = (0, \infty)$.

D.: Nechť $a > 1$. Vzhledem k 1.5.19.1 stačí ukázat, že $(0, \infty) \subseteq \operatorname{Im} f$. Buď tedy $y_0 \in (0, \infty)$ libovolné.
Poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} a^{-n} = 0$, existují $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, že $a^{-n_1} < y_0 < a^{n_2}$.
Funkce $f(x) = a^x$ je podle 1.7.10 spojitá na $(-\infty, \infty)$, je tedy spojitá na uzavřeném intervalu $[-n_1, n_2]$.
Podle 1.5.19.3 je

$$f(-n_1) = a^{-n_1} < y_0 < a^{n_2} = f(n_2)$$

a tedy podle 1.7.15 existuje $x_0 \in [-n_1, n_2]$ takové, že $f(x_0) = y_0$. To znamená, že $y_0 \in \operatorname{Im} f$.
Platnost tvrzení dokážeme analogicky i v případě $0 < a < 1$. $\square$

1.7.18 Definice

Řekneme, že funkce f je *stejnoměrně spojitá na intervalu* $I \subseteq \operatorname{Dom} f$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každá dvě $x_1, x_2 \in I$ taková, že $|x_1 - x_2| < \delta$ platí $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

1.7.19 Poznámky

1. Stejnoměrně spojitá funkce na intervalu je na tomto intervalu spojitá.
   Spojitá funkce na intervalu nemusí být na tomto intervalu spojitá stejnoměrně.

2. Stejnoměrná spojitost je globální vlastnost.

3. Nechť funkce f je stejnoměrně spojitá na otevřeném intervalu (a,b).
Podle 1.6.6 existují $\lim\limits_{x\to a+} f(x)\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to b-} f(x)\in\mathbb{R}$. Funkce $\tilde f$ zadaná předpisem

$$\tilde f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to a+} f(x), & x=a\\ f(x), & x\in(a,b)\\ \lim\limits_{x\to b-} f(x), & x=b\end{cases}$$

je spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$.
(Funkci stejnoměrně spojitou na otevřeném intervalu lze spojitě prodloužit na krajní body tohoto intervalu.)

4. Funkce stejnoměrně spojitá na libovolném intervalu je na tomto intervalu ohraničená.

D.: Plyne z předchozího tvrzení a 1.7.12. $\square$

1.7.20 Věta (Heine [1821 – 1881] - Cantor [1845 – 1918])

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$. Pak je na tomto intervalu spojitá stejnoměrně.

D.: Sporem: Připusťme, že f je spojitá na $[a,b]$ nikoliv stejnoměrně. Existuje tedy $\varepsilon_0>0$ takové, že ke každému $\delta>0$ existuje dvojice bodů $x,y\in[a,b]$, že $|x-y|<\delta$ a zároveň $|f(x)-f(y)|\ge\varepsilon_0$.
Zejména tedy pro $\delta=\dfrac{1}{n}$ existují $x_n,y_n\in[a,b]$, že $|x_n-y_n|<\dfrac{1}{n}$ a $|f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon_0$.
Posloupnost $\{x_n\}$ je ohraničená a tedy podle 1.3.19.2 existuje posloupnost $\{x_{n_k}\}$ vybraná z $\{x_n\}$ taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=x_0\in[a,b]$.
Dále podle 1.3.5.1 $\lim\limits_{k\to\infty}|x_{n_k}-y_{n_k}|\le\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{n_k}=0$, tedy $\lim\limits_{k\to\infty}|x_{n_k}-y_{n_k}|=0$, což znamená $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k}=x_0$.
Poněvadž f je spojitá v x_0, je $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(x_0)=\lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n_k})$. To je spor s $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\ge\varepsilon_0$. $\square$

1.8 Cvičení

Určete definiční obor funkcí

1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-5x+4}}$, 2) $f(x)=\log\sin 2x$.

Rozhodněte, zda funkce je sudá nebo lichá

3) $f(x)=-\sqrt[3]{x}$, 4) $f(x)=\sqrt{x}$.

Najděte nejmenší periodu funkcí

5) $f(x)=\sin\frac{1}{3}x$, 6) $f(x)=\operatorname{tg} ax$.

Najděte intervaly, na nichž jsou ryze monotonní funkce

7) $f(x)=x+|x|$, 8) $f(x)=2^{1/x}$.

Najděte inversní funkci k funkci

9) $f(x)=2^{3x-1}$, 10) $f(x)=x+[x]$.

Rozhodněte, zda je posloupnost $\{a_n\}$ ohraničená

11) $a_n=1-\cos^n\frac{\pi}{n}$, 12) $a_n=\dfrac{n^n}{n!}$.

Rozhodněte, zda je posloupnost $\{a_n\}$ monotonní

13) $a_n=\dfrac{n^2+1}{n+1}$, 14) $a_n=\log n-n$.

Vypočítejte limitu posloupnosti $\{a_n\}$

15) $a_n=\dfrac{2n^2-n+3}{3n^2+n-5}$ 16) $a_n=\dfrac{3^{n+1}+(-5)^{n-1}}{3^n+(-5)^n}$,

17) $a_n=\sqrt{n^2+3n+2}-\sqrt{n^2-n+1}$, 18) $a_n=\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}$,

19) $a_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}$, 20) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt n}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

21) Zjistěte, zda posloupnost $\{\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\}$ je konvergentní.

22) Najděte limes superior a inferior posloupnosti $\left\{(-1)^n\left(\sqrt[n]{2}+\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)+\sqrt[n]{2}\right\}$.

Polynomy rozložte v reálném oboru

23) $x^4-x^3+2x^2-x+1$, 24) x^6+1.

Racionální funkce rozložte na parciální zlomky

25) $\dfrac{x^4+6x^2+x-2}{x^4-2x^3}$, 26) $\dfrac{x-1}{x^4+3x^2+2}$.

27) jaký je vztah mezi grafy funkcí $f(x)=a^x$ a $g(x)=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$, $a>0$?

Určete definiční obor funkce f, zjednodušte její vyjádření a znázorněte ji graficky

28) $f(x)=\log_x a$, 29) $f(x)=\arcsin(\sin x)$.

Vypočítejte

30) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$, 31) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$,

32) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$, 33) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$,

34) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$, 35) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$,

36) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-4x+1}\right)$, 37) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}+x\right)$,

38) $\lim\limits_{x\to 1+}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{\operatorname{cotg}\pi x}$, 39) $\lim\limits_{x\to\pi+}\left(\sin^2 x\right)^{\operatorname{tg} x/2}$.

40) Vysvětlete význam podmínky $(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\forall x)(0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-a|<\varepsilon)$.

Najděte body nespojitosti následujících funkcí a určete jejich typ

41) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, 42) $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$.

Výsledky: 1) $(-\infty,1)\cup[2,3]\cup(4,\infty)$ 2) $\{x\in\mathbb{R}:\ k\pi<x<(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\}$ 3) sudá 4) ani sudá, ani lichá 5) 6π 6) $\frac{\pi}{a}$ 7) na $[0,\infty)$ rostoucí 8) na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ klesající 9) $f^{-1}(y)=\frac{1}{3}(1+\log_2 y)$ 10) $f^{-1}(y)=y-k$ pro $y\in[2k,2k+1),\ k\in\mathbb{Z}$ 11) ano, $0\le a_n\le 2$ 12) ohraničená zdola $a_n>0$ 13) rostoucí 14) klesající 15) $\frac{2}{3}$ 16) $-\frac{1}{5}$ 17) 2 18) $\frac{4}{3}$ 19) 0 20) ∞ 21) ano; je rostoucí a shora ohraničená 22) $2+\mathrm{e},\ -\mathrm{e}$ 23) $(x^2+1)\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)$ 24) $(x^2-\sqrt{3}\,x+1)(x^2+\sqrt{3}\,x+1)(x^2+1)$ 25) $1+\frac{1}{x^3}-\frac{3}{x}+\frac{5}{x-2}$ 26) $\frac{x-1}{x^2+1}-\frac{x-1}{x^2+2}$ 27) souměrné kolem osy y 28) $\operatorname{Dom} f=(0,1)\cup(1,\infty),\ f(x)-\frac{\ln a}{\ln x}$ 29) $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R},\ f$ je 2-π periodické rozšíření funkce $g(x)=\begin{cases}x, & x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\\ \pi-x, & x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})\end{cases}$ 30) $\frac{2}{3}$ 31) $\frac{m}{n}$ 32) $\frac{2}{3}$ 33) $\frac{2}{3}$ 34) $\frac{a}{b}$ 35) $\frac{3}{4}$ 36) $\frac{5}{2}$ 37) $-\infty$ 38) 0 39) ∞ 40) f je ohraničená v $\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ 41) $x=1$ odstranitelná, $x=-1$ typu A3 42) $x=0$ druhého druhu

Kapitola 2

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

2.1 Derivace

2.1.1 Definice

Nechť f je funkce a $x_0 \in \mathbb{R}$. Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, nazýváme ji *derivace funkce f v bodě x_0* a označujeme ji $f'(x_0)$.
Je-li tato limita nevlastní, řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *nevlastní derivaci.*
Neexistuje-li tato limita, řekneme, že funkce f *nemá derivaci v bodě* x_0.

2.1.2 Poznámky

1. Má-li funkce f derivaci v bodě x_0, pak je v tomto bodě a nějakém jeho okolí definována. (Existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 takové, že $\mathcal{O}(x_0) \subseteq \operatorname{Dom} f$.) (Viz 1.6.2.1)

2. Funkce f má v libovolném bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ nejvýše jednu derivaci. (Viz 1.6.7.1)

3. Derivace je definována pouze v $x_0 \in \mathbb{R}$. Nelze definovat derivaci v ∞ nebo $-\infty$.

4. Existence a hodnota derivace $f'(x_0)$ je lokální vlastností funkce f v bodě x_0.

5. Označíme-li $x = x_0 + h$, lze v definici 2.1.1 psát $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ místo $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

6. Lze definovat i *jednostranné derivace* funkce f v bodě x_0:
   Derivace zleva $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$
   Derivace zprava $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.
   Funkce f má v bodě x_0 derivaci právě tehdy, když v něm má derivaci zprava a derivaci zleva a platí $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. (Viz 1.6.12)

7. Nechť $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ vyjadřuje křivku v rovině (s kartézskými souřadnicemi). Rovnice *tečny* k této křivce v bodě $(x_0, f(x_0)) = (x_0, y_0)$ je

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)\,,$$

   rovnice *normály* v témže bodě je

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)\,.$$

2.1.3 Věta

Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ derivaci, je v tomto bodě spojitá.

D.: Nechť $f'(x_0)$ existuje. Pak

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)+f(x_0)) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)+f(x_0)\right) = \\ &= f'(x_0)\lim_{x\to x_0}(x-x_0)+f(x_0) = f'(x_0)\cdot 0+f(x_0) = f(x_0)\,,\end{aligned}$$

a tvrzení plyne přímo z definice 1.7.1. □

2.1.4 Poznámky

1. Opačné tvrzení neplatí. Funkce spojitá v bodě x_0 nemusí mít v tomto bodě derivaci.
   Například pro $f(x)=|x|$ je $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{|x|-|0|}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x}{x}=1\,,$
   $$f'_-(x_0)=\lim_{x\to 0-}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=-1\,.$$
2. Analogicky platí: Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ derivaci zprava (resp. zleva), pak je v tomto bodě spojitá zprava (resp. zleva).

2.1.5 Věta

Nechť funkce $f,\ g$ mají derivaci v bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$. Pak platí:

1. Pro každé $c\in\mathbb{R}$ je $(cf)'(x_0)=cf'(x_0)$.
2. $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0),\ (f-g)'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)$.
3. $(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.
4. Je-li $g(x_0)\neq 0$, pak $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Analogická tvrzení platí i o jednostranných derivacích.

D.:

1. $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{cf(x)-cf(x_0)}{x-x_0}=c\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=cf'(x_0).$
2. $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\pm g(x)-(f(x_0)\pm g(x_0))}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)\pm(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}=f'(x_0)\pm g'(x_0).$
3. $$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).\end{aligned}$$
   (Poslední rovnost platí, poněvadž podle 2.1.3 je $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$.)
4. $\displaystyle\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}\,\frac{1}{g(x)g(x_0)}=-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$
   Dokazovaný vztah nyní plyne z předchozího.

□

Tvrzení věty lze stručně zapsat:

$$(cu)'=cu',\ (u\pm v)'=u'\pm v',\ (uv)'=u'v+uv',\ \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Matematickou indukcí lze tvrzení zobecnit:

$$\begin{aligned}(c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_nf_n)'(x_0) &= c_1f_1'(x_0)+c_2f_2'(x_0)+\cdots+c_nf_n'(x_0),\\ (f_1f_2f_3\cdots f_{n-1}f_n)'(x_0) &= f_1'(x_0)f_2(x_0)f_3(x_0)\cdots f_{n-1}(x_0)f_n(x_0)+\\ &\quad +f_1(x_0)f_2'(x_0)f_3(x_0)\cdots f_{n-1}(x_0)f_n(x_0)+\cdots+\\ &\quad +f_1(x_0)f_2(x_0)f_3(x_0)\cdots f_{n-1}(x_0)f_n'(x_0).\end{aligned}$$

2.1.6 Věta (o derivaci složené funkce)

Nechť funkce f má derivaci v bodě $u_0 \in \mathbb{R}$ a nechť funkce φ má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ takovém, že $\varphi(x_0) = u_0$. Pak složená funkce $F : x \mapsto f(\varphi(x))$ má derivaci v bodě x_0 a platí $F'(x_0) = f'(u_0)\varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0)$.

D.: $\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{f(\varphi(x))-f(\varphi(x_0))}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}$.
Jestliže existuje ryzí $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $\varphi(x) \neq \varphi(x_0)$ pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$, pak podle 1.6.8 je

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{u\to u_0}\frac{f(u)-f(u_0)}{u-u_0}\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = f'(u_0)\varphi'(x_0)\,.$$

Nechť v každém ryzím $\mathcal{O}(x_0)\setminus\{x_0\}$ existují body x takové, pro něž $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. Ukážeme, že pak $\varphi'(x_0) = 0$ a také $F'(x_0) = 0$, tedy že platí dokazovaný vztah.
Buď $\{x_n\}$ taková, že $\varphi(x_n) = \varphi(x_0),\ x_n \neq x_0,\ x_n \to x_0$. Pak podle 1.6.4
$\varphi'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\varphi(x_n)-\varphi(x_0)}{x_n-x_0} = 0.$
Buď nyní $\{x_n\}$ libovolná taková, že $x_n \neq x_0,\ x_n \to x_0$. Označme

$$A = \{n \in \mathbb{N} :\ \varphi(x_n) = \varphi(x_0)\}\,,\ B = \{n \in \mathbb{N} :\ \varphi(x_n) \neq \varphi(x_0)\}\,.$$

Pro $n \in A$ jest $\dfrac{F(x_n)-F(x_0)}{x_n-x_0} = \dfrac{f(\varphi(x_n))-f(\varphi(x_0))}{x_n-x_0} = 0.$
Je-li B konečná, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_0$ je $n \in A$, tedy pro $n \geq n_0$ je $\dfrac{F(x_n)-F(x_0)}{x_n-x_0} = 0$, což znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F(x_n)-F(x_0)}{x_n-x_0} = 0.$
Je-li B nekonečná, existuje vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq B$. Dále
$$\lim_{k\to\infty}\frac{F(x_{n_k})-F(x_0)}{x_{n_k}-x_0} = \lim_{k\to\infty}\frac{f(\varphi(x_{n_k}))-f(\varphi(x_0))}{\varphi(x_{n_k})-\varphi(x_0)}\frac{\varphi(x_{n_k})-\varphi(x_0)}{x_{n_k}-x_0} =$$
$$= f'(\varphi(x_0))\lim_{k\to\infty}\frac{\varphi(x_{n_k})-\varphi(x_0)}{x_{n_k}-x_0} = 0,$$
neboť $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(x_{n_k}) = \varphi(x_0)$, jelikož φ je spojitá v x_0. Z 1.6.4 plyne $F'(x_0) = 0$. $\square$

2.1.7 Věta (o derivaci inversní funkce)

Nechť funkce f je ryze monotonní a spojitá na intervalu J. Nechť y_0 je vnitřní bod intervalu J a nechť funkce f má v tomto bodě derivaci $f'(y_0) \neq 0$. Pak funkce f^{-1} inversní k funkci f má derivaci v bodě $x_0 = f(y_0)$ a platí $(f^{-1})'(x_0) = \dfrac{1}{f'(y_0)}$.

D.: Poněvadž f je ryze monotonní, pro $x \neq x_0$ platí $y = f^{-1}(x) \neq f^{-1}(x_0) = y_0$. Tedy podle 1.6.8 platí:
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\dfrac{x-x_0}{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)}} = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(x))-f(f^{-1}(x_0))}{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)}} =$$
$$= \lim_{y\to y_0}\frac{1}{\dfrac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}} = \frac{1}{f'(y_0)}.$$
(Předposlední rovnost plyne ze spojitosti funkce f.) $\square$

2.1.8 Definice

Buď $M \subseteq \operatorname{Dom} f$ množina bodů, v nichž má funkce f derivaci. Pak zobrazení $x_0 \mapsto f'(x_0)$ je funkcí s definičním oborem M. Tato funkce se nazývá *derivace funkce* f a označuje se f'.

2.1.9 Přehled vzorců pro derivaci

(1) pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $c' = 0$

(2) $(x^a)' = ax^{a-1}$

(3) $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

(4) $(a^x)' = a^x \ln a$

(5) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

(6) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

(7) $(\sin x)' = \cos x$

(8) $(\cos x)' = -\sin x$

(9) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(10) $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

(11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(13) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

(14) $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

(15) $(cu)' = cu'$

(16) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(17) $(uv)' = u'v + uv'$

(18) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

(19) $(u^v)' = u^v \left(v' \ln u + v\dfrac{u'}{u}\right)$

(20) $(f(\varphi(x))' = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$

D.:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{c-c}{x-x_0} = 0.$

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x_0+h} - \mathrm{e}^{x_0}}{h} = \mathrm{e}^{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h}$ a vzorec plyne z 1.6.14.

(5) Podle 2.1.7 je $(\ln x)' = \dfrac{1}{\mathrm{e}^y} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}.$

(2) S využitím 2.1.6 dostaneme $(x^a)' = (\mathrm{e}^{a \ln x})' = \mathrm{e}^{a \ln x}(a \ln x)' = x^a \dfrac{a}{x} = ax^{a-1}.$

(4) $(a^x)' = (\mathrm{e}^{x \ln a})' = \mathrm{e}^{x \ln a}(x \ln a)' = a^x (x)' \ln a = a^x \ln a.$

(6) $(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{\ln a}(\ln x)' = \dfrac{1}{x \ln a}.$

(7) S využitím 1.6.9.9 dostaneme

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x.$$

Dále $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = -\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{\cos h + 1} = 1 \cdot 0 = 0.$

(8) $(\cos x)' = (\sin(x + \frac{\pi}{2}))' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \cdot 1 = -\sin x.$

(9) $(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

(10) $(\operatorname{cotg} x)' = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

(11) Podle 2.1.7 je $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{(\sin y)'} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(12) Podle 2.1.7 je $(\arccos x)' = \dfrac{1}{(\cos y)'} = -\dfrac{1}{\sin y} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(13) Podle 2.1.7 je $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \dfrac{1}{\frac{\sin^2 y+\cos^2 y}{\cos^2 y}} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 y+1} = \dfrac{1}{x^2+1}$.

(14) Podle 2.1.7 je $(\operatorname{arccotg} x)' = \dfrac{1}{(\operatorname{cotg} y)'} = \dfrac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\frac{-\sin^2 y-\cos^2 y}{\cos^2 y}} = -\dfrac{1}{x^2+1}$.

(15)-(18) 2.1.5

(19) $(u^v)' = \left(\mathrm{e}^{v\ln u}\right)' = \mathrm{e}^{v\ln u}\left(v'\ln u + v\dfrac{u'}{u}\right) = u^v\left(v'\ln u + v\dfrac{u'}{u}\right)$.

(20) 2.1.6

□

2.1.10 Příklady

1. $y = \arccos\sqrt{\dfrac{ax^2+1}{bx^2+1}}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$.

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{ax^2+1}{bx^2+1}}}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bx^2+1}{ax^2+1}}\,\frac{2ax(bx^2+1)-2bx(ax^2+1)}{(bx^2+1)^2} = \\ &= -\frac{(bx^2+1)(abx^3+ax-abx^3-bx)}{\sqrt{bx^2-ax^2}\sqrt{ax^2+1}\,(bx^2+1)^2} = -\frac{(a-b)x}{|x|\sqrt{b-a}\sqrt{ax^2+1}\,(bx^2+1)} = \\ &= \operatorname{sgn} x\,\frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{ax^2+1}\,(bx^2+1)}. \end{aligned}$$

2. $y = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}$.

   $y' = \sqrt[x]{x}\left(-\dfrac{1}{x^2}\ln x + \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1-\ln x)$

3. Napište rovnici tečny a normály k hyperbole $xy = 1$ v bodě $A = (\frac{1}{2}, 2)$.

   $y = \dfrac{1}{x}$, $y' = -\dfrac{1}{x^2}$, $y'(\frac{1}{2}) = -4$.

   tečna:
   $$\begin{aligned} y-2 &= -4(x-\tfrac{1}{2}) \\ 2y-4 &= -8x+4 \\ 4x+y-4 &= 0 \end{aligned}$$
   normála:
   $$\begin{aligned} y-2 &= \tfrac{1}{4}(x-\tfrac{1}{2}) \\ 8y-16 &= 2x-1 \\ 2x-8y+15 &= 0 \end{aligned}$$

4. $y = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$.

   $y' = \frac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ pro $x \neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty$, derivace v bodě 0 je nevlastní.

5. $y = \sqrt[3]{x^2}$, $x_0 = 0$.

   $$y' = \tfrac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}},\quad y'_+(0) = \lim_{x\to 0+}\tfrac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$$
   $$y'_-(0) = \lim_{x\to 0-}\tfrac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$$

   Funkce tedy nemá v bodě 0 derivaci ani nevlastní derivaci.

6. $y = \operatorname{sgn} x$, $x_0 = 0$

   $$(\operatorname{sgn} x)'_{x=0} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sgn} x}{x} = \infty$$

   Pro nevlastní derivaci neplatí tvrzení věty 2.1.3. (Proto také nevlastní derivaci nepovažujeme za derivaci.)

2.2 Derivace vyšších řádů, diferenciál

2.2.1 Definice

Buď f funkce, která má derivaci na množině $M_1 \subseteq \operatorname{Dom} f$ a buď $x_0 \in M_1$. Má-li funkce f' derivaci v bodě x_0, nazýváme tuto derivaci *druhou derivací funkce f v bodě x_0* a značíme ji $f''(x_0)$.
Obecně: Buď f funkce, která má na množině $M_{n-1} \subseteq \operatorname{Dom} f$ $(n-1)$-tou derivaci $f^{(n-1)}$ a buď $x_0 \in M_{n-1}$. Má-li funkce $f^{(n-1)}$ derivaci v bodě x_0, nazýváme tuto derivaci *n-tou derivací funkce f v bodě x_0* a značíme ji $f^{(n)}(x_0)$.

2.2.2 Vzorce pro n-tou derivaci

(1) $(x^a)^{(n)} = a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}$ (2) $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$

(3) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$ (4) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$

(5) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ (6) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

(7) $$(uv)^{(n)} = \binom{n}{0} u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v' + \cdots + \binom{n}{n-1} u'v^{(n-1)} + \binom{n}{n} uv^{(n)} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u^{(n-i)}v^{(i)} \qquad \text{(Leibnizova formule)}$$

D.: Ve všech případech matematickou indukcí. První krok indukce vždy bezprostředně plyne z 2.1.9. Ukážeme indukční krok.

(1) $$(x^a)^{(n)} = \left((x^a)^{(n-1)}\right)' = \left(a(a-1)\cdots(a-n+2)x^{a-n+1}\right)' = a(a-1)\cdots(a-n+2)\left(x^{a-n+1}\right)' = a(a-1)\cdots(a-n+2)(a-n+1)x^{a-n}$$

(2) $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \left((\mathrm{e}^x)^{(n-1)}\right)' = (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

(3) $(a^x)^{(n)} = \left((a^x)^{(n-1)}\right)' = \left(a^x \ln^{n-1} a\right)' = (a^x)' \ln^{n-1} a = (a^x \ln a)\ln^{n-1} a = a^x \ln^n a$

(4) $$(\ln x)^{(n)} = \left((\ln x)^{(n-1)}\right)' = \left((-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}\right)' = (-1)^{n-2}(n-2)!\frac{(-n+1)}{x^n} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

(5) $(\sin x)^{(n)} = \left((\sin x)^{(n-1)}\right)' = \left(\sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

(6) Analogicky jako (5)

(7) $$(uv)^{(n)} = \left((uv)^{(n-1)}\right)' = \left(\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} u^{(n-1-i)}v^{(i)}\right)' =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\left(u^{(n-i)}v^{(i)} + u^{(n-1-i)}v^{(i+1)}\right) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} u^{(n-i)}v^{(i)} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1} u^{(n-i)}v^{(i)} =$$
$$= \binom{n-1}{0} u^{(n)}v + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right] u^{(n-i)}v^{(i)} + \binom{n-1}{n-1} uv^{(n)} =$$
$$= u^{(n)}v + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i} u^{(n-i)}v^{(i)} + uv^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} u^{(n-i)}v^{(i)} \qquad \square$$

2.2.3 Definice

Buď f funkce definovaná v nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že tato funkce je *diferencovatelná v bodě x_0*, jestliže existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \operatorname{Dom} f$, a existuje funkce $\tau : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$

taková, že $\lim\limits_{h\to 0}\tau(h)=0$ a existuje $a\in\mathbb{R}$ takové, že pro $h\in\mathbb{R},\ |h|<\delta$ je $f(x_0+h)-f(x_0)=ah+h\tau(h)$.
V tomto případě se lineární funkce $h\mapsto ah$ nazývá *diferenciál funkce f v bodě x_0* a značí se $\mathrm{d}f(x_0)$.

2.2.4 Poznámky

1. Vyjádření $f(x_0+h)-f(x_0)=ah+h\tau(h)$ je možné při libovolném $a\in\mathbb{R}$. Stačí položit
$$\tau(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-ah}{h}\,.$$
Podstatné je však volit a tak, aby $\lim\limits_{h\to 0}\tau(h)=0$.

2. Rozdíl $f(x_0+h)-f(x_0)$ se nazývá *přírůstek funkce f v bodě x_0 při přírůstku h nezávisle proměnné* a značí se $\Delta f(x_0)(h)$, stručně $\Delta f(x_0)$.
Pro diferencovatelnou funkci platí $\Delta f(x_0)(h)=\mathrm{d}f(x_0)(h)+h\tau(h)$.

2.2.5 Věta

Funkce f je diferencovatelná v bodě $x_0\in\mathbb{R}$ právě tehdy, když má v tomto bodě derivaci. V tomto případě $a=f'(x_0)$.

D.:

$\Rightarrow$: $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(a+\tau(h))=a+\lim\limits_{h\to 0}\tau(h)=a.$

$\Leftarrow$: Nechť f má derivaci v bodě x_0. Položme $a=f'(x_0),\ \tau(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h}$. Pak
$$\lim_{h\to 0}\tau(h)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right)=f'(x_0)-f'(x_0)=0.$$

□

Platí tedy $\mathrm{d}f(x_0)(h)=f'(x_0)\cdot h,\ \dfrac{\mathrm{d}f(x_0)(h)}{h}=f'(x_0)$; stručně $\dfrac{\mathrm{d}f(x_0)}{h}=f'(x_0)$

Z tohoto vyjádření plyne geometrická interpretace diferenciálu: Diferenciál je přírůstek funkce naměřený na tečně, tedy $\Delta f(x_0)\approx \mathrm{d}f(x_0)$. Toho lze využít k přibližnému výpočtu funkčních hodnot.

Například: Výpočet $\sqrt{4.02}$. $f(x)=\sqrt{x},\ x_0=4,\ h=0.02,\ f(x_0)=\sqrt{4}=2$
$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ f'(4)=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4},\ \mathrm{d}f(4)=f'(4)\cdot h=\frac{0.02}{4}=0.005$
$f(x_0+h)=f(x_0)+\Delta f(x_0)\approx f(x_0)+\mathrm{d}f(x_0)=2+0.005=2.005$
(Přesná hodnota je 2.00499)

Je-li $f(x)=x$, pak $f'(x_0)=1$ pro každé $x_0\in\mathbb{R},\ \mathrm{d}f(x_0)(h)=h$, stručně $\mathrm{d}x=h$. Lze tedy psát $\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\mathrm{d}x$, neboli $f'(x_0)=\dfrac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$, stručně $f'=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Je-li $y=f(x)$, lze psát $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Za použití této symboliky dostanou názorný tvar vzorce pro

- derivaci složené funkce: $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varphi}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$.
- derivaci inversní funkce: $\dfrac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}f}$, neboli $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$.

2.2.6 Poznámka — zavedení diferenciálů vyšších řádů

Nechť funkce f má v bodě x_0 n-tou derivaci $f^{(n)}(x_0),\ n\geq 1$. *n-tý diferenciál (diferenciál n-tého řádu)* definujeme jako zobrazení $\mathrm{d}^n f(x_0):h\mapsto f^{(n)}(x_0)\cdot h^n$, symbolicky $\mathrm{d}^n f(x_0)=f^{(n)}(x_0)\mathrm{d}x^n$.

Za použití této symboliky lze n-tou derivaci zapsat $f^{(n)}(x)=\dfrac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}=\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$.

2.3 Obecné věty o derivaci

2.3.1 Věta (Rolle [1652 – 1719])

Nechť funkce f splňuje předpoklady:

(i) je spojitá na $[a, b]$,

(ii) v každém bodě intervalu (a, b) má vlastní nebo nevlastní derivaci,

(iii) $f(a) = f(b)$.

Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že platí $f'(c) = 0$.

D.: Je-li f konstantní, lze podle 2.1.9.1 za c vzít libovolný bod z (a, b).
Nechť f není konstantní. Podle 1.7.12 existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$.
Nechť nejprve $f(c) > f(a) = f(b)$.
Podle (ii) existuje $f'(c) \in \mathbb{R}^*$. Připusťme $f'(c) > 0$, tedy $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$.
Existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(c) \setminus \{c\}$ takové, že pro $x \in \mathcal{O}(c) \setminus \{c\}$ je $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$.
Zvolme $x_1 \in [a, b] \cap (\mathcal{O}(c) \setminus \{c\}),\ x_1 > c$. Pak $x_1 - c > 0,\ f(x_1) - f(c) \le 0$, tedy $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0$, což je spor.
Analogicky vyloučíme možnost $f'(c) < 0$. Je tedy $f'(c) = 0$.
Pokud $f(a) = f(b) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$, položíme $c = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ a provedeme analogické úvahy. □

Z důkazu plyne, že za c lze volit bod, v němž nabývá funkce f své extrémní hodnoty. Neplyne z něho, že jiné body s vlastností $f'(c) = 0$ neexistují.

Všechny tři předpoklady věty jsou podstatné.

2.3.2 Důsledek

Buď f funkce spojitá na intervalu J, která má na tomto intervalu n-tou derivaci. Má-li f na J n kořenů (t.j. existují $x_0, x_1, \dots, x_n \in J$, že $f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) = 0$), pak existuje $c \in J$ takové, že $f^{(n)}(c) = 0$.

D.: Volme označení tak, že $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.
Na intervalech $[x_i, x_{i+1}] \subseteq J,\ i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ splňuje f předpoklady Rolleovy věty. Existují tedy $c_i^1 \in (x_i, x_{i+1}) \subseteq J,\ i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ taková, že $f'(c_i^1) = 0$.
Na intervalech $[c_i^1, c_{i+1}^1] \subseteq J,\ i = 0, 1, 2, \dots, n-2$ splňuje f' předpoklady Rolleovy věty. Existují tedy $c_i^2 \in (c_i^1, c_{i+1}^1) \subseteq J,\ i = 0, 1, 2, \dots, n-2$ taková, že $f''(c_i^2) = 0$.
Analogicky postupujeme dále.
V $n-1$-ním kroku ukážeme, že existují $c_0^{n-1}, c_1^{n-1} \in J$ taková, že $f^{(n-1)}(c_0^{n-1}) = f^{(n-1)}(c_1^{n-1}) = 0$.
Na intervalu $[c_0^{n-1}, c_1^{n-1}]$ splňuje tedy $f^{(n-1)}$ předpoklady Rolleovy věty a tedy existuje
$c \in (c_0^{n-1}, c_1^{n-1}) \subseteq J$ takové, že $f^{(n)}(c) = 0$. □

2.3.3 Věta (Lagrange [1736 – 1813], 1. věta o střední hodnotě, věta o přírůstku funkce)

Nechť funkce f splňuje předpoklady:

(i) je spojitá na $[a, b]$,

(ii) v každém bodě intervalu (a, b) má vlastní nebo nevlastní derivaci.

Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že platí $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

D.: Položme $F(x) = (b-a)f(x) - (f(b) - f(a))x$. Funkce F splňuje předpoklady 2.3.1:

(i): plyne z 1.7.6

(ii): plyne z 2.1.9(2) a 2.1.5.

(iii): $F(a) = (b-a)f(a) - (f(b) - f(a))a = f(a)(b - a + a) - f(b)a = bf(a) - af(b)$
$F(b) = (b-a)f(b) - (f(b) - f(a))b = f(b)(b - a - b) + f(a)b = bf(a) - af(b)$

Existuje tedy $c \in (a, b)$, že $F'(c) = 0$.

$F'(x) = (b-a)f'(x) - (f(b) - f(a))$, $0 = F'(c) = (b-a)f'(c) - (f(b) - f(a))$, z čehož $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.
□

2.3.4 Důsledky

1. Splňuje-li funkce f na intervalu $[a, b]$ předpoklady 2.3.3, pak pro libovolná $x_1, x_2 \in [a, b], x_1 \neq x_2$ existuje ξ mezi x_1 a x_2 tak, že platí $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, neboli $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.
   $f(x_2) - f(x_1)$ — přírůstek funkce f mezi body x_1, x_2. Odtud je odvozen jeden z názvů věty.

2. Nechť funkce f je spojitá na $[a, b]$ a nechť pro každé $x \in (a, b)$ je $f'(x) = 0$. Pak je f konstatntní na $[a, b]$.

   D.: Buďte $x_1, x_2 \in [a, b]$ libovolné. Pak podle předchozího $f(x_2) = f'(\xi)(x_2 - x_1) + f(x_1) = f(x_1)$. □

3. Nechť funkce f, g jsou spojité na $[a, b]$. Mají-li f, g vlastní nebo nevlastní derivaci na $[a, b]$ a platí-li $f'(x) = g'(x)$ pro každé $x \in (a, b)$, pak existuje $c \in \mathbb{R}$ taková konstanta, že $f(x) = g(x) + c$ identicky na $[a, b]$.

   D.: Položme $h(x) = f(x) - g(x)$. Pak $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ a podle předchozího $h(x) = c$. □

2.3.5 Věta (Cauchy [1789 – 1857], 2. věta o střední hodnotě, věta o podílu přírůstků funkce)

Nechť funkce f, g splňují předpoklady:

(i) jsou spojité na $[a, b]$,

(ii) v každém bodě intervalu (a, b) existuje vlastní nebo nevlastní derivace $f'(x)$ a vlastní derivace $g'(x) \neq 0$.

Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že platí $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

D.: g splňuje předpoklady 2.3.3, existuje tedy $d \in (a, b)$ takové, že $\dfrac{g(b) - g(a)}{b-a} = g'(d) \neq 0$, z čehož plyne $g(b) - g(a) \neq 0$, takže zlomek na levé straně tvrzení věty má smysl.
Položme $F(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)$. Přímo ověříme, že tato funkce splňuje předpoklady 2.3.1. Existuje tedy $c \in (a, b)$ takové, že $F'(c) = 0$.
Tedy $0 = (g(b) - g(a))f'(c) - (f(b) - f(a))g'(c)$, z čehož plyne tvrzení. □

$$\begin{array}{l} x = g(t) \\ y = f(t) \end{array} \quad t \in [a, b] \quad \text{— parametrické vyjádření nějaké křivky.}$$

$\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ — směrnice sečny, vedené body $A = (g(a), f(a))$, $B = (g(b), f(b))$.

$y = f(g^{-1}(x))$, $y' = \dfrac{f'(g^{-1}(x))}{g'(t)} = \dfrac{f'(t)}{g'(t)}$, tedy $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ je směrnice tečny v bodě $C = (g(c), f(c))$.

Z důkazu Lagrangeovy věty je vidět, že Lagrangeova věta je důsledkem Rolleovy věty. Z důkazu Cauchyovy věty je vidět, že Cauchyova věta je důsledkem současně Rolleovy a Lagrangeovy věty. Bezprostředně je ale vidět, že Lagrangeova věta je důsledkem Cauchyovy věty a Rolleova věta je důsledkem Lagrangeovy věty. Všechny tři věty jsou tedy ekvivalentní.

2.3.6 Věta (Johann Bernoulli [1667 – 1748], de l'Hospitalovo pravidlo [1696])

Nechť f, g jsou funkce, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ nebo $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$.
Existuje-li $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}^*$, existuje i $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.
Stejné tvrzení platí i pro jednostranné limity.

Je-li $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ a funkce $\dfrac{f'}{g'}$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, důkaz je snadný:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Důkazy de l'Hospitalova pravidla v ostatních případech lze nalézt v literatuře.

Poznámka: Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ nebo $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$ a $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ neexistuje, nelze z toho usuzovat nic o existenci a hodnotě $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
Například $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin x}{x-\cos x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\cos x}{x}} = \dfrac{1-0}{1-0} = 1$, ale $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-\sin x)'}{(x-\cos x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\cos x}{1+\sin x}$ neexistuje.

2.3.7 Zobecnění:

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť pro $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ platí $\lim\limits_{x\to x_0} f^{(k)}(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g^{(k)}(x) = 0$ nebo $\lim\limits_{x\to x_0} |g^{(k)}(x)| = \infty$.
Existuje-li $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$, existuje i $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a obě limity jsou shodné.

Jinými slovy: de l'Hospitalovo pravidlo lze používat opakovaně

2.3.8 Poznámka o neurčitých výrazech

Nechť f, g jsou funkce, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ takové, že $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}^*$.

1. $a = b = 0$, typ $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.
2. $a = \pm\infty$, $b = \pm\infty$, typ $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.
3. $a = 0$, $b = \pm\infty$, typ $0\cdot\infty$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, což je některý z předchozích typů.
4. $a = b = \pm\infty$, typ $\infty - \infty$: $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$, což je typ $\frac{0}{0}$.
5. $a = b = 0$, typ 0^0: $f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}$, což je typ $0\cdot\infty$.
6. $a = \infty$, $b = 0$, typ ∞^0: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}$, což je typ $0\cdot\infty$.
7. $a = 1$, $b = \infty$, typ 1^∞: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}$, což je typ $\infty\cdot 0$.

2.4 Taylorův vzorec

2.4.1 Označení

Buďte f, g funkce, $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

Symbol $f(x) = O(g(x)), x \to x_0$, stručněji $f = O(g), x \to x_0$ značí: existuje okolí $\mathcal{O}(x_0) \subseteq \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$ bodu x_0 a konstanta $k \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0)$ platí $|f(x)| \leq k\,|g(x)|$. Někdy se v takovém případě říká, že *funkce f je malá řádu g*.

Symbol $f(x) = o(g(x)), x \to x_0$, stručněji $f = o(g), x \to x_0$ značí $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. Někdy se v takovém případě říká, že *funkce f je nekonečně malá řádu g*.

2.4.2 Definice

Buďte f, g spojité funkce, $x_0 \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Řekneme, že funkce f, g mají v bodě x_0 *styk řádu alespoň n*, jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^n} = 0$.

Funkce f, g mají v bodě x_0 styk řádu alespoň n, pokud $f(x) - g(x) = o\left((x - x_0)^n\right), x \to x_0$.

Poznámka: Je-li rovinná křivka grafem funkce f, která má v $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ derivaci a funkce g je dána předpisem $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, pak funkce f a g mají v bodě x_0 styk řádu alespoň 1. (Tečna ke grafu funkce má s grafem funkce styk řádu alespoň 1.)

D.: $\displaystyle \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0$ □

2.4.3 Věta

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a funkce f, g mají v bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$ spojitou n-tou derivaci. Funkce f a g mají v bodě x_0 styk řádu alespoň n právě tehdy, když platí

$$f(x_0) = g(x_0),\ \ f'(x_0) = g'(x_0),\ \ f''(x_0) = g''(x_0),\ \ \cdots,\ \ f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0).$$

D.: V obou částech důkazu budeme používat označení $F(x) = f(x) - g(x)$, $G_k(x) = (x - x_0)^k$ pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Poněvadž existuje $F^{(n)}(x_0)$, existují na jistém okolí bodu x_0 i $F^{(k)}$ pro $k \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ a jsou to podle 2.1.3 funkce spojité v bodě x_0.
Podle 2.2.2.1 je $G_k^{(l)}(x) = k(k-1)\cdots(k-l+1)(x - x_0)^{k-l}$. Všechny funkce $G_k^{(l)}$ jsou v bodě x_0 spojité a platí $G_k^{(l)}(x_0) = \begin{cases} 0, & l \neq k \\ k!, & l = k \end{cases}$.

$\Leftarrow$: Nechť $F(x_0) = F'(x_0) = F''(x_0) = \cdots = F^{(n)}(x_0) = 0$. Pak s využitím 2.3.7 platí

$$0 = \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{F^{(n)}(x_0)}{G_n^{(n)}(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{F^{(n)}(x)}{G_n^{(n)}(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)}{G_n(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)}{(x - x_0)^n}\,.$$

$\Rightarrow$: Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{F(x)}{(x - x_0)^n} = 0$.
Kdyby existovalo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že $F(x_0) = F'(x_0) = F''(x_0) = \cdots = F^{(k-1)}(x_0) = 0$ a $F^{(k)}(x_0) \neq 0$, pak by s využitím 2.3.7 platilo

$$\begin{aligned} 0 \quad &\neq \quad \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!} = \frac{F^{(k)}(x_0)}{G_k^{(k)}(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{F^{(k)}(x)}{G_k^{(k)}(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)}{G_k(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)}{(x - x_0)^k} = \\ &= \quad \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)}{(x - x_0)^n}(x - x_0)^{n-k} = 0, \end{aligned}$$

což by byl spor.

□

2.4.4 Definice

Buď f funkce, $a \in \operatorname{Dom} f$. Nechť funkce f má v bodě a derivace až do n-té včetně. Polynom

$$T_{n,f,a}(x) = T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

se nazývá *Taylorův polynom stupně n funkce f v bodě a (se středem a)*.
Je-li $a = 0$, nazývá se tento polynom *Maclaurinův*.

2.4.5 Věta

Pro Taylorův polynom platí

$$T_n(a) = f(a), \quad T_n'(a) = f'(a), \quad T_n''(a) = f''(a), \quad \cdots, \quad T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)\ .$$

D.: $T_n(a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(a-a) + \frac{f''(a)}{2!}(a-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(a-a)^n = f(a)$

$T_n'(x) = \frac{f'(a)}{1!} + \frac{f''(a)}{2!}2(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}n(x-a)^{n-1};\ T_n'(a) = f'(a)$

$T_n''(x) = \frac{f''(a)}{2!}2 + \frac{f'''(a)}{3!}3 \cdot 2 \cdot (x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}n(n-1)(x-a)^{n-2};\ T_n''(a) = f''(a)$

$\vdots$

$T_n^{(n)}(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}n(n-1)\cdots 2;\ T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$ □

Z vět 2.4.3 a 2.4.5 bezprostředně plyne

2.4.6 Důsledek

Nechť funkce f má v bodě $a \in \operatorname{Dom} f$ n-tou derivaci a nechť $T_{n,f,a}$ je Taylorův polynom stupně n funkce f v bodě a. Pak funkce f a $T_{n,f,a}$ mají v bodě x_0 styk řádu alespoň n.

2.4.7 Příklad (Maclaurinovy polynomy některých elementárních funkcí

1. $f(x) = \mathrm{e}^x$
   $f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$, tedy $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$
   $T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

2. $f(x) = \sin x$
   $f(0) = 0,\ f'(0) = \cos 0 = 1,\ f''(0) = -\sin 0 = 0,\ f'''(0) = -\cos 0 = -1,\ f''''(0) = \sin 0 = 0, \ldots,$
   $f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1},\ f^{2n}(0) = 0$
   $T_{2n-1}(x) = T_{2n}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$

3. $f(x) = \cos x$
   $f(0) = 1,\ f'(0) = -\sin 0 = 0,\ f''(0) = -\cos 0 = -1,\ f'''(0) = \sin 0 = 0,\ f''''(0) = \cos 0 = 1, \ldots,$
   $f^{(2n)}(0) = (-1)^n,\ f^{2n+1}(0) = 0$
   $T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$

4. $f(x) = \ln(1+x)$
   $f(0) = 0,$
   Podle 2.2.2.4 je $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$, a tedy $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$.
   $T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$

5. $f(x) = (1+x)^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}$
   $f(0) = 1,$
   Podle 2.2.2.1 je $[(1+x)^{\alpha}]^{(k)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$, a tedy
   $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)$.
   Definujme $\begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. Pak
   $T_n(x) = 1 + \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} \alpha \\ 3 \end{pmatrix} x^3 + \cdots + \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} x^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} x^k.$
   Pro $\alpha \in \mathbb{N},\ \alpha \leq n$ je Maclaurinův polynom rozepsáním výrazu $(1+x)^{\alpha}$ podle binomické věty.

2.4.8 Věta (Brook Taylor [1685 – 1731])

Buď f funkce, $a \in \operatorname{Dom} f$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť existuje okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a takové, že funkce f má $(n+1)$-tou derivaci v každém bodě z $\mathcal{O}(a)$. Buď $x \in \mathcal{O}(a)$. Pak v otevřeném intervalu s krajními body a a x existuje číslo c takové, že platí

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

D.: Buď $x_0 > a,\ x_0 \in \mathcal{O}(a)$ libovolné.
Položíme $K = \dfrac{f(x_0) - T_n(x_0)}{(x_0-a)^{n+1}}$, neboli $f(x_0) = T_n(x_0) + K(x_0-a)^{n+1}$.
Dále položíme $F(x) = f(x) - T_n(x) - K(x-a)^{n+1}$ pro $x \in [a, x_0]$.
Funkce F má podle 2.1.3 a 2.1.5 na $[a, x_0]$ spojité derivace až do n-té, neboť f má na tomto intervalu $(n+1)$-tou derivaci a $T_n(x),\ (x-a)^{n+1}$ mají derivace všech řádů.
Podle 2.4.5 platí $F(a) = F'(a) = F''(a) = \cdots F^{(n)}(a) = 0$.
Dále $F(x_0) = 0$. Tedy F splňuje na $[a, x_0]$ předpoklady 2.3.1. odtud plyne, že existuje $c_1 \in (a, x_0)$ že $F'(c_1) = 0$.
To dále znamená, že funkce F' splňuje na $[a, c_1]$ předpoklady 2.3.1, z čehož plyne, že existuje $c_2 \in (a, c_1)$ že $F''(c_2) = 0$.
Tak pokračujeme dále. Nakonec ukážeme, že existuje $c_n,\ a < c_n < x_0$ takové, že $F^{(n)}(c) = 0$.
Celkem tedy dostaneme, že funkce $F^{(n)}$ splňuje na $[a, c_n]$ předpoklady 2.3.1, z čehož plyne, že existuje $c \in (a, c_n) \subseteq (a, x_0)$ že $F^{(n+1)}(c) = 0$.
Přitom $F^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - 0 - K(n+1)!$, z čehož plyne $K = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$.
Dokázali jsme tedy platnost vzorce pro $x = x_0 > a,\ x_0 \in \mathcal{O}(a)$. Poněvadž $x_0 > a$ byl libovolný, platí vzorec na pravém okolí bodu a.
Jeho platnost na levém okolí bodu a dokážeme analogicky. □

Poznámky

- Vzorec uvedený ve větě lze zapsat: $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$. Tento vzorec se nazývá *Taylorův* (pro $a = 0$ *Maclaurinův*); výraz $R_n(x)$ se nazývá *zbytek v Taylorově vzorci* nebo *Taylorův zbytek*.
  Výraz $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ se nazývá *Lagrangeův tvar (Taylorova) zbytku*.
  Existují i jiné tvary zbytku, vždy však platí $R_n(x) = o\left((x-a)^n\right), x \to a$.
- Číslo c lze napsat ve tvaru $c = a + \Theta(x-a)$, kde $\Theta \in (0,1)$.
- Je vidět, že Lagrangeova věta 2.3.3 je speciálním případem věty Taylorovy (pro $n = 1$).
  Naopak, Taylorova věta byla dokázána jako důsledek věty Rolleovy 2.3.1

2.4.9 Příklad (Zbytky Maclaurinových polynomů některých elementárních funkcí)

Sr. 2.2.2

1. $f(x) = \mathrm{e}^x,\ R_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\Theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$

2. $f(x) = \sin x,\ R_{2n-1}(x) = \dfrac{\sin(\Theta x + n\pi)}{(2n)!} x^{2n}$

3. $f(x) = \cos x,\ R_{2n}(x) = \dfrac{\cos(\Theta x + \frac{2n+1}{2}\pi)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

4. $f(x) = \ln(x+1),\ R_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\Theta x)^{n+1}}$

5. $f(x) = (1+x)^\alpha,\ R_n(x) = \begin{pmatrix} \alpha \\ n+1 \end{pmatrix} (1+\Theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1}$

Taylorova věta slouží k přibližnému výpočtu funkčních hodnot

2.4.10 Příklad

Najděte Maclaurinův polynom, který na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aproximuje funkci $f(x) = \sin x$ s přesností 10^{-5}.

Ř.:

$$\sin x = T_{2n-1}(x) + R_{2n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{\sin(\Theta x + n\pi)}{(2n)!} x^{2n}$$

$$|R_{2n-1}(x)| = \left| \frac{\sin(\Theta x + n\pi)}{(2n)!} x^{2n} \right| \le \frac{|x^{2n}|}{(2n)!} \le \frac{(\frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!}$$

Snadno ověříme, že $|R_9(x)| \le 0.00002$ a $|R_{11}| \le 0.0000005 < 10^{-5}$. Tedy stačí vzít

$$T_{11}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5\ 040} + \frac{x^9}{362\ 880} - \frac{x^{11}}{39\ 916\ 800}\,.$$

□

2.5 Průběh funkce

2.5.1 Věta

Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ vlastní nebo nevlastní derivaci. Je-li $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$), pak je f v bodě x_0 rostoucí (resp. klesající).

D.: Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$. Pak existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$.
Je-li $x \in \mathcal{O}(x_0),\ x < x_0$, pak $x - x_0 < 0$ a tedy $f(x) - f(x_0) < 0$, tj. $f(x) < f(x_0)$.
Je-li $x \in \mathcal{O}(x_0),\ x > x_0$, pak $x - x_0 > 0$ a tedy $f(x) - f(x_0) > 0$, tj. $f(x) > f(x_0)$.
Druhé tvrzení dokážeme analogicky. □

2.5.2 Věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu J a má zde vlastní nebo nevlastní derivaci. f je rostoucí (resp. klesající) na J právě tehdy, když $f'(x) \ge 0$ (resp. $f'(x) \le 0$) na J, přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném subintervalu intervalu J.

D.: $\Rightarrow$: Nechť f je rostoucí na J, $x_0 \in J$ libovolný. Pro $x \in J,\ x > x_0$ je $f(x) > f(x_0)$ a pro $x \in J,\ x < x_0$ je $f(x) < f(x_0)$, tedy $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ pro $x \in J$. Odtud plyne, že $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$.
Kdyby rovnost $f'(x_0) = 0$ platila na intervalu $I \subseteq J$, byla by podle 2.3.4.2 funkce f konstantní na I.

$\Leftarrow$: Buďte $x_1, x_2 \in J,\ x_1 < x_2$. Na $[x_1, x_2]$ funkce f splňuje předpoklady 2.3.3 a tedy existuje $\xi \in (x_1, x_2)$ takové, že $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi) \ge 0$, což znamená, že $f(x_1) \le f(x_2)$.
f je tedy neklesající na J a poněvadž na žádném subintervalu není konstantní, je rostoucí.

Druhé tvrzení se dokáže analogicky. □

2.5.3 Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ *lokální maximum* (resp. *minimum*), jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \cap \operatorname{Dom} f$ bodu x_0 platí $f(x) \leq f(x_0) \quad$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
Lokální maximum (resp. minimum) se nazývá *ostré*, jestliže existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 takové, že pro každé $x \in (\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap \operatorname{Dom} f$ platí $f(x) < f(x_0) \quad$ (resp. $f(x) > f(x_0)$).
Lokální maxima a minima souhrnně nazýváme *lokální extrémy*, případně *ostré lokální extrémy*.
Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in M \subseteq \operatorname{Dom} f$ *absolutní maximum* (resp. *minimum*), na množině M, jestliže pro každé $x \in M$ platí $f(x) \leq f(x_0) \quad$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
Absolutní maximum (resp. minimum) se nazývá *ostré*, jestliže příslušné nerovnosti jsou ostré.
Absolutní maxima a minima souhrnně nazýváme *absolutní extrémy*.

2.5.4 Poznámky

1. Má-li funkce v bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ lokální extrém a existuje-li vlastní nebo nevlastní $f'(x_0)$, pak $f'(x_0) = 0$. (Plyne bezprostředně z 2.5.1.)

2. Body, v nichž $f'(x_0) = 0$ nazýváme *stacionární body* funkce f.
   Bezprostředně z předchozího tvrzení vyplývá, že funkce může mít lokální extrém buď ve stacionárním bodě a nebo v bodě, kde neexistuje vlastní ani nevlastní derivace.

3. Stacionární bod nemusí být bodem lokálního extrému.
   Např. $f(x) = x^3,\ f'(0) = 0,\ f'(x) = 3x^2 > 0$ pro $x \neq 0$. Tedy podle 2.5.2 je f rostoucí na $\mathbb{R}$.

2.5.5 Věta

Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f$. Existuje-li levé ryzí okolí $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0, v němž je f neklesající (resp. nerostoucí) a pravé ryzí okolí $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0, v němž je f nerostoucí (resp. neklesající), pak má funkce f v bodě x_0 lokální maximum (resp. lokální minimum).
Existuje-li levé ryzí okolí $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0, v němž je f rostoucí (resp. klesající) a pravé ryzí okolí $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0, v němž je f klesající (resp. rostoucí), pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum (resp. ostré lokální minimum).

D.: Nechť f je v $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ neklesající a v $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ nerostoucí. Podle 1.6.15 je $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in \mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}\}$, $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \sup\{f(x) : x \in \mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}\}$. Poněvadž f je spojitá v x_0, je $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \sup\{f(x) : x \in (\mathcal{P}(x_0) \cup \mathcal{L}(x_0)) \setminus \{x_0\}\}$.
Nechť f je v $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ rostoucí a v $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ klesající. Buď $x \in \mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ libovolný. Pro $x_1 \in (x, x_0) \subseteq \mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) < f(x_1) \leq f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in \mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}\}$.
Podobně ukážeme, že pro $x \in \mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x_0) > f(x)$.
Analogicky ukážeme platnost tvrzení v ostatních případech. □

Obrácená věta neplatí. Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém, nemusí být v žádném ryzím jednostranném okolí monotonní.

Předpoklad o spojitosti funkce f je podstatný.

2.5.6 Důsledky

1. Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ a existuje levé ryzí okolí $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 a pravé ryzí okolí $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 taková, že funkce f má vlastní nebo nevlastní derivaci $f'(x)$ na $(\mathcal{P}(x_0) \cup \mathcal{L}(x_0)) \setminus \{x_0\}$, přičemž $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) na $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ a $f'(x) < 0$ (resp. $f'(x) > 0$) na $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$. Pak má f v bodě x_0 ostré lokální maximum (resp. minimum).

   D.: plyne z 2.5.5 a z 2.5.1 □

2. Nechť $f'(x_0) = 0$ a nechť funkce f má v bodě x_0 vlastní nebo nevlastní druhou derivaci. Je-li $f''(x_0) < 0$, má f v bodě x_0 ostré lokální maximum, je-li $f''(x_0) > 0$, má f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

D.: Je-li $f''(x_0) < 0$, je $f'(x_0)$ v bodě x_0 podle 2.5.1 klesající. Existuje tedy ryzí levé okolí $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 takové, že $f'(x) > 0$ na $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ a existuje ryzí pravé okolí $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 takové, že $f'(x) < 0$ na $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$.
Analogicky ukážeme platnost druhého tvrzení. $\square$

2.5.7 Poznámka o absolutních extrémech

Nechť funkce f je spojitá na $[a, b]$. Podle 1.7.12 nabývá f na $[a, b]$ své největší i nejmenší hodnoty, tedy svého absolutního maxima a absolutního minima. Absolutních extrémů nabývá buď v bodech lokálních extrémů nebo v krajních bodech intervalu $[a, b]$.

2.5.8 Definice

Řekneme, že funkce f je *konvexní* (resp. *konkávní*) *na intervalu* $J \subseteq \operatorname{Dom} f$, jestliže pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in J,\ x_1 < x_2 < x_3$ platí $f(x_2) \leq f(x_1) + \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1)$
(resp. $f(x_2) \geq f(x_1) + \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1)$).
Řekneme, že funkce f je *ryze konvexní* (resp. *ryze konkávní*) *na intervalu* $J \subseteq \operatorname{Dom} f$, jestliže pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in J,\ x_1 < x_2 < x_3$ platí $f(x_2) < f(x_1) + \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1)$
(resp. $f(x_2) > f(x_1) + \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1)$).

2.5.9 Věta

Funkce f je konvexní na intervalu $J \subseteq \operatorname{Dom} f$ právě tehdy, když pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in J,\ x_1 < x_2 < x_3$ je splněna některá z ekvivalentních podmínek

$(\vee_1)$ $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$,

$(\vee_2)$ $\dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$,

$(\vee_3)$ $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

Nerovnost v těchto podmínkách je ostrá právě tehdy, když funkce f je ryze konvexní na intervalu J.
Funkce f je konkávní na intervalu $J \subseteq \operatorname{Dom} f$ právě tehdy, když pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in J,\ x_1 < x_2 < x_3$ je splněna některá z ekvivalentních podmínek

$(\wedge_1)$ $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$,

$(\wedge_2)$ $\dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \geq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$,

$(\wedge_3)$ $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

Nerovnost v těchto podmínkách je ostrá právě tehdy, když funkce f je ryze konkávní na intervalu J.

D.: Podmínka $(\vee_1)$ je zřejmě ekvivalentní s podmínkou v definici 2.5.8.
Upravíme podmínku $(\vee_1)$:

$$\begin{aligned}
(x_3 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) &\leq (x_2 - x_1)(f(x_3) - f(x_1)) \\
x_3 f(x_2) - x_3 f(x_1) - x_1 f(x_2) + x_1 f(x_1) &\leq x_2 f(x_3) - x_2 f(x_1) - x_1 f(x_3) + x_1 f(x_1) \\
x_2 f(x_1) + x_3 f(x_2) + x_1 f(x_3) &\leq x_1 f(x_2) + x_2 f(x_3) + x_3 f(x_1)
\end{aligned}$$

Dále upravíme podmínku ($\vee_2$):

$$\begin{aligned}
(x_3 - x_2)(f(x_3) - f(x_1)) &\le (x_3 - x_1)(f(x_3) - f(x_2)) \\
x_3 f(x_3) - x_3 f(x_1) - x_2 f(x_3) + x_2 f(x_1) &\le x_3 f(x_3) - x_3 f(x_2) - x_1 f(x_3) + x_1 f(x_2) \\
x_2 f(x_1) + x_3 f(x_2) + x_1 f(x_3) &\le x_1 f(x_2) + x_2 f(x_3) + x_3 f(x_1)
\end{aligned}$$

Odtud je vidět, že podmínky ($\vee_1$) a ($\vee_2$) jsou ekvivalentní. Stejně (prostým roznásobením) ukážeme ekvivalenci podmínky ($\vee_3$) s podmínkami ($\vee_1$) a ($\vee_2$).
Tvrzení pro konkávní funkce dokážeme analogicky. □

2.5.10 Věta

Nechť funkce f má na intervalu $J \subseteq \operatorname{Dom} f$ derivaci f'. Je-li funkce f konvexní (resp. konkávní) na J, pak pro každé dva různé vnitřní body $x, x_0 \in J$ platí $f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (resp. $f(x) \le f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$). Je-li funkce f ryze konvexní (resp. ryze konkávní) na J, pak pro každé dva různé vnitřní body $x, x_0 \in J$ platí $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (resp. $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$).

D.:

- Buď f konvexní funkce na J a x, x_0 libovolné vnitřní body intervalu J.
  Nechť nejprve $x_0 < x$. Podle ($\vee_1$) pro libovolné $\xi \in (x_0, x)$ platí $\dfrac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \le \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
  Limitním přechodem $\xi \to x_0$ dostaneme $f'(x_0) \le \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, neboli $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \le f(x)$.
  Nechť nyní $x < x_0$. Podle ($\vee_2$) pro libovolné $\xi \in (x, x_0)$ platí $\dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \le \dfrac{f(x_0) - f(\xi)}{x_0 - \xi}$.
  Limitním přechodem $\xi \to x_0$ dostaneme $\dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \le f'(x_0)$, neboli $f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- Je-li f ryze konvexní na J, pak podle již dokázaného pro každé dva vnitřní body $x, x_0 \in J$ platí $f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Připusťme, že existují vnitřní body $x_1, x_3 \in J$, $x_1 < x_3$ takové, že $f(x_3) = f(x_1) + f'(x_1)(x_3 - x_1)$.
  Podle ($\vee_1$) — s nodifikací pro ryze konvexní funkce — pro každé $x_2 \in (x_1, x_3)$ platí

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &< \frac{f(x_1) + f'(x_1)(x_3 - x_1) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \\
\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &< f'(x_1) \\
f(x_2) &< f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)\,,
\end{aligned}$$

  což je spor s již dokázaným (při označení $x = x_2,\ x_0 = x_1$).
  Analogicky s využitím ($\vee_2$) vyloučíme možnost existence vnitřních bodů $x_1, x_3 \in J$ takových, že $f(x_1) = f(x_3) + f'(x_3)(x_1 - x_3)$.
  Tedy pro všechny vnitřní body $x, x_0 \in J$ platí $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- Tvrzení o konkávní funkci dokážeme analogicky.

□

2.5.11 Věta

Nechť funkce f má na intervalu $J \subseteq \operatorname{Dom} f$ derivaci f'. Funkce f je ryze konvexní (resp. konkávní) na intervalu J právě tehdy, když f' je na J rostoucí (resp. klesající).

D.: $\Rightarrow$: Buďte $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$ libovolné. Podle 2.5.10 je $f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$ a
$f(x_1) > f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$, neboli $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > f'(x_1)$ a $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < f'(x_2)$.
Odtud $f'(x_1) < f'(x_2)$.

$\Leftarrow$: Sporem. Nechť f' je rostoucí na J a připusťme, že f není ryze konvexní, tedy že existují $x_1, x_2, x_3 \in J,\ x_1 < x_2 < x_3$ takové, že $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ (sr. $(\vee_3)$).
Podle 2.3.3 existují $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ a $\xi_2 \in (x_2, x_3)$, že
$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi_1)$ a $\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = f'(\xi_2)$.
Zřejmě $\xi_1 < \xi_2$ a poněvadž f' je rostoucí, je $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, což je spor.

Tvrzení o konkávní funkci dokážeme analogicky. □

Odtud a z 2.5.2 plyne

2.5.12 Důsledek

Nechť funkce f má na intervalu J spojitou první derivaci a vlastní nebo nevlastní druhou derivaci. f je ryze konvexní (resp. konkávní) na J právě tehdy, když $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) \leq 0$) na J, přičemž rovnost $f''(x) = 0$ neplatí na žádném subintervalu intervalu J.

2.5.13 Definice

Nechť f je funkce spojitá v $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ a nechť existuje vlastní nebo nevlastní derivace $f'(x_0)$. Řekneme, že x_0 je *inflexním bodem* funkce f, jestliže existuje levé ryzí okolí $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 a pravé ryzí okolí $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ bodu x_0 taková, že f je ryze konvexní na $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$ a ryze konkávní na $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$, nebo naopak f je ryze konvexní na $\mathcal{P}(x_0) \setminus \{x_0\}$ a ryze konkávní na $\mathcal{L}(x_0) \setminus \{x_0\}$.

2.5.14 Poznámky

1. Je-li x_0 inflexní bod funkce f a f' je spojitá v bodě x_0. Pak f' má v bodě x_0 ostrý lokální extrém. (sr. 2.5.6.1, a 2.5.12).

2. Je-li x_0 inflexní bod funkce f a existuje vlastní nebo nevlastní druhá derivace $f''(x_0)$, pak $f''(x_0) = 0$
Opačné tvrzení neplatí. Z $f''(x_0) = 0$ neplyne, že by x_0 byl inflexní bod funkce f.
Například: $f(x) = x^4,\ f''(x) = 12x^2,\ f''(0) = 0$ a v bodě $x_0 = 0$ není inflexní bod funkce f.

2.5.15 Definice

Řekneme, že přímka $p : x = x_0$ je *asymptotou bez směrnice* funkce f, jestliže funkce f má v x_0 alespoň jednu nevlastní jednostrannou limitu.
Řekneme, že přímka $p : y = ax + b$ je *asymptotou se směrnicí* funkce f, jestliže funkce f je definována v okolí ∞ (resp. $-\infty$) a platí $\lim\limits_{x\to\infty}(ax + b - f(x)) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax + b - f(x)) = 0$).

Libovolná funkce může mít nejvýše dvě asymptoty se směrnicí, může však mít libovolný počet asymptot bez směrnice.

2.5.16 Věta

Přímka $y = ax + b$ je asymptotou se směrnicí funkce f právě tehdy, když $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = a,\ \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = a,\ \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - ax) = b\right)$.

D.: $\Rightarrow$: Pokud $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(ax + b - f(x)) = 0$ pak podle 1.6.7.7 a 1.6.7.4 také $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax + b - f(x)}{x} = 0$, tedy $0 = a - \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, neboli $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} = a$.
Dále z $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(ax + b - f(x)) = 0$ plyne $0 = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(ax - f(x)) + b$ a tedy $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax) = b$.

$\Leftarrow$: Jestliže $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax) = b$, pak $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(ax + b - f(x)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(ax - f(x)) + b = -b + b = 0$. □

2.5.17 Postup při vyšetřování průběhu funkce

1. Určíme $\operatorname{Dom} f$; pokud je to možné, tak nulové body funkce f a intervaly, na nichž je f kladná a záporná.

2. Vypočítáme f'; určíme nulové body f' (stacionární body); body, v nichž f' není definována; body, v nichž f' je kladná a záporná (Tj. určíme intervaly monotonnosti a lokální extrémy.)

3. Vypočítáme f''; určíme nulové body f''; body, v nichž f'' není definována; body , v nichž f'' je kladná a záporná (Tj. určíme intervaly konvexity a konkavity, inflexní body.)

4. Vypočítáme příslušné jednostranné limity v „hraničních bodech“ $\operatorname{Dom} f$ (Tj. najdeme všechny asymptoty bez směrnice). Najdeme obě asymptoty se směrnicí (pokud existují).

5. Vypočítáme funkční hodnoty ve význačných bodech (stacionárních, inflexních), případně v několika dalších bodech. V inflexních bodech může být užitečné vypočítat hodnotu derivace.

2.6 Rovinné křivky

2.6.1 Definice

Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ spojité funkce. Množina $C = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^2$ se nazývá (*rovinná*) *křivka*, funkce φ, ψ se nazývají *parametrizace křivky* C.
Je-li $I = [a, b]$, body $A = (\varphi(a), \psi(a))$, $B = (\varphi(b), \psi(b))$ se nazývají *krajní body křivky* C. Křivka C se nazývá *uzavřená*, jestliže $A = B$.

- Jedna křivka může mít více parametrizací. Například
  $\begin{array}{l}\varphi(t) = \cos t \\ \psi(t) = \sin t\end{array}, t \in [0, 2\pi]$, $\quad \begin{array}{l}\tilde{\varphi}(t) = \cos 2t \\ \tilde{\psi}(t) = \sin 2t\end{array}, t \in [0, \pi]$, $\quad \begin{array}{l}\hat{\varphi}(t) = \cos t \\ \hat{\psi}(t) = -\sin t\end{array}, t \in [0, 2\pi]$,
  jsou tři různé parametrizace kružnice se středem $(0, 0)$ a poloměrem 1.

- Je-li f spojitá funkce, $\operatorname{Dom} f$ je interval, pak graf funkce f je křivka s parametrizací
  $\begin{array}{l}\varphi(t) = t \\ \psi(t) = f(t)\end{array}, t \in \operatorname{Dom} f$.

- Je-li $C = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in I\}$ křivka, t_0 vnitřní bod intervalu I a funkce φ je na okolí bodu t_0 ryze monotonní (k tomu stačí, aby φ měla v bodě t_0 spojitou derivaci a $\varphi'(t_0) \neq 0$), pak existuje interval $J \subseteq \mathbb{R}$, který obsahuje bod $\varphi(t_0)$ a existuje funkce f definovaná na J tak, že $\{(x, f(x)) : x \in J\} \subseteq C$.

  D.: Nechť existuje okolí $\mathcal{O}(t_0)$ bodu t_0 takové, že φ je na $\mathcal{O}(t_0)$ ryze monotonní. Na $\mathcal{O}(t_0)$ existuje funkce φ^{-1} inversní k funkci φ. Označme $J = \varphi(\mathcal{O}(t_0))$. Pro $x = \varphi(t) \in J$ definujme $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$. $\square$

2.6.2 Poznámka o derivaci funkcí daných parametricky

- Nechť $C = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in I\}$ je křivka, φ, ψ mají spojitou derivaci na I a nechť $\varphi'(t) \neq 0$ pro každé $t \in I$. Pak existuje funkce f definovaná na intervalu $J = \{\varphi(t) : t \in I\}$, která má na tomto intervalu derivaci, přičemž platí $f'(x) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pro $x = \varphi(t) \in J$.

  D.: Ze spojitosti φ' a z podmínky $\varphi'(t) \neq 0$ na I plyne, že $\varphi'(t) > 0$ pro každé $t \in I$, nebo $\varphi'(t) < 0$ pro každé $t \in I$ a tedy podle 2.5.2 je φ na I ryze monotonní. Podle 1.2.16.2 existuje funkce φ^{-1} inversní k φ.
  Definujme $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ pro $x = \varphi(t)$.
  Podle 2.1.6 a 2.1.7 je $f'(x) = [\psi(\varphi^{-1}(x))]' = \psi'(\varphi^{-1}(x))\dfrac{1}{\varphi'(t)} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. $\square$

- Nechť jsou splněny podmínky předchozího tvrzení a nechť funkce φ, ψ mají na I druhé derivace. Pak také funkce f má na J druhou derivaci a platí $f''(x) = \dfrac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3}$ pro $x = \varphi(t) \in J$.

D.: $f''(x) = (f'(x))' = \left(\dfrac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}\right)' = \dfrac{\varphi'(\varphi^{-1}(x))\psi''(\varphi^{-1}(x)) - \varphi''(\varphi^{-1}(x))\psi'(\varphi^{-1}(x))}{(\varphi'(\varphi^{-1}(x)))^2}\,\dfrac{1}{\varphi'(t)}$. □

- Analogicky lze postupovat při výpočtu vyšších derivací.
- S použitím „diferenciální symboliky“ lze předchozí tvrzení zapsat:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)\mathrm{d}t}{\varphi'(t)\mathrm{d}t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}},$$

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}f'(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}{\varphi'(t)\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2}\mathrm{d}t}{\varphi'(t)\mathrm{d}t} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3} = \frac{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}}{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^3}.$$

2.6.3 Definice

Řekneme, že křivka C je *oblouk* (*jednoduchá křivka*), jestliže existuje její parametrizace $\varphi,\ \psi$ taková, že zobrazení $t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$ je bijektivní.
Křivka se nazývá *jordanovská* (*jednoduchá uzavřená*), jestliže je uzavřená a existuje její parametrizace $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ taková, že platí implikace $t_1, t_2 \in [a, b],\ 0 < |t_1 - t_2| < b - a \ \Rightarrow\ (\varphi(t_1), \psi(t_1)) \neq (\varphi(t_2), \psi(t_2))$.

Jestliže křivka C není uzavřená a není obloukem, pak pro její libovolnou parametrizaci $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ existují $t_1, t_2 \in I,\ t_1 \neq t_2$ tak, že $(\varphi(t_1), \psi(t_1)) = (\varphi(t_2), \psi(t_2))$. Bod $(\varphi(t_1), \psi(t_1)) = (\varphi(t_2), \psi(t_2))$ se nazývá *vícenásobný bod* (*bod větvení*) *křivky* C.

2.6.4 Definice

Buď C křivka, $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ její parametrizace. Nechť t_0 je vnitřní bod intervalu I a $A = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$ není vícenásobný bod křivky C a nechť existují derivace $\varphi'(t_0),\ \psi'(t_0)$ a platí $(\varphi'(t_0))^2 + (\psi'(t_0))^2 \neq 0$. Přímka τ procházející bodem A, jejíž směrový vektor je $(\varphi'(t_0), \psi'(t_0))$ se nazývá *tečna ke křivce* C *v bodě* A.

2.6.5 Poznámka

Nechť křivka C je grafem funkce f, $\operatorname{Dom} f$ je interval a f má derivaci v bodě x_0. Pak
$\begin{array}{l}\varphi(t) = t\\ \psi(t) = f(t)\end{array},\ t \in \operatorname{Dom} f$ je parametrizací C.
$\varphi'(t) = 1,\ \psi'(t) = f'(t)$. Tečna ke křivce C v bodě $(x_0, f(x_0))$ má parametrické rovnice $\begin{array}{l}x = x_0 + t\\ y = f(x_0) + f'(x_0)t\end{array}$.
Eliminací parametru t dostaneme obecnou rovnici tečny $x - x_0 = \dfrac{y - f(x_0)}{f'(x_0)}$, neboli $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.
Tedy definice 2.6.4 souhlasí s tím, jak byla tečna ke grafu funkce zavedena v 2.1.2.7.

Příklad:

$C : \begin{array}{l}x = \varphi(t) = a\cos^3 t\\ y = \psi(t) = a\sin^3 t\end{array},\ t \in [0, 2\pi],\ a \in \mathbb{R},\ a > 0$ je jordanovskou křivkou.
$\varphi'(t) = -3a\cos^2 t \sin t,\ \psi'(t) = 3a\sin^2 t \cos t$.
Tečna ke křivce C existuje v každém bodě $(\varphi(t), \psi(t))$ takovém, že
$0 \neq (\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 = 9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t = 9a^2\sin^2 t\cos^2 t$, tedy pro $t \notin \{0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi\}$.

2.6.6 Definice

Nechť C je oblouk nebo jordanovská křivka. C se nazývá *hladká*, existuje-li její parametrizace $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ taková, že

(i) $\varphi'(t),\ \psi'(t)$ existují pro každý vnitřní bod $t \in I$. Je-li C uzavřená, $I = [a, b]$, existují $\varphi'_+(a),\ \varphi'_-(b),\ \psi'_+(a),\ \psi'_-(b)$ a platí $\varphi'_+(a) = \varphi'_-(b),\ \psi'_+(a) = \psi'_-(b)$.

(ii) $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \neq 0$ pro každý vnitřní bod $t \in I$. Je-li C uzavřená, $I = [a, b]$, navíc platí $(\varphi'_+(a))^2 + (\psi'_+(a))^2 \neq 0 \neq (\varphi'_-(b))^2 + (\psi'_-(b))^2$.

C se nazývá *po částech hladká*, existuje-li konečný počet hladkých křivek $C_1, C_2, \dots, C_n$ takových, že $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$.

Křivka je hladká, jestliže nemá vícenásobné body a existuje k ní tečna v každém bodě, který není krajní.

2.6.7 Definice

Buďte $C_1 = \{(\varphi_1(t), \psi_1(t)) : t \in I_1\}$, $C_2 = \{(\varphi_2(t), \psi_2(t)) : t \in I_2\}$ křivky a nechť $(x_0, y_0) = (\varphi_1(t_1), \psi_1(t_1)) = (\varphi_2(t_2), \psi_2(t_2)) \in C_1 \cap C_2$ není ani krajní ani vícenásobný bod žádné z křivek C_1, C_2. Řekneme, že křivky C_1 a C_2 *mají v bodě* (x_0, y_0) *styk řádu alespoň* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, jestliže

buď existují kladná čísla δ_0, δ a funkce f_1, f_2 takové, že
$(t_1 - \delta, t_1 + \delta) \subseteq I_1$, $(t_2 - \delta, t_2 + \delta) \subseteq I_2$, $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \subseteq \operatorname{Dom} f_1 \cap \operatorname{Dom} f_2$,
$\{(x, f_1(x)) : x_0 - \delta_0 < x < x_0 + \delta_0\} = \{(\varphi_1(t), \psi_1(t)) : t_1 - \delta < t < t_1 + \delta\}$,
$\{(x, f_2(x)) : x_0 - \delta_0 < x < x_0 + \delta_0\} = \{(\varphi_2(t), \psi_2(t)) : t_2 - \delta < t < t_2 + \delta\}$,
a funkce f_1, f_2 mají v bodě x_0 styk řádu alespoň n,

nebo existují kladná čísla ε_0, ε a funkce g_1, g_2 takové, že
$(t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon) \subseteq I_1$, $(t_2 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon) \subseteq I_2$, $(y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0) \subseteq \operatorname{Dom} g_1 \cap \operatorname{Dom} g_2$,
$\{(g_1(y), y) : y_0 - \varepsilon_0 < y < y_0 + \varepsilon_0\} = \{(\varphi_1(t), \psi_1(t)) : t_1 - \varepsilon < t < t_1 + \varepsilon\}$,
$\{(g_2(y), y) : y_0 - \varepsilon_0 < y < y_0 + \varepsilon_0\} = \{(\varphi_2(t), \psi_2(t)) : t_2 - \varepsilon < t < t_2 + \varepsilon\}$,
a funkce g_1, g_2 mají v bodě y_0 styk řádu alespoň n

2.6.8 Definice

Nechť C je křivka, K je kružnice se středem (x_S, y_S) a poloměrem r a $(x_0, y_0) \in C \cap K$.
Kružnice K se nazývá *oskulační kružnice křivky C v bodě* (x_0, y_0), jestliže křivky C, K mají v bodě (x_0, y_0) styk řádu alespoň 2.
Střed oskulační kružnice se nazývá *střed křivosti křivky C v bodě* (x_0, y_0), poloměr oskulační kružnice se nazývá *poloměr křivosti křivky C v bodě* (x_0, y_0), jeho převrácená hodnota $\dfrac{1}{r}$ se nazývá *křivost křivky C v bodě* (x_0, y_0).
Množina všech středů křivosti křivky C ve všech jejích bodech se nazývá *evoluta křivky C*.

2.6.9 Věta

Buď $C = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in I\}$ hladká křivka, t_0 vnitřní bod intervalu I a nechť funkce φ, ψ mají v bodě t_0 druhé derivace. Nechť $(x_0, y_0) = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$ není vícenásobný bod křivky C a platí $\varphi'(t_0)\psi''(t_0) - \varphi''(t_0)\psi'(t_0) \neq 0$. Pak má křivka C v bodě (x_0, y_0) jedinou oskulační kružnici o středu (x_S, y_S) a poloměru r, kde

$$\begin{aligned} x_S &= \varphi(t_0) - \frac{(\varphi'(t_0))^2 + (\psi'(t_0))^2}{\varphi'(t_0)\psi''(t_0) - \varphi''(t_0)\psi'(t_0)}\psi'(t_0)\,, \\ y_S &= \psi(t_0) + \frac{(\varphi'(t_0))^2 + (\psi'(t_0))^2}{\varphi'(t_0)\psi''(t_0) - \varphi''(t_0)\psi'(t_0)}\varphi'(t_0)\,, \\ r &= \frac{((\varphi'(t_0))^2 + (\psi'(t_0))^2)^{3/2}}{|\varphi'(t_0)\psi''(t_0) - \varphi''(t_0)\psi'(t_0)|}\,. \end{aligned}$$

D.: Poznamenejme, že z existence druhé derivace funkce φ v bodě t_0 plyne spojitost její první derivace v tomto bodě.
Nechť nejprve $\varphi'(t_0) \neq 0$. Pak nastává první případ z definice 2.6.7.
Nechť $K = \{(x_S + r\cos t, y_S + r\sin t) : t \in [0, 2\pi]\}$ je oskulační kružnice křivky C v bodě $(x_0, y_0) = (\varphi(t_0), \psi(t_0)) = (x_S + r\cos\tau_0, y_S + r\sin\tau_0)$.
Podle 2.4.3 je

$$\psi(\varphi^{-1}(x_0)) = f(x_0),\ \psi'(\varphi^{-1}(x_0)) = f'(x_0),\ \psi''(\varphi^{-1}(x_0)) = f''(x_0),$$

kde f je funkce definovaná v okolí bodu x_0 a daná parametricky rovnicemi kružnice K. Podle 2.6.2 je

$$\begin{aligned}
\psi'(\varphi^{-1}(x_0)) &= \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} = \frac{r\cos\tau_0}{-r\sin\tau_0} = -\operatorname{cotg}\tau_0\,,\\
\psi''(\varphi^{-1}(x_0)) &= \frac{\varphi'(t_0)\psi''(t_0)-\varphi''(t_0)\psi'(t_0)}{(\varphi'(t_0))^3} = \frac{(-r\sin\tau_0)(-r\sin\tau_0)-(-r\cos\tau_0)(r\cos\tau_0)}{-r^3\sin^3\tau_0} =\\
&= -\frac{1}{r\sin^3\tau_0}\,.
\end{aligned}$$

Máme tedy soustavu čtyř rovnic pro čtyři neznámé τ_0, x_S, y_S, r:

$$\begin{aligned}
\varphi(t_0) &= x_S + r\cos\tau_0\,,\\
\psi(t_0) &= y_S + r\sin\tau_0\,,\\
\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} &= -\operatorname{cotg}\tau_0\,,\\
\frac{\varphi'(t_0)\psi''(t_0)-\varphi''(t_0)\psi'(t_0)}{(\varphi'(t_0))^3} &= -\frac{1}{r\sin^3\tau_0}\,,
\end{aligned}$$

která má jediné řešení dáné formulemi v tvrzení věty.
Nechť nyní $\varphi'(t_0) = 0$. Pak, poněvadž křivka C je hladká, ze vztahu $(\varphi'(t_0))^2 + (\psi'(t_0))^2 \neq 0$ plyne $\psi'(t_0) \neq 0$ a nastává druhý případ z definice 2.6.7. Tento případ vyšetříme analogicky. □

2.6.10 Důsledek

Nechť funkce f má v bodě x_0 druhou derivaci $f''(x_0) \neq 0$. Pak graf funkce f má v bodě $(x_0, f(x_0))$ oskulační kružnici, pro jejíž střed a poloměr platí

$$x_S = x_0 - \frac{1+(f'(x_0))^2}{f''(x_0)}f'(x_0)\,, \qquad y_S = f(x_0) + \frac{1+(f'(x_0))^2}{f''(x_0)}\,, \qquad r = \frac{(1+(f'(x_0))^2)^{3/2}}{|f''(x_0)|}\,.$$

Příklady:

1. Určete křivost paraboly $y = x^2$ v jejím vrcholu.

   Ř.: $f(x) = x^2,\ f'(x) = 2x,\ f'(0) = 0,\ f''(x) = 2,\ \dfrac{1}{r} = 2.$ □

2. Najděte evolutu elipsy $\begin{array}{l}\varphi(t) = a\cos t\\ \psi(t) = b\sin t\end{array},\ t \in [0, 2\pi]$.

   Ř.: $\varphi'(t) = -a\sin t,\ \varphi''(t) = -a\cos t,$
   $\psi'(t) = b\cos t,\ \psi''(t) = -b\sin t,$
   $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t,$
   $\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t) = ab\sin^2 t + ab\cos^2 t = ab.$
   Parametrické rovnice evoluty:

$$\begin{aligned}
x &= a\cos t - \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab}b\cos t = \frac{\cos t}{a}(a^2 - a^2\sin^2 t - b^2\cos^2 t) = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t\\
y &= b\sin t - \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab}a\sin t = \frac{\sin t}{b}(b^2 - a^2\sin^2 t - b^2\cos^2 t) = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t
\end{aligned}$$

   □

2.7 Cvičení

Vypočítejte derivaci funkce

1) $f(x) = (\sqrt{x} + 1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$, 2) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$,

3) $f(x) = \dfrac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$, 4) $f(x) = \sqrt{\sin x}$,

5) $f(x) = x\mathrm{e}^x(\cos x + \sin x)$, 6) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - \mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}}$,

7) $f(x) = x^2 \log_3 x$, 8) $f(x) = \operatorname{tg}(\sin x)$,

9) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$, 10) $f(x) = x \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}$,

11) $f(x) = \ln\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, 12) $f(x) = 3^{\sin^2 x}$,

13) $f(x) = x^{x^x}$, 14) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{1 + x^4} + \frac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4} + 1}{\sqrt[4]{1+x^4} - 1}$.

Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce

15) $y = \dfrac{8}{4 + x^2}$ v bodě $(2, ?)$, 16) $y = x^2$ v bodě $(x_0, ?)$.

17) Úhlem křivek rozumíme úhel tečen těchto křivek ve společném bodě. Určete úhel grafu funkce $y = x^2$ a křivky $x^2 + y^2 = 1$.

18) Na grafu funkce $y = x^3$ najděte bod, v němž je tečna rovnoběžná se sečnou spojující body $(-1, ?)$ a $(?, 8)$.

Vypočítejte limity

19) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x}$, 20) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$,

21) $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin\dfrac{a}{x}$, 22) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$,

23) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{x^x - 1}$, 24) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$,

25) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}\right)$, 26) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x - x^2\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)$.

Najděte Maclaurinův polynom stupně n dané funkce

27) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$, $n = 4$, 28) $f(x) = \sqrt{1 - 2x + x^3} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^3}$, $n = 3$,

29) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x^3}$, $n = 7$, 30) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $n = 5$.

Vyšetřete průběh funkce

31) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$, 32) $f(x) = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$, 33) $f(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, 34) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

35) Najděte nejmenší a největší hodnotu součinu m-té a n-té mocniny kladných čísel, jejichž součet je a.

36) Jaký největší povrch může mít válec vepsaný kouli o poloměru R?

37) Jaký nejmenší objem může mít kužel opsaný kouli o poloměru R?

38) Na elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ najděte v prvním kvadrantu bod takový, že tečna k elipse vedená tímto bodem vytvoří se souřadnými osami trojúhelník nejmenšího obsahu.

39) Jakou výseč je třeba vyříznout z kruhu o poloměru R, aby zbývající část bylo možno svinout do kornoutu o maximálním objemu?

Výsledky: 1) $-\frac{x+1}{2x}\sqrt[3]{x^2}$ 2) $\frac{7}{8\sqrt[8]{x}}$ 3) $\frac{2-4x}{(1+x-x^2)^2}$ 4) $\frac{\sqrt{\cos x \operatorname{cotg} x}}{2}$ 5) $\mathrm{e}^x(\sin x + (2x+1)\cos x)$ 6) $-\frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}$ 7) $x\log_3 \mathrm{e}x^2$ 8) $\frac{\cos x}{(\sin\sin x)^2}$ 9) $-\frac{1}{\cos x}$ 10) $\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ 11) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x(1+x)}$ 12) $3^{\sin^2 x}\sin 2x \ln 3$ 13) $(2\ln x + 1)x^{x^x+1}$ 14) $-\frac{1}{x\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$ 15) $x + 2y - 4 = 0, 2x - y - 1 = 0$ 16) $2x_0 x - y - x_0^2 = 0, x + 2x_0 y - x_0 - 2x_0^3 = 0$ 17) asi $70°37'46''$ 18) $(-1,-1),(1,1)$ 19) $-\frac{1}{2}$ 20) 1 21) a 22) $\frac{1}{2}$ 23) 1 24) -2 25) $\frac{1}{3}$ 26) $\frac{1}{2}$ 27) $1 + 2x + 2x^2 - 2x^4$ 28) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3$ 29) $x - \frac{1}{18}x^7$ 30) $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$ 31) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; lichá; nulový bod 0; rostoucí $(-\infty, -\sqrt{3}]$, $[\sqrt{3}, \infty)$;

klesající $[-\sqrt{3},-1),\ (-1,1),\ (1,\sqrt{3}]$; lokální minimum $f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$; lokální maximum $f(-\sqrt{3})=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$; konvexní $(-\infty,-3),\ (-1,0],\ (1,3]$; konkávní $[-3,-1),\ [0,1),\ [3,\infty)$; inflexní body $f(3)=\frac{3}{2},\ f(-3)=-\frac{3}{2}$; asymptoty $x=1,\ x=-1$ 32) $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; nulový bod 0; rostoucí $(-\infty,-3],\ (-1,\infty)$; klesající $[-3,-1)$; lokální maximum $f(-3)=-\frac{27}{8}$; konvexní $[0,\infty)$; konkávní $(-\infty,-1),\ (-1,0]$; inflexní bod $f(0)=0$; asymptoty $x=-1,\ x-2y-2=0$ 33) $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R}$; lichá; nulový bod 0; rostoucí $[-1,1]$; klesající $(-\infty,-1],\ [1,\infty]$; lokální minimum $f(-1)=-\frac{1}{\sqrt{e}}$; lokální maximum $f(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$; konvexní $[-\sqrt{3},0],\ [\sqrt{3},\infty)$; konkávní $(-\infty,-\sqrt{3}],\ [0,\sqrt{3}]$; inflexní body $f(-\sqrt{3})=-\sqrt{\frac{3}{e^3}},\ f(0)=0,\ f(\sqrt{3})=\sqrt{\frac{3}{e^3}}$; asymptota $y=0$ 34) $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R}$; nulový bod 1; klesající $(-\infty,\infty)$; konvexní $(-\infty,0],\ [1,\infty)$; konkávní $[0,1]$; inflexní body $f(0)=1,\ f(1)=0$; asymptota $y=-x$ 35) největší hodnota $\left(\frac{a}{m+n}\right)^{m+n} m^m n^n$, nejmenší hodnota není 36) $\pi R^2(1+\sqrt{5})$ 37) $\frac{8}{3}\pi R^3$ 38) $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right),\ P_{\min}=ab$ 39) vyříznout úhel $2\pi\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right),\ V_{\max}=\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi R^3$

	Rovnice v kartézských souřadnicích	Parametrické rovnice	Rovnice v polárních souřadnicích
Kružnice	$x^2+y^2=a^2$	$x=a\cos t$ $y=a\sin t$	$r=a$
Elipsa	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$x=a\cos t$ $y=b\sin t$	$r=\dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi},\quad 0<\varepsilon<1$
Parabola	$y^2=2px$	$x=\dfrac{1}{2p}t^2$ $y=t$	$r=\dfrac{p}{1+\cos\varphi}$
Hyperbola	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$x=\dfrac{a}{\cos t}$ $y=\pm b\operatorname{tg} t$	$r=\dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi},\quad \varepsilon>1$
Cassiniovy křivky	$(x^2+y^2)^2-2e^2(x^2-y^2)=a^4-e^4$		$r^2=e^2\cos^2 2\varphi\pm\sqrt{e^4\cos^2 2\varphi+a^4-e^4}$
Bernoulliova lemniskáta	$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$	$x=\sqrt{2}\,at\dfrac{1+t^2}{1+t^4}$ $y=\sqrt{2}\,at\dfrac{1-t^2}{1+t^4}$	$r=a\sqrt{2\cos^2 2\varphi}$, $\varphi\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$
Cykloida	$x+\sqrt{2ay-y^2}=a\arccos\dfrac{a-y}{a}$ $x-\sqrt{2ay-y^2}=a\left(2\pi-\arccos\dfrac{a-y}{a}\right)$	$x=a(t-\sin t)$ $y=a(1-\cos t)$	
Kardioida (srdcovka)	$(x^2+y^2-a^2)^2=4a^2((x-a)^2+y^2)$	$x=a(2\cos t-\cos 2t)$ $y=a(2\sin t-\sin 2t)$	$r=2a(1-\cos\varphi)$
Asteroida (hvězdice)	$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$	$x=a\cos^3\frac{t}{4}$ $y=a\sin^3\frac{t}{4}$	
Archimedova spirála	$\dfrac{y}{x}=\operatorname{tg}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}$		$r=a\varphi,\quad \varphi\geq 0$
Hyperbolická spirála	$\dfrac{y}{x}=\operatorname{tg}\dfrac{a}{\sqrt{x^2+y^2}}$		$r=\dfrac{a}{\varphi}$
Logaritmická spirála	$\dfrac{y}{x}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{k}\ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)$		$r=a\mathrm{e}^{k\varphi}$

Tabulka 2.1: **Některé křivky**

Kapitola 3

Integrální počet funkcí jedné proměnné

3.1 Primitivní funkce

3.1.1 Definice

Buďte f, F funkce definované na intervalu I. Řekneme, že funkce F je *primitivní k funkci* (je *neurčitým integrálem z funkce*) f *na* I, jestliže na tomto intervalu platí $F' = f$. Označení: $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$.

3.1.2 Poznámky

1. Pokud některý z krajních bodů intervalu I do tohoto intervalu patří, je potřeba v tomto bodě uvažovat příslušnou jednostrannou derivaci.
2. Primitivní funkce je podle 2.1.3 spojitá na I.
3. Primitivní funkce bývá někdy definována obecněji: F je primitivní k f na I, jestliže množina $\{x \in I :\ F'(x) \neq f(x)\}$ je nejvýše spočetná. ($F'(x) = f(x)$ skoro všude na I.)
   V tomto smyslu je například $F(x) = |x|$ zobecněnou primitivní funkcí k $f(x) = \operatorname{sgn} x$ na $I = (-\infty, \infty)$.

3.1.3 Příklady

1. $\dfrac{x^3}{3} = \int x^2 \mathrm{d}x \quad$ na $(-\infty, \infty)$.

2. $$\left.\begin{aligned} \ln x &= \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \quad \text{na } (0,\infty) \\ \ln(-x) &= \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \quad \text{na } (-\infty,0) \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \quad \text{na intervalu, který neobsahuje 0.}$$

3.1.4 Věta (o existenci primitivní funkce)

Ke každé funkci spojité na intervalu I existuje na tomto intervalu funkce primitivní.

D.: Bude proveden později (3.4.6). $\square$

3.1.5 Věta

Je-li F funkce primitivní k f na I a $c \in \mathbb{R}$, pak $F + c$ je rovněž primitivní k f na I.
Jsou-li F a G funkce primitivní k funkci f na intervalu I, pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $G(x) = F(x) + c$ pro každé $x \in I$.
Je-li F funkce primitivná k f na I pak $\{F + c :\ c \in \mathbb{R}\}$ je množina všech funkcí primitivních k funkci f na I.

D.: $(F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x)$, druhé tvrzení plyne z 2.3.4.3, třetí je důsledkem prvních dvou. $\square$

3.1.6 Nejdůležitější neurčité integrály

$\int x^n \mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x = -\operatorname{arccotg} x$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = -\arccos x$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}|$

$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$

$\int a^x \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a},\ a > 0, a \neq 1$

$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x$

$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)|.$$

Každý z uvedených vzorců platí na libovolném intervalu, na němž je funkce za znakem $\int$ definována. Platnost uvedených vzorců lze ověřit derivováním.

3.1.7 Věta

Nechť $\int f_i(x)\mathrm{d}x = F_i(x)$ na intervalu I, $c_i \in \mathbb{R}$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pak

$$\int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x))\mathrm{d}x = c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) + \cdots + c_n F_n(x) \text{ na } I.$$

D.: Plyne přímo z 2.1.5. □

Věta říká, že neurčitý integrál je lineární operátor na množině funkcí.

3.1.8 Věta

Nechť $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)$ na I. Pak $\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}F(ax+b)$ na $J = \{x \in \mathbb{R} : ax + b \in I\}$.

D.: Podle 2.1.6 je $\left[\dfrac{1}{a}F(ax+b)\right]' = \dfrac{1}{a}F'(ax+b)[ax+b]' = F'(ax+b) = f(ax+b)$. □

3.1.9 Příklad

$\int \cos^2 x \mathrm{d}x = \int \dfrac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{\sin 2x}{2}\right) = \dfrac{x + \sin x \cos x}{2}$

3.1.10 Věta (metoda “per partes”)

Nechť funkce u, v mají derivaci na intervalu I. Existuje-li na I primitivní funkce k jedné z funkcí $u'v$, uv', existuje i ke druhé z nich a platí $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)$ na I.

D.: Nechť existuje primitivní funkce k $u'v$. Podle 2.1.5 je $(uv)' = u'v + uv'$, tedy $uv' = (uv)' - u'v$.
$\int (u(x)v(x))'\mathrm{d}x = u(x)v(x)$ na I, $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ existuje a tedy podle 3.1.7
$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ na I, což je vzorec z tvrzení věty. □

3.1.11 Poznámky

1. Je-li alespoň jedna z derivací u', v' spojitá na I, jsou předpoklady věty 3.1.10 splněny.

2. Vzorec uvedený v 3.1.10 ve tvaru

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)(x)v\mathrm{d}x$$

dává metodu integrace v případě, kdy integrovaná funkce je součinem dvou funkcí, z nichž jedna je derivací známé funkce.

3. Metodou „per partes" jsou řešitelné zejména tyto typy integrálů:

- $\int x^n \mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x \;:\quad u(x) = x^n,\ v' = \mathrm{e}^{ax}$
- $\int x^n \cos ax\mathrm{d}x \;:\quad u(x) = x^n,\ v' = \cos ax$
- $\int x^n \sin ax\mathrm{d}x \;:\quad u(x) = x^n,\ v' = \sin ax$
- $\int x^n \operatorname{arctg} ax\mathrm{d}x \;:\quad u(x) = \operatorname{arctg} ax,\ v' = x^n$
- $\int x^n \operatorname{arccotg} ax\mathrm{d}x \;:\quad u(x) = \operatorname{arccotg} ax,\ v' = x^n$
- $\int x^n \arccos ax\mathrm{d}x \;:\quad u(x) = \arccos ax,\ v' = x^n$
- $\int x^n \arcsin ax\mathrm{d}x \;:\quad u(x) = \arcsin ax,\ v' = x^n$
- $\int x^a \log_b^n x\mathrm{d}x \;:\quad u(x) = \log_b^n x,\ v' = x^a$

Příklad:

$$\begin{array}{lll} & \int \ln x\mathrm{d}x & = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x = x\ln\dfrac{x}{\mathrm{e}} \\ u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} & \\ v' = 1 & v = x & \end{array}$$

3.1.12 Věta (substituční metoda)

Nechť f je funkce definovaná na intervalu I a φ je prostá funkce, která má derivaci na intervalu J takovém, že $\varphi(J) = I$. $\int f(x)\mathrm{d}x$ existuje na I právě tehdy, když na J existuje $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$; v tomto případě platí:

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(t))\ , \qquad G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int f(x)\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x))\ .$$

D.: Podle 2.1.6 pokud $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = f(x)$, pak $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.
Podle 2.1.6 a 2.1.7 pokud $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, pak
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(\varphi^{-1}(x)) = G'(\varphi^{-1}(x))\dfrac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\dfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x)$. $\square$

Schéma použití věty je jednoduché:

$$\begin{array}{rcl} \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t & = & \int f(x)\mathrm{d}x = F(x) = F(\varphi(t)) \\ \varphi(t) & = & x \\ \varphi'(t)\mathrm{d}t & = & \mathrm{d}x \end{array}$$

nebo

$$\begin{array}{rcl} \int f(x)\mathrm{d}x & = & \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t) = G(\varphi^{-1}(x)) \\ x & = & \varphi(t) \\ \mathrm{d}x & = & \varphi'(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

3.1.13 Příklad

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad &= \int\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\mathrm{d}t = \int\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{t+\sin t\cos t}{2} = \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2}\\ x &= \sin t\\ \mathrm{d}x &= \cos t\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Předposlední rovnost platí podle 3.1.9.
$f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $I=[-1,1]$, $\varphi(t)=\sin t$, $J=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

3.1.14 Integrace racionálních funkcí

V rozkladu racionální funkce na parciální zlomky (viz 1.5.15) se vyskytují zlomky tvaru $\dfrac{p}{(x-\alpha)^m}$ a $\dfrac{cx+d}{[(x-a)^2+b^2]^n}$.

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^m} &= \int\frac{\mathrm{d}t}{t^m} = \begin{cases}\dfrac{1}{1-m}\dfrac{1}{t^{m-1}} = \dfrac{1}{1-m}\dfrac{1}{(x-\alpha)^{m-1}}, & m\neq 1\\ \ln|t| = \ln|x-\alpha|, & m=1\end{cases}\\ x-\alpha &= t\\ \mathrm{d}x &= \mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\frac{cx+d}{[(x-a)^2+b^2]^n} = \frac{c}{2}\frac{2(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^n} + \frac{ac+d}{[(x-a)^2+b^2]^n}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{2(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^n}\mathrm{d}x &= \int\frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \begin{cases}\dfrac{1}{1-n}\dfrac{1}{t^{n-1}} = \dfrac{1}{1-n}\dfrac{1}{((x-a)^2+b^2)^{n-1}}, & n\neq 1\\ \ln|t| = \ln|(x-a)^2+b^2|, & n=1\end{cases}\\ (x-a)^2+b^2 &= t\\ 2(x-a)\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{[(x-a)^2+b^2]^n} &= \int\frac{b\mathrm{d}t}{(b^2t^2+b^2)^n} = \frac{1}{b^{2n-1}}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}\\ x-a &= bt\\ \mathrm{d}x &= b\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Označme $K_n = \int\dfrac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}$. Pak

$$K_1 = \int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t$$

$$K_n = \int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n\int\frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}t =$$

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{(t^2+1)^n} & u' &= \frac{-2nt}{(t^2+1)^{n+1}}\\ v' &= 1 & v &= t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n\left(\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} - \int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{n+1}}\right) =\\ &= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n(K_n - K_{n+1})\end{aligned}$$

Tedy $K_n = \dfrac{t}{(t^2+1)^n} + 2nK_n - 2nK_{n+1}$. Odtud $K_{n+1} = \dfrac{t}{2n(t^2+1)^n} + \dfrac{2n-1}{2n}K_n$.
Neboli (píšeme-li $n-1$ místo n)

$$K_n = \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}K_{n-1}$$

3.1.15 Poznámka

Je-li R racionální funkce pak následující integrály lze transformovat na integrály z racionální funkce:

- $\int R(u(x))u'(x)\mathrm{d}x$, kde u je libovolná funkce — substituce $u(x) = t$
- $\int R(e^{ax})\mathrm{d}x$ — substituce $\mathrm{e}^{ax} = t$

3.1.16 Definice

Polynom ve dvou proměnných je funkce $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tvaru

$$P(x,y) = a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + a_{n-2,2}x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{0,n}y^n + \cdots + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{0,0}\,.$$

Racionální funkce ve dvou proměnných je funkce $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tvaru

$$R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\,,$$

kde P, Q jsou polynomy ve dvou proměnných.

3.1.17 Integrály, které lze transformovat na integrály z racionální funkce

Symbolem $R(x,y)$ budeme značit racionální funkci ve dvou proměnných x, y.

1. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ — substituce $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^n$.
2. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$ (Eulerovy substituce)

   $a > 0$: $\pm\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x + t$

   $c > 0$: $\pm\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$

   $ax^2+bx+c = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$: $\pm\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha_1)$
3. Binomické integrály $\int x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x$, kde $m,n,p \in \mathbb{Q}$.

   $p \in \mathbb{Z}$: $x = t^N$, kde N je společný jmenovatel čísel m a n

   $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$: $a + bx^n = t^N$, kde N je jmenovatel zlomku p

   $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$: $\dfrac{a}{x^n} + b = t^N$, kde N je jmenovatel zlomku p
4. $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$ — substituce $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$

   V některých případech lze volit jednodušší substituci:

   $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$: $\sin x = t$

   $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$: $\cos x = t$

   $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$: $\operatorname{tg} x = t$

3.1.18 Poznámka

Primitivní funkce k funkci elementární nemusí být elementární, může být tzv. *vyšší funkcí.* Vyššími funkcemi jsou zejména

$\int \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = Si(x)$ „integrálsinus“ $\int \dfrac{\cos x}{x}\mathrm{d}x = Ci(x)$ „integrálcosinus“

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\ln x} = Li(x)$ „logaritmusintegrál“ $\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ Gaussova funkce

$\int \sin x^2\mathrm{d}x,\ \int \cos x^2\mathrm{d}x$ Fresnelovy integrály

Binomické integrály $\int x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x$, pokud žádné z čísel p, $\dfrac{m+1}{n}$, $\dfrac{m+1}{n}+p$ není celé.

Není známo obecné pravidlo, které by umožnilo rozhodnout, zda primitivní funkci neumíme vyjádřit jako elementární v důsledku nevhodných integračních metod, nebo zda skutečně vyjadřuje vyšší funkci.

3.2 Určitý integrál

V celém tomto odstavci bude f ohraničená funkce definovaná na uzavřeném intervalu $[a,b]$.

3.2.1 Definice

Dělením uzavřeného intervalu $[a,b]$ rozumíme množinu $D=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ takovou, že
$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$.
Čísla $x_0,x_1,\dots,x_n$ nazýváme *dělící body*, intervaly $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\dots,[x_{n-1},x_n]$ nazýváme *dělící intervaly* dělení D.
Číslo $\nu(D)=\max\{x_i-x_{i-1}: i=1,2,\dots,n\}$ nazýváme *norma* dělení D.
Symbolem $\vartheta([a,b])$ označíme množinu všech dělení intervalu $[a,b]$.
Jsou-li $D_1\in\vartheta([a,b])$, $D_2\in\vartheta([a,b])$ taková, že $D_1\subseteq D_2$ (tj. každý dělící bod D_1 je současně dělícím bodem D_2), řekneme, že dělení D_2 je *zjemněním* dělení D_1.

3.2.2 Definice

Buďte $D=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}\in\vartheta([a,b])$, $m_i=\inf\{f(x): x\in[x_{i-1},x_i]\}$, $M_i=\sup\{f(x): x\in[x_{i-1},x_i]\}$. Číslo

$$s(D,f)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$$

nazveme *dolním součtem* a číslo

$$S(D,f)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$$

nazveme *horním součtem* příslušným k funkci f a dělení D.

(Poznamenejme, že existence čísel m_i a M_i je zaručena ohraničeností funkce f.)

3.2.3 Tvrzení

1. Pro libovolné $D\in\vartheta([a,b])$ platí $s(D,f)\le S(D,f)$.

   D.: plyne z toho, že $m_i\le M_i$ a $x_i-x_{i-1}>0$ pro $i=1,2,\dots,n$. $\square$

2. Je-li $D_2\in\vartheta([a,b])$ zjemněním $D_1\in\vartheta([a,b])$, pak $s(D_1,f)\le s(D_2,f)$, $S(D_1,f)\ge S(D_2,f)$.
   (Při zjemnění dělení se dolní součet nezmenší a horní součet nezvětší.)

   D.: Nechť D_2 má o jeden dělící bod více, než D_1, tj.
   $D_1=\{x_0,x_1,\dots,x_{k-1},x_k,\dots,x_n\}$, $D_2=\{x_0,x_1,\dots,x_{k-1},z,x_k,\dots,x_n\}$.
   Označme $m_i=\inf\{f(x): x\in[x_{i-1},x_i]\}$, $i=1,2,\dots,n$
   $m'_k=\inf\{f(x): x\in[x_{k-1},z]\}$,
   $m''_k=\inf\{f(x): x\in[z,x_k]\}$.
   Pak zřejmě $m_k\le m'_k$, $m_k\le m''_k$ a tedy

$m_k(x_k - x_{k-1}) = m_k(x_k - z) + m_k(z - x_{k-1}) \le m_k''(x_k - z) + m_k'(z - x_{k-1})$.
Odtud plyne

$$\begin{aligned} s(D_1, f) \ &= \ \sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \ \le \\ &\le \ \sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_k''(x_k - z) + m_k'(z - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \ = \ s(D_2, f)\,. \end{aligned}$$

Analogicky ukážeme, že $S(D_1, f) \ge S(D_2, f)$.
Pokud D_2 má o p dělících bodů více než D_1, ukážeme platnost tvrzení p-násobným opakováním téže úvahy. □

3. Nechť $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Pak pro každé $D \in \vartheta([a, b])$ platí $m(b - a) \le s(D, f) \le S(D, f) \le M(b - a)$.

   D.: plyne z 1. a 2., neboť $\{a, b\} \in \vartheta([a, b])$ a každé jiné dělení je zjemněním $\{a, b\}$. □

Množiny $\{s(D, f) : D \in \vartheta([a, b])\}$ a $\{S(D, f) : D \in \vartheta([a, b])\}$ jsou tedy ohraničené. Obě jsou zřejmě neprázdné. To podle 1.1.7(R14) znamená, že následující definice je korektní.

3.2.4 Definice

Číslo

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \sup\{s(D, f) : D \in \vartheta([a, b])\}$$

nazýváme *dolní integrál funkce f na intervalu* $[a, b]$ a číslo

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \inf\{S(D, f) : D \in \vartheta([a, b])\}$$

nazýváme *horní integrál funkce f na intervalu* $[a, b]$.

3.2.5 Tvrzení

Nechť $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Pak platí

$$m(b - a) \le \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \le M(b - a)\,.$$

D.: plyne z 3.2.3.3 a z definice 3.2.4. □

3.2.6 Definice

Řekneme, že ohraničená funkce f je na intervalu $[a, b]$ *integrace schopna* (*integrovatelná, integrabilní*) *v Riemannově smyslu*, jestliže

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

V tomto případě definujeme její *Riemannův integrál*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Jestliže

$$\int_{\overline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x < \int_{a}^{\underline{b}} f(x)\mathrm{d}x\,,$$

řekneme, že funkce f *není na intervalu* $[a,b]$ *integrace schopna v Riemannově smyslu.*

3.2.7 Příklady

1. $f(x) = c \in \mathbb{R}$ pro $x \in [a,b]$.
   Pak $m = M = c$ a tedy podle 3.2.5 je

   $$c(b-a) \le \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x \le \int_{a}^{\underline{b}} f(x)\mathrm{d}x \le c(b-a)\,,$$

   z čehož plyne

   $$\int_{\overline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{\underline{b}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = c(b-a)\,.$$

2. $f(x) = \chi(x)$ na $[0,1]$.
   $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \vartheta([0,1])$, $m_i = 0,\ M_i = 1$ pro každé $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Tedy

   $$s(D,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0(x_i - x_{i-1}) = 0,\ \int_{\overline{a}}^{b} \chi(x)\mathrm{d}x = 0\,,$$

   $$S(D,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1(x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = 1,\ \int_{a}^{\underline{b}} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

   a $\chi(x)$ není integrabilní na $[0,1]$.

3.2.8 Definice

Nechť $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \vartheta([a,b])$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Množina $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ se nazývá *výběr representantů dělících intervalů dělení* D.
Číslo

$$\sigma(D,f,\Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

se nazývá *integrální součet příslušný k funkci* f, *dělení* D *a výběru representantů* Ξ.

Poněvadž $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$, platí $s(D,f) \le \sigma(D,f,\Xi) \le S(D,f)$.

Posloupností v širším smyslu rozumíme zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do libovolné množiny.
Lze tedy mluvit o posloupnosti dělení daného intervalu: $\mathbb{N} \to \vartheta([a,b])$. Řekneme, že posloupnost dělení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \vartheta([a,b])$ je *nulová*, jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$.

Ke každému $\delta > 0$ existuje $D \in \vartheta([a,b])$ takové, že $\nu(D) < \delta$. (Stačí položit $n = \left[\dfrac{b-a}{\delta}\right] + 1$ a interval $[a,b]$ rozdělit na n stejně dlouhých dělících intervalů.)

3.2.9 Věta

Buď $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná nulová posloupnost dělení intervalu $[a,b]$. Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} s(D_n,f) = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\,,\quad \lim_{n\to\infty} S(D_n,f) = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Je-li navíc f integrabilní na $[a,b]$ a Ξ_n je libovolný výběr representantů dělících intervalů dělení D_n, pak platí

$$\lim_{n\to\infty} s(D_n,f) = \lim_{n\to\infty} S(D_n,f) = \lim_{n\to\infty} \sigma(D_n,f,\Xi_n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

D.: Nejdříve dokážeme pomocné tvrzení: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $D \in \vartheta([a,b])$, $\nu(D) < \delta$ platí

$$S(D,f) < \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon\,.$$

Poněvadž f je ohraničená, existuje $h \in \mathbb{R},\ h > 0$, že $|f(x)| \le h$ pro $x \in [a,b]$.
Podle 3.2.4 a podle 1.1.6(s2*) existuje $D_1 = \{y_0, y_1, \dots, y_p\} \in \vartheta([a,b])$, že

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \le S(D_1,f) < \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Položme $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4hp}$. Pak $\delta > 0$. Buď $D = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \vartheta([a,b])$ libovolné takové, že $\nu(D) < \delta$.
Dále položme $D_2 = D \cup D_1 = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ Podle 3.2.3.2 je $S(D_2,f) \le S(D,f)$.
Dělící intervaly $[x_{i-1}, x_i]$ rozdělíme do dvou druhů:

intervaly 1. druhu, jestliže uvnitř něho neleží žádný dělící bod y_j

intervaly 2. druhu v opačném případě

Každý dělící interval 1. druhu je rovněž dělícím intervalem dělení D_2. Tento interval přispívá k $S(D,f)$ i k $S(D_2,f)$ týmž sčítancem $M_i(x_i - x_{i-1})$, tedy v rozdílu $S(D,f) - D(D_2,f)$ se neprojeví.
Uvnitř každého intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ 2. druhu leží alespoň jedno z čísel $y_1, y_2, \dots, y_{p-1}$, což znamená, že intervalů 2. druhu je nejvýše $p-1$.
Interval druhého druhu přispívá k $S(D,f)$ sčítancem $M_i(x_i - x_{i-1})$, který je v absolutní hodnotě menší nebo roven $h\nu(D) < h\delta$. Absolutní hodnota příspěvku všech intervalů 2. druhu k $S(D,f)$ je tedy $< h\delta p$.
V D_2 je každý interval $[x_{i-1}, x_i]$ 2. druhu rozdělen dělícími body $x_{i-1} = z_r < z_{r+1} < \dots < z_s = x_i$. Označme $M'_k = \sup\{f(x) : x \in [z_{k-1}, z_k]\}$. Opět $|M'_k| \le h$ a tedy absolutní hodnota příspěvku intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ do součtu $S(D_2,f)$ jest

$$\left|\sum_{k=r+1}^{s} M'_k(z_k - z_{k-1})\right| \le \sum_{k=r+1}^{s} h(z_k - z_{k-1}) = h(z_s - z_r) = h(x_i - x_{i-1}) < h\nu(D) < h\delta\,.$$

Absolutní hodnota příspěvků všech intervalů 2. druhu k $S(D_2,f)$ je tedy $< h\delta p$.
Odtud plyne, že $S(D,f) - S(D_2,f) < 2h\delta p = \dfrac{\varepsilon}{2}$, neboli $S(D,f) < S(D_2,f) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Podle 3.2.3.2 je $S(D_2,f) \le S(D_1,f)$ a tedy

$$S(D,f) < S(D_2,f) + \frac{\varepsilon}{2} \le S(D_1,f) + \frac{\varepsilon}{2} < \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

což je pomocné tvrzení.

Buď nyní $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle pomocného tvrzení existuje $\delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0$ takové, že pro každé $D \in \vartheta([a,b]),\ \nu(D) < \delta$ platí

$$S(D,f) < \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon\,.$$

Poněvadž

$$S(D,f) \geq \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\,,$$

platí

$$\left| S(D,f) - \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon\,.$$

Poněvadž posloupnost $\{D_n\}$ je nulová, k $\delta > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí $\nu(D_n) < \delta$. To znamená, že pro $n \geq n_0$ platí

$$\left| S(D_n,f) - \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon\,,$$

neboli

$$\lim_{n\to\infty} S(D_n,f) = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Analogicky dokážeme

$$\lim_{n\to\infty} s(D_n,f) = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Je-li f integrabilní na $[a,b]$, je

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,,$$

takže

$$\lim_{n\to\infty} S(D_n,f) = \lim_{n\to\infty} s(D_n,f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Poslední tvrzení věty nyní plyne z nerovnosti $s(D,f) \leq \sigma(D,f,\Xi) \leq S(D,f)$ a z 1.3.7. $\square$

3.2.10 Věta (Nutná a dostatečná podmínka integrability)

Funkce f je na $[a,b]$ integrabilní právě tehdy, když ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$ existuje $D \in \vartheta([a,b])$ takové, že $S(D,f) - s(D,f) < \varepsilon$.

D.: **⇒:** Nechť f je integrabilní. Buďte $\varepsilon > 0$ libovolné a $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \vartheta([a,b])$ libovolná nulová. Podle 3.2.9 existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že

$$\left| s(D_{n_0},f) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \left| S(D_{n_0},f) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Tedy pro D_{n_0} platí

$$\begin{aligned}
S(D_{n_0}, f) - s(D_{n_0}, f) &= |S(D_{n_0}, f) - s(D_{n_0}, f)| \leq \\
&\leq \left| S(D_n, f) - \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| + \left| \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x - s(D_n, f) \right| < \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$: Nechť je podmínka splněna. Buď $\varepsilon > 0$ a $D \in \vartheta([a, b])$ takové dělení, že $S(d, f) - s(D, f) < \varepsilon$.
Protože

$$\int\limits_a^{\underline{b}} f(x)\mathrm{d}x \leq S(D, f), \qquad \int\limits_{\overline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x \geq s(D, f)\,,$$

platí

$$\int\limits_a^{\underline{b}} f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{\overline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon\,.$$

Poněvadž ε je libovolné, je možno poslední nerovnost splnit pouze tehdy, když

$$\int\limits_a^{\underline{b}} f(x)\mathrm{d}x \leq \int\limits_{\overline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Poněvadž opačná nerovnost platí podle 3.2.5 vždy, jest

$$\int\limits_a^{\underline{b}} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\overline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

a f je integrabilní. □

3.2.11 Věta

Je-li funkce f monotonní na $[a, b]$, pak je na tomto intervalu integrabilní.

D.: Nechť pro určitost je f na $[a, b]$ neklesající.
Je-li $f(a) = f(b)$, je f na $[a, b]$ konstantní a podle 3.2.7.1 je integrabilní.
Nechť $f(a) < f(b)$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné a $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \vartheta([a, b])$ takové, že $\nu(D) < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$.
$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_{i-1})$, $\quad M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_i)$, tedy

$$\begin{aligned}
S(D, f) - s(D, f) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\nu(D) = \\
&= \nu(D)(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(x_n) - f(x_{n-1})) = \\
&= \nu(D)(f(x_n) - f(x_0)) = \nu(D)(f(b) - f(a)) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}(f(b) - f(a)) = \\
&= \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Podle 3.2.10 je f integrabilní na $[a, b]$. □

3.2.12 Věta

Je-li funkce f spojitá na $[a,b]$, pak je na tomto intervalu integrabilní.

D.: Buď f spojitá a $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle 1.7.20 je f na $[a,b]$ spojitá stejnoměrně, tedy k $\dfrac{\varepsilon}{b-a} > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x, y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta$ je $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
Buď $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \vartheta([a,b])$, $\nu(D) < \delta$,
$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$,
$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.
Podle 1.7.12 existují $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takové, že $f(y_i) = m_i$, $f(z_i) = M_i$.
Dále $|y_i - z_i| < \delta$ a tedy $f(z_i) - f(y_i) = M_i - m_i < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Odtud

$$\begin{aligned} S(D,f) - s(D,f) &= \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(y_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (f(z_i) - f(y_i))(x_i - x_{i-1}) < \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$

a podle 3.2.10 je f integrabilní na $[a,b]$. □

3.2.13 Definice

Množina $M \subseteq \mathbb{R}$ se nazývá *nulová*, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje konečný počet otevřených intervalů $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$ takových, že $\sum\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \varepsilon$ a $M \subseteq (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup \cdots \cup (a_n, b_n)$.

Platí

- Každá konečná množina je nulová.
- Sjednocení konečně mnoha nulových množin je nulová množina.
- Množina členů konvergentní posloupnosti je nulová.
- Množina členů posloupnosti, která má konečný počet hromadných bodů, je nulová.

3.2.14 Věta

Je-li množina bodů nespojitosti funkce f na intervalu $[a,b]$ nulová, pak je f integrabilní na $[a,b]$.

D.: Bude proveden později (3.3.15). □

Příklad: $[a,b] = [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} (-1)^n, & x \in \left(\dfrac{1}{2^{n+1}}, \dfrac{1}{2^n}\right], \ n = 0, 1, 2, \cdots \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Množina bodů nespojitosti $M = \left\{\dfrac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ tvoří konvergentní posloupnost. Je to tedy nulová množina, což znamená, že f je integrabilní na $[0,1]$. (Platí $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.)

3.2.15 Věta (Leibnizova [1646 – 1716] – Newtonova [1642 – 1727] formule)

Nechť funkce f je integrabilní na $[a,b]$ a nechť funkce F je spojitá na $[a,b]$ a na (a,b) primitivní k f. Pak

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

D.: Buď $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \vartheta([a,b])$. F splňuje na $[x_{i-1}, x_i]$ předpoklady 2.3.3. Existuje tedy $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ takové, že $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.
Označme $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n\}$. Pak

$$\sigma(D, f, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a)\,.$$

To znamená: Pro libovolné $D \in \vartheta([a,b])$ existuje výběr representantů Ξ takový, že $\sigma(D, f, \Xi) = F(b) - F(a)$. Buď nyní $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná nulová posloupnost dělení intervalu $[a,b]$. Ke každému D_n existuje výběr representantů Ξ_n takový, že $\sigma(D_n, f, \Xi_n) = F(b) - F(a)$. Podle 3.2.9 je

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sigma(D_n, f, \Xi_n) = F(b) - F(a)\,.$$

□

Budeme používat označení $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

3.2.16 Poznámka

Je-li funkce G spojitá na $[a,b]$ a na (a,b) primitivní k f, pak podle 3.1.5 je $G(x) = F(x) + c$ a tedy

$$[G(x)]_a^b = [F(x) + c]_a^b = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b\,.$$

To znamená, že formule z věty 3.2.15 nezávisí na výběru primitivní funkce.

3.2.17 Příklad

$$\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x \mathrm{d}x$$

$x^2 \operatorname{arctg} x$ je na $[0,1]$ spojitá, tedy podle 3.2.12 integrabilní.
$\dfrac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{6}\ln(x^2+1) - \dfrac{x^2}{6}$ je primitivní k $x^2 \operatorname{arctg} x$ a na $[0,1]$ spojitá. Tedy

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x \mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6}\ln(x^2+1) - \frac{x^2}{6}\right]_p^1 = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{6}\ln 2 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\ln 1 = \\
&= \frac{1}{3}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}\ln 2 - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}(\pi - 2 + \ln 2)\,.
\end{aligned}$$

3.2.18 Definice

Řekneme, že funkce f definovaná na (a,b) je na tomto intervalu *integrace schopna* (*integrovatelná, integrabilní*) *v Newtonově smyslu*, jestliže existuje funkce F spojitá na $[a,b]$ a primitivní k f na (a,b).
V tomto případě definujeme její *Newtonův integrál*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

Věta 3.2.15 říká, že je-li funkce f integrabilní na $[a,b]$ v Riemannově i v Newtonově smyslu, pak se její Riemannův a Newtonův integrál rovnají.

3.2.19 Poznámky

1. Integrace „per partes" pro určité integrály:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

2. Substituční metoda pro určité integrály:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

3.3 Vlastnosti Riemannova integrálu

V celém odstavci bude pojem „integrabilní funkce" znamenat funkci integrace schopnou v Riemannově smyslu.

3.3.1 Věta

Nechť f je funkce integrabilní na intervalu $[a, b]$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c \leq f(x) \leq d$ pro každé $x \in [a, b]$. Pak

$$c(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq d(b-a)\,.$$

D.: Plyne z 3.2.5, neboť $c \leq \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $d \geq \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. $\square$

3.3.2 Důsledky

1. Nechť f je funkce integrabilní na intervalu $[a, b]$. Jestliže $f(x) \geq 0$ pro každé $x \in [a, b]$, pak

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0\,.$$

2. Nechť f je funkce integrabilní na intervalu $[a, b]$. Jestliže $|f(x)| \leq c$ pro každé $x \in [a, b]$, pak

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq c(b-a)\,.$$

   D.: Plyne z nerovnosti $-c(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq c(b-a)$. $\square$

3.3.3 Věta (aditivita vzhledem k integrovaným funkcím)

Nechť f a g jsou funkce integrabilní na intervalu $[a, b]$. Pak je i funkce $f + g$ integrabilní na intervalu $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,.$$

D.: Buď $D = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \vartheta([a,b])$ libovolné a označme
$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},\ n_i = \inf\{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},\ p_i = \inf\{f(x) + g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.
Na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ platí $m_i + n_i \le f(x) + g(x)$ a tedy $m_i + n_i \le p_i$, což znamená, že
$m_i(x_i - x_{i-1}) + n_i(x_i - x_{i-1}) \le p_i(x_i - x_{i-1})$.
Sečtením těchto nerovností pro i od 1 do n dostaneme $s(D,f) + s(D,g) \le s(D, f+g)$.
Buď nyní $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ libovolná nulová posloupnost dělení intervalu $[a,b]$. Pak platí
$s(D_n, f) + s(D_n, g) \le s(D_n, f+g)$ a limitním přechodem $n \to \infty$ dostaneme podle 3.2.9, 1.3.5.1 a 1.3.6.2

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \le \underline{\int_a^b} (f(x) + g(x))\mathrm{d}x\,.$$

Analogicky odvodíme

$$\overline{\int_a^b} (f(x) + g(x))\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,.$$

Z těchto nerovností plyne tvrzení. □

3.3.4 Věta (homogenita vzhledem k integrovaným funkcím)

Nechť f je funkce integrabilní na intervalu $[a,b]$ a $c \in \mathbb{R}$. Pak funkce cf je integrabilní na intervalu $[a,b]$ a platí

$$\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

D.: Nechť $D = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \vartheta([a,b])$ libovolné a označme

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad & M_i &= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},\\ n_i &= \inf\{cf(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad & N_i &= \sup\{cf(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}. \end{aligned}$$

Pro $c = 0$ je tvrzení zřejmé.
Nechť $c > 0$. Pak je $n_i = cm_i,\ N_i = cM_i$ a tedy $s(D, cf) = cs(D,f),\ S(D, cf) = cS(D,f)$.
Pro libovolnou nulovou $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \vartheta([a,b])$ platí:

$$\begin{aligned} \underline{\int_a^b} cf(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} s(D_n, cf) = c\lim_{n\to\infty} s(D_n, f) = c\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\,,\\ \overline{\int_a^b} cf(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} S(D_n, cf) = c\lim_{n\to\infty} S(D_n, f) = c\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\,, \end{aligned}$$

z čehož plyne tvrzení.
Nechť $c < 0$. Pak $n_i = cM_i,\ N_i = cm_i$ a tedy $s(D, cf) = cS(D,f),\ S(D,cf) = cs(D,f)$ a důkaz dokončíme s využitím nulové posloupnosti $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \vartheta([a,b])$. □

3.3.5 Důsledek (linearita Riemannova integrálu)

Nechť $f_1, f_2, \dots, f_n$ jsou funkce integrabilní na intervalu $[a,b]$ a $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Pak je funkce
$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n$ integrabilní na intervalu $[a,b]$ a platí

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x))\mathrm{d}x = c_1 \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + c_2 \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x + \cdots + c_n \int_a^b f_n(x))\mathrm{d}x\,.$$

3.3.6 Věta (monotonie vzhledem k integrovaným funkcím)

Nechť f a g jsou funkce integrabilní na intervalu $[a, b]$. Jestliže pro každé $x \in [a, b]$ platí $f(x) \le g(x)$, pak

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,.$$

D.: Pro $x \in [a, b]$ je $g(x) - f(x) \ge 0$ a tedy podle 3.3.2.1 a 3.3.5 je
$0 \le \int\limits_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x = \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. $\square$

3.3.7 Věta

Nechť funkce f a g jsou integrabilní na intervalu $[a, b]$. Pak je také funkce fg integrabilní na intervalu $[a, b]$.

D.: Nechť nejprve $f(x) \ge 0,\ g(x) \ge 0$ pro $x \in [a, b]$.
Poněvadž funkce f a g jsou integrabilní, jsou ohraničené a tedy existuje $k \in \mathbb{R},\ k > 0$ takové, že $f(x) \le k,\ g(x) \le k$ pro $x \in [a, b]$.
Buď $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$ libovolné. K číslu $\dfrac{\varepsilon}{2k} > 0$ existují podle 3.2.10 dělení $D_1,\ D_2$ intervalu $[a, b]$ taková. že
$S(D_1, f) - s(D_1, f) < \dfrac{\varepsilon}{2k},\ S(D_2, g) - s(D_2, g) < \dfrac{\varepsilon}{2k}$.
Položme $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} = D_1 \cup D_2$.
Podle 3.2.3.2 platí $s(D_1, f) \le s(D, f),\ S(D_1, f) \ge S(D, f)$ a tedy
$S(D, f) - s(D, f) \le S(D_1, f) - s(D_1, f) < \dfrac{\varepsilon}{2k}$.
Obdobně: $S(D, g) - s(D, g) < \dfrac{\varepsilon}{2k}$.
Označme

$$\begin{aligned}
m_i &= \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, & M_i &= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},\\
n_i &= \inf\{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, & N_i &= \sup\{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},\\
p_i &= \inf\{f(x)g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, & P_i &= \sup\{f(x)g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.
\end{aligned}$$

Na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ platí $0 \le m_i \le f(x) \le M_i,\ 0 \le n_i \le g(x) \le N_i$ a tedy $m_i n_i \le f(x)g(x) \le M_i N_i$. Odtud dále plyne $m_i n_i \le p_i \le P_i \le M_i N_i$, neboli $P_i - p_i \le M_i N_i - m_i n_i = N_i(M_i - m_i) + m_i(N_i - n_i)$. Poněvadž $N_i \le k,\ m_i \le k$, platí $P_i - p_i \le k((M_i - m_i) + (N_i - n_i))$. Poslední nerovnost vynásobíme $(x_i - x_{i-1})$ a takto vzniklé nerovnosti sečteme pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Dostaneme:

$$S(D, fg) - s(D, fg) \le k(S(D, f) - s(D, f) + S(D, g) - s(D, g)) \le k\left(\frac{\varepsilon}{2k} + \frac{\varepsilon}{2k}\right) = \varepsilon\,.$$

Podle 3.2.10 je funkce fg integrabilní.
Nechť nyní jsou f, g libovolné. Opět existuje $k \in \mathbb{R}$, že $f(x) \le k,\ g(x) \le k$ pro $x \in [a, b]$.
Podle 3.3.5 jsou funkce $k - f(x) \ge 0,\ k - g(x) \ge 0$ integrabilní a podle první části důkazu je integrabilní i funkce $h(x) = (k - f(x))(k - g(x))$.
Poněvadž $f(x)g(x) = h(x) + kf(x) + kg(x) - k^2$, je funkce fg podle 3.3.5 integrabilní na intervalu $[a, b]$. $\square$

3.3.8 Věta

Nechť funkce f a g jsou integrabilní na intervalu $[a, b]$. Je=li $|g(x)| \ge c > 0$ pro $x \in [a, b]$, pak je také funkce $\dfrac{f}{g}$ integrabilní na intervalu $[a, b]$.

D.: Nechť $g(x) \ge c > 0$ pro $x \in [a, b]$.
Buď $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$ libovolné. K číslu $c^2\varepsilon > 0$ existuje podle 3.2.10 takové $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \vartheta([a, b])$, že $S(D, g) - s(D, g) < c^2\varepsilon$.
Označme

$$\begin{aligned}
m_i &= \inf\{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, & M_i &= \sup\{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},\\
n_i &= \inf\left\{\frac{1}{g(x)} : x \in [x_{i-1}, x_i]\right\}, & N_i &= \sup\left\{\frac{1}{g(x)}\, x \in [x_{i-1}, x_i]\right\}.
\end{aligned}$$

Platí $n_i = \dfrac{1}{M_i}$, $N_i = \dfrac{1}{m_i}$, $m_i \geq c, M_i \geq c$. Odtud dostaneme
$N_i - n_i = \dfrac{1}{m_i} - \dfrac{1}{M_i} = \dfrac{M_i - m_i}{m_i M_i} \leq \dfrac{1}{c^2}(M_i - m_i)$.
Tyto nerovnice vynásobíme $(x_i - x_{i-1})$ a sečteme pro $i = 1, 2, \dots, n$. Dostaneme
$S\left(D, \dfrac{1}{g}\right) - s\left(D, \dfrac{1}{g}\right) \leq \dfrac{1}{c^2}(S(D,g) - s(D,g)) < \varepsilon$.
Podle 3.2.10 je funkce $\dfrac{1}{g}$ integrabilní na $[a,b]$.
Je-li $g(x) \leq -c < 0$ pro $x \in [a,b]$, je podle první části důkazu funkce $-\dfrac{1}{g}$ integrabilní na $[a,b]$ a tedy podle 3.3.4 je také $\dfrac{1}{g}$ integrabilní na $[a,b]$.
Tvrzení věty je nyní důsledkem 3.3.7, neboť $\dfrac{f}{g} = f\dfrac{1}{g}$. $\square$

Poznámka: Předpoklad $|g(x)| \geq c > 0$ nelze obecně nahradit slabším předpokladem $|g(x)| > 0$, neboť v takovém případě funkce $\dfrac{f}{g}$ nemusí být ohraničená.

Např.: $[a,b] = [0,1]$, $f(x) = 1$, $g(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

g je integrabilní na $[0,1]$ podle 3.2.14, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ není ohraničená.

3.3.9 Věta

Je-li funkce f integrabilní na intervalu $[a,b]$, pak také funkce $|f|$ je integrabilní na intervalu $[a,b]$ a platí

$$\left| \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x \,.$$

D.: Buď $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolné. Existuje $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \vartheta([a,b])$ takové, že $S(D,f) - s(D,f) < \varepsilon$. Označme

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad & M_i &= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \\ n_i &= \inf\{|f(x)| : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad & N_i &= \sup\{|f(x)| : x \in [x_{i-1}, x_i]\}. \end{aligned}$$

Buďte $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$. Pak $|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq M_i - m_i$. Odtud plyne, že pro pevně zvolené y je $|f(x)| \leq |f(y)| + M_i - m_i$. Z vlastností suprema plyne $N_i \leq |f(y)| + M_i - m_i$, neboli $|f(y)| \geq N_i - (M_i - m_i)$.
Z vlastností infima nyní plyne $n_i \geq N_i - (M_i - m_i)$, neboli $N_i - n_i \leq M_i - m_i$.
Poslední nerovnice vynásobíme $(x_i - x_{i-1})$ a sečteme přes $i = 1, 2, \dots, n$.
Dostaneme $S(D, |f|) - s(D, |f|) \leq S(D,f) - s(D,f) < \varepsilon$ a podle 3.2.10 je funkce $|f|$ integrabilní.
Dále pro $x \in [a,b]$ platí $f(x) \leq |f(x)|$, $-f(x) \leq |f(x)|$ a tedy podle 3.3.6

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x, \qquad -\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x,$$

což znamená

$$-\int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x,$$

a to je nerovnost v tvrzení věty. $\square$

Poznámka: Obrácené tvrzení neplatí. Např. pro $f(x) = \chi(x) - \frac{1}{2}$ je $|f(x)| = \frac{1}{2}$, což je funkce integrabilní, ale

$$\overline{\int_{0}^{1}} f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} = \underline{\int_{0}^{1}} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

(Sr. 3.2.7)

3.3.10 Věta (1. věta o střední hodnotě integrálního počtu)

Nechť funkce f a g jsou integrabilní na intervalu $[a, b]$, $g(x) \geq 0$ pro $x \in [a, b]$, $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Pak existuje $\mu \in [m, M]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,.$$

D.: Poněvadž $m \leq f(x) \leq M$ a $g(x) \geq 0$, platí $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ a tedy podle 3.3.6 a 3.3.4 je

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,.$$

Je-li $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$, pak podle 3.3.6 a 3.3.4 je

$$0 = m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b mg(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b Mg(x)\mathrm{d}x = M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$$

a tedy $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$. Rovnost v tvrzení věty je splněna pro libovolné $\mu \in \mathbb{R}$.

Je-li $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$, položíme

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\,.$$

Pak

$$m = \frac{m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} = \mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leq \frac{M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} = M\,.$$

□

3.3.11 Důsledky

1. Nechť funkce f je navíc spojitá. Pak existuje $c \in [a, b]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,.$$

D.: plyne z 1.7.15. □

2. Nechť m a M mají stejný význam jako v 3.3.10. Pak existuje $\mu \in [m, M]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu(b-a)\,.$$

D.: volbou $g(x) = 1$. $\square$

3. Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Pak existuje $c \in [a, b]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a)\,.$$

3.3.12 Věta (aditivita vzhledem k integračnímu oboru)

Nechť $a, b, c \in \mathbb{R},\ a < b < c$ a f je ohraničená funkce definovaná na $[a, c]$. Pak platí

$$\int_{\overline{a}}^{c} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\overline{b}}^{c} f(x)\mathrm{d}x, \qquad \int_{a}^{\underline{c}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{\underline{b}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b}^{\underline{c}} f(x)\mathrm{d}x.$$

Je-li funkce f integrabilní na $[a, b]$ i na $[a, c]$, pak je integrabilní i na $[a, c]$ a platí

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x.$$

D.: Nechť $\{D'_n\}$ je nulová posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ a $\{D''_n\}$ je nulová posloupnost dělení intervalu $[b, c]$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $D_n = D'_n \cup D''_n$.
Pak je $D_n \in \vartheta([a, b]),\ \nu(D_n) = \max\{\nu(D'_n), \nu(D''_n)\}$. Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$, neboli $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová posloupnost dělení intervalu $[a, c]$.
Dále $s(D_n, f) = s(D'_n, f) + s(D''_n, f),\ S(D_n, f) = S(D'_n, f) + S(D''_n, f)$, z čehož limitním přechodem $n \to \infty$ s využitím 3.2.9 dostaneme první tvrzení.
Je-li funkce f integrabilní na intervalech $[a, b]$ a $[b, c]$, platí

$$\int_{\overline{a}}^{c} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{\underline{c}} f(x)\mathrm{d}x\,,$$

což je druhé tvrzení. $\square$

3.3.13 Poznámky

1. Druhé tvrzení věty 3.3.12 neplatí pro Newtonův integrál.
Např.: $a = -1,\ b = 0,\ c = 1,\ f(x) = \operatorname{sgn} x$.

2. Větu 3.3.12 lze indukcí zobecnit na libovolný konečný počet intervalů:
Jsou-li $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ taková, že $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ a funkce f je integrabilní na každém intervalu $[a_{i-1}, a_i]$, $i = 2, 3 \ldots, n$, pak je f integrabilní i na intervalu $[a_1, a_n]$ a platí

$$\int_{a_1}^{a_n} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=2}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Analogické tvrzení platí pro horní a dolní integrál.

3.3.14 Věta (monotonie vzhledem k integračnímu oboru)

Nechť funkce f je integrabilní na intervalu $[a,b]$ a nechť $[c,d] \subseteq (a,b)$. Pak je f integrabilní i na intervalu $[c,d]$.

D.: Nechť $\{D'_n\}$, resp. $\{D''_n\}$, resp. $\{D'''_n\}$ je nulová posloupnost dělení intervalu $[a,c]$, resp. $[c,d]$, resp. $[d,b]$.
Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $D_n = D'_n \cup D''_n \cup D'''_n$.
Pak je $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ nulová posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ a platí
$s(D_n,f) = s(D'_n,f) + s(D''_n) + s(D'''_n)$, $S(D_n,f) = S(D'_n,f) + S(D''_n) + S(D'''_n)$.
Odtud dostaneme limitním přechodem $n \to \infty$ s využitím 3.2.9

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f(x)\mathrm{d}x + \underline{\int_c^d} f(x)\mathrm{d}x + \underline{\int_d^b} f(x)\mathrm{d}x, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^c} f(x)\mathrm{d}x + \overline{\int_c^d} f(x)\mathrm{d}x + \overline{\int_d^b} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Odečtením těchto rovností dostaneme

$$0 = \left(\underline{\int_a^c} f(x)\mathrm{d}x - \overline{\int_a^c} f(x)\mathrm{d}x\right) + \left(\underline{\int_c^d} f(x)\mathrm{d}x - \overline{\int_c^d} f(x)\mathrm{d}x\right) + \left(\underline{\int_d^b} f(x)\mathrm{d}x - \overline{\int_d^b} f(x)\mathrm{d}x\right).$$

Poněvadž všechny sčítance jsou nezáporné, musí být nulové. Zejména

$$\underline{\int_c^d} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_c^d} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

□

3.3.15 Důkaz věty 3.2.14

D.: Buď $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolné.
Poněvadž funkce f je na intervalu $[a,b]$ ohraničená, existuje $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ takové, že $-k \le f(x) \le k$ pro každé $x \in [a,b]$.
Buď M množina bodů nespojitosti funkce f. Poněvadž je tato množina nulová, existují
$a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, $a \le a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n \le b$
takové, že $M \subseteq (a_1,b_1) \cup (a_2,b_2) \cup \dots \cup (a_n,b_n)$ a $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \dfrac{\varepsilon}{2k}$.
Předpokládejme, že $a < a_1$, $b_n < b$. (V opačném případě bychom provedli analogické úvahy.)
Na každém z intervalů $[a,a_1]$, $[b_1,a_2]$, $\dots$, $[b_{n-1},a_n]$, $[b_n,b]$ je funkce f spojitá a tedy podle 3.2.12 integrabilní.
Na každém intervalu (a_1,b_1), (a_2,b_2), $\cdots$, (a_n,b_n) podle 3.2.5 platí

$$-k(b_i - a_i) \le \underline{\int_{a_i}^{b_i}} f(x)\mathrm{d}x \le \overline{\int_{a_i}^{b_i}} f(x)\mathrm{d}x \le k(b_i - a_i),\ i = 1,2,\dots,n\,.$$

Podle 3.3.13.2 je

$$\begin{aligned}
\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^{a_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n}\underline{\int_{a_i}^{b_i}} f(x)\mathrm{d}x \ \ge \\
&\ge \int_a^{a_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x - k\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \ >
\end{aligned}$$

$$> \int_a^{a_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x - k\frac{\varepsilon}{2k} =$$

$$= \int_a^{a_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Analogicky ukážeme, že

$$\int_a^{\underline{b}} f(x)\mathrm{d}x < \int_a^{a_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Odtud

$$0 \le \int_a^{\underline{b}} f(x)\mathrm{d}x - \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon\,.$$

Poněvadž $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, je

$$\int_a^{\underline{b}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

□

3.3.16 Věta

Nechť f, g jsou ohraničené funkce na intervalu $[a,b]$ a nechť množina $M = \{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}$ je nulová. Je-li jedna z funkcí f, g integrabilní na $[a,b]$, je integrabilní i druhá z nich a platí

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,.$$

D.: Nechť funkce f je integrabilní a buď $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolné.
Buď $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ takové, že $-k \le g(x) \le k$ pro $x \in [a,b]$.
Poněvadž M je nulová, existují $a \le a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n \le b$ takové, že
$M \subseteq (a_1,b_1) \cup (a_2,b_2) \cup \cdots \cup (a_n,b_n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \le \dfrac{\varepsilon}{2k}$.
Podle 3.3.14 je funkce f na každém z intervalů $[a,a_1], [b_1,a_2], [b_2,a_3], \ldots, [b_n,b]$ integrabilní.
Na každém z těchto intervalů jsou funkce f, g shodné, tedy i g je na nich integrabilní a platí

$$\int_a^{a_1} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a_1} g(x)\mathrm{d}x,\ \int_{b_1}^{a_2} f(x)\mathrm{d}x = \int_{b_1}^{a_2} g(x)\mathrm{d}x,\ \ldots, \int_{b_n}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{b_n}^{b} g(x)\mathrm{d}x.$$

Na každém z intervalů $[a_i,b_i]$ platí

$$-k(b_i - a_i) \le \int_{\overline{a_i}}^{b_i} g(x)\mathrm{d}x \le \int_{a_i}^{\underline{b_i}} g(x)\mathrm{d}x \le k(b_i - a_i)\,.$$

Analogicky jako v důkazu věty 3.2.14 ukážeme

$$\int_{\overline{a}}^{b} g(x)\mathrm{d}x > \int_a^{a_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\int_a^{\underline{b}} g(x)\mathrm{d}x < \int_a^{a_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{b_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2},$$

z čehož opět vyplyne

$$\overline{\int_a^b} g(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} g(x)\mathrm{d}x.$$

□

V důsledku věty 3.3.16 není při úvahách o Riemannovu integrálu nutné předpokládat, že ohraničená funkce je definovaná na celém intervalu $[a, b]$. Stačí, je-li definovaná na $[a, b]$ s výjimkou nulové množiny. Zejména lze tedy hovořit o funkci integrabilní na otevřeném intervalu (a, b).

3.4 Integrál jako funkce horní meze

3.4.1 Úmluva

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a funkce f je definována v a (tj. $a \in \operatorname{Dom} f$). Pak klademe $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Nechť $a, b \in \mathbb{R},\ a > b$ a nechť funkce f je integrabilní na intervalu $[b, a]$. Pak klademe $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

Snadno ověříme, že při této rozšířené definici zůstávají v platnosti všechna tvrzení předchozího odstavce.

Nechť funkce f je integrabilní na $[a, b]$ a $x \in [a, b]$. Podle 3.3.14 je funkce f integrabilní na $[a, x]$. Funkci $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ definovanou na $[a, b]$ nazýváme *integrál jako funkce horní meze.*

3.4.2 Věta

Nechť funkce f je integrabilní na $[a, b]$. Pak je funkce $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ spojitá na $[a, b]$.

D.: Buď $x_0 \in [a, b],\ \varepsilon > 0$ libovolné.
Poněvadž f je integrabilní, je ohraničená a tedy existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $|f(x)| \leq c$ pro $x \in [a, b]$.
Položme $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$.
Buď $x \in [a, b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ libovolný. Pak
$|F(x_0) - F(x)| = \left|\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leq |x - x_0|c < \delta c = \frac{\varepsilon}{c}c = \varepsilon.$
(První nerovnost plyne z 3.3.2.2) □

3.4.3 Věta

Nechť je funkce f integrabilní na $[a, b]$ a spojitá v $x_0 \in [a, b]$. Pak funkce $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ má derivaci v x_0 a platí $F'(x_0) = f(x_0)$.
V případě $x_0 = a$ nebo $x_0 = b$ se jedná o příslušnou jednostrannou derivaci.

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Poněvadž f je spojitá v x_0, k $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$ platí $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Tedy pro $x \neq x_0,\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$ platí

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right) - \frac{f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}\right| = \\
&= \left|\frac{1}{x - x_0}\left(\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t - \int_{x_0}^x f(x_0)\mathrm{d}t\right)\right| = \\
&= \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\mathrm{d}t\right| \leq \\
&\leq \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^x \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{d}t\right| = \\
&= \frac{1}{|x - x_0|}|x - x_0|\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Tedy $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$. □

3.4.4 Důsledek

Je-li funkce f spojitá na $[a, b]$, pak $F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}t$ má na $[a, b]$ derivaci a platí $F'(x) = f(x)$.

Buď f integrabilní na $[a, b]$, $c \in [a, b]$ libovolný, pevně zvolený bod. Funkce f je na intervalu s krajními body c, $x \in [a, b]$ (tj. na intervalu $[c, x]$ pro $x > c$ nebo $[x, c]$ pro $x < c$) podle 3.3.14 integrabilní. Lze tedy definovat funkci $F(x) = \int_c^x f(t)\mathrm{d}t$.

3.4.5 Poznámka

Nechť f je funkce integrabilní na $[a, b]$ a $c \in [a, b]$. Pak je funkce $F(x) = \int_c^x f(t)\mathrm{d}t$ spojitá na $[a, b]$.

Je-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in [a, b]$, má funkce $F = \int_c^x f(t)\mathrm{d}t$ v tomto bodě derivaci a platí $F'(x_0) = f(x_0)$.

D.: Podle 3.4.1 a 3.3.12 je $\int_c^x f(t)\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_a^c f(t)\mathrm{d}t$.

$\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ je konstanta, tedy spojitá funkce mající nulovou derivaci. Tvrzení nyní plyne z 3.4.2 a z 3.4.3. □

3.4.6 Věta (o existenci primitivní funkce)

K funkci f spojité na intervalu J existuje na tomto intervalu funkce primitivní.

D.: Je-li interval J uzavřený, plyne tvrzení z 3.4.4.

Nechť J není uzavřený. Zvolme pevně $c \in J$ a položme $F(x) = \int_c^x f(t)\mathrm{d}t$.

F je definována na celém J, neboť pro $x \in J$ je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu s krajními body c a x a tedy podle 3.2.12 integrabilní.
Buď $x_0 \in J$ libovolný. Zvolme $a, b \in J$, $a \leq \min\{c, x_0\},\ b \geq \max\{c, x_0\}$.
Pak $c \in [a, b]$, $x_0 \in [a, b]$ a f je spojitá na $[a, b]$. Podle 3.4.5 tedy platí $F'(x_0) = f(x_0)$.
Poněvadž $x_0 \in J$ byl libovolný, platí $F'(x_0) = f(x_0)$ pro každé $x \in J$. □

Je-li f integrabilní funkce na $[a,b]$, lze analogicky uvažovat *integrál jako funkci dolní meze* $G(x)=\int\limits_x^b f(t)\mathrm{d}t$, nebo obecněji $G(x)=\int\limits_x^c f(t)\mathrm{d}t$ pro $c\in[a,b]$.

3.4.7 Poznámka

Nechť funkce f je integrabilní na $[a,b]$, $c\in[a,b]$. Pak je funkce $G(x)=\int\limits_x^c f(t)\mathrm{d}t$ spojitá na $[a,b]$.
Je-li funkce f spojitá v bodě $x_0\in[a,b]$, má funkce G v tomto bodě derivaci a platí $G'(x_0)=-f(x_0)$.

3.5 Nevlastní integrály

V dosavadních úvahách o $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ jsme předpokládali

(i) $a,b\in\mathbb{R}$, tj. interval (a,b) má konečnou délku,

(ii) f je ohraničená na (a,b).

V tomto odstavci rozšíříme pojem integrálu na případy, kdy některý z těchto předpokladů není splněn. V takovém případě mluvíme o *nevlastních integrálech*.

Nejdříve budeme uvažovat nesplnění prvního předpokladu.

3.5.1 Definice

Nechť $a\in\mathbb{R}$ a f je funkce definovaná na $[a,\infty)$, která je integrabilní na každém intervalu $[a,b]$, kde $b>a,\ b\in\mathbb{R}$.
Položme $F(t)=\int\limits_a^t f(x)\mathrm{d}x$.
Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{t\to\infty}F(t)$, řekneme, že nevlastní integrál $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ *konverguje* a klademe
$\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to\infty}F(t)$.
Neexistuje-li vlastní limita $\lim\limits_{t\to\infty}F(t)$, řekneme, že nevlastní integrál $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ *diverguje*.
Analogicky definujeme konvergenci nevlastního integrálu $\int\limits_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x$, $a\in\mathbb{R}$.
Je-li funkce f definována na $\mathbb{R}$ a integrabilní na každém uzavřeném intervalu, pak pravíme, že nevlastní integrál $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x$ *konverguje*, jestliže pro nějaké $a\in\mathbb{R}$ konvergují nevlastní integrály $\int\limits_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x$ a $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ a klademe
$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$.

3.5.2 Příklady

1. $\int\limits_1^\infty \dfrac{\mathrm{d}x}{x^k},\ k\in\mathbb{R}$

   $k\neq 1:\ F(t)=\int\limits_1^t \dfrac{\mathrm{d}x}{x^k}=\left[\dfrac{1}{-k+1}\dfrac{1}{x^{k-1}}\right]_1^t=\dfrac{1}{1-k}\left(\dfrac{1}{t^{k-1}}-1\right),\ \lim\limits_{t\to\infty}F(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{k-1}, & k>1\\ \infty, & k<1\end{cases}$

   $k=1:\ F(t)=\int\limits_1^t \dfrac{\mathrm{d}x}{x}=[\ln x]_1^t=\ln t-\ln 1,\ \lim\limits_{t\to\infty}F(t)=\infty$

   Tedy $\int\limits_1^\infty \dfrac{\mathrm{d}x}{x^k}$ konverguje pro $k>1$ a diverguje pro $k\leq 1$.

2. $\int\limits_0^\infty e^{-kx}\mathrm{d}x,\ k\in\mathbb{R}$

$k\neq 0:\ F(t)=\int\limits_0^t e^{-kx}\mathrm{d}x=\left[-\frac{e^{-kx}}{k}\right]_0^t=\frac{1}{k}-\frac{e^{-kt}}{k},\ \lim\limits_{t\to\infty}F(t)=\begin{cases}\frac{1}{k}, & k>0\\ \infty, & k<0\end{cases}$

$k=0:\ F(t)=\int\limits_0^t \mathrm{d}x=t,\ \lim\limits_{t\to\infty}F(t)=\infty$

Tedy $\int\limits_0^\infty e^{-kx}\mathrm{d}x$ konverguje pro $k>0$ a diverguje pro $k\leq 0$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

$\int\limits_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^t\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim\limits_{t\to\infty}[\operatorname{arctg}x]_0^t=\lim\limits_{t\to\infty}\operatorname{arctg}t=\frac{\pi}{2}$

$\int\limits_{-\infty}^0\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim\limits_{t\to-\infty}\int\limits_t^0\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim\limits_{t\to-\infty}[\operatorname{arctg}x]_t^0=\lim\limits_{t\to-\infty}(-\operatorname{arctg}t)=\frac{\pi}{2}$

Tedy $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\pi$.

4. $\int\limits_0^\infty\cos x\mathrm{d}x$

$F(t)=\int\limits_0^t\cos x\mathrm{d}x=[\sin x]_0^t=\sin t,\ \lim\limits_{t\to\infty}F(t)$ neexistuje, $\int\limits_0^\infty\cos x\mathrm{d}x$ diverguje.

5. $\int\limits_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$, kde $f(x)=\begin{cases}n, & x=n\in\mathbb{N}\\ 0, & x\notin\mathbb{N}\end{cases}$

$F(t)=\int\limits_0^t f(x)\mathrm{d}x=0$, tedy $\int\limits_0^\infty f(x)\mathrm{d}x=0$.

Nevlastní integrál může konvergovat, i když je integrovaná funkce neohraničená.

V tvrzeních 3.5.3 – 3.5.8 budeme předpokládat, že všechny uvažované funkce jsou definovány na $[a,\infty),\ a\in\mathbb{R}$ a integrabilní na $[a,b]$ pro každé $b>a$.

Tato tvrzení se týkají integrálů typu $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$. Po příslušné úpravě předpokladů však platí i pro integrály typu $\int\limits_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x$.

3.5.3 Věta (Cauchyovo – Bolzanovo kriterium)

Integrál $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když ke každému $\varepsilon>0$ existuje $x_0\geq a$ takové, že pro každá dvě $t_1,t_2\in\mathbb{R},\ t_1>x_0,\ t_2>x_0$ platí $\left|\int\limits_{t_1}^{t_2}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$.

D.: Plyne z 1.6.6. □

3.5.4 Věta (Srovnávací kriterium)

Nechť na intervalu $[a,\infty)$ platí $0\leq f(x)\leq g(x)$.

Konverguje-li $\int\limits_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$, konverguje i $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$.

Diverguje-li $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$, diverguje i $\int\limits_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$.

D.: Nechť $\int\limits_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ konverguje. Podle 3.5.3 existuje $x_0 \geq a$ takové, že pro každá $t_1, t_2 \in \mathbb{R},\ t_1 > x_0,\ t_2 > x_0$ platí $\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} g(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$.

Volme označení tak, že $t_1 < t_2$. Pak podle 3.3.2.1 je $\int\limits_{t_1}^{t_2} g(x)\mathrm{d}x \geq 0,\ \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

Tedy $\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x)\mathrm{d}x\right| = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x)\mathrm{d}x \leq \int\limits_{t_1}^{t_2} g(x)\mathrm{d}x = \left|\int\limits_{t_1}^{t_2} g(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$. (První nerovnost plyne z 3.3.6)

Podle 3.5.3 $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ konverguje.

Nechť $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ diverguje. Podle první části důkazu nemůže $\int\limits_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ konvergovat. $\square$

3.5.5 Věta (limitní srovnávací kriterium)

Nechť funkce f, g jsou nezáporné na $[a, b)$ a nechť existuje $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R}^*$.

Je-li $c < \infty$ a konverguje-li $\int\limits_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$, pak konverguje i $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$.

Je-li $c > 0$ a diverguje-li $\int\limits_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$, pak diverguje i $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$.

D.: Nechť $c < \infty$ a $\int\limits_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ konverguje.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Existuje $x_0 \in \mathbb{R},\ x_0 \geq a$ takové, že pro $x \geq x_0$ platí $c - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < c + \varepsilon$, neboli $f(x) < (c+\varepsilon)g(x)$.

Z konvergence $\int\limits_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ plyne konvergence $\int\limits_{x_0}^\infty g(x)\mathrm{d}x$ a tedy i konvergence $\int\limits_{x_0}^\infty (c+\varepsilon)g(x)\mathrm{d}x$. Odtud podle 3.5.4 plyne konvergence $\int\limits_{x_0}^\infty f(x)\mathrm{d}x$ a tedy i konvergence $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$.

Nechť $c > 0$ a $\int\limits_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ diverguje.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} \frac{1}{c}, & c < \infty \\ 0, & c = \infty \end{cases}.$$

Kdyby $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ konvergoval, pak by podle první části důkazu $\int\limits_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ konvergoval. $\square$

3.5.6 Důsledky

1. Nechť funkce f, g jsou nezáporné na $[a, b)$. Jestliže $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in (0, \infty)$, pak oba nevlastní integrály $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ a $\int\limits_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ buď současně konvergují, nebo současně divergují.

2. Buď f nezáporná funkce na intervalu $[a, \infty)$.

   - Jestliže existuje $k \in \mathbb{R},\ k > 1$ takové, že $\lim\limits_{x\to\infty} x^k f(x) < \infty$, pak $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ konverguje.
   - Jestliže existuje $k \in \mathbb{R},\ k \leq 1$ takové, že $\lim\limits_{x\to\infty} x^k f(x) > 0$, pak $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ diverguje.
   - Jestliže existuje $k \in \mathbb{R},\ k > 0$ takové, že $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{kx} f(x) < \infty$, pak $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ konverguje.

- Jestliže existuje $k \in \mathbb{R},\ k \leq 0$ takové, že $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{kx} f(x) > 0$, pak $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ diverguje.

D.: 3.5.5, 3.5.2.1 a 3.5.2.2. $\square$

3.5.7 Věta (Nutná podmínka konvergence nevlastního integrálu)

Nechť $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ konverguje a nechť existuje $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}^*$. Pak $c = 0$.

D.: Připusťme $c > 0$.
Podle definice limity existují $x_0 \geq a$ a $k > 0$ takové, že pro $x \geq x_0$ je $f(x) > k$.
$\int\limits_{x_0}^\infty k\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to\infty} k(t - x_0) = \infty$. Podle 3.5.4 diverguje $\int\limits_{x_0}^\infty f(x)\mathrm{d}x$ a tedy i $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ — spor.
Možnost $c < 0$ vyloučíme analogicky. $\square$

Poznámka: Předpoklad o existenci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ nelze obecně vynechat, jak ukazuje 3.5.2.5.

3.5.8 Věta

Konverguje-li $\int\limits_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$, pak konverguje i $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$.

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle 3.5.3 existují $x_0 \geq a$ a $t_1, t_2 > x_0$ takové, že $\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} |f(x)|\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$. Volme $t_1 < t_2$.
Pak $\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int\limits_{t_1}^{t_2} |f(x)|\mathrm{d}x = \left|\int\limits_{t_1}^{t_2} |f(x)|\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$ (první nerovnost platí podle 3.3.9).
Tvrzení nyní plyne z 3.5.3. $\square$

3.5.9 Definice

Nechť f je funkce definovaná na $[a, \infty)$ a integrabilní na $[a, b]$ pro každé $b > a$. Řekneme, že nevlastní integrál $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje $\int\limits_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$.

Poznámky:

- Z 3.5.8 plyne, že konverguje-li $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ absolutně, pak konverguje.
- Je-li f nezáporná funkce na $[a, \infty)$ a integrál $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ konverguje, pak konverguje absolutně.

Nyní budeme uvažovat nesplnění druhého z předpokladů uvedených na začátku odstavce.

3.5.10 Definice

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť funkce f je definována na $[a, b)$. Řekneme, že b je *singulární bod* funkce f, jestliže f není ohraničená na $[a, b)$ a pro každé $\beta \in (a, b)$ je integrabilní na $[a, \beta]$.

3.5.11 Definice

Nechť f je funkce definovaná na $[a, b)$ a nechť b je jejím singulárním bodem. Pro $t \in [a, b)$ položme
$F(t) = \int\limits_a^t f(x)\mathrm{d}x$.

Existuje-li vlastní $\lim\limits_{t\to b-} F(t)$, řekneme, že nevlastní integrál $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *konverguje* a klademe

$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to b-} F(t).$

Neexistuje-li vlastní $\lim\limits_{t\to b-} F(t)$, řekneme, že nevlastní integrál $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *diverguje*.

Analogicky definujeme singulární bod a pro funkci definovanou na intervalu $(a, b]$ a konvergenci nebo divergenci nevlastního integrálu $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

3.5.12 Příklad

$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^k},\ k \in \mathbb{R},\ k > 0$

$k \neq 1:\ F(t) = \int\limits_t^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^k} = \left[\frac{1}{1-k}\frac{1}{x^{k-1}}\right]_t^1 = \frac{1}{1-k}\left(1 - \frac{1}{t^{k-1}}\right),\ \lim\limits_{t\to 0+} F(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-k}, & k < 1 \\ \infty, & k > 1 \end{cases}$

$k = 1:\ F(t) = \int\limits_t^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln x]_1^t = \ln 1 - \ln t = -\ln t,\ \lim\limits_{t\to 0+} F(t) = \infty$

Tedy $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^k}$ konverguje pro $k < 1$ a diverguje pro $k \geq 1$.

Pro nevlastní integrály typu $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ platí tvrzení analogická 3.5.3, 3.5.4, 3.5.5 a 3.5.8. Důkazy se provedou shodným způsobem.

3.5.13 Věta (Cauchyovo – Bolzanovo kriterium)

Integrál $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, kde b je singulární bod funkce f konverguje právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $x_0 \in [a, b)$ takové, že pro každá dvě $t_1, t_2 \in (x_0, b)$ platí $\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$.

3.5.14 Věta (Srovnávací kriterium)

Nechť b je singulárním bodem funkce f i funkce g a nechť na intervalu $[a, b)$ platí $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Konverguje-li $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$, konverguje i $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Diverguje-li $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, diverguje i $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

3.5.15 Věta (limitní srovnávací kriterium)

Nechť b je singulárním bodem funkce f i funkce g, funkce f, g jsou nezáporné na $[a, b)$ a nechť existuje $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R}^*$.

Je-li $c < \infty$ a konverguje-li $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$, pak konverguje i $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Je-li $c > 0$ a diverguje-li $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$, pak diverguje i $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

3.5.16 Věta

Nechť b je singulárním bodem funkce f. Konverguje-li $\int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$, pak konverguje i $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Analogická tvrzení platí i pro nevlastní integrály typu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, je-li a singulárním bodem funkce f.

3.6 Aplikace určitého integrálu

3.6.1 Průměrná hodnota (integrální průměr) veličiny $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

3.6.2 Plocha rovinného obrazce

1. Obrazec v kartézských souřadnicích určený nerovnostmi $a \le x \le b,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)$.

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\mathrm{d}x$$

2. Obrazec v kartézských souřadnicích ohraničený uzavřenou křivkou o parametrických rovnicích $\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Křivka je orientována kladně, tj. tak, že plocha leží nalevo od křivky.

$$S = -\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta x(t)y'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))\mathrm{d}t$$

3. Plocha, kterou opisuje průvodič křivky, zadané v polárních souřadnicích rovnicí $r = r(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$.

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (r(\varphi))^2\mathrm{d}\varphi$$

3.6.3 Délka rovinné křivky

1. Křivka zadána parametrickými rovnicemi $\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}$, $t \in [\alpha, \beta]$.

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

2. Křivka je grafem funkce $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

3. Křivka zadána v polárních souřadnicích rovnicí $r = r(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$.

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\mathrm{d}\varphi$$

3.6.4 Objem tělesa

1. Těleso ohraničené rovnoběžnými rovinami vzdálenými od sebe na vzdálenost a se známými plochami řezů $S(x)$ rovinami rovnoběžnými s podstavami ve vzdálenosti x.

$$V = \int_0^a S(x)\mathrm{d}x$$

2. Těleso vzniklé rotací podgrafu funkce f na intervalu $[a, b]$ kolem osy x.

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x$$

3. Těleso vzniklé rotací podgrafu funkce f na intervalu $[a, b]$ kolem osy y.

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\mathrm{d}x$$

3.6.5 Plocha pláště rotačního tělesa

1. Těleso vzniklé rotací křivky o parametrických rovnicích $\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}$, $t \in [\alpha, \beta]$.

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |y(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, \mathrm{d}t$$

2. Těleso vzniklé rotací grafu funkce $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x$$

3.7 Numerická integrace

3.7.1 Lemma

Buď f funkce definovaná na intervalu $[a, b]$, která má na intervalu (a, b) druhou derivaci. Pak ke každému $x \in [a, b]$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)(b - x)\,.$$

D.: Označme $P(x) = f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Pak P je jineární polynom a platí $P(a) = f(a),\ P(b) = f(b)$.
Tedy pro $x = a$ nebo $x = b$ platí formule v tvrzení při libovolném $\xi \in (a, b)$.
Buď $x_0 \in (a, b)$ libovolný pevně zvolený bod a položme $F(x) = f(x) - P(x) - \dfrac{f(x_0) - P(x_0)}{(x_0 - a)(b - x_0)}(x - a)(b - x)$.
Pak platí $F(a) = F(b) = F(x_0) = 0$. Podle 2.3.1 existují $\xi_1 \in (a, x_0)$ a $\xi_2 \in (x_0, b)$ takové, že $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$. Dále opět podle 2.3.1 existuje $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ takové, že $F''(\xi) = 0$.
Pro každé $x \in (a, b)$ platí $P''(x) = 0$, $[(x - a)(b - x)]'' = -2$, tedy $0 = F''(\xi) = f''(\xi) + 2\dfrac{f(x_0) - P(x_0)}{(x_0 - a)(b - x_0)}$.
Odtud $f(x_0) = -\dfrac{f''(\xi)}{2}(x_0 - a)(b - x_0) + P(x_0)$ a poněvadž $x_0 \in (a, b)$ bylo libovolné, je tvrzení dokázáno.
□

3.7.2 Lemma

Buď f funkce definovaná na intervalu $[a,b]$, která má na intervalu (a,b) druhou derivaci takovou, že $|f''(x)| \le M$ pro každé $x \in (a,b)$. Pak pro každé $x \in [a,b]$ platí

$$f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+\frac{M}{2}(x^2-(a+b)x+ab) \ \le\ f(x) \ \le\ f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-\frac{M}{2}(x^2-(a+b)x+ab)\,.$$

D.: Podle 3.7.1 je pro každé $x \in [a,b]$

$$\left|f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right| = \frac{|f''(\xi(x))|}{2}(x-a)(b-x) \le \frac{M}{2}(-x^2+(a+b)x-ab)\,,$$

z čehož plyne tvrzení. □

3.7.3 Věta (lichoběžníkové pravidlo)

Buď f funkce definovaná na intervalu $[a,b]$, která má na intervalu (a,b) ohraničenou druhou derivaci a buď $n \in \mathbb{N}$. Označme

$$\begin{aligned}
&h = \frac{b-a}{n}\,,\\
&x_i = a+ih,\ \ i=0,1,2,\dots,n\,,\\
&I_n(f,a,b) = \frac{h}{2}(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\dots+2f(x_{n-1})+f(x_n))\,,\\
&M = \sup\{|f''(x)|:\ x\in(a,b)\}\,.
\end{aligned}$$

Pak

$$\left|I_n(f,a,b)-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \ \le\ \frac{M}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}\,.$$

D.: Pro každé $i \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$ je

$$\begin{aligned}
&\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(x_i)+\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}(x-x_i)\pm\frac{M}{2}(x^2-(x_i+x_{i+1})x+x_ix_{i+1})\right)\mathrm{d}x \ =\\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(x_i)+\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}(x-x_i)\pm\frac{M}{2}(x^2-(x_i+x_{i+1})x+x_ix_{i+1})\right)\mathrm{d}x \ =\\
&= f(x_i)(x_{i+1}-x_i)+\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}\left[\frac{(x-x_i)^2}{2}\right]_{x_i}^{x_{i+1}} \pm \frac{M}{2}\left[\frac{x^3}{3}-(x_i+x_{i+1})\frac{x^2}{2}+x_ix_{i+1}x\right]_{x_i}^{x_{i+1}} \ =\\
&= hf(x_i)+\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}\frac{h^2}{2}\pm\frac{M}{2}\left(\frac{x_{i+1}^3-x_i^3}{3}-(x_i+x_{i+1})\frac{x_{i+1}^2-x_i^2}{2}+x_ix_{i+1}(x_{i+1}-x_i)\right) \ =\\
&= \frac{h}{2}(f(x_i)+f(x_{i+1}))\pm\frac{M}{2}h\left(\frac{x_{i+1}^2+x_{i+1}x_i+x_i^2}{3}-\frac{x_{i+1}^2+2x_{i+1}x_i+x_i^2}{2}+x_{i+1}x_i\right) \ =\\
&= \frac{h}{2}(f(x_i)+f(x_{i+1}))\pm\frac{M}{12}h(2x_{i+1}x_i-x_{i+1}^2-x_i^2) \ = \ \frac{h}{2}(f(x_i)+f(x_{i+1}))\mp\frac{M}{12}h^3\,.
\end{aligned}$$

Podle 3.7.2 a 3.3.6 platí

$$\frac{h}{2}(f(x_i)+f(x_{i+1}))-\frac{M}{12}h^3 \ \le\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \ \le\ \frac{h}{2}(f(x_i)+f(x_{i+1}))+\frac{M}{12}h^3\,.$$

Sečtením těchto nerovností pro n od 0 do $n-1$ a s využitím 3.3.13.2 dostaneme

$$\frac{h}{2}(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\dots+2f(x_{n-1})+f(x_n))-\frac{M}{12}h^3n \ \le\ \int_{x_0}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x \ \le$$

$$\leq \frac{h}{2}(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n))+\frac{M}{12}h^3 n\,,$$

což je tvrzení. □

Poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}=0$, je podle 1.3.7 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(f,a,b)=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

3.7.4 Věta (Simpsonovo [1710 – 1761] pravidlo)

Buď f funkce definovaná na intervalu $[a,b]$, která má na intervalu (a,b) ohraničenou čtvrtou derivaci a buď $m\in\mathbb{N}$ sudé. Označme

$$h=\frac{b-a}{m}\,,$$
$$x_i=a+ih,\ \ i=0,1,2,\ldots,m\,,$$
$$J_m(f,a,b)=\frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots+4f(x_{m-1})+f(x_m))\,,$$
$$N=\sup\{|f^{(4)}(x)|:\ x\in(a,b)\}\,.$$

Pak

$$\left|J_m(f,a,b)-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leq\frac{N}{180}\frac{(b-a)^5}{m^4}\,.$$

Myšlenka důkazu: Na každém z intervalů $[x_{2k},x_{2k+2}]$ nahradíme funkci f kvadratickým polynomem

$$P(x)=\frac{(x-x_{2k+1})(x-x_{2k+2})f(x_{2k})}{(x_{2k}-x_{2k+1})(x_{2k}-x_{2k+2})}+\frac{(x-x_{2k})(x-x_{2k+2})f(x_{2k+1})}{(x_{2k+1}-x_{2k})(x_{2k+1}-x_{2k+2})}+\frac{(x-x_{2k})(x-x_{2k+1})f(x_{2k+2})}{(x_{2k+2}-x_{2k})(x_{2k+2}-x_{2k+1})}\,,$$

pro který platí $f(x_{2k})=P(x_{2k}),\ f(x_{2k+1})=P(x_{2k+1}),\ f(x_{2k+2})=P(x_{2k+2})$. □

3.8 Cvičení

Najděte primitivní funkci

1) $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$,
2) $\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$,
3) $\int\frac{x^2}{1-x^2}\mathrm{d}x$,
4) $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$,
5) $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\mathrm{d}x$,
6) $\int\frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$,
7) $\int\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$,
8) $\int\mathrm{tg}^2\,x\,\mathrm{d}x$,
9) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(5x-2)^5}}$,
10) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2-2}}$,
11) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$,
12) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$,
13) $\int\frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^8-2}$,
14) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$,
15) $\int\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$,
16) $\int\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x$,
17) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+e^{-x}}$,
18) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$,
19) $\int x^n\,\ln x\,\mathrm{d}x$,
20) $\int x^2\sin 2x\,\mathrm{d}x$,
21) $\int\sin x\,\ln(\mathrm{tg}\,x)\,\mathrm{d}x$,
22) $\int\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$,
23) $\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$,
24) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$,
25) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$,
26) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2+1}}$,
27) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$,
28) $\int\cos^5\mathrm{d}x$,
29) $\int\sin 5x\,\cos x\,\mathrm{d}x$,
30) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$,
31) $\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$,
32) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2}$,
33) $\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

Rozhodněte o konvergenci nevlastních integrálů

34) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^2}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x$, 35) $\int\limits_0^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{\ln x}$, 36) $\int\limits_2^\infty \dfrac{\ln^k x}{x}\mathrm{d}x$.

Vypočítejte plochu obrazce ohraničeného danými křivkami (x, y jsou kartézské souřadnice, r, φ polární)

37) $y = |\log_{10} x|$, $y=0$, $x=\frac{1}{10}$, $x=10$,

38) $y=(x+1)^2$, $x=\sin \pi x$, $y=0$,

39) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,

40) $y^2 = x^2(a^2-x^2)$,

41) $x=2t-t^2$, $y=2t^2-t^3$,

42) $x=\dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t$, $y=\dfrac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t$,

43) $r = a\sin 3\varphi$,

44) $r=\dfrac{p}{1-\cos\varphi}$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$,

45) $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2xy$.

Vypočítejte délku křivky

46) $y=\sqrt{x^3}$, $0\le x\le 4$,

47) $y=\ln(\cos x)$, $0\le x\le a<\frac{\pi}{2}$,

48) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$,

49) $x=\dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t$, $y=\dfrac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t$,

50) $r=a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$,

51) $r=a\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

Vypočítejte objem tělesa ohraničeného plochami

52) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $z=\dfrac{c}{a}x$, $z=0$,

53) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $z=\pm c$.

54) Vypočítejte objem tělesa vzniklého rotací obrazce ohraničeného křivkami $y=2x-x^2$, $y=0$ kolem osy x a objem tělesa vzniklého rotací téhož obrazce kolem osy y.

55) Vypočítejte objem tělesa vzniklého rotací obrazce ohraničeného křivkami o parametrických rovnicích $x=a\sin^3 t$, $y=b\cos^3 t$ kolem osy x a objem tělesa vzniklého rotací téhož obrazce kolem osy y.

56) Vypočítejte povrch tělesa vzniklého rotací asteroidy $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ kolem osy x.

57) Vypočítejte $\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x}$ pomocí lichoběžníkového pravidla s $n=8$ a odhadněte chybu. Výsledek porovnejte s přesnou hodnotou.

Výsledky:

1) $x-\frac{1}{x}-\ln x^2$ 2) $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1+\frac{3}{2}x-\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{8}x^3\right)$ 3) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-x$ 4) $\arcsin x+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|$ 5) $\frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x-\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x$ 6) $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+x$ 7) $\operatorname{sgn}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)(\sin x-\cos x)$ 8) $\operatorname{tg} x-x$ 9) $\frac{2}{(30-75x)\sqrt{5x-2}}$ 10) $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}\,x-\sqrt{3x^2-2}\right|$ 11) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ 12) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ 13) $\frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|$ 14) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ 15) $\cos\frac{1}{x}$ 16) $-\ln|\cos x|$ 17) $\operatorname{arctg}\mathrm{e}^x$ 18) $\ln\left(\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}-1\right)-x$ 19) $\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ 20) $x\sin x\cos x-\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x$ 21) $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\cos x\ln(\operatorname{tg} x)$ 22) $x\operatorname{arctg} x-\ln\sqrt{1+x^2}$ 23) $-\frac{6}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4-2t^3-3t^2+6t+3\ln(t^2+1)-6\operatorname{arctg} t$, kde $t=\sqrt[6]{x+1}$ 24) $\sqrt{x}-\frac{x-\sqrt{x(1+x)}}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)$ 25) $\frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}$ 26) $\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}$ 27) $\frac{3}{2+4t}+\frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|1+2t|^3}$, kde $t=x+\sqrt{x^2+x+1}$ 28) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x$ 29) $-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{12}\cos 6x$ 30) $\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}$ 31) $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}$ 32) $\frac{-\cos x}{a(a\sin x+b\cos x)}$ 33) $\frac{3}{5}t^5-2t^3+3t$, kde $t=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$ 34) konverguje 35) diverguje 36) konverguje pro $k<-1$, diverguje pro $k\ge -1$ 37) $\frac{99\ln 10-81}{\ln 100}$ 38) $\frac{\pi+2}{3\pi}$ 39) πab 40) $\frac{4}{3}a^3$ 41) $\frac{8}{15}$ 42) $\frac{3}{8}\pi\frac{(a^2-b^2)^2}{ab}$ 43) $\frac{\pi a^2}{4}$ 44) $\frac{p^2}{6}\left(3+4\sqrt{2}\right)$ 45) a^2 46) $\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$ 47) $\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)$ 48) $8a$ 49) $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$ 50) $\frac{3\pi a}{2}$ 51) $|a|\left(\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln\sqrt{2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}}\right)$ 52) $\frac{2}{3}abc$ 53) $\frac{8}{3}\pi abc$ 54) $\frac{16}{15}\pi$, $\frac{8}{3}\pi$ 55) $\frac{32}{105}\pi ab^2$, $\frac{32}{105}\pi a^2 b$ 56) $\frac{12}{5}\pi a^2$ 57) 0.6941, chyba≤ 0.003, přesná hodnota 0.6932

Část II

Diferenciální počet funkcí více proměnných a diferenciální rovnice

Kapitola 4

Metrické prostory

4.1 Pojem metriky

4.1.1 Definice

Buď $P \neq \emptyset$ množina a $\rho : P^2 \to [0, \infty)$ zobrazení, které pro všechna $x, y, z \in P$ splňuje

(M1)	$\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$	(axiom totožnosti)
(M2)	$\rho(x,y) = \rho(y,x)$	(axiom symetrie)
(M3)	$\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$	(trojúhelníková nerovnost)

Zobrazení ρ nazýváme *metrika na* P, prvky množiny P nazýváme *body metrického prostoru* (P, ρ), číslo $\rho(x,y)$ nazýváme *vzdálenost* bodů x, y.

4.1.2 Příklady

1. Diskrétní metrický prostor
   $P \neq \emptyset$ libovolná množina, $\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}.$

2. Metrika na $\mathbb{R}$
   $P = \mathbb{R},\ \rho(x,y) = |x-y|.$

3. Metriky na $\mathbb{R}^n$
   $P = \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

   $\rho_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ euklidovská metrika

   $\rho_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ součtová metrika (taxíkářská metrika)

   $\rho_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, 2, \ldots, n\}$ maximální metrika

   Axiomy (M1), (M2) jsou splněny triviálně. (M3) ověříme postupně:

   ρ_1: $\rho_1(x,y) + \rho_1(y,z) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| = \sum_{i=1}^{n} (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) \geq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| = \rho_1(x,z)$

   ρ_∞: $\rho_\infty(x,y) + \rho_\infty(y,z) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, 2, \ldots, n\} + \max\{|y_i - z_i| : i = 1, 2, \ldots, n\} \geq$
   $\geq \max\{|x_i - y_i| + |y_i - z_i| : i = 1, 2, \ldots, n\} \geq |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \geq |x_i - z_i|$ pro libovolné $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ a tedy $\rho_\infty(x,y) + \rho_\infty(y,z) \geq \max\{|x_i - z_i| : i = 1, 2, \ldots, n\} = \rho_\infty(x,z)$

   ρ_2: Vyjdeme z nerovnosti $\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$ (Cauchy-Buňakovski-Schwarz)

   $u_i = p_i + q_i,\ v_i = q_i :$ $\quad \sum_{i=1}^{n} (p_i + q_i) q_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (p_i + q_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i^2}$

$u_i = p_i,\ v_i = p_i + q_i: \quad \sum_{i=1}^{n} p_i(p_i+q_i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p_i+q_i)^2}$

Sečtením: $\sum_{i=1}^{n}(p_i+q_i)^2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p_i+q_i)^2}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i^2}\right)$

neboli $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p_i+q_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i^2}$ (Minkowského nerovnost)

Píšeme-li v poslední nerovnosti $x_i - y_i$ místo p_i a $y_i - z_i$ místo q_i, dostaneme

$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2}$, tedy

$\rho_2(x,z) \leq \rho_2(x,y) + \rho_2(y,z)$.

4. Buď $P = \mathrm{C}[a,b]$ — množina funkcí spojitých na intervalu $[a,b]$

   $\rho_C(f,g) = \max\{|f(x)-g(x)| : x \in [a,b]\}$ metrika stejnoměrné konvergence

   $\rho_I(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$ integrální metrika

   1.7.12 ukazuje, že ρ_C je definována korektně. (M1) a (M2) jsou opět splněny triviálně.
   Platnost (M3) pro ρ_C ověříme podobně jako v případě ρ_∞ na $\mathbb{R}^n$.
   Platnost (M3) pro ρ_I ověříme s využitím 3.3.6 a 3.3.3:

$$\begin{aligned}
\rho_I(f,h) &= \int_a^b |f(x)-h(x)|\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)-g(x)+g(x)-h(x)|\mathrm{d}x \leq \\
&\leq \int_a^b (|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|)\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x + \int_a^b |g(x)-h(x)|\mathrm{d}x = \\
&= \rho_I(f,g) + \rho_I(g,h)\ .
\end{aligned}$$

5. Buď $P = \ell_\infty$ — množina ohraničených posloupností
   $\rho_\infty(\{a_n\},\{b_n\}) = \sup\{|a_n - b_n| : n \in \mathbb{N}\}$
   Platnost (M1), (M2) a (M3) ověříme stejně, jako v případě ρ_∞ na $\mathbb{R}^n$.

4.1.3 Definice

Buď (P,ρ) metrický prostor. Pro $a \in P,\ r \in \mathbb{R},\ r > 0$ definujeme:
$K[a,r] = \{x \in P : \rho(x,a) \leq r\}$ — *uzavřená koule* se středem a a poloměrem r,
$K(a,r) = \{x \in P : \rho(x,a) < r\}$ — *otevřená koule* se středem a a poloměrem r,
Speciálně: otevřená koule $\mathcal{O}_\varepsilon(a) = \mathcal{O}(a) = K(a,\varepsilon)$ se nazývá (*epsilonové*) *okolí bodu* a.

Zřejmě platí: $\varepsilon \leq \delta \Rightarrow \mathcal{O}_\varepsilon(a) \subseteq \mathcal{O}_\delta(a)$.

4.1.4 Definice

Buď (P,ρ) metrický prostor. Pro $\emptyset \neq A, B \subseteq P$ definujeme:
$\rho(A,B) = \inf\{\rho(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$ — *vzdálenost množin* A, B,
$d(A) = \sup\{\rho(x,y) : x \in A,\ y \in A\}$ — *průměr množiny* A.
Jestliže množina $\{\rho(x,y) : x \in A,\ y \in A\}$ není ohraničená shora, klademe $d(A) = \infty$
Vzdálenost bodu x *od množiny* A definujeme: $\rho(x,A) = \rho(\{x\},A)$.

4.1.5 Definice

Buď (P,ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Řekneme, že množina A je *ohraničená*, jestliže $d(A) < \infty$.

Množina A je zřejmě ohraničená, jestliže existuje bod a a číslo $r > 0$, že $A \subseteq K(a,r)$.

4.1.6 Poznámka

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Pro $x, y \in A$ definujeme $\rho_A(x,y) = \rho(x,y)$. Zobrazení ρ_A je zřejmě metrika na A.

4.1.7 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Metriku ρ_A zavedenou v 4.1.6 nazýváme *metrikou indukovanou na množině A metrikou ρ*. Metrický prostor (A, ρ_A) nazýváme *podprostorem metrického prostoru* (P, ρ). Píšeme $(A, \rho_A) \subseteq (P, \rho)$.

4.1.8 Věta

Buďte (P_1, σ_1), (P_2, σ_2) metrické prostory. Položme $P = P_1 \times P_2$ a definujme zobrazení $\rho : P^2 \to [0, \infty)$ předpisem

$$\rho\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) = \sqrt{\left(\sigma_1(x_1,y_1)\right)^2 + \left(\sigma_2(x_2,y_2)\right)^2}\,.$$

Pak ρ je metrika na P.

D.: Nejdříve dokážeme pomocné tvrzení: Nechť (R, σ) je metrický prostor a $a, b, c \in R$. Pak existují $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^2$ takové body, že

$$\sigma(a,b) = \rho_2(\alpha,\beta), \quad \sigma(b,c) = \rho_2(\beta,\gamma), \quad \sigma(a,c) = \rho_2(\alpha,\gamma),$$

kde ρ_2 je euklidovská metrika na $\mathbb{R}^2$.
Pro stručnost označme $r = \sigma(a,b)$, $s = \sigma(a,c)$, $t = \sigma(b,c)$. Nyní stačí volit

$$\alpha = (0,0), \quad \beta = (r,0), \quad \gamma = \left(\frac{r^2+s^2-t^2}{2r}, \frac{\sqrt{(2rs-r^2-s^2+t^2)(2rs+r^2+s^2-t^2)}}{2r}\right).$$

(Jedná se o konstrukci trojúhelníka v rovině, známe-li délky stran.)
Nechť $(x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2) \in P$.

- Pro $(x_1,x_2),(y_1,y_2)$ je $\rho\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) = 0$ právě tehdy, když $\sigma_1(x_1,y_1) = 0$ a $\sigma_2(x_2,y_2) = 0$, což podle (M1) nastane právě tehdy, když $x_1 = y_1$ a $x_2 = y_2$, tedy $(x_1,x_2) = (y_1,y_2)$. ρ splňuje (M1).
- $\rho\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) = \sqrt{\left(\sigma_1(x_1,y_1)\right)^2 + \left(\sigma_2(x_2,y_2)\right)^2} = \sqrt{\left(\sigma_1(y_1,x_1)\right)^2 + \left(\sigma_2(y_2,x_2)\right)^2} =$ $= \rho\left((y_1,y_2),(x_1,x_2)\right)$, takže ρ splňuje (M2).
- Podle pomocného tvrzení existují reálná čísla $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ taková, že

$$\sigma_1(x_1,y_1) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}(\xi_i-\eta_i)^2}, \quad \sigma_1(x_1,z_1) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}(\xi_i-\zeta_i)^2}, \quad \sigma_1(y_1,z_1) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}(\eta_i-\zeta_i)^2},$$
$$\sigma_2(x_2,y_2) = \sqrt{\sum_{i=3}^{4}(\xi_i-\eta_i)^2}, \quad \sigma_2(x_2,z_2) = \sqrt{\sum_{i=3}^{4}(\xi_i-\zeta_i)^2}, \quad \sigma_2(y_2,z_2) = \sqrt{\sum_{i=3}^{4}(\eta_i-\zeta_i)^2}\,.$$

  Pak

$$\begin{aligned}
\rho\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{4}(\xi_i-\eta_i)^2} = \rho_2\left((\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4),(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)\right),\\
\rho\left((y_1,y_2),(z_1,z_2)\right) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{4}(\eta_i-\zeta_i)^2} = \rho_2\left((\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4),(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4)\right),\\
\rho\left((x_1,x_2),(z_1,z_2)\right) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{4}(\xi_i-\zeta_i)^2} = \rho_2\left((\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4),(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4)\right),
\end{aligned}$$

  kde ρ_2 je euklidovská metrika na $\mathbb{R}^4$. Poněvadž ρ_2 splňuje nerovnost (M3), splňuje ji také ρ.

□

4.1.9 Definice

Buďte (P_1, σ_1), (P_2, σ_2) metrické prostory, $P = P_1 \times P_2$ a ρ metrika definovaná v 4.1.8. Prostor (P, ρ) nazýváme *(kartézským) součinem prostorů* (P_1, σ_1) a (P_2, σ_2).

4.1.10 Definice

Buďte (P_1, ρ_1), (P_2, ρ_2) metrické prostory. Zobrazení $f : P_1 \to P_2$ se nazývá *isometrické* (*izometrie*), jestliže $\rho_2(f(x), f(y)) = \rho_1(x, y)$ pro všechny dvojice bodů $(x, y) \in P^2$.
Jestliže existuje izometrie $f : P_1 \to P_2$, řekneme, že prostory (P_1, ρ_1), (P_2, ρ_2) jsou *isometrické*.

Například všechna shodná zobrazení známá z geometrie jsou izometriemi.

4.1.11 Poznámka

Isometrické zobrazení je prosté.

D.: Kdyby existovaly body $x, y \in P_1$ takové, že $f(x) = f(y)$, pak by podle (M1) platilo
$0 = \rho_2(f(x), f(y)) = \rho_1(x, y) \neq 0$, což by byl spor. $\square$

Tedy metrický prostor a jeho isometrický obraz lze považovat za dvě kopie téhož prostoru.

4.2 Podmnožiny metrického prostoru

4.2.1 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Bod $a \in P$ se nazývá

– *vnitřní bod množiny* A, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\mathcal{O}_\varepsilon(a) \subseteq A$,

– *vnější bod množiny* A, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\mathcal{O}_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$,

– *hraniční bod množiny* A, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí $\mathcal{O}_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$, $\mathcal{O}_\varepsilon(a) \cap (P \setminus A) \neq \emptyset$,

– *bod uzávěru množiny* A, jestliže $\rho(a, A) = 0$,

– *hromadný bod množiny* A, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí $(\mathcal{O}_\varepsilon(a) \cap A) \setminus \{a\} \neq \emptyset$,

– *izolovaný bod množiny* A, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\mathcal{O}_\varepsilon(a) \cap A = \{a\}$.

Množina všech vnitřních bodů množiny A se nazývá *vnitřek množiny* A a značí se A° (někdy $\operatorname{int} A$),
Množina všech hraničních bodů množiny A se nazývá *hranice množiny* A a značí se ∂A (někdy $\operatorname{fr} A$),
Množina všech bodů uzávěru množiny A se nazývá *uzávěr množiny* A a značí se $\overline{A}$ (někdy $\operatorname{cl} A$),
Množina všech hromadných bodů množiny A se nazývá *derivace množiny* A a značí se A'.

Příklad $P = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$

a) $A = (0, 1) :\quad A^\circ = (0, 1),\ \partial A = \{0, 1\},\ \overline{A} = [0, 1],\ A' = [0, 1]$

b) $A = [0, 1) \cap \mathbb{Q} :\quad A^\circ = \emptyset,\ \partial A = [0, 1],\ \overline{A} = [0, 1],\ A' = [0, 1]$

b) $A = [0, 1] \cup \{2\} :\quad A^\circ = (0, 1),\ \partial A = \{0, 1, 2\},\ \overline{A} = [0, 1] \cup \{2\},\ A' = [0, 1]$

4.2.2 Věta

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A, B \subseteq P$. Pak platí

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset,\ \emptyset^\circ = \emptyset$.
2. $\overline{P} = P,\ P^\circ = P$.
3. $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$.
4. $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B},\ A^\circ \subseteq B^\circ$.
5. $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B},\ A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$.
6. $\overline{A} = P \setminus (P \setminus A)^\circ,\ A^\circ = P \setminus \overline{P \setminus A}$.
7. $\overline{\overline{A}} = \overline{A},\ (A^\circ)^\circ = A^\circ$.

D.: 1. – 4. je triviální

6. $$\begin{aligned} x \in P \setminus (P \setminus A)^\circ &\Leftrightarrow x \notin (P \setminus A)^\circ \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\emptyset \neq \mathcal{O}_\varepsilon(x) \cap (P \setminus (P \setminus A)) = \mathcal{O}_\varepsilon(x) \cap A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A} \\ x \in P \setminus \overline{P \setminus A} &\Leftrightarrow x \notin \overline{P \setminus A} \Leftrightarrow \varepsilon := \rho(x, P \setminus A) > 0 \Leftrightarrow (\forall y \in P \setminus A)(\rho(x, y) \geq \varepsilon) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathcal{O}_\varepsilon(x) \cap (P \setminus A) = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq A \Leftrightarrow x \in A^\circ \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x \in A^\circ \cap B^\circ &\Rightarrow x \in A^\circ \wedge x \in B^\circ \Rightarrow (\exists \varepsilon_1)(\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A) \wedge (\exists \varepsilon_2)(\mathcal{O}_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{O}_{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}(x) \subseteq A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B)^\circ \\ x \in (A \cap B)^\circ &\Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq A \wedge \mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq B) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in A^\circ \wedge x \in B^\circ \Rightarrow x \in A^\circ \cap B^\circ \end{aligned}$$

   S využitím 6., již dokázané části a de Morganových pravidel dostaneme
   $$\begin{aligned} \overline{A} \cup \overline{B} &= [P \setminus (P \setminus A)^\circ] \cup [P \setminus (P \setminus B)^\circ] = P \setminus [(P \setminus A)^\circ \cap (P \setminus B)^\circ] = P \setminus [(P \setminus A) \cap (P \setminus B)]^\circ = \\ &= P \setminus [P \setminus (A \cup B)]^\circ = \overline{A \cup B} \end{aligned}$$

7. Buď $x \in \overline{\overline{A}}$. Pak $0 = \rho(x, \overline{A}) = \inf\{\rho(x, y) : y \in \overline{A}\} \geq \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}$, neboť podle 3. je $A \subseteq \overline{A}$ a tedy $\{\rho(x, y) : y \in \overline{A}\} \supseteq \{\rho(x, y) : y \in A\}$. Poněvadž ale $\inf\{\rho(x, y) : y \in A\} = \rho(x, A) \geq 0$, jest $\rho(x, A) = 0$ a tedy $x \in \overline{A}$, t.j. $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$. Opačná inkluze plyne z 3.
   Druhou část tvrzení dokážeme analogicky. □

4.2.3 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Množina A se nazývá *otevřená*, jestliže $A = A^\circ$, množina A se nazývá *uzavřená*, jestliže $A = \overline{A}$.

Zejména podle 4.2.2.6 A° je otevřená množina, $\overline{A}$ je uzavřená množina.

4.2.4 Věta

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Množina A je otevřená právě tehdy, když $P \setminus A$ je uzavřená; množina A je uzavřená právě tehdy, když $P \setminus A$ je otevřená.

D.: Nechť $A = A^\circ$. Podle 4.2.2.6 je $A = P \setminus \overline{P \setminus A}$. Z toho plyne, že $P \setminus A = P \setminus (P \setminus \overline{P \setminus A}) = \overline{P \setminus A}$ a tedy $P \setminus A$ je uzavřená.
Nechť $P \setminus A = \overline{P \setminus A}$. Pak podle 4.2.2.6 je $A^\circ = P \setminus \overline{P \setminus A} = P \setminus (P \setminus A) = A$.
Platnost druhého tvrzení ukážeme analogicky. □

4.2.5 Věta

Buď (P, ρ) metrický prostor a $\mathcal{T}$ soustava všech otevřených množin prostoru (P, ρ). Pak platí

(T1) $P \in \mathcal{T},\ \emptyset \in \mathcal{T}$,

(T2) $A \in \mathcal{T},\ B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$,

(T3) $(\forall \iota \in I)(A_\iota \in \mathcal{T}) \Rightarrow \bigcup\limits_{\iota \in I} A_\iota \in \mathcal{T}$.

D.: (T1) Plyne z 4.2.2.1 a 4.2.2.2.

(T2) Je-li $x \in A \cap B$, pak $x \in A = A^\circ$, $x \in B = B^\circ$ a tedy existují ε_1, ε_2, že $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$, $\mathcal{O}_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Položíme-li $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, pak $\mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$, tedy každý $x \in A \cap B$ je vnitřním bodem, což znamená, že $A \cap B$ je otevřená.

(T3) Nechť $x \in \bigcup\limits_{\iota \in I} A_\iota$. Pak existuje $\iota_0 \in I$, že $x \in A_{\iota_0}$. Poněvadž A_{ι_0} je otevřená, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq A_{\iota_0} \subseteq \bigcup\limits_{\iota \in I} A_\iota$. □

4.2.6 Věta

Buď (P, ρ) metrický prostor a $\mathcal{F}$ soustava všech uzavřených množin prostoru (P, ρ). Pak platí

(i) $P \in \mathcal{F},\ \emptyset \in \mathcal{F}$,

(ii) $A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$,

(iii) $(\forall \iota \in I)(A_\iota \in \mathcal{F}) \Rightarrow \bigcap\limits_{\iota \in I} A_\iota \in \mathcal{F}$.

D.: Plyne z 4.2.4, 4.2.5 a z de Morganových pravidel. □

4.2.7 Poznámky

Z 4.2.5 plyne, že průnik libovolného konečného systému otevřených množin je otevřená množina; z 4.2.6 plyne, že sjednocení libovolného konečného systému uzavřených množin je uzavřená množina.

Průnik nekonečného systému otevřených množin nemusí být otevřená množina:

$$A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}.\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\},\ \text{což není otevřená množina v } \mathbb{R} \text{ s metrikou } \rho(x, y) = |x - y|.$$

Sjednocení nekonečného systému uzavřených množin nemusí být uzavřená množina:

$$A_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right],\ n \in \mathbb{N}.\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (-1, 1)\,.$$

4.2.8 Věta

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Pak $\partial A = \overline{A} \cap \overline{P \setminus A}$.

D.: $x \in \partial A \iff (\forall \varepsilon > 0)(\mathcal{O}_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \neq \mathcal{O}_\varepsilon(x) \cap (P \setminus A)) \iff (\forall \varepsilon > 0)(\rho(x, A) < \varepsilon \wedge \rho(x, P \setminus A) < \varepsilon) \iff$
$\iff \rho(x, A) = 0 \wedge \rho(x, P \setminus A) = 0 \iff x \in \overline{A} \cap \overline{P \setminus A}\,.$ □

4.2.9 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Množina A se nazývá *hustá v prostoru* (P, ρ), jestliže $\overline{A} = P$.

4.2.10 Věta

Buď (P,ρ) metrický prostor, $A \subseteq P$. Množina A je hustá v P právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ a každému $x \in P$ existuje $a \in A$, že $\rho(x,a) < \varepsilon$, t.j. $a \in \mathcal{O}_\varepsilon(x)$. (Neboli když každý bod $x \in P$ je hromadným bodem množiny A.)

D.: „$\Rightarrow$“: Nechť $\overline{A} = P$. Vezmeme $\varepsilon > 0$ a $x \in P$ libovolná. S využitím vlastnosti 1.1.6(i2*) dostaneme

$$x \in P = \overline{A} \Rightarrow \rho(x,A) = 0 \Rightarrow \inf\{\rho(x,a) : a \in A\} = 0 \Rightarrow \text{existuje } a \in A, \text{ že } \rho(x,a) < \varepsilon\,.$$

„$\Leftarrow$“: Jestliže existuje $x \in P \setminus \overline{A}$, pak podle 4.2.4 a definice otevřené množiny existuje $\varepsilon > 0$, že $\mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq P \setminus \overline{A}$, tedy $\rho(x,a) \geq \varepsilon$ pro každé $a \in \overline{A}$. Podle 4.2.2.3 je $A \subseteq \overline{A}$, což znamená, že $\rho(x,a) \geq \varepsilon$ pro každé $a \in A$. □

4.3 Konvergence

4.3.1 Definice

Buď (P,ρ) metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost bodů z P (t.j. zobrazení $\mathbb{N} \to P$). Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *konverguje k bodu* $x \in P$ *(je konvergentní v* P*)* a píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ (stručně $\lim x_n = x,\ x_n \to x$), jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$.

4.3.2 Příklady

1. (P,ρ) diskrétní (viz 4.1.2.1)
   $x_n \to x \Leftrightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow x_n = x)$

2. $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$ (viz 4.1.2.3)
   $(x_n, y_n) \to (x,y) \Leftrightarrow x_n \to x,\ y_n \to y$ v $\mathbb{R}$ s metrikou $\rho(x,y) = |x-y|$.

   D.: $(x_n,y_n) \to (x,y) \Leftrightarrow 0 = \lim(|x_n - x| + |y_n - y|) = \lim|x_n - x| + \lim|y_n - y|$. Avšak podle 1.3.5.1 $\lim|x_n - x| \geq 0,\ \lim|y_n - y| \geq 0$, takže $\lim|x_n - x| = 0,\ \lim|y_n - y| = 0$. □

   Analogické tvrzení platí pro všechny metrické prostory z 4.1.2.3.

3. $(\mathrm{C}[a,b], \rho_C)$ (viz 4.1.2.4)
   $f_n \to f$ v tomto prostoru $\Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall x \in [a,b])(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$.
   (Má-li posloupnost funkcí definovaných na intervalu $[a,b]$ vlastnost uvedenou na pravé straně ekvivalence, řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n1}^\infty$ *stejnoměrně konverguje na intervalu* $[a,b]$ *k funkci* f.)

   D.: $f_n \to f$ v $(\mathrm{C}[a,b], \rho_C) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\rho_C(f_n, f) < \varepsilon) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\max\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a,b]\} < \varepsilon) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall x \in [a,b])(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$ □

4.3.3 Definice

Buď (P,ρ) metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost bodů z P. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je *ohraničená*, jestliže množina $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je ohraničená ve smyslu definice 4.1.5.

4.3.4 Věta

Buď (P,ρ) metrický prostor. Pak platí

1. Každá posloupnost $\{x_n\} \subseteq P$ má nejvýše jednu limitu v P.

2. Posloupnost konvergentní v (P,ρ) je ohraničená v (P,ρ).

3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in P$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_{n_k}\}$ vybranou z $\{x_n\}$ platí $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

D.: 1.3.3, 1.3.4, 1.3.14. □

4.3.5 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost bodů z P. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *cauchyovská*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $m, n \geq n_0$ je $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

4.3.6 Věta

Buď (P, ρ) metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost bodů z P. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní v (P, ρ), pak je cauchyovská.

D.: Nechť $x_n \to x$ a buď $\varepsilon > 0$ libovolné.
K $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \geq n_0$ je $\rho(x_n, x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Pro libovolné $m \geq n_0$ a libovolné $n \geq n_0$ tedy s využitím trojúhelníkové nerovnosti platí $\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x) + \rho(x_n, x) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$

Obrácené tvrzení obecně neplatí: $P = (0, 1)$, $\rho(x, y) = |x - y|$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, ale není konvergentní; $0 \notin P$.

4.3.7 Věta

Buď (P, ρ) metrický prostor a $A \subseteq P$. Množina A je uzavřená v (P, ρ) právě tehdy, když pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\} \subseteq A$, $x_n \to x$ platí $x \in A$.

D.: „$\Rightarrow$“ Nechť $A = \overline{A}$, $\{x_n\}$ libovolná konvergentní, $x_n \to x$. Kdyby $x \notin \overline{A}$, pak by $\varepsilon = \rho(x, A) > 0$ a tedy pro každé x_n by platilo $\rho(x_n, x) > \varepsilon$, což by bylo ve sporu s $x_n \to x$.

„$\Leftarrow$“ Nechť platí podmínka. Buď $y \in \overline{A}$ libovolný bod. Pak $\rho(y, A) = 0$. Podle 1.1.6(i2*) ke každému $\frac{1}{n} > 0$ existuje $x_n \in A$, že $\rho(x_n, y) < \frac{1}{n}$. To znamená, že pro takto vytvořenou posloupnost $\{x_n\}$ platí $\lim \rho(x_n, y) = 0$, $x_n \to y$. Z podmínky plyne, že $y \in A$. Tedy $\overline{A} \subseteq A$ a podle 4.2.2.3 $A = \overline{A}$. $\square$

4.3.8 Definice

Buď P množina a ρ, σ metriky na P. Řekneme, že ρ a σ jsou *ekvivalentní metriky na* P, jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P$ platí: $x_n \to x$ v (P, ρ) právě tehdy když $x_n \to x$ v (P, σ).

4.3.9 Příklady

1. $P = \mathbb{R}^n$. Metriky ρ_1, ρ_2, ρ_∞ zavedené v 4.1.2.3 jsou ekvivalentní:
   $x_k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
   $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ v $(R^n, \rho_1) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0)(\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\})(|x_i^k - x_i| < \varepsilon)$
   $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ v $(R^n, \rho_2) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0)(\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\})(|x_i^k - x_i| < \varepsilon)$
   $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ v $(R^n, \rho_\infty) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0)(\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\})(|x_i^k - x_i| < \varepsilon)$

2. $P = \mathrm{C}[a, b]$. Metriky ρ_I a ρ_C (viz 4.1.2.3) nejsou ekvivalentní:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[a, \dfrac{(n+1)a + (n-1)b}{2n}\right] \cup \left[\dfrac{(n-1)a + (n+1)b}{2n}, b\right] \\[2ex] \dfrac{2nx - (n+1)a - (n-1)b}{b-a}, & x \in \left(\dfrac{(n+1)a + (n-1)b}{2n}, \dfrac{a+b}{2}\right] \\[2ex] \dfrac{-2nx + (n-1)a + (n+1)b}{b-a}, & x \in \left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{(n-1)a + (n+1)b}{2n}\right) \end{cases},$$

$f \equiv 0$

$\rho_I(f_n, f) = \int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \dfrac{b-a}{2n} \to 0$
$\rho_C(f_n, f) = 1$

4.3.10 Poznámka

Buďte ρ, σ ekvivalentní metriky na P. Z 4.3.7 plyne, že množina $A \subseteq P$ je uzavřená v (P, ρ) právě tehdy, když je uzavřená v (P, σ). Z 4.2.4 dále plyne, že množina $A \subseteq P$ je otevřená v (P, ρ) právě tehdy, když je otevřená v (P, σ).

4.3.11 Věta

Buďte ρ, σ metriky na množině P. Jestliže existují kladné konstanty a, b takové, že pro všechny dvojice bodů $(x, y) \in P^2$ je

$$a\sigma(x, y) \leq \rho(x, y) \leq b\sigma(x, y),$$

pak jsou metriky ρ a σ ekvivalentní.

D.: Nechť je podmínka splněna, $x \in P$, a nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P$ je taková posloupnost, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(x_n, x) = 0$. Pak $a\sigma(x_n, x) \leq \rho(x_n, x) \leq b\sigma(x_n, x)$ a z 1.3.7 plyne $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$.

Důkaz se dokončí analogickou úvahou s využitím nerovnosti $\dfrac{1}{b}\rho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq \dfrac{1}{a}\rho(x, y)$, která je ekvivalentní s nerovností v podmínce věty. □

4.4 Úplné a kompaktní prostory

4.4.1 Definice

Metrický prostor (P, ρ) se nazývá *úplný*, jestliže v něm má každá cauchyovská posloupnost limitu.

4.4.2 Příklady

1. Prostor $\mathbb{R}$ s metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$ je podle 1.3.22 úplný.

2. Prostory $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$, $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$, $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$ (viz 4.1.2) jsou úplné:
   Je-li posloupnost $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} = \{(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)\}_{k=1}^{\infty}$ cauchyovská v prostoru $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$, pak je zřejmě každá z posloupností $\{x_1^k\}_{k=1}^{\infty}, \{x_2^k\}_{k=1}^{\infty}, \ldots, \{x_n^k\}_{k=1}^{\infty}$ cauchyovská v prostoru $(\mathbb{R}, \rho_1)$. Pak podle 1.3.22 každá tato posloupnost je konvergentní v $(\mathbb{R}, \rho_1)$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_1^k = x_1$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_2^k = x_2, \ldots, \lim\limits_{k\to\infty} x_n^k = x_n$. Odtud vyplyne, že i posloupnost $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentní v prostoru $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_1^k = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
   Podle 4.3.9.1 jsou metriky ρ_1, ρ_2, ρ_∞ ekvivalentní.

3. Diskrétní metrický prostor (P, ρ) (viz 4.1.2.1) je úplný.
   Buď $\varepsilon = \frac{1}{2}$. $\rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$ právě tehdy, když $x_n = x_m$. Tedy je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská, pak je od jistého indexu počínaje stacionární a to podle 4.3.2.1 znamená, že je konvergentní.

4. $\mathbb{Q}$ s metrikou indukovanou ρ_1 není úplný:
   Např. $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v $(\mathbb{R}, \rho_1)$ k e $\notin \mathbb{Q}$.

5. Prostor $(\mathrm{C}[a, b], \rho_I)$ (viz 4.1.2.4) není úplný:
   $[a, b] = [-1, 1]$
   $$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1, \frac{1}{n}) \\ nx, & x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1, & x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases},$$
   $\rho_I(f_n, f_{n+p}) = \dfrac{p}{n^2 + np}$,
   $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_I(f_n, f_{n+p}) = 0$, tedy $\{f_n\}$ je cauchyovská. Avšak jediná možná limita posloupnosti funkcí $\{f_n\}$ je

funkce $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1,0) \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x \in (0,1] \end{cases}$, což není spojitá funkce, $f \notin \mathrm{C}[-1,1]$ a tedy $\{f_n\}$ není v $(\mathrm{C}[-1,1], \rho_I)$ konvergentní.

6. Prostor $(\mathrm{C}[a,b], \rho_C)$ (viz 4.1.2.4) je úplný:
Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost funkcí cauchyovská v $(\mathrm{C}[a,b], \rho_C)$.
Buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo. K němu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n, m \geq n_0$ je $\rho_C(f_n, f_m) < \varepsilon$.
Buď $x_0 \in [a,b]$ libovolný bod. Pak pro $n, m \geq n_0$ je
$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \max\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in [a,b]\} = \rho_C(f_n, f_m) < \varepsilon$,
což znamená, že číselná posloupnost $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská a tedy podle 1.3.22 konvergentní.
Poněvadž $x_0 \in [a,b]$ byl libovolný bod, existuje $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ pro každé $x \in [a,b]$.
Definujme funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ předpisem: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.
Ukážeme, že $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a,b]\} \to 0$:
Poněvadž $\{f_n\}$ je cauchyovská, tak k $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n, m \geq n_1$ je $\rho_C(f_n, f_m) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pro každé $x \in [a,b]$ a všechna $n, m \geq n_1$ je tedy $|f_n(x) - f_m(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, což podle 1.3.5.1 znamená, že pro každé $x \in [a,b]$ a každé $n \geq n_1$ je $\lim\limits_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Tedy pro $n \geq n_1$ a každé $x \in [a,b]$ je $|f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, takže pro $n \geq n_1$ je
$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a,b]\} \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
Zbývá ukázat, že funkce f je spojitá.
Podle předchozího tvrzení k $\dfrac{\varepsilon}{3} > 0$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že $\sup\{|f_{n_2}(x) - f(x)| : x \in [a,b]\} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Buď $x_1 \in [a,b]$ libovolný bod. Poněvadž funkce f_{n_2} je spojitá, k číslu $\dfrac{\varepsilon}{3} > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro všechna $x \in [a,b]$ taková, že $|x_1 - x| < \delta$ je $|f_{n_2}(x_1) - f_{n_2}(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Pro $x \in [a,b]$ takové, že $|x_1 - x| < \delta$ tedy platí
$|f(x_1) - f(x)| = |f(x_1) - f_{n_2}(x_1) + f_{n_2}(x_1) - f_{n_2}(x) + f_{n_2}(x) - f(x)| \leq$
$\leq |f(x_1) - f_{n_2}(x_1)| + |f_{n_2}(x_1) - f_{n_2}(x)| + |f_{n_2}(x) - f(x)| \leq$
$\leq \sup\{|f_{n_2}(x) - f(x)| : x \in [a,b]\} + |f_{n_2}(x_1) - f_{n_2}(x)| + \sup\{|f_{n_2}(x) - f(x)| : x \in [a,b]\} <$
$< \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, což znamená, že funkce f je spojitá v bodě $x_1 \in [a,b]$. Poněvadž tento bod byl libovolný, je f spojitá na $[a,b]$.

4.4.3 Věta

Je-li metrický prostor (P, ρ) úplný a množina $A \subseteq P$ je uzavřená, pak metrický prostor (A, ρ_A), kde ρ_A je metrika indukovaná metrikou ρ, je úplný.

D.: Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná cauchyovská posloupnost. Poněvadž (P, ρ) je úplný, existuje $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in P$. Podle 4.3.7 je $x \in A$. $\square$

4.4.4 Definice

Buď (P, ρ) metrický prostor. Řekneme, že metrický prostor (Q, σ) je *úplným obalem* metrického prostoru (P, ρ), jestliže

(i) (Q, σ) je úplný prostor,

(ii) $(P, \rho) \subseteq (Q, \sigma)$,

(iii) Množina P je hustá v (Q, σ).

Například $(\mathbb{R}, \rho_1)$ je úplným obalem $(\mathbb{Q}, \rho_1)$.

4.4.5 Věta

Ke každému metrickému prostoru (P,ρ) existuje jeho úplný obal. Tento úplný obal je určen jednoznačně v tomto smyslu: Jsou-li (Q_1,σ_1) a (Q_2,σ_2) dva úplné obaly prostoru (P,ρ), pak (Q_1,σ_1) a (Q_2,σ_2) jsou isometrické.

Kroky důkazu:

1. Na množině všech cauchyovských posloupností z prostoru (P,ρ) definujeme relaci $\sim$ vztahem: $\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \rho(x_n,y_n) \to 0$.
2. Ukážeme, že $\sim$ je ekvivalence.
3. Položíme $Q = P| \sim$ (rozklad množiny P podle ekvivalence $\sim$). Prvky množiny Q jsou třídy ekvivalence $\sim$. Označíme $[\{x_n\}] \in Q$ takovou třídu ekvivalence, že $\{x_n\} \in [\{x_n\}]$.
4. Položíme $\sigma([\{x_n\}],[\{y_n\}]) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n)$. Ukážeme, že σ nezáleží na výběru representantů a že σ je metrikou na Q.
5. Ztotožníme $[\{x,x,\dots\}] \in Q$ s $x \in P$. Pak je $(P,\rho) \subseteq (Q,\sigma)$.
6. Ukážeme, že prostor (Q,σ) je úplný.
7. Ukážeme, že $\overline{P} = Q$.
8. Ukážeme, že je-li (Q_1,σ_1) úplným obalem prostoru (P,ρ), pak (Q,σ) a (Q_1,σ_1) jsou isometrické. $\square$

4.4.6 Definice

Řekneme, že metrický prostor (P,ρ) je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti jeho bodů lze vybrat posloupnost konvergentní.
Řekneme, že množina $A \subseteq P$ je kompaktní, jestliže podprostor (A,ρ_A) je kompaktní.

4.4.7 Věta

Je-li A kompaktní množina v metrickém prostoru (P,ρ), pak je A uzavřená a ohraničená.

D.: Připusťme, že $A \neq \overline{A}$, tedy že existuje $x \in \overline{A} \setminus A$. Pak $\rho(x,A) = 0$ a podle definice infima existuje $\{x_n\} \subseteq A$, že $\rho(x_n,x) \to 0$, neboli $x_n \to x$. Pro každou vybranou posloupnost $\{x_{n_k}\}$ z posloupnosti $\{x_n\}$ je podle 4.3.4.3 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \notin A$, což je spor s kompaktností A.
Připusťme, že A není ohraničená. Buď $x_1 \in A$ libovolný bod. Existuje $x_2 \in A \setminus K(x_1,1)$. (Kdyby neexistoval, byla by množina A ohraničená.) Dále existuje $x_3 \in A \setminus K(x_1,\rho(x_1,x_2)+1)$ atd. Posloupnost $\{x_n\}$ i každá posloupnost z ní vybraná není cauchuovská, neboť $\rho(x_n,x_m) \geq 1$ a tedy podle 4.3.6 nemůže být konvergentní. $\square$

4.4.8 Věta

Množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní v $(\mathbb{R}^n,\rho_1)$ právě tehdy, když je v tomto prostoru uzavřená a ohraničená.

D.: Nutnost podmínky plyne z 4.4.7. Dokážeme její dostatečnost.
Buď $\{x^k\}_{k=1}^\infty = \{(x_1^k,x_2^k,\dots,x_n^k)\}_{k=1}^\infty$ posloupnost bodů z A. Poněvadž A je ohraničená, je každá z číselných posloupností $\{x_i^k\}_{k=1}^\infty$, $i = 1,2,\dots,n$ ohraničená. Podle 1.3.19.1 lze z každé $\{x_i^k\}_{k=1}^\infty$ vybrat posloupnost $\{x_i^{k_l}\}_{l=1}^\infty$ konvergentní. Vybereme tedy z posloupnosti $\left\{x_1^k\right\}_{k=1}^\infty$ konvergentní posloupnost $\{x_1^{\kappa_1}\}_{\kappa_1=1}^\infty$ a označíme $x_1^0 = \lim\limits_{\kappa_1\to\infty} x_1^{\kappa_1}$. Potom z posloupnosti $\{x_2^{\kappa_1}\}_{\kappa_1=1}^\infty$ vybereme konvergentní posloupnost $\{x_2^{\kappa_2}\}_{\kappa_2=1}^\infty$ a označíme $x^0 = \lim\limits_{\kappa_2\to\infty} x_1^{\kappa_2}$. Tak postupujeme dále, až z posloupnosti $\left\{x_n^{\kappa_{n-1}}\right\}_{\kappa_{n-1}=1}^\infty$ vybereme konvergentní posloupnost $\{x_n^{\kappa_n}\}_{\kappa_n=1}^\infty$, kterou budeme pro přehlednost značit $\left\{x_n^l\right\}_{l=1}^\infty$, a označíme $x_n^0 = \lim\limits_{l\to\infty} x_n^l$. Tímto postupem získáme posloupnost $\left\{(x_1^l,x_2^l,\dots,x_n^l)\right\}_{l=1}^\infty$, která je vybraná z posloupnosti $\left\{(x_1^k,x_2^k,\dots,x_n^k)\right\}_{l=1}^\infty$ a platí $\lim\limits_{l\to\infty}(x_1^l,x_2^l,\dots,x_n^l) = (x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0) = x^0$. Poněvadž A je uzavřená, je podle 4.3.7 $x^0 \in A$. $\square$

Z ekvivalence metrik $\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_\infty$ (viz 4.3.9.1) plyne, že analogické tvrzení platí i pro $(\mathbb{R}^n,\rho_2)$ a $(\mathbb{R}^n,\rho_\infty)$.

4.4.9 Věta

Je-li metrický prostor (P,ρ) kompaktní, pak je úplný.

D.: Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná cauchyovská posloupnost v prostoru (P,ρ). Poněvadž (P,ρ) je kompaktní, existuje posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in P$.
Ukážeme, že $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
Buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo.
Poněvadž $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k x, tak k $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $k \geq k_0$ je $\rho(x_{n_k}, x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Poněvadž $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, tak k $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_1$ a $m \geq n_1$ platí $\rho(x_n, x_m) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Položme $n_0 = \max\{n_1, n_{k_0}\}$ a nechť $n \geq n_0$ a $k > k_0$ jsou libovolná čísla. Pak také $n_k > n_0$. S využitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

což znamená, že $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. $\square$

4.5 Zobrazení metrických prostorů

4.5.1 Definice

Buďte (P,ρ), (Q,σ) metrické prostory, $F : P \to Q$.
Řekneme, že zobrazení F je *spojité v bodě* $x_0 \in P$, jestliže ke každému okolí V bodu $F(x_0)$ v (Q,σ) existuje okolí U bodu x_0 v (P,ρ) tak, že $F(U) \subseteq V$.
Řekneme, že zobrazení F je *spojité* na P, jestliže je spojité v každém bodě $x \in P$.

Zobrazení F je spojité v bodě x_0, jestliže $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in P)(\rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \sigma(F(x), F(x_0)) < \varepsilon)$.

4.5.2 Věta

Buďte (P,ρ), (Q,σ) metrické prostory. Zobrazení $F : P \to Q$ je spojité na P právě tehdy, když ke každé otevřené množině $V \subseteq F(P)$ existuje otevřená množina $U \subseteq P$ taková, že $F(U) \subseteq V$.

D.: $\Rightarrow$: Nechť F je spojité, $V \subseteq F(P)$ otevřená. Ke každému $y_0 \in V$ existuje $x_0 \in P$ takové, že $F(x_0) = y_0$. Poněvadž V je otevřená, k libovolnému $y_0 \in V$ existuje $\varepsilon_{y_0} > 0$ takové, že $\mathcal{O}_{\varepsilon_{y_0}}(y_0) \subseteq V$. K ε_{y_0} existuje $\delta_{y_0} > 0$ takové, že $F(\mathcal{O}_{\delta_{y_0}}(x_0)) \subseteq \mathcal{O}_{\varepsilon_{y_0}}$. Množina $U = \bigcup\limits_{y_0\in V} \mathcal{O}_{\delta_{y_0}}(x_0)$ je podle 4.2.5(T3) otevřená a zřejmě platí $F(U) = V$.

$\Leftarrow$: Buď $x_0 \in P$ libovolný bod, V okolí bodu $F(x_0)$. Existuje otevřená $U \subseteq P$ taková, že $F(U) \subseteq V$. Poněvadž U je otevřená, existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 takové, že $\mathcal{O}(x_0) \subseteq U$. Pak $F(\mathcal{O}(x_0)) \subseteq F(U) \subseteq V$ a tedy F je spojité v bodě x_0. $\square$

4.5.3 Věta (Heineova podmínka)

Buďte (P,ρ), (Q,σ) metrické prostory. Zobrazení $F : P \to Q$ je spojité v bodě $x_0 \in P$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z P takovou, že $x_n \to x_0$ v (P,ρ) platí $F(x_n) \to F(x_0)$ v (Q,σ).

D.: $\Rightarrow$: Nechť $\{x_n\} \subseteq P$, $x_n \to x_0$.
Buď $\mathcal{O}_\varepsilon(F(x_0))$, $\varepsilon > 0$, libovolné okolí bodu $F(x_0)$. Existuje $\delta > 0$ takové, že $F(\mathcal{O}_\delta(x_0)) \subseteq \mathcal{O}_\varepsilon(F(x_0))$.
K $\delta > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $\rho(x_n, x_0) < \delta$, neboli $x_n \in \mathcal{O}_\delta(x_0)$.
Odtud plyne, že $F(x_n) \in \mathcal{O}_\varepsilon(F(x_0))$ pro všechna $n \geq n_0$, neboli $\sigma(F(x_n), F(x_0)) < \varepsilon$ pro všechna $n \geq n_0$.
To ovšem znamená, že $F(x_n) \to F(x_0)$.

$\Leftarrow$: Nechť platí podmínka a připusťme, že F není spojité v bodě x_0. Pak existuje okolí $V = \mathcal{O}_\varepsilon(F(x_0))$ bodu $F(x_0)$ takové, že v každém okolí U bodu x_0 existuje x, že $F(x) \notin V$. Zejména v okolí $\mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(x_0)$ existuje bod x_n takový, že $F(x_n) \notin V$. Platí $x_n \to x_0$ a tedy $F(x_n) \to F(x_0)$, což znamená, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sigma(F(x_{n_0}), F(x_0)) < \varepsilon$, tedy $F(x_{n_0}) \in \mathcal{O}_\varepsilon(F(x_0)) = V$, což je spor. $\square$

4.5.4 Věta

Buďte (P,ρ), (Q,σ) metrické prostory, $A \subseteq P$, $F : P \to Q$ spojité zobrazení. Je-li množina A kompaktní, pak je i $F(A)$ kompaktní.

D.: Nechť A je kompaktní a buď $\{y_n\}$ libovolná posloupnost bodů z $F(A)$. Ke každému $y_n \in F(A)$ existuje $x_n \in A$ takové, že $F(x_n) = y_n$. Poněvadž A je kompaktní, lze z posloupnosti $\{x_n\}$ vybrat posloupnost konvergentní $\{x_{n_k}\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in A$ v (P,ρ). Označme $y_0 = F(x_0)$. Pak $y_0 \in F(A)$ a podle 4.5.3 $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} F(x_{n_k}) = F(x_0) = y_0$ v (Q,σ). Našli jsme tedy posloupnost $\{y_{n_k}\}$ vybranou z $\{y_n\}$, která konverguje k $y_0 \in F(A)$. To znamená, že $F(A)$ je kompaktní množina. $\square$

4.5.5 Důsledek (Weierstrassovy věty)

Reálná funkce spojitá na uzavřeném intervalu je na tomto intervalu ohraničená a nabývá na něm své největší a nejmenší hodnoty.

D.: Uzavřený interval $[a,b]$ je podle 4.4.8 kompaktní v $(\mathbb{R},\rho_1)$ a tedy podle 4.5.4 je $f([a,b])$ kompaktní. Podle 4.4.8 je $f([a,b])$ ohraničená a uzavřená.
K $\frac{1}{n} > 0$ existuje $y_n \in f([a,b])$ takové, že $\sup f([a,b]) - \frac{1}{n} < y_n$, $y_n \to \sup f([a,b])$ a podle 4.3.7 je $\sup f([a,b]) \in f([a,b])$. Funkce f nabývá na $[a,b]$ svého suprema, tedy své největší hodnoty.
Analogicky ukážeme, že funkce f nabývá na $[a,b])$ i své nejmenší hodnoty. $\square$

4.5.6 Věta

Buďte (P,ρ), (Q,σ), (R,τ) metrické prostory, $F : P \to Q$, $G : Q \to R$. Je-li zobrazení F spojité v bodě $x_0 \in P$ a zobrazení G je spojité v bodě $F(x_0) \in Q$, pak je složené zobrazení $G \circ F : P \to R$ spojité v bodě x_0. Je-li zobrazení F spojité na P a zobrazení G je spojité na Q, pak je složené zobrazení $G \circ F : P \to R$ spojité na P.

D.: K $\mathcal{O}(G(F(x_0))) \subseteq R$ existuje $\mathcal{O}(F(x_0)) \subseteq Q$, že $G(\mathcal{O}(F(x_0))) \subseteq \mathcal{O}(G(F(x_0)))$, poněvadž G je spojité v $F(x_0)$.
K $\mathcal{O}(F(x_0)) \subseteq Q$ existuje $\mathcal{O}(x_0) \subseteq P$, že $F(\mathcal{O}(x_0)) \subseteq \mathcal{O}(F(x_0))$, neboť F je spojité v x_0.
Nyní $G \circ F(\mathcal{O}(x_0)) = G(F(\mathcal{O}(x_0))) \subseteq G(\mathcal{O}(F(x_0))) \subseteq \mathcal{O}(G(F(x_0)))$.
Druhé tvrzení je důsledkem prvního. $\square$

4.5.7 Definice

Buďte (P,ρ), (Q,σ) metrické prostory, $F : P \to Q$. Řekneme, že zobrazení F je *stejnoměrně spojité na* P, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dva body $x, y \in P$ taková, že $\rho(x,y) < \delta$ platí $\sigma(F(x), F(y)) < \varepsilon$.

Stejnoměrně spojité zobrazení je zřejmě spojité.

4.5.8 Věta (Heine - Cantor)

Buď (P,ρ) kompaktní metrický prostor, (Q,σ) metrický prostor, $F : P \to Q$ spojité zobrazení. Pak je F stejnoměrně spojité.

D.: Nechť (P,ρ) je kompaktní a $F : P \to Q$ spojité.
Připusťme, že F není stejnoměrně spojité. Pak existuje $\varepsilon_0 > 0$ takové, že ke každému $\delta > 0$ existují $x, y \in P$ tak, že $\rho(x,y) < \delta$ a $\sigma(F(x), F(y)) \geq \varepsilon_0$.
K $\delta = \frac{1}{n}$ existují $x_n, y_n \in P$, že $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ a $\sigma(F(x_n), F(y_n)) \geq \varepsilon_0$. Poněvadž P je kompaktní, lze z posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ vybrat posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ tak, že $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in P$.

Dále $\rho(x_0, y_{n_k}) \leq \rho(x_0, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, y_{n_k}) \to 0$ pro $k \to \infty$ a tedy také $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0$.

Podle 4.5.3 platí $\sigma(F(x_{n_k}), F(y_{n_k})) \leq \sigma(F(x_{n_k}), F(x_0)) + \sigma(F(x_0), F(y_{n_k})) \to 0$ pro $k \to \infty$, což je spor s $\sigma(F(x), F(y)) \geq \varepsilon_0$. □

4.5.9 Definice

Buďte (P, ρ), (Q, σ) metrické prostory, $F : P \to Q$.
Řekneme, že zobrazení F je *lipschitzovské*, jestliže existuje konstanta $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$ taková, že pro všechny $x, y \in P$ je $\sigma(F(x), F(y)) \leq L\rho(x, y)$. Konstanta L se nazývá *Lipschitzova konstanta*.
Řekneme, že zobrazení F je *kontrakce*, je-li lipschitzovské s konstantou $L < 1$.

4.5.10 Věta

Buďte (P, ρ), (Q, σ) metrické prostory, $F : P \to Q$. Je-li zobrazení F lipschitzovské, pak je stejnoměrně spojité (a tedy také spojité).

D.: Nechť F je lipschitzovské s konstantou L. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Položíme $\delta = \dfrac{\varepsilon}{L}$.

Jsou-li $x, y \in P$ libovolné body takové, že $\rho(x, y) < \delta$, pak $\sigma(F(x), F(y)) \leq L\rho(x, y) < L\delta = L\dfrac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$. □

4.5.11 Příklady

1. Buď f reálná funkce definovaná na intervalu $[a, b]$, která má na tomto intervalu ohraničenou první derivaci. Pak f je lipschitzovská s konstantou $L = \sup\{|f'(x)| : x \in [a, b]\}$.

   D.: Podle 2.3.4.1 ke každým $x, y \in [a, b]$ existuje ξ z intervalu o krajních bodech x a y takové, že $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$.
   Odtud $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)|\,|x - y| \leq L|x - y|$. □

2. $(\mathrm{C}[a, b], \rho_C)$, $(\mathbb{R}, \rho_1)$, $F : \mathrm{C}[a, b] \to \mathbb{R}$ definované předpisem $F(f) = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

   - $\rho_1(F(f), F(g)) = \left|\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int\limits_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x\right| \leq \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x \leq$
     $\leq \int\limits_a^b \max\{|f(\xi) - g(\xi)| : \xi \in [a, b]\}\mathrm{d}x = \max\{|f(\xi) - g(\xi)| : \xi \in [a, b]\} \int\limits_a^b \mathrm{d}x =$
     $= (b - a)\rho_C(f, g)$
     (první nerovnost platí podle 3.3.9, druhá podle 3.3.6.)
     Zobrazení F je tedy lipschitzovské s konstantou $b - a$, což podle 4.5.10 znamená, že je spojité.
   - Z 4.5.3 plyne: Jestliže posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ spojitých na intervalu $[a, b]$ konverguje k funkci f v prostoru $(\mathrm{C}[a, b], \rho_C)$ (stejnoměrně konverguje k funkci f, sr. 4.3.2.3), pak platí
     $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$

4.5.12 Definice

Buďte (P, ρ), (Q, σ) metrické prostory, $F : P \to Q$ a $x_0 \in P$ hromadný bod. Řekneme, že zobrazení F *má v bodě* $x_0 \in P$ *limitu* $y_0 \in Q$ a píšeme $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = y_0$, jestliže ke každému okolí V bodu y_0 v (Q, σ) existuje okolí U bodu x_0 v (P, ρ) tak, že $F(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V$.

Zřejmě platí:

- $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = y_0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in P)(0 < \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \sigma(F(x), F(x_0)) < \varepsilon)$.

- Jestliže má zobrazení F v bodě x_0 limitu $F(x_0)$, pak je v tomto bodě spojité.

- $\lim_{x \to x_0} F(x) = y_0$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z P takovou, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \neq x_0$ a $x_n \to x_0$ v (P, ρ) platí $F(x_n) \to y_0$ v (Q, σ).

4.5.13 Definice

Nechť P je množina a $F : P \to P$. Bod $x \in P$ se nazývá *pevný bod zobrazení* F, jestliže $F(x) = x$.

4.5.14 Věta (Banach [1892–1945], o kontrakci)

Buď (P, ρ) úplný metrický prostor, $F : P \to P$ kontrakce. Pak existuje jediný pevný bod zobrazení F. Tento pevný bod je limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $x_1 \in P$ je libovolný bod a $x_{n+1} = F(x_n)$.

D.:
- Nejdříve ukážeme, že posloupnost $\{x_n\},\ x_{n+1} = F(x_n)$ je cauchyovská:
  Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho\left(F(x_{n-1}), F(x_n)\right) \leq L\rho(x_{n-1}, x_n) = L\rho\left(F(x_{n-2}), F(x_{n-1})\right) \leq$
  $\leq L^2\rho(x_{n-2}, x_{n-1}) = \cdots \leq L^{n-1}\rho(x_1, x_2)$.
  Odtud a z (M3) plyne, že pro libovolná $n, p \in \mathbb{N}$ platí
  $\rho(x_n, x_{n+p}) \leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq$
  $\leq L^{n-1}\rho(x_1, x_2) + L^n\rho(x_1, x_2) + L^{n+1}\rho(x_1, x_2) + \cdots + L^{n+p-2}\rho(x_1, x_2) =$
  $= \left(L^{n-1} + L^n + L^{n+1} + \cdots + L^{n+p-2}\right)\rho(x_1, x_2) = \left(1 + L + L^2 + \cdots + L^{p-1}\right)L^{n-1}\rho(x_1, x_2) =$
  $= \dfrac{1 - L^p}{1 - L}L^{n-1}\rho(x_1, x_2) \leq L^{n-1}\dfrac{\rho(x_1, x_2)}{1 - L} \to 0$ pro $n \to \infty$, neboť $L^{n-1} \to 0$ pro $n \to \infty$.
- Poněvadž (P, ρ) je úplný, existuje $x_0 = \lim_{n \to \infty} x_n \in P$.
- $\rho(x_0, F(x_0)) \leq \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, F(x_0)) = \rho(x_0, x_n) + \rho(F(x_{n-1}), F(x_0)) \leq$
  $\leq \rho(x_0, x_n) + L\rho(x_{n-1}, x_0) \to 0$ pro $n \to \infty$ neboť $\lim_{n \to \infty} \rho(x_0, x_n) = \lim_{n \to \infty} \rho(x_{n-1}, x_0) = 0$ pro $n \to \infty$.
- Je-li y jiný pevný bod zobrazení F, pak $\rho(y, x_0) = \rho(F(y), F(x_0)) \leq L\rho(y, x_0)$.
  Odtud plyne, že $(1 - L)\rho(y, x_0) \leq 0$ a poněvadž $O < L < 1$, musí být $\rho(y, x_0) = 0$. $\square$

4.5.15 Aplikace (Newtonova iterační metoda)

Nechť reálná funkce g má na uzavřeném intervalu I druhou derivaci a nenulovou první derivaci. Jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $x \in I$ platí $\dfrac{|g(x)g''(x)|}{\left(g'(x)\right)^2} < 1 - \varepsilon$, pak rovnice $g(x) = 0$ má na intervalu I jediný kořen x_0 a platí $x_0 = \lim_{n \to \infty} x_n$, kde posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána rekurentně:

$$x_1 \in I \text{ je libovolné číslo}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}\,.$$

D.: Uvažujme metrický prostor (I, ρ) s přirozenou metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$. Tento prostor je podle 4.4.8 kompaktní.

Definujme funkci $f : I \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = x - \dfrac{g(x)}{g'(x)}$. Číslo x_0 je kořenem rovnice $g(x) = 0$ právě tehdy, když je pevným bodem zobrazení (funkce) f. Podle 2.3.3 platí $\rho\left(f(x), f(y)\right) = |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)|\,|x - y|$, kde ξ je nějaké číslo mezi x a y. Označme $L = \sup\{|f'(\xi)| : \xi \in I\}$. Podle předpokladu

$$|f'(\xi)| \;=\; \left|1 - \frac{\left(g'(\xi)\right)^2 - g(\xi)g''(\xi)}{\left(g'(\xi)\right)^2}\right| \;=\; \left|\frac{g(\xi)g''(\xi)}{\left(g'(\xi)\right)^2}\right| \;<\; 1 - \varepsilon$$

pro každé $\xi \in I$. Funkce f je tedy kontrakcí a tvrzení plyne z 4.5.14. $\square$

4.6 Cvičení

1) Ověřte, že $\rho(x,y)=\ln(1+|x-y|)$ a $\sigma(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$ jsou metriky na $\mathbb{R}$. Jsou tyto metriky ekvivalentní?
2) Vypočítejte vzdálenost funkcí $f(x)=\ln(1+x)$ a $g(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}-1}$ v prostoru $\mathrm{C}[0,1]$ s metrikami ρ_C a ρ_I.
3) Vypočítejte vzdálenost množiny $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\, y\geq\sqrt{|x|^3}\right\}$ od bodu $(\frac{1}{2},0)$ v prostoru $(\mathbb{R}^2,\rho_2)$
4) Vypočítejte vzdálenost bodu $(3,2)$ od množiny $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\, y+bx\leq 0\right\}$, kde $b\geq 0$, v prostoru $(\mathbb{R}^2,\rho_1)$.
5) Vypočítejte průměr množiny $M=\{f(x)=x^n:\, n\in\mathbb{N}\}$ v prostoru $(\mathrm{C}[0,1],\rho_I)$.
6) Najděte vnitřek, uzávěr, hranici a derivaci množiny $A=\left\{\frac{1}{n}:\, n\in\mathbb{N}\right\}\cup[1,2)\cup((2,3)\cap\mathbb{Q})$ v prostoru $(\mathbb{R},\rho)$.
7) Rozhodněte, zda platí tvrzení: Jsou-li množiny A, B uzavřené a $\rho(A,B)=0$, pak $A\cap B\neq\emptyset$. Pokud ano, dokažte; pokud ne, uveďte protipříklad.
8) Mohou existovat neprázdné podmnožiny A, B metrického prostoru takové, že $\overline{A}\subseteq\overline{B}$, $\overline{A}\neq\overline{B}$ a $A\cap B=\emptyset$? Pokud ne, dokažte; pokud ano, udejte příklad.
9) Nechť F je zobrazení prostoru $(\mathrm{C}[a,b],\rho_C)$ do prostoru $(\mathbb{R},\rho)$ dané předpisem $F(f)=f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$. Rozhodněte, zda je toto zobrazení spojité. Je stejně definované zobrazení spojité na prostoru $(\mathrm{C}[a,b],\rho_I)$?
10) Nechť A, B jsou neprázdné uzavřené a disjunktní množiny v prostoru (P,ρ). Najděte spojité zobrazení $F:P\to\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ uvažujeme s přirozenou metrikou ρ) takové, že $F(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\in B\end{cases}$.
11) Rozhodněte, zda zobrazení $F:[0,1]\to[0,1]$ dané předpisem $F(x)=\sqrt{x}$ je Lipschitzovské. Existuje pevný bod tohoto zobrazení?
12) Najděte kořen rovnice $\cos x=x$ s přesností na čtyři desetinná místa.

Výsledky: 1) Ano 2) $\ln(\mathrm{e}-1)-\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}\doteq 0.1233$, $2\ln 2-\frac{1-2\mathrm{e}}{2-2\mathrm{e}}\doteq 0.0953$ 3) $\sqrt{\frac{7}{108}}$ 4) $2+3b$ pokud $b<1$, $3+\frac{2}{b}$, pokud $b\geq 1$ 5) $\frac{1}{2}$ 6) $A^\circ=(1,2)\cup(2,3)$, $\overline{A}=\left\{\frac{1}{n}:\, n\in\mathbb{N}\right\}\cup[1,3]$, $\partial A=\left\{\frac{1}{n}:\, n\in\mathbb{N}\right\}\cup[2,3]$, $A'=\{0\}\cup[1,3]$ 7) Ne. Např. v prostoru $\left(\mathbb{R}^2,\rho_2\right)$ jsou množiny $A=\{(x,0):\, x\geq 1\}$, $B=\left\{(x,\frac{1}{x}):\, x\geq 1\right\}$ uzavřené a $\rho(A,B)=0$. 8) Ano. Např. v prostoru $(\mathbb{R},\rho)$ množiny $A=[0,1]\cap\mathbb{I}$, $B=[0,2]\cap\mathbb{Q}$. 9) Ano, ne 10) $F(x)=\frac{\rho(x,B)}{\rho(x,A)+\rho(x,B)}$ 11) Ne. Dokonce dva: 0 a 1 12) 0.7391

Kapitola 5

Diferenciální počet funkcí více proměnných

5.1 Spojitost a limita

5.1.1 Definice

Buď $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$. Zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$ nazveme *(reálnou) funkcí n (reálných) proměnných.*
Množina M se nazývá *definiční obor funkce* f a značí se $\operatorname{Dom} f$, množina $f(M)$ se nazývá *obor hodnot funkce* f a značí se $\operatorname{Im} f$.

Zápis: $y = f(x),\ y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
pro $n = 2:\ z = f(x, y)$
pro $n = 3:\ u = f(x, y, z)$
a p.

5.1.2 Definice

Buď f funkce n proměnných. Řekneme, že tato funkce je *ohraničená*, je-li množina $\operatorname{Im} f$ ohraničená (jakožto podmnožina $\mathbb{R}$).

Na množině $\mathbb{R}^n$ uvažujeme některou z ekvivalentních metrik $\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_\infty$ (sr. 4.1.2.3 a 4.3.9.1). Na množině $\operatorname{Dom} f$ potom je příslušná indukovaná metrika. Funkci n proměnných lze tedy považovat za zobrazení metrického prostoru $\operatorname{Dom} f$ na metrický prostor $\operatorname{Im} f$. O funkci f řekneme, že je spojitá, stejnoměrně spojitá, lipschitzovská, je-li toto zobrazení spojité, stejnoměrně spojité, lipschitzovské. Lze použít všechna tvrzení z 4.5.

Nebude-li řečeno jinak, budeme používat maximální metriku ρ_∞. V tomto případě
$\mathcal{O}_\varepsilon(x) = \mathcal{O}_\varepsilon(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \times (x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon) \times \cdots \times (x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$.
Abychom mohli i pro funkce n proměnných zavést pojem nevlastní limity, definujme okolí nevlastních bodů:
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^*)^n,\ \mathcal{O}(x) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$

kde $a_i = \begin{cases} x_i - \varepsilon, & x_i \in \mathbb{R} \\ -\infty, & x_i = -\infty \\ c \in \mathbb{R}, & x_i = \infty \end{cases}$, $\quad b_i = \begin{cases} x_i + \varepsilon, & x_i \in \mathbb{R} \\ \infty, & x_i = \infty \\ c \in \mathbb{R}, & x_i = -\infty \end{cases}$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n.$

5.1.3 Definice

Buď f funkce n proměnných, x_0 hromadný bod množiny $\operatorname{Dom} f$. Řekneme, že *funkce f má v bodě x_0 limitu* $a \in \mathbb{R}^*$ a píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, jestliže ke každému $\mathcal{O}(a)$ existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že pro každé $x \in (\mathcal{O}(x_0) \cap \operatorname{Dom} f) \setminus \{x_0\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(a)$.

5.1.4 Věta (Heineova podmínka)

Funkce f n proměnných má v bodě x_0 limitu a právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $x_n \in \operatorname{Dom} f$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq x_0$ a $x_n \to x_0$ platí $f(x_n) \to a$.

D.: Analogicky důkazu 4.5.3. Věta již byla dokonce obecněji zformulována za 4.5.12 $\square$

5.1.5 Věta

1. Funkce f má v bodě x_0 nejvýše jednu limitu.
2. Má-li funkce f v bodě x_0 limitu $a \in \mathbb{R}$, pak existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že funkce f je na $(\mathcal{O}(x_0) \cap \operatorname{Dom} f) \setminus \{x_0\}$ ohraničená.
3. Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ a existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že funkce g je na $(\mathcal{O}(x_0) \cap \operatorname{Dom} f) \setminus \{x_0\}$ ohraničená.
   Pak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$.
4. Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}$. Pak platí:
   $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |a|$.
   $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$.
   $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = a - b$.
   $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = ab$.
   Je-li navíc $b \neq 0$, pak $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$.
5. Nechť existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že pro $x \in (\mathcal{O}(x_0) \cap \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} h) \setminus \{x_0\}$ platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
   Jestliže $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a \in \mathbb{R}^*$, pak $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$.

D.: Analogický důkazu podobných tvrzení v 1.6. $\square$

5.1.6 Věta (výpočet limity funkce dvou proměnných)

Funkce $z = f(x, y)$ má v bodě (x_0, y_0) limitu $a \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když existuje $\rho > 0$ a funkce $g : (0, \rho) \to [0, \infty)$ taková, že $\lim\limits_{r \to 0+} g(r) = 0$ a

$$|f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) - a| \leq g(r)$$

pro každé $r \in (0, \rho)$ a každé $\varphi \in [0, 2\pi)$.

D.: Na $\mathbb{R}^2$ uvažujme euklidovskou metriku ρ_2.
Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Poněvadž $\lim\limits_{r \to 0+} g(r) = 0$, existuje $\delta > 0$ takové, že pro $r \in (0, \delta)$ je $g(r) < \varepsilon$.
Tedy pro $x \in \mathcal{O}_\delta((x_0, y_0)) \setminus \{(x_0, y_0)\}$ platí $|f(x, y) - a| < \varepsilon$. $\square$

Příklad: $f(x, y) = \dfrac{x^2 + (y-1)^2 y}{x^2 + (y-1)^2}$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

$$f(r\cos\varphi, 1 + r\sin\varphi) = \frac{r^2\cos^2\varphi + (1 + r\sin\varphi)r^2\sin^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \frac{r^2 + r^3\sin^3\varphi}{r^2} = 1 + r\sin^3\varphi$$

$\lim\limits_{r \to 0+} (1 + r\sin^3\varphi) = 1$, což ukazuje, že a by se mohlo rovnat 1.

$|f(r\cos\varphi, 1 + r\sin\varphi) - 1| = |r\sin^3\varphi|$

Poněvadž $\lim\limits_{r \to 0+} |r\sin^3\varphi| = 0$, je $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \dfrac{x^2 + (y-1)^2 y}{x^2 + (y-1)^2} = 1$.

5.2 Derivace

5.2.1 Definice

Buď f funkce n proměnných, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \operatorname{Dom} f$.
Položme $\varphi(x) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, x_{i+2}^0, \dots, x_n^0)$. Má-li funkce (jedné proměnné) φ v bodě x_i^0 vlastní derivaci, nazveme tuto derivaci *parciální derivací funkce f podle i-té proměnné v bodě x^0* a značíme ji $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$, $f_{x_i}(x^0)$, $f'_{x_i}(x^0)$, $f'_{|i}(x^0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, x_{i+2}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, x_{i+2}^0, \dots, x_n^0)}{x - x_i^0}.$$

Má-li funkce f parciální derivaci f_{x_i} ve všech bodech nějaké množiny $M \subseteq \operatorname{Dom} f$, je tato parciální derivace sama funkcí. Značíme ji $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, f_{x_i}, f'_{x_i}, $f'_{|i}$.

5.2.2 Poznámky

1. Z definice 5.2.1 plyne jednoduché pravidlo pro výpočet parciálních derivací:
   $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$ považujeme za parametry a x_i za proměnnou, podle níž derivujeme.
2. Funkce, která má v bodě x^0 parciální derivace podle všech proměnných, nemusí být v tomto bodě spojitá.
   Např. $f(x,y) = \begin{cases} 1, & xy = 0 \\ 0, & xy \neq 0 \end{cases}$, $\quad f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ a f není spojitá v $(0,0)$.

5.2.3 Věta

Nechť funkce f a g mají na otevřené množině $M \subseteq \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$ parciální derivaci $f'_{|i}$, $g'_{|i}$. Pak jejich součet, rozdíl a součin mají parciální derivaci podle i-té proměnné na M a platí:
$(f \pm g)'_{|i}(x) = f'_{|i}(x) \pm g'_{|i}(x)$,
$(fg)'_{|i}(x) = f'_{|i}(x)g(x) + f(x)g'_{|i}(x)$,
Ve všech bodech množiny M, v nichž $g(x) \neq 0$ navíc platí $\left(\dfrac{f}{g}\right)'_{|i}(x) = \dfrac{f'_{|i}(x)g(x) - f(x)g'_{|i}(x)}{(g(x))^2}$.

D.: Plyne z 2.1.5. $\square$

5.2.4 Věta (o střední hodnotě)

Nechť funkce f má parciální derivace ve všech bodech množiny $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \operatorname{Dom} f$ podle všech proměnných. Pak existují čísla $\xi_1 \in (a_1, b_1), \xi_2 \in (a_2, b_2), \dots \xi_n \in (a_n, b_n)$ taková, že

$$f(b_1, b_2, \dots, b_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{\infty} f'_{|i}(b_1, b_2, \dots, b_{i-1}, \xi_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n)(b_i - a_i).$$

Zejména pro $n = 2$: $f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, y_0)(x_1 - x_0) + f_y(x_1, \eta)(y_1 - y_0)$, kde $\xi \in (x_0, x_1)$, $\eta \in (y_0, y_1)$.

D.: Provedeme pro $n = 2$. S využitím 2.3.3 dostaneme:
$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0) + f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0) = f_y(x_1, \eta)(y_1 - y_0) + f_x(\xi, y_0)(x_1 - x_0)$.
$\square$

5.2.5 Definice

Nechť funkce f má parciální derivaci podle i-té proměnné na otevřené množině $M \subseteq \operatorname{Dom} f$, $x^0 \in M$. Existuje-li parciální derivace funkce $f'_{|i}$ podle j-té proměnné v bodě x^0, nazveme tuto derivaci *druhou parciální derivací funkce f podle i-té a j-té proměnné* a značíme ji $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0)$, $f_{x_i x_j}(x^0)$, $f''_{x_i x_j}(x^0)$, $f''_{|i,j}(x^0)$. V případě, že $i \neq j$,

mluvíme o *smíšené parciální derivaci*.
Analogicky definujeme parciální derivace vyšších řádů v bodě x_0.

Také parciální derivace vyšších řádů lze považovat za funkce.

5.2.6 Věta (Schwarz [1843 – 1921])

Nechť funkce f má parciální derivace $f_{x_i x_j}$, $f_{x_j x_i}$ spojité v bodě x^0. Pak jsou tyto derivace záměnné, tj. $f_{x_i x_j}(x^0) = f_{x_j x_i}(x^0)$.

D.: Provedeme pro $n = 2$.
Položme $F(h) = \dfrac{f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+h) + f(x_0, y_0)}{h^2}$
$\varphi(y) = f(x_0+h, y) - f(x_0, y)$, $\psi(x) = f(x, y_0+h) - f(x, y_0)$.
S využitím 2.3.3 dostaneme
$F(h) = \dfrac{1}{h^2}(\varphi(y_0+h) - \varphi(y_0)) = \dfrac{1}{h^2}\varphi'(y_0+\vartheta_1 h)h =$
$= \dfrac{1}{h}(f_y(x_0+h, y_0+\vartheta_1 h) - f_y(x_0, y_0+\vartheta_1 h)) = \dfrac{1}{h} f_{yx}(x_0+\vartheta_2 h, y_0+\vartheta_1 h)h =$
$= f_{yx}(x_0+\vartheta_2 h, y_0+\vartheta_1 h)$, kde $\vartheta_1, \vartheta_2 \in (0,1)$.
Analogicky odvodíme
$F(h) = \dfrac{1}{h^2}(\psi(x_0+h) - \psi(x_0)) = f_{xy}(x_0+\vartheta_3 h, y_0+\vartheta_4 h)$, kde $\vartheta_3, \vartheta_4 \in (0,1)$.
Tedy $f_{yx}(x_0+\vartheta_2 h, y_0+\vartheta_1 h) = f_{xy}(x_0+\vartheta_3 h, y_0+\vartheta_4 h)$ a ze spojitosti druhých parciálních derivací plyne pro $h \to 0$: $f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$. $\square$

5.2.7 Důsledek

Má-li funkce f na otevřené množině $M \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ spojité parciální derivace až do řádu m, pak hodnota m-té parciální derivace v libovolném bodě této množiny závisí pouze na tom, kolikrát se derivovalo podle i-té proměnné $(i = 1, 2, \ldots, n)$, nikoliv na pořadí, v jakém se derivovalo.

5.2.8 Definice

Buď V_n n-rozměrný vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, f funkce n proměnných, $x^0 \in \mathrm{Dom}\, f$, $\vec{v} \in V_n$.
Položme $\varphi(t) = f(x^0 + t\vec{v})$. Má-li funkce φ derivaci v bodě 0, nazveme tuto derivaci *derivací funkce f ve směru $\vec{v}$ v bodě x^0 (směrovou derivací)* a značíme ji $f'_{\vec{v}}(x^0)$, $f_{\vec{v}}(x^0)$.

Má-li funkce f derivaci ve směru $\vec{v}$ ve všech bodech nějaké množiny $M \subseteq \mathrm{Dom}\, f$, je tato směrová derivace sama funkcí, značíme ji $f_{\vec{v}}$.

$$f_{\vec{v}}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\vec{v}) - f(x)}{t}\,.$$

5.2.9 Poznámky

1. Je-li $\vec{e}_i = (0, 0, \ldots, 0, \overbrace{1}^{i}, 0, 0, \ldots, 0)$ ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ je standardní báze V_n), pak $f_{\vec{e}_i} = f'_{|i}$.

2. Pro směrové derivace platí:

$$\begin{aligned} (f \pm g)_{\vec{v}} &= f_{\vec{v}} \pm g_{\vec{v}}, \\ (fg)_{\vec{v}} &= f_{\vec{v}} g + f g_{\vec{v}}, \\ \left(\frac{f}{g}\right)_{\vec{v}} &= \frac{f_{\vec{v}} g - f g_{\vec{v}}}{g^2}. \end{aligned}$$

3. Existují-li směrové derivace $f_{\vec{v}}(x^0)$ pro všechny $\vec{v} \in V_n$, funkce f nemusí být spojitá v x^0.
   Např. $f(x,y) = \begin{cases} 1, & y = x^2, x > 0 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$ má derivace v (0,0) v jakémkoliv směru, ale není v tomto bodě spojitá.

5.2.10 Věta (o střední hodnotě)

Nechť funkce f má derivaci ve směru $\vec{v}$ ve všech bodech úsečky $\{x : x = x^0 + t\vec{v}, t \in [0, t_0]\}$. Pak existuje $\vartheta \in (0, 1)$, že platí

$$f(x^0 + t_0\vec{v}) - f(x^0) = t_0 f_{\vec{v}}(x^0 + \vartheta t_0 \vec{v}) .$$

D.: Položme $\varphi(t) = f(x^0 + t\vec{v})$. Podle předpokladu pro každé $t \in [0, t_0]$ existuje $\varphi'(t)$. To podle 2.1.3 znamená, že φ je spojitá na $[0, t_0]$. Odtud dále podle 2.3.3 plyne $\varphi(t_0) - \varphi(0) = \varphi'(\vartheta t_0)t_0$, což je tvrzení. □

5.2.11 Věta

Buď f funkce n proměnných, $\vec{v} \in V_n$. Jestliže existuje $f_{\vec{v}}(x)$, pak pro každé $c \in \mathbb{R}$ existuje $f_{c\vec{v}}(x)$ a platí $f_{c\vec{v}}(x) = cf_{\vec{v}}(x)$.

D.: $f_{c\vec{v}}(x) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x + tc\vec{v}) - f(x)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} c\dfrac{f(x + tc\vec{v}) - f(x)}{ct} = cf_{\vec{v}}(x)$. □

5.2.12 Věta

Buď f funkce n proměnných, $\vec{u} \in V_n$, $\vec{v} \in V_n$, $x^0 \in \operatorname{Dom} f$. Nechť $f_{\vec{u}}$ existuje v x^0 a je spojitá v nějakém okolí $\mathcal{O}(x^0)$ a nechť $f_{\vec{v}}(x^0)$ existuje. Pak existuje $f_{\vec{u}+\vec{v}}(x^0)$ a platí $f_{\vec{u}+\vec{v}}(x^0) = f_{\vec{u}}(x^0) + f_{\vec{v}}(x^0)$.

D.: Položme $\varphi(t) = f(x^0 + t(\vec{u} + \vec{v}))$. S využitím 5.2.10 dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} &= \frac{f(x^0 + t\vec{u} + t\vec{v}) - f(x^0 + t\vec{v}) + f(x^0 + t\vec{v}) - f(x^0)}{t} = \\ &= \frac{f(x^0 + t\vec{u} + t\vec{v}) - f(x^0 + t\vec{v})}{t} + \frac{f(x^0 + t\vec{v}) - f(x^0)}{t} = \\ &= \frac{tf_{\vec{u}}(x^0 + \vartheta t\vec{v})}{t} + \frac{f(x^0 + t\vec{v}) - f(x^0)}{t} \to f_{\vec{u}}(x^0) + f_{\vec{v}}(x^0) \text{ pro } t \to 0.\end{aligned}$$

□

Poznámka: Předpoklad o spojitosti $f_{\vec{u}}$ v nějakém okolí $\mathcal{O}(x^0)$ obecně nelze vynechat.

Např.: $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x + y)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad (x^0, y^0) = (0, 0),\ \vec{u} = (1, 0),\ \vec{v} = (0, 1).$

$f_{\vec{u}}(0, 0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t0(t + 0)}{t^3} = 0,\ f_{\vec{v}}(0, 0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0t(0 + t)}{t^3} = 0,\ f_{\vec{u}}(0, 0) + f_{\vec{v}}(0, 0) = 0,$

$f_{\vec{u}+\vec{v}}(0, 0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{tt(t + t)}{t(t^2 + t^2)} = 1.$

5.2.13 Definice

Buď f funkce n proměnných, $x^0 \in \operatorname{Dom} f$ a nechť má f v x^0 derivaci ve směru každého vektoru $\vec{v} \in V_n$ a nechť funkce $\varphi : V_n \to \mathbb{R}$ daná předpisem $\varphi(\vec{v}) = f_{\vec{v}}(x^0)$ je lineární formou na V_n, což znamená, že existuje vektor $\vec{a} \in V_n$ takový, že $\varphi(\vec{v}) = \vec{a} \cdot \vec{v}$, kde $\cdot$ značí skalární součin. Pak vektor $\vec{a}$ nazveme *derivací* (*gradientem*) funkce f v bodě x^0 a značíme $\vec{a} = f'(x^0) = \nabla f(x^0) = \operatorname{grad} f(x^0)$.

Má-li funkce f derivaci ve všech bodech nějaké množiny $M \subseteq \operatorname{Dom} f$, pak je tato derivace zobrazením $M \to V_n$ (vektorovou funkcí). Značíme ji f', ∇f, $\operatorname{grad} f$.

5.2.14 Poznámky

1. Nechť funkce f má derivaci ve směru každého vektoru $\vec{v} \in V_n$ která je spojitou funkcí na otevřené množině $M \subseteq \operatorname{Dom} f$. Pak podle 5.2.11 a 5.2.12 má f na M derivaci.

2. Nechť $f'(x^0) = \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\varphi(\vec{v}) = f_{\vec{v}}(x^0) = \vec{a} \cdot \vec{v}$, $\vec{e}_i = (0, 0, \dots, 0, \overbrace{1}^{i}, 0, 0, \dots, 0)$.
   Pak $\varphi(\vec{e}_i) = \vec{a} \cdot \vec{e}_i = a_i$.
   Tedy $a_i = f_{\vec{e}_i}(x^0) = f'_{|i}(x^0)$, $f'(x^0) = (f'_{|1}, f'_{|2}, \dots, f'_{|n},)$.

3. Funkce, která má v bodě x_0 derivaci, nemusí být v tomto bodě spojitá. (Stejný příklad jako v 5.2.9.3)

4. Geometrický význam derivace:
Nechť f má derivaci v bodě $x^0 \in \operatorname{Dom} f$. Pak pro libovolný vektor $\vec{v} \in V_n$ platí
$f_{\vec{v}}(x^0) = f'(x^0) \cdot \vec{v} = ||f'(x^0)|| \, ||\vec{v}|| \cos\alpha$, kde α je úhel, který svírají vektory $f'(x^0)$, $\vec{v}$.
Odtud plyne, že $f_{\vec{v}}(x^0)$ je maximální pro $\cos\alpha = 1$, tj. pro $\alpha = 0$, tedy v případě, že vektory $f'(x^0)$ a $\vec{v}$ jsou rovnoběžné. To znamená, že směrová derivace je největší ve směry $f'(x^0)$.
Gradient — směr, ve kterém funkce nejrychleji roste.

5.3 Diferenciál

5.3.1 Definice

Nechť f je funkce n proměnných, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ vnitřní bod $\operatorname{Dom} f$. Řekneme, že funkce f je *diferencovatelná v bodě* x^0, jestliže existují reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ taková, že platí

$$\lim_{(h_1,h_2,\dots,h_n)\to(0,0,\dots,0)} \frac{f(x_1^0+h_1, x_2^0+h_2, \dots, x_n^0+h_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) - (a_1h_1 + a_2h_2 + \dots + a_nh_n)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}} = 0\,.$$

Lineární funkce $\mathrm{d}f(x^0)$ daná předpisem $(h_1, h_2, \dots, h_n) \mapsto (a_1h_1 + a_2h_2 + \dots + a_nh_n)$ se nazývá *(totální) diferenciál funkce f v bodě x^0*.

Ekvivalentní formulace: Funkce f je diferencovatelná v bodě x^0, jestliže existují reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ a funkce n proměnných τ tak, že

$$f(x_1^0+h_1, x_2^0+h_2, \dots, x_n^0+h_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) =$$
$$= (a_1h_1 + a_2h_2 + \dots + a_nh_n) + \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}\;\tau(h_1, h_2, \dots, h_n)\,,$$

přičemž

$$\lim_{(h_1,h_2,\dots,h_n)\to(0,0,\dots,0)} \tau(h_1, h_2, \dots, h_n) = 0\,.$$

Definice 5.3.1 je v souladu s definicí 2.2.3

$\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}$ je euklidovská vzdálenost bodu $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ od počátku soustavy souřadnic. Místo ní lze uvažovat vzdálenost v libovolné ekvivalentní metrice.

5.3.2 Věta

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x^0, pak je v tomto bodě spojitá.

D.: $f(x) - f(x^0) = f(x_1^0 + (x_1 - x_1^0), x_2^0 + (x_2 - x_2^0), \dots, x_n^0 + (x_n - x_n^0)) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) =$

$$=(a_1(x_1 - x_1^0) + a_2(x_2 - x_2^0) + \dots + a_n(x_n - x_n^0) +$$
$$+\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2}\;\tau((x_1 - x_1^0), (x_2 - x_2^0), \dots, (x_n - x_n^0)),$$

z čehož plyne $\lim\limits_{x\to x^0} f(x) = f(x^0)$. $\square$

5.3.3 Věta

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x^0, pak má v tomto bodě parciální derivace podle všech proměnných a platí $a_1 = f'_{|1}(x^0), a_2 = f'_{|2}(x^0), \dots, a_n = f'_{|n}(x^0)$, neboli $\mathrm{d}f(x^0)(h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} f'_{|i}(x^0)h_i$.

D.: Z 5.3.1 a 5.2.1 plyne

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + h, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) - a_ih}{|h|} = \begin{cases} f'_{|i}(x_0) - a_i, & h \geq 0 \\ a_i - f'_{|i}(x_0), & h < 0 \end{cases}$$

a tedy $f'_{|i}(x_0) = a_i$. $\square$

5.3.4 Věta

Má-li funkce n proměnných f v bodě x^0 spojité parciální derivace podle všech proměnných, pak je v tomto bodě diferencovatelná.

D.: Pro stručnost zápisu provedeme pro $n = 2$.
Ze spojitosti parciálních derivací plyne jejich existence v jistém okolí bodu (x_0, y_0).
S využitím 5.2.4 dostaneme:
$\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$
$= \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{f_x(x_0+\vartheta_1 h, y_0)h + f_y(x_0+h, y_0+\vartheta_2 k)k - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$
$= \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} (f_x(x_0+\vartheta_1 h, y_0) - f_x(x_0, y_0))\dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} (f_y(x_0+h, y_0+\vartheta_2 k) - f_y(x_0, y_0))\dfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$
$= 0.$
Poslední rovnost plyne z 5.1.5.3, neboť f_x a f_y jsou spojité a $\left|\dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \le 1$, $\left|\dfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \le 1$. □

5.3.5 Poznámky

1. Podobně jako za větou 2.2.5 lze zdůvodnit, že přírůstky $h_1, h_2, \dots, h_n$ nezávisle proměnných můžeme označit $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \dots, \mathrm{d}x_n$.
   Diferenciál pak zapíšeme $\mathrm{d}f(x^0) = \sum\limits_{i=1}^{n} f'_{|i}(x^0)\mathrm{d}x_i = \dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$.
   $$\mathrm{d} = \frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$$
   Zejména: $\mathrm{d}f(x,y) = f_x(x,y)\mathrm{d}x + f_y(x,y)\mathrm{d}y$
   $$\mathrm{d}f = f_x\mathrm{d}x + f_y\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$
   $$\mathrm{d} = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y$$

2. Tečná rovina
   Rovina $z = ax + by + c$ v prostoru $\mathbb{R}^3$ se nazývá tečná rovina ke grafu funkce $z = f(x,y)$ v bodě $T = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, jestliže
   $$f(x_0, y_0) = ax_0 + by_0 + c\,,$$
   $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - ax - by - c}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0\,.$$
   Z těchto rovnic dostaneme:
   $0 = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y) - f(x_0,y_0) + f(x_0,y_0) - ax - by - c}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} =$
   $= \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(x-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}.$
   Podle 5.3.1 je tedy $\mathrm{d}f(x,y)(x-x_0, y-y_0) = a(x-x_0) + b(y-y_0)$, takže podle 5.3.3
   $a = f_x(x_0, y_0),\ b = f_y(x_0, y_0)$.
   Z první rovnice dostaneme $c = f(x_0, y_0) - x_0 f_x(x_0, y_0) - y_0 f_y(x_0, y_0)$.
   Rovnice tečné roviny tedy je $z = f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0) + f(x_0, y_0)$.
   Označíme-li $z_0 = f(x_0, y_0)$, je rovnice tečné roviny
   $$z - z_0 = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \cdot (x-x_0, y-y_0),$$
   neboli
   $$z - z_0 = f'(x_0, y_0) \cdot (x-x_0, y-y_0).$$

Obecně v $(n+1)$-rozměrném prostoru je rovnice tečné nadroviny ke grafu funkce n proměnných $y = f(x)$ v bodě x^0

$$y - f(x^0) = f'(x^0) \cdot (x - x^0).$$

3. Geometrický význam diferenciálu: přírůstek funkce měřený na tečné nadrovině.
   $f(x) \approx f(x^0) + \mathrm{d}f(x^0)(x - x^0)$.

4. Příklad funkce dvou proměnných, která má v bodě $(0,0)$ derivaci, je v tomto bodě spojitá, ale k jejímu grafu neexistuje v tomto bodě tečná rovina:

$$f(x,y) = \begin{cases} x, & y = x^2, x > 0 \\ \dfrac{2y}{x} - x, & \dfrac{x^2}{2} < y < x^2, x > 0 \\ 2x - \dfrac{y}{x}, & x^2 < y < 2x^2, x > 0 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

   Spojitost a existence derivace v daném bodě tedy ještě nezaručí diferencovatelnost funkce.

5.3.6 Definice

Řekneme, že funkce n proměnných f *je třídy* C^m *v bodě* $x^0 \in \operatorname{Dom} f$, existuje-li okolí $\mathcal{O}(x^0)$ bodu x^0 takové, že $\mathcal{O}(x^0) \subseteq \operatorname{Dom} f$ a funkce f má na $\mathcal{O}(x^0)$ spojité všechny parciální derivace až do řádu m včetně.
Řekneme, že funkce n proměnných f *je třídy* C^m *na otevřené množině* $M \subseteq \operatorname{Dom} f$, je-li třídy C^m v každém bodě množiny M.
Řekneme, že funkce n proměnných f *je třídy* C^∞ *v bodě* $x^0 \in \operatorname{Dom} f$, je-li v tomto bodě třídy C^m pro každé $m \in \mathbb{N}$.
Řekneme, že funkce n proměnných f *je třídy* C^∞ *na otevřené množině* $M \subseteq \operatorname{Dom} f$, je-li třídy C^∞ v každém bodě množiny M.

Z 5.3.4 plyne, že funkce třídy C^1 v bodě x^0 je v tomto bodě diferencovatelná.

5.3.7 Definice

Nechť funkce n proměnných f je třídy C^m v bodě x^0. *Diferenciál m-tého řádu funkce f v bodě x^0* definujeme vztahem

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^m f(x^0)(h_1, h_2, \ldots, h_n) &= \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=m} \frac{m!}{i_1! i_2! \cdots i_n!} \frac{\partial^m f(x^0)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_n^{i_n}} h_1^{i_1} h_2^{i_2} \cdots h_n^{i_n} \\
\mathrm{d}^m f(x^0) &= \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=m} \frac{m!}{i_1! i_2! \cdots i_n!} \frac{\partial^m f(x^0)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_n^{i_n}} \mathrm{d}x_1^{i_1} \mathrm{d}x_2^{i_2} \cdots \mathrm{d}x_n^{i_n} = \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} \mathrm{d}x_n \right)^m f(x^0) \\
\mathrm{d}^m &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} \mathrm{d}x_n \right)^m
\end{aligned}$$

Zejména pro $n = 2$:

$$\mathrm{d}^m f(x_0, y_0)(h, k) = \sum_{i=0}^{n} \binom{m}{i} \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^i \partial y^{m-i}} h^i k^{m-i}$$

$$\mathrm{d}^m f(x_0, y_0) = \sum_{i=0}^{n} \binom{m}{i} \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^i \partial y^{m-i}} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}y^{m-i} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{d}y \right)^m f(x_0 y_0)$$

$\mathrm{d}^2 f = f_{xx} \mathrm{d}x^2 + 2 f_{xy} \mathrm{d}x \mathrm{d}y + f_{yy} \mathrm{d}y^2$
$\mathrm{d}^3 f = f_{xxx} \mathrm{d}x^3 + 3 f_{xxy} \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}y + 3 f_{xyy} \mathrm{d}x \mathrm{d}y^2 + f_{yyy} \mathrm{d}y^3$

5.3.8 Definice

Buďte $g_1, g_2, \dots, g_n$ funkce n proměnných. Funkce n proměnných F se nazývá *kmenová funkce diferenciálu*

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\mathrm{d}x_1 + g_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\mathrm{d}x_2 + \dots + g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\mathrm{d}x_n$$

na otevřené množině $M \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Dom} g_i$, jestliže na této množině platí

$F'_{|1}(x) = g_1(x), F'_{|2}(x) = g_2(x), \dots, F'_{|n}(x) = g_n(x)$, tj. $\mathrm{d}F = \sum_{i=1}^{n} g_i \mathrm{d}x_i$.

5.3.9 Věta

Nechť $g_1, g_2, \dots, g_n$ jsou funkce n proměnných, které jsou třídy C^1 na otevřené množině $M \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Dom} g_i$. Kmenová funkce diferenciálu $g_1\mathrm{d}x_1 + g_2\mathrm{d}x_2 + \dots + g_n\mathrm{d}x_n$ existuje právě tehdy, když

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$$

pro všechna $i, j = 1, 2, \dots, n,\ i \neq j$.

D.: Provedeme pro $n = 2$.

$\Rightarrow$: Nechť existuje kmenová funkce F, $\mathrm{d}F = g_1\mathrm{d}x + g_2\mathrm{d}y$. Pak $F_x = g_1,\ F_y = g_2$.
Derivace $F_{xy} = g_{1y},\ F_{yx} = g_{2x}$ jsou spojité a tedy podle 5.2.6 záměnné. To znamená, že $\dfrac{\partial g_1}{\partial y} = F_{xy} = F_{yx} = \dfrac{\partial g_2}{\partial x}$.

$\Leftarrow$: Nechť $\dfrac{\partial g_1}{\partial y} = \dfrac{\partial g_2}{\partial x}$. Pro $(x_0, y_0), (x, y) \in M$ takové, že $\{(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) : t \in [0, 1]\} \subseteq M$ položme $F(x, y) = \int_{x_0}^{x} g_1(t, y)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} g_2(x_0, t)\mathrm{d}t$. Pak podle 3.4.3 $F_x(x, y) = g_1(x, y)$.
Dále s využitím 2.3.3 dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} g_1(t, y)\mathrm{d}t &= \lim_{h\to 0} \frac{\int_{x_0}^{x} g_1(t, y+h)\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} g_1(t, y)\mathrm{d}t}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \int_{x_0}^{x} \frac{g_1(t, y+h) - g_1(t, y)}{h}\mathrm{d}t = \lim_{h\to 0} \int_{x_0}^{x} g'_{1|2}(t, y + \vartheta h)\mathrm{d}t = \\
&= \lim_{h\to 0} \int_{x_0}^{x} g'_{2|1}(t, y + \vartheta h)\mathrm{d}t = \lim_{h\to 0}(g_2(x, y + \vartheta h) - g_2(x_0, y + \vartheta h) = \\
&= g_2(x, y) - g_2(x_0, y)
\end{aligned}$$

Odtud $F_y(x, y) = g_2(x, y) - g_2(x_0, y) + g_2(x_0, y) = g_2(x, y)$.

□

5.4 Derivace složené funkce, Taylorův vzorec

5.4.1 Věta (řetězové pravidlo)

Nechť f je funkce m proměnných a $g_1, g_2, \dots, g_m$ jsou funkce n proměnných, které mají spojité parciální derivace prvního řádu v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Označme $u_1^0 = g_1(x^0), u_2^0 = g_2(x^0), \dots, u_m^0 = g_m(x^0)$. Je-li funkce $z = f(u_1, u_2, \dots, u_m)$ diferencovatelná v bodě $(u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0)$, pak má složená funkce n proměnných

$z = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$ parciální derivace prvního řádu v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ a platí

$$F'_{|i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \sum_{j=1}^{m} f'_{|j}(u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0) g'_{j|i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_j}(u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)\,,$$

stručně

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\,,$$

nebo

$$z_{x_i} = z_{u_1} u_{1x_i} + z_{u_2} u_{2x_i} + \dots + z_{u_n} u_{nx_i}\,.$$

D.: Provedeme pro $m = n = 2,\ u = u(x, y),\ v = v(x, y),\ u_0 = u(x_0, y_0),\ v_0 = v(x_0, y_0)$, $z = F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(u(x_0 + h, y_0), v(x_0 + h, y_0)) - f(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))}{h}.\end{aligned}$$

Poněvadž f je diferencovatelná v (u_0, v_0), existuje podle 5.3.1 a 5.3.3 funkce $\tau = \tau(h, k)$ taková, že $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \tau(h, k) = 0$ a

$$\begin{aligned}&f(u(x_0 + h, y_0), v(x_0 + h, y_0)) - f(u_0, v_0) = \\ &= \ f_u(u_0, v_0)(u(x_0 + h, y_0) - u_0) + f_v(u_0, v_0)(v(x_0 + h, y_0) - v_0) + \\ &\quad + \sqrt{(u(x_0 + h, y_0) - u_0)^2 + (v(x_0 + h, y_0) - v_0)^2}\ \tau(u(x_0 + h, y_0) - u_0, v(x_0 + h, y_0) - v_0)\,.\end{aligned}$$

Označme $\alpha(h) = \sqrt{(u(x_0 + h, y_0) - u_0)^2 + (v(x_0 + h, y_0) - v_0)^2}\ \tau(u(x_0 + h, y_0) - u_0, v(x_0 + h, y_0) - v_0)$.

Pak
$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f_u(u_0, v_0)(u(x_0 + h, y_0) - u_0) + f_v(u_0, v_0)(v(x_0 + h, y_0) - v_0) + \alpha(h)) = \\ &= f_u(u_0, v_0) u_x(x_0, y_0) + f_v(u_0, v_0) v_x(x_0, y_0) + \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(h)}{h}.\end{aligned}$$

Ukážeme, že $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\alpha(h)}{h} = 0$: Podle 2.3.6

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0} \frac{(u(x_0 + h, y_0) - u_0)^2 + (v(x_0 + h, y_0) - v_0)^2}{h^2} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2(u(x_0 + h, y_0) - u_0) u_x(x_0 + h, y_0) + 2(v(x_0 + h, y_0) - v_0) v_x(x_0 + h, y_0)}{2h} = \\ &= (u_x(x_0, y_0))^2 + (v_x(x_0, y_0))^2\,,\end{aligned}$$

tedy funkce $\dfrac{\sqrt{(u(x_0 + h, y_0) - u_0)^2 + (v(x_0 + h, y_0) - v_0)^2}}{h}$ je ohraničená a tvrzení plyne z 5.1.5.3.
Dokázali jsme tedy

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = f_u(u_0, v_0) u_x(x_0, y_0) + f_v(u_0, v_0) v_x(x_0, y_0)\,.$$

Analogicky dokážeme

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = f_u(u_0, v_0) u_y(x_0, y_0) + f_v(u_0, v_0) v_y(x_0, y_0)\,.$$

□

5.4.2 Poznámky

1. Vzorce ve větě 5.4.1 lze zapsat maticově:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}, \frac{\partial z}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u_m}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_m}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

2. Pomocí řetězového pravidla lze počítat i druhé parciální derivace:
Nechť funkce $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ mají druhé parciální derivace v bodě (x_0, y_0). Označme $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. Je-li funkce $z = f(u, v)$ třídy C^2 v bodě (u_0, v_0), pak složená funkce $z = F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ má druhé parciální derivace v bodě (x_0, y_0) a v něm platí

$$\begin{aligned} F_{xx} &= f_{uu}u_x^2 + 2f_{uv}u_xv_x + f_{vv}v_x^2 + f_uu_{xx} + f_vv_{xx} \\ F_{xy} &= f_{uu}u_xu_y + f_{uv}(u_xv_y + u_yv_x) + f_{vv}v_xv_y + f_uu_{xy} + f_vv_{xy} \\ F_{yy} &= f_{uu}u_y^2 + 2f_{uv}u_yv_y + f_{vv}v_y^2 + f_uu_{yy} + f_vv_{yy} \end{aligned}$$

D.: Odvodíme první formuli. Ostatní lze odvodit analogicky.

$$\begin{aligned} F_{xx} &= (z_x)_x = (z_uu_x + z_vv_x)_x = (z_u)_xu_x + z_uu_{xx} + (z_v)_xv_x + z_vv_{xx} = \\ &= (z_{uu}u_x + z_{uv}v_x)u_x + (z_{vu}u_x + z_{vv}v_x)v_x + z_uu_{xx} + z_vv_{xx} = \\ &= z_{uu}u_x^2 + z_{uv}u_xv_x + z_{vu}u_xv_x + z_{vv}v_x^2 + z_uu_{xx} + z_vv_{xx} \ . \end{aligned}$$

Odtud již plyne dokazovaná formule, neboť podle 5.3.6 a 5.2.6 je $z_{uv} = z_{vu} = f_{uv}$. □

3. Předchozí vzorce si lze pamatovat pomocí formální mocniny nebo součinu. Např.:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 ,$$

což jsou první tři členy prvního vzorce.

4. Analogicky lze počítat i derivace vyšších řádů.

5.4.3 Věta (Taylor)

Nechť funkce n proměnných f je v bodě $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ třídy C^{m+1}, tj, existuje okolí $\mathcal{O}(x^0)$ bodu x^0 takové, že f má na něm spojité parciální derivace až do řádu $m+1$ včetně. Buď $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{O}(x^0)$. Pak existuje $\vartheta \in (0, 1)$ takové, že platí

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) +$$

$$+\frac{1}{1!}(f_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)(x_1 - x_1^0) + f_{x_2}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)(x_2 - x_2^0) + \dots + f_{x_n}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)(x_n - x_n^0)) + \dots +$$

$$+\frac{1}{m!}\sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=m}\frac{m!}{i_1!i_2!\cdots i_n!}\frac{\partial^m f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}(x_1 - x_1^0)^{i_1}(x_2 - x_2^0)^{i_2}\cdots(x_n - x_n^0)^{i_n} +$$

$$+\frac{1}{(m+1)!}\sum_{i_1+\dots+i_n=m+1}\frac{(m+1)!}{i_1!i_2!\cdots i_n!}\frac{\partial^m f(x_1^0 + \vartheta(x_1 - x_1^0), \dots, x_n^0 + \vartheta(x_n - x_n^0))}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(x_1 - x_1^0)^{i_1}\cdots(x_n - x_n^0)^{i_n} .$$

D.: Položme $F(t) = f(x_1^0 + t(x_1 - x_1^0), x_2^0 + t(x_2 - x_2^0), \dots, x_n^0 + t(x_n - x_n^0))$. Tvrzení nyní plyne z 2.4.8, 5.4.1 a 5.4.2.4 □

Vzorec v předchozí větě se nazývá Taylorův.

Polynom n proměnných

$$T_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) +$$

$$+\frac{1}{1!}(f_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)(x_1 - x_1^0) + f_{x_2}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)(x_2 - x_2^0) + \cdots + f_{x_n}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)(x_n - x_n^0)) + \cdots +$$

$$+\frac{1}{m!}\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=m} \frac{m!}{i_1!i_2!\cdots i_n!}\frac{\partial^m f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}(x_1 - x_1^0)^{i_1}(x_2 - x_2^0)^{i_2}\cdots(x_n - x_n^0)^{i_n} +$$

se nazývá *Taylorův polynom m-tého stupně funkce f se středem x^0* a výraz

$$R_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{(m+1)!}\sum_{i_1+\cdots+i_n=m+1} \frac{(m+1)!}{i_1!i_2!\cdots i_n!}\frac{\partial^m f(x_1^0 + \vartheta(x_1 - x_1^0), \ldots, x_n^0 + \vartheta(x_n - x_n^0))}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(x_1 - x_1^0)^{i_1}\cdots(x_n - x_n^0)^{i_n}$$

se nazývá *zbytek v Taylorově vzorci.*

Taylorův vzorec lze stručněji zapsat pomocí diferenciálů:

$$\begin{aligned}
T_m(x) &= f(x^0) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f(x^0)(x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(x^0)(x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0) + \cdots + \\
&\quad + \frac{1}{m!}\mathrm{d}^m f(x^0)(x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0) \\
R_m(x) &= \frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}^{m+1} f(x^0)(x_1^0 + \vartheta(x_1 - x_1^0), \ldots, x_n^0 + \vartheta(x_n - x_n^0))
\end{aligned}$$

5.5 Průběh funkce více proměnných

5.5.1 Definice

Řekneme, že funkce f *nabývá v bodě x^* lokálního maxima* (resp. *minima*), jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x^*)$ bodu x^* takové, že $\mathcal{O}(x^*) \subseteq \operatorname{Dom} f$ a pro každé $x \in \mathcal{O}(x^*)$ platí $f(x) \le f(x^*)$ (resp. $f(x) \ge f(x^*)$).

Jsou-li tyto nerovnosti pro $x \neq x^*$ ostré, mluvíme o *ostrém* lokálním maximu (resp. minimu).

(Ostrá) lokální maxima a minima nazýváme souhrnně *(ostré) lokální extrémy.*

5.5.2 Příklad

1. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ má v bodě (x^*, y^*) ostré lokální minimum, neboť $f(x,y) > 0 = f(0,0)$ pro každý $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2. $f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) = (0,0) \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$ má v bodě (x^*, y^*) ostré lokální maximum.

V bodě ostrého lokálního extrému funkce nemusí být diferencovatelná ani spojitá.

5.5.3 Definice

Řekneme, že $x^* \in \mathbb{R}^n$ je *stacionárním bodem funkce f*, jestliže f má v tomto bodě parciální derivace podle všech proměnných a platí

$$f'_{|1}(x^*) = f'_{|2}(x^*) = \cdots = f'_{|n}(x^*) = 0\,.$$

5.5.4 Věta

Nechť funkce f má v bodě $x^* \in \mathbb{R}^n$ lokální extrém a nechť v tomto bodě existují všechny parciální derivace funkce f. Pak x^* je stacionárním bodem funkce f.

D.: Kdyby $f'_{|i}(x^*) > 0$, pak by podle 2.5.2 existovalo $\varepsilon > 0$, že

$$f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^* - \varepsilon, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) < f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$$

$$f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^* + \varepsilon, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) > f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$$

a tedy by v x^* nemohl být lokální extrém.
Podobně vyloučíme možnost $f'_{|i}(x^*) < 0$. $\square$

Poznámka: Stacionární bod nemusí být bodem lokálního extrému. Např. $f(x,y) = x^2 - y^2$, $(x^*, y^*) = (0,0)$.

5.5.5 Definice

Je-li $x^* \in \mathbb{R}^n$ stacionárním bodem funkce f a f přitom nenabývá v x^* lokálního extrému, řekneme, že x^* je *sedlový bod* (*sedlo*) funkce f.

5.5.6 Několik pojmů z lineární algebry

- Nechť $A = (a_{ij})$ je symetrická matice, $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T \in V_n$, $\Phi(h) = \vec{h}^T A \vec{h} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$ kvadratická forma.

  Řekneme, že matice A je $\begin{array}{l} \textit{negativně semidefinitní} \\ \textit{negativně definitní} \\ \textit{positivně semidefinitní} \\ \textit{positivně definitní} \end{array}$ platí-li pro každý nenulový $\vec{h} \in V_n$ $\begin{array}{l} \Phi(\vec{h}) \le 0 \\ \Phi(\vec{h}) < 0 \\ \Phi(\vec{h}) \ge 0 \\ \Phi(\vec{h}) > 0 \end{array}$.

  Řekneme, že matice A je *indefinitní*, existují-li vektory $\vec{h}, \vec{k} \in V_n$, že $\Phi(\vec{h}) < 0$, $\Phi(\vec{k}) > 0$.

- Platí:

  - Symetrická matice A je positivně (resp. negativně) definitní právě tehdy, když všechna vlastní čísla matice A jsou kladná (resp. záporná).
    Symetrická matice A je positivně (resp. negativně) semidefinitní právě tehdy, když všechna vlastní čísla matice A jsou nezáporná (resp. nekladná).
  - Symetrická matice A je positivně definitní právě tehdy, když všechny hlavní minory matice A, tj. determinanty

    $$a_{11}\,, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \dots, \ \det A$$

    jsou kladné.
    Symetrická matice A je negativně definitní právě tehdy, když hlavní minory matice A střídají znaménka počínaje záporným.

5.5.7 Věta

Nechť $x^* \in \mathbb{R}^n$ je stacionární bod funkce f a nechť f je třídy C^2 v bodě x^*. Položme $A = (a_{ij}) = (f'_{|ij}(x^*))$.
Je-li matice A v positivně (resp. negativně) definitní, má funkce f v bodě x^* ostré lokální minimum (resp. maximum).
Je-li matice A indefinitní, funkce f nemá v bodě x^* lokální extrém.

D.: Nechť A je positivně definitní.
Buď $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in V_n$ libovolný, ale pevně zvolený vektor. Položme $F_{\vec{h}}(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} f'_{|ij}(x) h_i h_j$.
Poněvadž funkce f je třídy C^2 v bodě x^*, je funkce $F_{\vec{h}}$ spojitá v bodě x^* a poněvadž $(f'_{|ij}(x^*))$ je positivně

definitní, existuje okolí $\mathcal{O}(x^*)$ bodu x^* takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x^*)$ je $F_{\vec{h}}(x) > 0$.
Poněvadž $\vec{h}$ byl libovolný vektor, tak pro všechny $x, \hat{x} \in \mathcal{O}(x^*)$ platí $F_{x-x^*}(\hat{x}) > 0$.
Nyní podle 5.4.3 je pro $x \in \mathcal{O}(x^*)$

$$f(x) = f(x^*) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f'_{|ij}(x^* + \vartheta(x - x^*))(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) = f(x^*) + \frac{1}{2}F_{x-x^*}(x^* + \vartheta(x - x^*)),$$

kde $\vartheta \in [0,1]$. Tedy $x^* + \vartheta(x - x^*) \in \mathcal{O}(x^*)$ (uvažujeme euklidovskou metriku) a $f(x) > f(x^*)$, což znamená, že funkce f nabývá v bodě x^* svého ostrého lokálního minima.
Tvrzení pro maximum se dokáže analogicky.
Nechť A je nyní indefinitní. Pak existují vektory $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n), \vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in V_n$ takové, že $\sum\limits_{i,j=1}^{n} f'_{|ij}(x^*)h_i h_j < 0$ a $\sum\limits_{i,j=1}^{n} f'_{|ij}(x^*)k_i k_j > 0$. Poněvadž f je třídy C^2 v bodě x^*, existuje okolí $\mathcal{O}_1(x^*)$ bodu x^* takové, že pro všechna $x \in \mathcal{O}_1(x^*)$ je $\sum\limits_{i,j=1}^{n} f'_{|ij}(x)h_i h_j < 0$ a $\sum\limits_{i,j=1}^{n} f'_{|ij}(x)k_i k_j > 0$.
Buď $\mathcal{O}_2(x^*)$ libovolné okolí bodu x^*, δ_h, δ_k taková kladná čísla, že $x_1 = x^* + \delta_h\vec{h} \in \mathcal{O}_1(x^*) \cap \mathcal{O}_2(x^*)$ a $x_2 = x^* + \delta_k\vec{k} \in \mathcal{O}_1(x^*) \cap \mathcal{O}_2(x^*)$.
S využitím 5.4.3 dostaneme

$$f(x_1) = f(x^*) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f'_{|ij}(x^* + \vartheta\delta_h\vec{h})\delta_h^2 h_i h_j < f(x^*),$$

$$f(x_2) = f(x^*) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f'_{|ij}(x^* + \vartheta\delta_k\vec{k})\delta_k^2 k_i k_j > f(x^*),$$

takže v bodě x^* není lokální extrém funkce f. $\square$

Je-li matice $(f'_{|ij}(x^*))$ positivně nebo negativně semidefinitní, nelze o kvalitě stacionárního bodu rozhodnout.

5.5.8 Důsledek

Nechť funkce dvou proměnných f je třídy C^2 ve svém stacionárním bodě (x^*, y^*). Jestliže

$$D(x^*, y^*) = f_{xx}(x^*, y^*)f_{yy}(x^*, y^*) - (f_{xy}(x^*, y^*))^2 > 0\,,$$

pak má funkce f v bodě (x^*, y^*) ostrý lokální extrém a to minimum, pokud $f_{xx}(x^*, y^*) > 0$ a maximum, pokud $f_{xx}(x^*, y^*) < 0$.
Jestliže $D(x^*, y^*) < 0$, pak v bodě (x^*, y^*) lokální extrém nenastává.

D.: První tvrzení bezprostředně plyne z 5.5.7 a z tvrzení o minorech v 5.5.6.
Nechť $D(x^*, y^*) < 0$. Uvažujme kvadratickou formu

$$\begin{aligned}\Phi(h_1, h_2) &= f_{xx}(x^*, y^*)h_1^2 + 2f_{xy}(x^*, y^*)h_1 h_2 + f_{yy}(x^*, y^*)h_2^2 = \\ &= h_2^2\left(f_{xx}(x^*, y^*)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 + 2f_{xy}(x^*, y^*)\frac{h_1}{h_2} + f_{yy}(x^*, y^*)\right).\end{aligned}$$

Poněvadž $D(x^*, y^*) < 0$ má kvadratický polynom $P(\lambda) = f_{xx}(x^*, y^*)\lambda^2 + 2f_{xy}(x^*, y^*)\lambda + f_{yy}(x^*, y^*)$ dva reálné různé kořeny, což znamená, že nabývá kladných i záporných hodnot. Existují tedy vektory $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$ a $(\hat{h}_1, \hat{h}_2)$ takové, že $\Phi(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) > 0$ a $\Phi(\hat{h}_1, \hat{h}_2) < 0$. To znamená, že forma Φ je indefinitní. $\square$

5.5.9 Definice

Buď f funkce n proměnných, $M \subseteq \operatorname{Dom} f$. Řekneme, že funkce f nabývá v bodě $x^* \in M$ *globálního minima* (resp. *maxima*) na množině M, jestliže $f(x) \geq f(x^*)$ (resp. $f(x) \leq f(x^*)$) pro každé $x \in M$. Jsou-li nerovnosti ostré pro každé $x \neq x^*$, mluvíme o *ostrých globálních minimech* (resp. *maximech*) na M.
(Ostrá) globální maxima a minima nazýváme souhrnně *(ostré) globální extrémy* funkce f na množině M.

Místo slova „globální“ se někdy používá slovo „absolutní“.

5.5.10 Poznámka

Je-li bod globálního extrému x^* na množině M vnitřním bodem této množiny, pak je x^* bodem lokálního extrému.
Funkce f tedy může mít globální extrém na množině M v bodě lokálního extrému funkce f nebo v hraničním bodě množiny M, pokud tento bod do množiny M patří.

5.5.11 Poznámka

Nechť funkce f je třídy C^2 v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.
Grafem funkce $g : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x^0) + f'_{|1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + f'_{|2}(x^0)(x_1 - x_2^0) + \cdots + f'_{|n}(x^0)(x_n - x_n^0)$ je podle 5.3.5.2 tečná nadrovina ke grafu funkce f v bodě x^0.
Nechť $A = (a_{ij}) = (f'_{|ij}(x^0))$.
Stejným způsobem jako v důkazu věty 5.5.7 lze dokázat:
Je-li matice A positivně definitní, pak existuje okolí $\mathcal{O}(x^0)$ bodu x^0 takové, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x^0)$ je $f(x) > g(x)$. Body grafu funkce f v okolí bodu x^0 leží nad tečnou nadrovinou, funkce je v bodě x^0 konvexní.
Je-li matice A negativně definitní, pak existuje okolí $\mathcal{O}(x^0)$ bodu x^0 takové, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x^0)$ je $f(x) < g(x)$. Body grafu funkce f v okolí bodu x^0 leží pod tečnou nadrovinou, funkce je v bodě x^0 konkávní.

5.6 Implicitní funkce

5.6.1 Definice

Nechť F je funkce dvou proměnných, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ je takový bod, že $F(x_0, y_0) = 0$ a $\delta > 0$ je reálné číslo. Řekneme, že *funkce* $y = f(x)$ *je na* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *zadána implicitně rovnicí* $F(x, y) = 0$, jestliže pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je $F(x, f(x)) = 0$.

5.6.2 Věta

Nechť F je funkce dvou proměnných a jsou splněny předpoklady:

- existuje $(x_0, y_0) \in \operatorname{Dom} F$, že $F(x_0, y_0) = 0$,
- existuje $a \in \mathbb{R},\ a > 0$, že F je spojitá na množině $R = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - a, y_0 + a) \cap \operatorname{Dom} F$,
- F má spojitou parciální derivaci podle y v bodě (x_0, y_0) a platí $\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$.

Pak existuje kladné číslo δ a jediná spojitá funkce $y = f(x)$, která je na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ zadána implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$.

D.: Na $\mathbb{R}^2$ uvažujme metriku ρ_∞ a položme $d = F_y(x_0, y_0)$. Podle předpokladu je $d \neq 0$.
Poněvadž F_y je spojitá v bodě (x_0, y_0), k $\dfrac{|d|}{2} > 0$ existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro $(x, y) \in \mathcal{O}_\varepsilon(x_0, y_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ je $|F_y(x, y) - d| < \dfrac{|d|}{2}$,
neboli pro $(x, y) \in \mathcal{O}_\varepsilon(x_0, y_0)$ je

$$\left|1 - \frac{F_y(x, y)}{d}\right| < \frac{1}{2}\,. \tag{5.1}$$

Buď $Q = \{g \in \mathrm{C}[x_0 - \varepsilon, x_0 - \varepsilon] : g(x_0) = y_0, |g(x) - y_0| < \varepsilon \text{ pro } x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 - \varepsilon]\}$. Pro $g \in Q$ tedy platí $g(x_0) = y_0$, $F(x_0, g(x_0)) = F(x_0, y_0) = 0$, g i F jsou spojité a tedy k ε existuje $\delta_1 > 0$ takové, že pro $x \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$ je

$$\left|g(x) - \frac{F(x, g(x))}{d} - y_0\right| < \varepsilon\,. \tag{5.2}$$

Položme $\delta = \min\{\varepsilon, \delta_1\}$ a $P = Q \cap \mathrm{C}[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Množina P tedy obsahuje funkce z Q, jejichž definiční obor je zúžen na $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.
Definujme zobrazení $T : P \to \mathrm{C}[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ předpisem: $T(g)(x) = g(x) - \dfrac{F(x, g(x))}{d}$. Je-li funkce f

pevným bodem zobrazení T (sr. 4.5.13), pak $f(x) = f(x) - \dfrac{F(x, g(x))}{d}$ pro $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, neboli $F(x, f(x)) = 0$ pro $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, tj. f je spojitá funkce, která je na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ implicitně zadána rovnicí $F(x, y) = 0$.
Existenci jediné funkce f této vlastnosti dokážeme pomocí Banachovy věty o kontrakci 4.5.14.
Na P uvažujme metriku stejnoměrné konvergence ρ_C (viz 4.1.2.4). Pak
$T(g)(x_0) = g(x_0) - \dfrac{F(x_0, g(x_0))}{d} = y_0$ pro $g \in Q$.
$|T(g)(x) - y_0| < \varepsilon$ podle (5.2) pro $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, tedy $T(g) \in P$.
S využitím 2.3.4.1 dostaneme

$$\begin{aligned}
\rho_C(T(g), T(h)) &= \max_{x_0-\delta \le x \le x_0+\delta} |T(g)(x) - T(h)(x)| = \\
&= \max_{x_0-\delta \le x \le x_0+\delta} \left| g(x) - \frac{F(x, g(x))}{d} - h(x) + \frac{F(x, h(x))}{d} \right| = \\
&= \max_{x_0-\delta \le x \le x_0+\delta} \left| g(x) - h(x) - \frac{F_y(x, \xi)(g(x) - h(x))}{d} \right| = \\
&= \max_{x_0-\delta \le x \le x_0+\delta} |g(x) - h(x)| \left| 1 - \frac{F_y(x, \xi)}{d} \right| .
\end{aligned}$$

Přitom ξ leží mezi hodnotami $g(x)$ a $h(x)$, $g, h \in P$, tedy $\xi \in \mathcal{O}_\varepsilon(y_0)$, takže podle (5.1) je

$$\rho_C(T(g), T(h)) \le \frac{1}{2} \max_{x_0-\delta \le x \le x_0+\delta} |g(x) - h(x)| = \frac{1}{2} \rho_C(g, h) ,$$

což znamená, že T je kontrakce na P. □

5.6.3 Poznámka

Jsou-li splněny předpoklady věty 5.6.2, existuje jediná spojitá funkce f daná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$. Kromě ní může existovat více nespojitých funkcí g, pro něž $F(x, g(x)) = 0$.

Např.: $F(x, y) = y(y - 1),\ (x_0, y_0) = (0, 0)$

$$f(x) \equiv 0,\ g_1(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases},\ g_2(x) = \chi(x),\ \ldots$$

5.6.4 Věta

Nechť jsou splněny předpoklady věty 5.6.2 a nechť navíc má F na R spojité parciální derivace. Pak funkce $y = f(x)$, která je v okolí bodu (x_0, y_0) implicitně zadána rovnicí $F(x, y) = 0$ má v bodě x_0 derivaci a platí

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} .$$

D.: $F(x, f(x)) = 0$ na okolí bodu x_0. Derivováním tohoto vztahu podle x (sr. 5.4.1) dostaneme
$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x)) f'(x) = 0$.
Dosazením x_0 za x a snadnou úpravou dostaneme dokazovaný vztah. □

5.6.5 Poznámka

Nechť jsou splněny předpoklady věty 5.6.2 a nechť navíc má F na $\mathbb{R}$ spojité druhé parciální derivace. Pak funkce $y = f(x)$, která je v okolí bodu (x_0, y_0) implicitně zadána rovnicí $F(x, y) = 0$ má v bodě x_0 druhou derivaci. Lze ji vypočítat postupem analogickým postupu při důkazu věty 5.6.4.
Analogicky lze postupovat při výpočtu derivací vyšších řádů.

5.6.6 Definice

Nechť F je funkce tří proměnných, $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ je takový bod, že $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ a $\delta > 0$ je reálné číslo. Řekneme, že *funkce* $z = f(x, y)$ *je na* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ *zadána implicitně rovnicí* $F(x, y, z) = 0$, jestliže pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ je $F(x, y, f(x, y)) = 0$.

5.6.7 Věta

Nechť F je funkce tří proměnných a jsou splněny předpoklady:

- existuje $(x_0, y_0, z_0) \in \operatorname{Dom} F$, že $F(x_0, y_0, z_0) = 0$,
- existuje $a \in \mathbb{R},\ a > 0$, že F je spojitá na množině
  $R = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - a, y_0 + a) \times (z_0 - a, z_0 + a) \cap \operatorname{Dom} F$,
- F má spojitou parciální derivaci podle z v bodě (x_0, y_0, z_0) a platí $\dfrac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \neq 0$.

Pak existuje kladné číslo δ a jediná spojitá funkce $z = f(x, y)$, která je na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ zadána implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$.

D.: Modifikovaný důkaz věty 5.6.2 □

5.6.8 Věta

Nechť jsou splněny předpoklady věty 5.6.7 a nechť navíc má F na R spojité parciální derivace. Pak funkce $z = f(x, y)$, která je v okolí bodu (x_0, y_0, z_0) implicitně zadána rovnicí $F(x, y, z) = 0$ má v bodě (x_0, y_0) parciální derivace a platí

$$f_x(x_0, y_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}\,,\ \ f_y(x_0, y_0) = -\frac{F_y(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}\,.$$

D.: Přímým výpočtem jako u 5.6.4 □

5.6.9 Poznámky

1. Má-li funkce F na R spojité druhé parciální derivace, pak má i funkce $z = f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) druhé parciální derivace. Lze je vypočítat analogickým postupem.
   Analogicky lze postupovat při výpočtu derivací vyšších řádů.
2. Analogicky lze definovat implicitně zadanou funkci n proměnných, dokázat její jednoznačnou existenci a počítat její derivace.

5.7 Diferencovatelná zobrazení

Zobrazení $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$
Zobrazení F je určeno m funkcemi n proměnných $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Tyto funkce nazýváme *složky* nebo *souřadnicové funkce* zobrazení F, píšeme $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$.
$\operatorname{Dom} F = \operatorname{Dom} f_1 \times \operatorname{Dom} f_2 \times \cdots \times \operatorname{Dom} f_n$.

5.7.1 Poznámka

Zobrazení $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je spojité v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když všechny funkce $f_1, f_2, \ldots, f_m$ jsou spojité v tomto bodě.

D.: $\Rightarrow$: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé
$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{O}_\delta(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = (x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta) \times (x_2^0 - \delta, x_2^0 + \delta) \times \cdots \times (x_n^0 - \delta, x_n^0 + \delta)$
platí

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ &\in\ \mathcal{O}_\varepsilon(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \\ &=\ (f_1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) - \varepsilon, f_1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) + \varepsilon) \times \\ &\quad \times(f_2(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) - \varepsilon, f_2(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) + \varepsilon)\times, \ldots, \times \\ &\quad \times(f_m(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) - \varepsilon, f_m(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) + \varepsilon)\,. \end{aligned}$$

Jinými slovy: k $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{O}_\delta(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ je

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (f_j(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) - \varepsilon, f_j(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \varepsilon)\,,$$

tedy f_j je spojitá funkce. To platí pro každé $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

$\Leftarrow$: K $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_j > 0$, že pro $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{O}_{\delta_j}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ je

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (f_j(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) - \varepsilon, f_j(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \varepsilon)\,, \;\; j = 1, 2, \dots, m\,.$$

Položíme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$. Pak pro $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{O}_\delta(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ je

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{O}_\varepsilon(F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0))\,. \;\square$$

5.7.2 Definice

Řekneme, že zobrazení $F = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je *diferencovatelné v bodě* $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, jestliže každá z funkcí $f_1, f_2, \dots, f_m$ je diferencovatelná v tomto bodě.
Zobrazení $\mathrm{d}F(x^0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dané předpisem

$$(h_1, h_2, \dots, h_n) \mapsto (\mathrm{d}f_1(x^0)(h_1, h_2, \dots, h_n), \mathrm{d}f_2(x^0)(h_1, h_2, \dots, h_n), \dots, \mathrm{d}f_m(x^0)(h_1, h_2, \dots, h_n))$$

se nazývá *diferenciál zobrazení F v bodě* $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.
Zobrazení F se nazývá *diferencovatelné*, je-li diferencovatelné v každém bodě z $\mathrm{Dom}\, f$.

5.7.3 Poznámky

1. Diferenciál zobrazení $F = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ je lineární zobrazení určené maticí $A = (a_{ij}) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0)\right) = (f'_{i|j}(x^0))$.
   D.:

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{d}f_1(x^0)(h_1, h_2, \dots, h_n) \\ \mathrm{d}f_2(x^0)(h_1, h_2, \dots, h_n) \\ \vdots \\ \mathrm{d}f_m(x^0)(h_1, h_2, \dots, h_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_k}(x^0) h_k \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f_2}{\partial x_k}(x^0) h_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f_m}{\partial x_k}(x^0) h_k \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \qquad \square$$

2. Je-li $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkce n proměnných diferencovatelná v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, pak se podle 5.3.5.3 v okolí bodu x^0 „její přírůstek chová jako lineární funkce $\mathrm{d}f(x^0)$“, $f(x) = f(x^0) \approx \mathrm{d}f(x^0)(x - x^0)$.
   Je-li tedy $F(f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zobrazení diferencovatelné v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, pak pro x z okolí bodu x^0 platí

$$\begin{aligned} F(x) - F(x^0) &= \begin{pmatrix} f_1(x) - f_1(x^0) \\ f_2(x) - f_2(x^0) \\ \vdots \\ f_m(x) - f_m(x^0) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \mathrm{d}f_1(x^0)(x - x^0) \\ \mathrm{d}f_2(x^0)(x - x^0) \\ \vdots \\ \mathrm{d}f_m(x^0)(x - x^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_k}(x^0)(x_k - x_k^0) \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f_2}{\partial x_k}(x^0)(x_k - x_k^0) \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f_m}{\partial x_k}(x^0)(x_k - x_k^0) \end{pmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_j}\right) \cdot (x - x^0) \;=\; \mathrm{d}F(x^0)(x - x^0)\,. \end{aligned}$$

5.7.4 Definice

Nechť zobrazení $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Matice

$$F'(x^0) = (f'_{i|j}(x^0)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^0) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^0) & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(x^0) & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix}$$

se nazývá *Jacobiho matice zobrazení F v bodě x^0* (*derivace zobrazení F v bodě x^0*).
Je-li $n = m$ pak se determinant Jacobiho matice zobrazení F v bodě x^0 nazývá *Jacobián* (*Jacobiho determinant*) *zobrazení F v bodě x^0*. Označuje se

$$J(F(x^0)),\ \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(x^0),\ \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(x^0)\,.$$

5.7.5 Poznámka

Je-li $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferencovatelné zobrazení, pak zobrazení $x \mapsto F'(x)$ je zobrazením $\operatorname{Dom} F$ do množiny matic typu $m \times n$. Značíme ho F'.
Je-li $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferencovatelné zobrazení, pak zobrazení $x \mapsto J(F(x))$ je funkcí n proměnných.

5.7.6 Věta (o derivaci složeného zobrazení)

Nechť $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ G = (g_1, g_2, \ldots, g_p) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ jsou diferencovatelná zobrazení. Pak složené zobrazení $H = (h_1, h_2, \ldots, h_n) = G \circ F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ je také diferencovatelné a pro jeho Jacobiho matici platí

$$H'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = G'(F(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \cdot F'(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,.$$

Je-li $n = m = p$, pak při označení $(y_1, y_2, \ldots, y_m) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pro Jacobiány zobrazení $F,\ G,\ H$ platí

$$J(H(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = J(G(y_1, y_2, \ldots, y_m))J(F(x_1, x_2, \ldots, x_n))\,.$$

D.: $h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_i(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$.
Podle 5.4.1 je

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \\ = \sum_{k=1}^{p} g'_{i|k}(f_1((x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2((x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))f'_{k|j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, p,\ j = 1, 2, \ldots, n$.
Druhé tvrzení plyne z věty o determinantu součinu matic. □

5.7.7 Věta (o lokální inversi)

Nechť zobrazení $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je diferencovatelné v bodě $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ a $F(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$. Je-li Jacobiho matice $F'(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ regulární (tj. $\det F'(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = J(F(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)) \neq 0$), pak existuje okolí $\mathcal{O}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ bodu $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, v němž je zobrazení F prosté, tedy existuje inversní zobrazení $F^{-1} : F(\mathcal{O}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)) \to \mathbb{R}^n$. Inversní zobrazení F^{-1} je diferencovatelné v bodě $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ a pro jeho Jacobiho matici platí

$$(F^{-1})'(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) = (F'(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0))^{-1}\,.$$

Náznak důkazu: Pokud $F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0$ tak na $\mathcal{O}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ platí

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx \mathrm{d}F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \dots, x_n - x_n^0)\,.$$

Lineární zobrazení na pravé straně přibližné rovnosti je prosté právě tehdy, když jeho matice, tj. Jacobiho matice zobrazení F, je regulární.
Jacobiho matice identického zobrazení $F^{-1} \circ F$, $F^{-1} \circ F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ je jednotková matice E.
Podle 5.7.6 platí $E = (F^{-1})'(F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)) \cdot F'(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, z čehož bezprostředně plyne dokazovaný vztah. □

5.7.8 Definice

Řekneme, že zobrazení $F = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je třídy C^k, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, jestliže každá z funkcí $f_1, f_2, \dots, f_m$ je třídy C^k v bodě x^0.
Řekneme, že zobrazení $F = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je třídy C^k, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, jestliže je třídy C^k v každém bodě $\mathrm{Dom}\, F$.

Poznámka: Je-li zobrazení F třídy C^k, pak $\mathrm{Dom}\, F$ je otevřená množina.

5.7.9 Poznámka

Řekneme, že matice A o n sloupcích a m řádcích je *regulární (v zobecněném smyslu)*, jestliže její hodnost je rovna $\min\{m, n\}$, tj. má-li maximální hodnost.
Tedy je-li $m = n$, $\det A \neq 0$ (jak je obvyklé v lineární algebře)
$n > m$, řádky matice A jsou lineárně nezávislé
$n < m$, sloupce matice A jsou lineárně nezávislé
Je-li $n < m$ a matice A je regulární, pak lineární zobrazení $\Phi : V_n \to V_m$, $\Phi(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$ je prosté. Kdyby totiž existovaly vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$ takové, že $\vec{u} \neq \vec{v}$ a $\Phi(\vec{u}) = \Phi(\vec{v})$, pak by

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi(\vec{u}) - \Phi(\vec{v}) = \Phi(\vec{u} - \vec{v}) = A \cdot (\vec{u} - \vec{v})\,.$$

Jinými slovy, existovala by lineární kombinace sloupců matice A s koeficienty, které by nebyly všechny nulové, rovnající se nulovému vektoru, což by znamenalo, že sloupce matice A nejsou lineárně nezávislé a to by byl spor.

5.7.10 Definice

Buď $F = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zobrazení. Řekneme, že *zobrazení F je regulární*, jestliže je třídy C^1 a pro každé $x \in \mathrm{Dom}\, F$ je matice $F'(x)$ regulární.

Poznámka: Je-li zobrazení $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ regulární a $n < m$, pak ke každému bodu $x \in \mathrm{Dom}\, F$ existuje okolí $\mathcal{O}(x) \subseteq \mathrm{Dom}\, F$ takové, že F je na $\mathcal{O}(x)$ prosté.
Zdůvodnění plyne z 5.7.3.2 a z 5.7.9.

5.7.11 Věta (o implicitním zobrazení)

Nechť $F = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ je zobrazení, které splňuje předpoklady

- existuje bod $(x^0, y^0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0) \in \mathrm{Dom}\, F$ takový, že $F(x^0, y^0) = 0$,
- existuje okolí $\mathcal{O}_a(x^0, y^0)$ bodu $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$ takové, že F je spojité na $\mathcal{O}_a(x^0, y^0) \cap \mathrm{Dom}\, F$,

- všechny prvky matice

$$F_y(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(x,y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(x,y) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m}(x,y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x,y) & \frac{\partial f_m}{\partial y_2}(x,y) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x,y) \end{pmatrix}$$

  jsou spojité v bodě (x^0, y^0) a platí $\det F_y(x^0, y^0) \neq 0$.

Pak existuje okolí $\mathcal{O}_\delta(x^0)$ bodu $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ v $\mathbb{R}^n$ a jediné spojité zobrazení $G : \mathcal{O}_\delta(x^0) \to \mathbb{R}^m$ takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}_\delta(x^0)$ je $F(x, G(x)) = 0$.
Jsou-li navíc v bodě (x^0, y^0) spojité všechny prvky matice

$$F_x(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x,y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x,y) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x,y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x,y) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x,y) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x,y) \end{pmatrix},$$

pak je zobrazení G diferencovatelné v bodě x^0 a pro jeho Jacobiho matici platí

$$G'(x^0) = -(F_y(x^0, y^0))^{-1} \cdot F_x(x^0, y^0) .$$

Náznak důkazu: První tvrzení v podstatě říká, že za uvedených předpokladů lze z rovnice $F(x, y) = 0$ vypočítat $y = G(x)$.
Je-li F diferencovatelné v bodě (x^0, y^0), pak podle 5.7.3.2 je

$$0 \;=\; F(x,y) \;\approx\; \mathrm{d}F(x^0)(x - x^0, y - y^0) \;=$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x^0, y^0)(x_k - x_k^0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_1}{\partial y_j}(x^0, y^0)(y_j - y_j^0) \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(x^0, y^0)(x_k - x_k^0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_2}{\partial y_j}(x^0, y^0)(y_j - y_j^0) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(x^0, y^0)(x_k - x_k^0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_m}{\partial y_j}(x^0, y^0)(y_j - y_j^0) \end{pmatrix} =$$

$$= \;\; F_x(x^0, y^0) \cdot (x - x^0) + F_y(x^0, y^0) \cdot (y - y^0) .$$

Z předpokladu $\det F_y(x^0, y^0) \neq 0$ plyne existence $(F_y(x^0, y^0))^{-1}$ a z přibližné rovnosti $0 \approx F_x(x^0, y^0) \cdot (x - x^0) + F_y(x^0, y^0)(y - y^0)$ plyne přibližná rovnost

$$y - y^0 \approx -(F_y(x^0, y^0))^{-1} \cdot (F_x(x^0, y^0) \cdot (x - x^0)) = (-(F_y(x^0, y^0))^{-1} \cdot F_x(x^0, y^0)) \cdot (x - x^0) ,$$

neboli

$$y \approx y^0 + (-(F_y(x^0, y^0))^{-1} \cdot F_x(x^0, y^0)) \cdot (x - x^0) .$$

Takže y lze z rovnice $F(x,y)$ přibližně vypočítat.
Současně
$$y = G(x) \approx y^0 + \mathrm{d}G(x^0)(x - x^0) = G'(x^0) \cdot (x - x^0)\,,$$
takže Jacobiho matice zobrazení G v bodě x^0 je dána vzorcem z druhého tvrzení věty.
Přesný důkaz lze provést precizací uvedené myšlenky pomocí příslušných limitních přechodů.
Jiná metoda důkazu spočívá ve „vícerozměrné modifikaci“ důkazu věty 5.6.2. □

5.8 Diferencovatelné variety

5.8.1 Definice

Buďte $m, n \in \mathbb{N},\ 1 \le m \le n$. Řekneme, že množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je *m-rozměrná nadplocha v n-rozměrném prostoru*, jestliže ke každému $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in M$ existuje jeho okolí $\mathcal{O}(y)$ v $\mathbb{R}^n$, otevřená množina $U_y \subseteq \mathbb{R}^m$ a prosté spojité zobrazení $F_y : U_y \to \mathbb{R}^n$ tak, že $y \in F_y(U_y) = \mathcal{O}(y) \cap M$.
Je-li každé ze zobrazení $F_y,\ y \in M$ navíc regulární, řekneme, že M je *m-rozměrná (diferencovatelná) varieta v n-rozměrném prostoru.*
Je-li každé z regulárních zobrazení $F_y,\ y \in M$ navíc třídy C^k, řekneme, že M je *m-rozměrná varieta třídy C^k v n-rozměrném prostoru.*

- n-rozměrné nadplochy (variety) v n-rozměrném prostoru jsou otevřené množiny.
- Jednorozměrné nadplochy se nazývají *křivky*, dvourozměrné nadplochy se nazývají *plochy*.
- Jednorozměrné variety se nazývají hladké křivky, dvourozměrné variety se nazývají hladké plochy.

Poznamenejme, že hladká jordanovská křivka definovaná v 2.6.6 a hladký oblouk $\{(\varphi(t), \psi(t) : t \in I\}$, kde I je otevřený interval jsou hladkými křivkami v právě uvedeném smyslu. Definice 2.6.6 je však poněkud obecnější, zahrnuje i oblouky s jedním nebo oběma krajními body.

5.8.2 Věta

Buďte $g_1, g_2, \ldots, g_k$ diferencovatelné funkce n proměnných, $n > k$. Položme
$$M = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \operatorname{Dom} g_1 \cap \operatorname{Dom} g_2 \cap \cdots \cap \operatorname{Dom} g_k : \\ g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \cdots = g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\}.$$
Jestliže v každém bodě $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$ je hodnost matice
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_k}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$
rovna k, pak množina M je $(n-k)$-rozměrnou diferencovatelnou varietou.

D.: Buď $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) \in M$. Poněvadž matice
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\hat{x}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\hat{x}) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\hat{x}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\hat{x}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\hat{x}) & \ldots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\hat{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(\hat{x}) & \frac{\partial g_k}{\partial x_2}(\hat{x}) & \ldots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(\hat{x}) \end{pmatrix}$$

je regulární, existují vesměs různé indexy $j_1, j_2, \dots, j_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ takové, že matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_{j_1}}(\hat{x}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_{j_2}}(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{j_k}}(\hat{x}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_{j_1}}(\hat{x}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_{j_2}}(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_{j_k}}(\hat{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_{j_1}}(\hat{x}) & \frac{\partial g_k}{\partial x_{j_2}}(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial x_{j_k}}(\hat{x}) \end{pmatrix}$$

je regulární. Označíme-li $i_1, i_2, \dots, i_{n-k}$ vesměs různé indexy z $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$, $x = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-k}}), y = (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k})$, pak jsou splněny předpoklady 5.7.11. Existuje tedy otevřená množina $U_{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)} = \mathcal{O}(\hat{x}) \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ a zobrazení $\varphi_{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)} : \mathcal{O}(\hat{x}) \to \mathcal{O}(\hat{y}) \subseteq \mathbb{R}^k$ takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x)$ je $(x, \varphi_{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)}(x)) \in M$. Položíme $F_{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)}(x) = (x, \varphi_{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)}(x))$.
Stejnou konstrukci lze provést v každém bodě z M. $\square$

Řekneme, že varieta M z věty 5.8.2 je zadána rovnicemi $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$.

5.8.3 Heuristická úvaha

Buď g diferencovatelná funkce dvou proměnných. Pak $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ je jednorozměrná diferencovatelná varieta (hladká křivka). Buď $(\hat{x}, \hat{y}) \in M$ takový, že $\dfrac{\partial g}{\partial y} \neq 0$. Pak podle 5.6.2 existuje funkce $y = y(x)$ taková, že v okolí $\hat{x}$ její graf splývá s M. Tečna ke grafu funkce $y(x)$ v bodě $(\hat{x}, \hat{y})$ je dána rovnicí

$$y - \hat{y} = y'(\hat{x})(x - \hat{x}) \,.$$

Přitom $y'(\hat{x}) = -\dfrac{g_x(\hat{x}, \hat{y})}{g_y(\hat{x}, \hat{y})}$, takže obecná rovnice tečny je

$$g_x(\hat{x}, \hat{y})x + g_y(\hat{x}, \hat{y})y - g_x(\hat{x}, \hat{y})\hat{x} - g_y(\hat{x}, \hat{y})\hat{y} = 0 \,.$$

Normálový vektor ke grafu funkce $y(x)$ v bodě $(\hat{x}, \hat{y})$ tedy je $(g_x(\hat{x}, \hat{y}), g_y(\hat{x}, \hat{y})) = \operatorname{grad} g(\hat{x}, \hat{y}) = g'(\hat{x}, \hat{y})$. Tečný vektor ke křivce M v bodě $(\hat{x}, \hat{y})$ je tedy kolmý k vektoru $\operatorname{grad} g(\hat{x}, \hat{y})$.

5.8.4 Pojmy z lineární algebry

Nechť V_n je n-rozměrný unitární prostor (vektorový prostor se skalárním součinem) a $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in V_n$. Označme $\operatorname{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ podprostor prostoru V_n generovaný vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ (lineární obal množiny vektorů $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$).
Je-li $W \subseteq V_n$ vektorový podprostor, označme $W^\perp$ jeho ortogonální doplněk (vektorový podprostor, jehož každý prvek je kolmý k libovolnému prvku z W), tzn. je=li $\vec{u} \in W$ a $\vec{v} \in W^\perp$, pak $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

5.8.5 Definice

Nechť funkce $g_1, g_2, \dots, g_k$ splňují předpoklady 5.8.2, M je diferencovatelná varieta zadaná rovnicemi $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,\ i = 1, 2, \dots, k$ a nechť $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \in M$. Vektorový prostor

$$\mathcal{N}_M(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) = \operatorname{Lin}(g_1'(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n), g_2'(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n), \dots, g_k'(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n))$$

nazýváme *normálový prostor k M v bodě* $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$.
Vektorový prostor

$$\mathcal{T}_M(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) = (\mathcal{N}_M(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n))^\perp$$

nazýváme *tečný prostor k M v bodě* $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$.

5.8.6 Věta

Buď M diferencovatelná varieta zadaná rovnicemi $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k$ a nechť $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) \in M$ je pevně zvolený bod, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$ je libovolný.

Pak existuje vektor $\vec{h} \in \mathcal{T}_M(\hat{x})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a zobrazení $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ takové, že $x - \hat{x} = \alpha\vec{h} + \Phi(\alpha)$ a $\lim\limits_{\tau \to 0} \dfrac{\Phi(\tau)}{\tau} = \vec{o}$ (nulový vektor).

D.: Libovolný vektor $\vec{r} \in V_n$ lze vyjádřit ve tvaru $\vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$, kde $\vec{p} \in \mathcal{T}_M(\hat{x})$, $\vec{q} \in \mathcal{T}_M(\hat{x})^\perp = \mathcal{N}_M(\hat{x})$.
Tedy také $x - \hat{x} = \vec{u} + \vec{w}$, kde $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathcal{T}_M(\hat{x})$, $\vec{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathcal{N}_M(\hat{x})$.
Položme $\alpha = ||x - \hat{x}||$ a pro $\alpha \neq 0$ položme $\vec{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n) = \dfrac{\vec{u}}{\alpha}$, tedy $\vec{u} = \alpha h$.
Dále označme $\Phi(\alpha) = (\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \ldots, \varphi_n(\alpha)) = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$.
Je-li $\alpha = 0$, pak $x = \hat{x}$, $\vec{u} = \vec{w} = \vec{o}$ a tedy $\Phi(0) = \vec{o}$.
Nechť vektory $\vec{v}^j = (v_1^j, v_2^j, \ldots, v_n^j)$, $j = 1, 2, \ldots, n-k$ tvoří bázi tečného prostoru $\mathcal{T}_M(\hat{x})$. Poněvadž $\hat{x} = x - \vec{u} - \vec{w} = x - \alpha\vec{h} - \Phi(\alpha) \in M$ a $\Phi(\alpha) \perp \vec{v}^j$ pro každé $j = 1, 2, \ldots, n-k$, musí $\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \ldots, \varphi_n(\alpha)$ splňovat systém rovnic

$$\begin{aligned} g_i(x_1 - \alpha h_1 - \varphi_1(\alpha), x_2 - \alpha h_2 - \varphi_2(\alpha), \ldots, x_n - \alpha h_n - \varphi_n(\alpha)) &= 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k \\ v_1^j \varphi_1(\alpha) + v_2^j \varphi_2(\alpha) + \cdots + v_n^j \varphi_n(\alpha) &= 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n-k \end{aligned} \tag{5.3}$$

Levou stranu tohoto systému lze považovat za zobrazení $G : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, jímž zobrazujeme $(n+1)$-tice čísel $(\alpha, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$.
Budeme aplikovat větu o implicitním zobrazení 5.7.11 a používat označení v ní zavedené.

$$G_\Phi(\alpha, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1 - \alpha h_1 - \varphi_1, \ldots, x_n - \alpha h_n - \varphi_n) & \ldots & -\dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}(x_1 - \alpha h_1 - \varphi_1, \ldots, x_n - \alpha h_n - \varphi_) \\ -\dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}(x_1 - \alpha h_1 - \varphi_1, \ldots, x_n - \alpha h_n - \varphi_n) & \ldots & -\dfrac{\partial g_2}{\partial x_n}(x_1 - \alpha h_1 - \varphi_1, \ldots, x_n - \alpha h_n - \varphi_) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{\partial g_k}{\partial x_1}(x_1 - \alpha h_1 - \varphi_1, \ldots, x_n - \alpha h_n - \varphi_n) & \ldots & -\dfrac{\partial g_k}{\partial x_n}(x_1 - \alpha h_1 - \varphi_1, \ldots, x_n - \alpha h_n - \varphi_) \\ v_1^1 & \ldots & v_n^1 \\ v_1^2 & \ldots & v_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{n-k} & \ldots & v_n^{n-k} \end{pmatrix}.$$

Prvních k řádků této matice je lineárně nezávislých podle 5.8.2, posledních $n-k$ řádků je také lineárně nezávislých, neboť vektory $\vec{v}^1, \vec{v}^2, \ldots, \vec{v}^{n-k}$ tvoří bázi vektorového podprostoru. Libovolný z posledních $n-k$ řádků je lineárně nezávislý na libovolné lineární kombinaci prvních k řádků, neboť je to vektor ortogonální k libovolnému z nich. Podobně libovolný z prvních k řádků je lineárně nezávislý na libovolné lineární kombinaci posledních $n-k$ řádků. Matice G_Φ je tedy regulární, jsou splněny předpoklady věty 5.7.11, takže $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ lze ze soustavy rovnic (5.3) vyjádřit jako funkce proměnné α.
Máme tedy definováno zobrazení $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ takové, že $\Phi(0) = \vec{o}$.
Dále platí

$$G_\alpha(\alpha, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} -h_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1-\alpha h_1-\varphi_1,\dots,x_n-\alpha h_n-\varphi_n) - \dots - h_n \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}(x_1-\alpha h_1-\varphi_1,\dots,x_n-\alpha h_n-\varphi) \\ -h_1 \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}(x_1-\alpha h_1-\varphi_1,\dots,x_n-\alpha h_n-\varphi_n) - \dots - h_n \dfrac{\partial g_2}{\partial x_n}(x_1-\alpha h_1-\varphi_1,\dots,x_n-\alpha h_n-\varphi) \\ \vdots \\ -h_1 \dfrac{\partial g_k}{\partial x_1}(x_1-\alpha h_1-\varphi_1,\dots,x_n-\alpha h_n-\varphi_n) - \dots - h_n \dfrac{\partial g_k}{\partial x_n}(x_1-\alpha h_1-\varphi_1,\dots,x_n-\alpha h_n-\varphi) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

takže

$$G_\alpha(0,\varphi_1,\dots,\varphi_n) \;=\; \left(-\vec{h}\cdot g_1'(\hat{x}),\, -\vec{h}\cdot g_2'(\hat{x}),\, \dots,\, -\vec{h}\cdot g_k'(\hat{x}),\, 0,\, 0,\, \dots,\, 0\right)^T \;=\; \vec{o},$$

neboť vektory $\vec{h}$ a $g_i'(\hat{x})$ jsou kolmé pro jakékoliv $i \in \{1,2,\dots,k\}$.
Odtud podle 5.7.11 plyne, že $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = \dots = \varphi_n'(0) = 0$ a dále podle 2.3.6
$\lim\limits_{\tau\to 0} \dfrac{\varphi_j(\tau)}{\tau} = 0,\ j = 1,2,\dots,n.$ □

5.9 Vázané extrémy

5.9.1 Definice

Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ M \subseteq \operatorname{Dom} f$. Řekneme, že funkce f *nabývá v bodě* $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \in M$ *lokálního maxima* (resp. *minima*) *vzhledem k množině* M, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(\hat{x})$ bodu x takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}(\hat{x}) \cap M$ platí $f(x) \le f(\hat{x})$ (resp. $f(x) \ge f(\hat{x})$).
Jsou-li nerovnosti pro $x \ne \hat{x}$ ostré, mluvíme o *ostrém lokálním maximu* (resp. *minimu*) *vzhledem k množině* M.
(Ostrá) lokální maxima a minima nazýváme souhrnně (*ostré*) *lokální extrémy vzhledem k množině* M.

Nechť $f, g_1, g_2, \dots, g_m$ jsou funkce n proměnných třídy C^1, $m < n$. Úlohu: najít lokální extrémy funkce f vzhledem k diferencovatelné varietě zadané rovnicemi $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,\ n = 1,2,\dots,m$, tj.

$$\begin{gathered} f(x_1,x_2,\dots,x_n) \to \text{extrém} \\ g_1(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0 \\ g_2(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0 \end{gathered} \tag{5.4}$$

nazýváme *konečnědimenzionální hladkou extremální úlohou s omezeními typu rovnosti.* Stručně *úlohou na vázaný (podmíněný) extrém.*

5.9.2 Definice

Funkci $\mathcal{L} : \mathbb{R}^{n+m+1} \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,\dots,x_n,\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m) = \lambda_0 f(x_1,x_2,\dots,x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

nazýváme *Lagrangeovou funkcí úlohy* (5.4), čísla $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ nazýváme *Lagrangeovy multiplikátory.*

5.9.3 Věta (Lagrange 1797)

Je-li $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ řešením úlohy (5.4), pak existují Lagrangeovy multiplikátory $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$, z nichž alespoň jeden je nenulový tak, že

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\mathcal{L}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \dots = \frac{\partial}{\partial x_n}\mathcal{L}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = 0\,. \tag{5.5}$$

D.: Nechť $\hat{x}$ je bodem lokálního minima úlohy (5.4).

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\mathcal{L}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \lambda_0 \frac{\partial}{\partial x_j} f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial}{\partial x_j} g_k(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n),$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

Podmínka (5.5) má tedy ve vektorovém zápisu tvar

$$\lambda_0 f'(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k'(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) = \vec{o}\,.$$

Připusťme, že vektory $f'(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n), g_1'(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n), g_2'(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n), \dots, g_m'(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ jsou lineárně nezávislé.

Uvažujme zobrazení $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m+1}$ dané předpisem $F(x) = \begin{pmatrix} f(x) - f(\hat{x}) \\ g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix}$.

Podle našeho předpokladu je hodnost matice

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial}{\partial x_1} f(\hat{x}) & \frac{\partial}{\partial x_2} f(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f(\hat{x}) \\
\frac{\partial}{\partial x_1} g_1(\hat{x}) & \frac{\partial}{\partial x_2} g_1(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} g_1(\hat{x}) \\
\frac{\partial}{\partial x_1} g_2(\hat{x}) & \frac{\partial}{\partial x_2} g_2(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} g_2(\hat{x}) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial}{\partial x_1} g_m(\hat{x}) & \frac{\partial}{\partial x_2} g_m(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} g_m(\hat{x})
\end{pmatrix}$$

rovna $m+1$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že proměnné jsou očíslovány tak, že

$$\det \begin{pmatrix}
\frac{\partial}{\partial x_1} f(\hat{x}) & \frac{\partial}{\partial x_2} f(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{m+1}} f(\hat{x}) \\
\frac{\partial}{\partial x_1} g_1(\hat{x}) & \frac{\partial}{\partial x_2} g_1(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{m+1}} g_1(\hat{x}) \\
\frac{\partial}{\partial x_1} g_2(\hat{x}) & \frac{\partial}{\partial x_2} g_2(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{m+1}} g_2(\hat{x}) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial}{\partial x_1} g_m(\hat{x}) & \frac{\partial}{\partial x_2} g_m(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{m+1}} g_m(\hat{x})
\end{pmatrix} \neq 0\,.$$

To znamená, že zobrazení $G : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ dané předpisem

$$G(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) = \begin{pmatrix}
f(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \hat{x}_{m+2}, \hat{x}_{m+3}, \dots, \hat{x}_n) - f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \\
g_1(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \hat{x}_{m+2}, \hat{x}_{m+3}, \dots, \hat{x}_n) \\
g_2(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \hat{x}_{m+2}, \hat{x}_{m+3}, \dots, \hat{x}_n) \\
\vdots \\
g_m(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \hat{x}_{m+2}, \hat{x}_{m+3}, \dots, \hat{x}_n)
\end{pmatrix}$$

splňuje předpoklady 5.7.7. Odtud plyne, že ke každému dostatečně malému $\varepsilon > 0$ existují $x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \ldots, x_{m+1}(\varepsilon)$ takové, že

$$\begin{aligned}
f(x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \ldots, x_{m+1}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \hat{x}_{m+3}, \ldots, \hat{x}_n) - f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) &= -\varepsilon \\
g_1(x_1\varepsilon), x_2(\varepsilon), \ldots, x_{m+1}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \hat{x}_{m+3}, \ldots, \hat{x}_n) &= 0 \\
g_2(x_1\varepsilon), x_2(\varepsilon), \ldots, x_{m+1}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \hat{x}_{m+3}, \ldots, \hat{x}_n) &= 0 \\
&\vdots \\
g_m(x_1\varepsilon), x_2(\varepsilon), \ldots, x_{m+1}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \hat{x}_{m+3}, \ldots, \hat{x}_n) &= 0\,.
\end{aligned}$$

Našli jsme tedy bod $(x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \ldots, x_{m+1}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \hat{x}_{m+3}, \ldots, \hat{x}_n) \in \mathcal{O}(\hat{x}) \cap M$ takový že $f(x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \ldots, x_{m+1}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \hat{x}_{m+3}, \ldots, \hat{x}_n) = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) - \varepsilon < f(\hat{x})$, což znamená, že $\hat{x}$ není bodem lokálního minima úlohy (5.4) a to je spor.
Vektory $f'(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n), g_1'(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n), g_2'(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n), \ldots, g_m'(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ jsou tedy lineárně závislé, z čehož plyne tvrzení věty.
Pro lokální minimum se důkaz provede analogicky. □

5.9.4 Poznámky

1. Věta 5.9.3 poskytuje návod na vyhledání bodu „podezřelého z toho", že v něm může mít úloha (5.4) lokální extrém: Řešíme soustavu $n + m$ rovnic

$$\begin{aligned}
\lambda_0 \frac{\partial}{\partial x_i} f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial}{\partial x_i} g_k(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) &= 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\
g_j(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) &= 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, m
\end{aligned} \tag{5.6}$$

   pro $n + m + 1$ neznámých $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Má-li tato soustava řešení takové, že $\lambda_l \neq 0$ pro nějaké $l \in \{0, 1, \ldots, m\}$, pak $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ je bod, v němž úloha (5.4) může mít lokální extrém.
   Soustava rovnic (5.6) je pro Lagrangeovy multiplikátory $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ lineární. To znamená, že multiplikátory jsou určeny jednoznačně až na nenulovou multiplikativní konstantu. Stačí tedy položit $\lambda_l = 1$ a řešit $n + m$ rovnic pro $n + m$ neznámých.

2. λ_0 nemusí být nenulový.
   Uvažujme například úlohu najít lokální extrém funkce $f(x, y) = x$ za podmínky $g(x, y) = x^2 + y^2 = 0$. Pak $(\hat{x}, \hat{y}) = (0, 0)$ je řešením této úlohy (neboť je to jediný bod vyhovující podmínce).
   Kdyby $\lambda_0 = 1$, pak by $\mathcal{L}(x, y, 1, \lambda) = x + \lambda(x^2 + y^2)$ a systém rovnic (5.5) by měl tvar

$$\begin{aligned}
1 + 2\lambda\hat{x} &= 0, \\
2\lambda\hat{y} &= 0.
\end{aligned}$$

   Z první rovnice dostaneme $\lambda \neq 0$, potom $\hat{x} = -\dfrac{1}{2\lambda}$ a ze druhé rovnice $\hat{y} = 0$. Pak ale $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = \dfrac{1}{4\lambda^2} \neq 0$.

3. Jsou-li vektory $g_1'(\hat{x}), g_2'(\hat{x}), \ldots, g_m'(\hat{x})$ lineárně nezávislé, pak $\lambda_0 \neq 0$ a tedy lze položit $\lambda_0 = 1$.
   (Toto tvrzení plyne z důkazu věty 5.9.3)

4. Geometrický význam podmínky (5.5) pro případ $n = 2,\ m = 1$ a rovnicí $g(x, y) = 0$ je určena hladká křivka:
   Podle předchozí poznámky je $\lambda_0 \neq 0$ a tedy $f'(\hat{x}, \hat{y}) = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0} g'(\hat{x}, \hat{y})$, což znamená, že vektory $f'(\hat{x}, \hat{y})$ (směr nejrychlejšího růstu funkce f v bodě $(\hat{x}, \hat{y})$) a $g'(\hat{x}, \hat{y})$ (směr normály ke křivce dané rovnicí $g(x, y) = 0$ v bodě $(\hat{x}, \hat{y})$) jsou rovnoběžné.

5.9.5 Věta

Nechť $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) \in M,\ \hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n, \lambda_0 = 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ splňují (5.5) a nechť funkce $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ jsou třídy C^2 v bodě $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$. Označme $\mathcal{L}'' = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} \mathcal{L}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n, 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \right)$. ($\mathcal{L}''$ je čtvercová

matice řádu n.)
Jestliže pro každý vektor $\vec{h} \in \mathcal{T}_m(\hat{x})$ platí $\vec{h}^T \cdot \mathcal{L}'' \cdot \vec{h} > 0$ (resp. $\vec{h}^T \cdot \mathcal{L}'' \cdot \vec{h} < 0$), pak v bodě $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ nabývá funkce f lokálního minima (resp. maxima) vzhledem k množině M.
Jestliže existují vektory $\vec{h}, \vec{k} \in \mathcal{T}_m(\hat{x})$ takové, že $\vec{h}^T \cdot \mathcal{L}'' \cdot \vec{h} < 0 < \vec{k}^T \cdot \mathcal{L}'' \cdot \vec{k}$, pak v bodě $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ funkce f lokálního extrému vzhledem k množině M nenabývá.

Náznak důkazu: Podle 5.8.6 lze vektor $x - \hat{x}$ pro libovolný bod $x \in m$ vyjádřit ve tvaru $x - \hat{x} = \alpha\vec{h} + \Phi(\alpha)$, kde $\vec{h}$ je jednotkový vektor z $\mathcal{T}_m(\hat{x})$ a $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\Phi(\alpha)}{\alpha} = 0$.
Pro každý bod $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$ je $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$.
Funkci $\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ budeme považovat za funkci n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Poněvadž platí (5.5), je $\mathrm{d}\mathcal{L}(x, 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = 0$ a tedy s využitím 5.4.3 pro $x \in M$ platí:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathcal{L}(x, 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \mathcal{L}(\hat{x}, 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2\mathcal{L}(x + \vartheta(x - \hat{x}), 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)(x - \hat{x}) = \\
&= f(\hat{x}) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2\mathcal{L}(x + \vartheta(x - \hat{x}), 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)(\alpha\vec{h} + \Phi(\alpha)) = \\
&= f(\hat{x}) + \frac{\alpha^2}{2!}\mathrm{d}^2\mathcal{L}(x + \vartheta(x - \hat{x}), 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)(\vec{h}) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2\mathcal{L}(x + \vartheta(x - \hat{x}), 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)(\Phi(\alpha)) .
\end{aligned}$$

Tedy

$$f(x) - f(\hat{x}) = \frac{\alpha^2}{2!}\mathrm{d}^2\mathcal{L}(x + \vartheta(x - \hat{x}), 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)(\vec{h}) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2\mathcal{L}(x + \vartheta(x - \hat{x}), 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)(\Phi(\alpha)) .$$

Druhý sčítanec na pravé straně je v absolutní hodnotě malý pro malé α, znaménko prvního sčítance je pro x dostatečně blízké $\hat{x}$ stejné, jako znaménko výrazu $\vec{h}^T \cdot \mathcal{L}'' \cdot \vec{h}$. □

5.9.6 Poznámka

Z vět 5.9.3 a 5.9.5 plyne návod na řešení úlohy (5.4) v případě, že vektory $g'_1(x), g'_2(x), \ldots, g'_m(x)$ jsou lineárně nezávislé pro jakékoliv $x \in \mathbb{R}^n$:

(i) Vytvoříme Lagrangeovu funkci

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) .$$

(ii) Najdeme $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ jako řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j}\mathcal{L}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n, 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) &= 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \\
g_k(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) &= 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m
\end{aligned}$$

(iii) Ze systému lineárních rovnic

$$\frac{\partial g_k(\hat{x})}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial g_k(\hat{x})}{\partial x_2}h_2 + \cdots + \frac{\partial g_k(\hat{x})}{\partial x_n}h_n = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

vypočteme m z proměnných $h_1, h_2, \ldots, h_n$ v závislosti na $n - m$ zbývajících.

(iv) Vypočítáme druhý diferenciál Lagrangeovy funkce

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n, 1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)(h_1, h_2, \ldots, h_n) ,$$

přičemž $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ je vektor vypočítaný v předchozím kroku a určíme jeho znaménko. Je-li kladné, nastává v bodě $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ lokální minimum úlohy (5.4), je-li záporné, pak maximum.

5.10 Vektorové funkce, skalární a vektorová pole

5.10.1 Poznámky o vektorech v $\mathbb{R}^3$

1. Označení:
   $\vec{a}$, $\vec{b}$, ... — vektory, $\vec{o}$ — nulový vektor
   $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \ldots$ — složky vektorů
   $\alpha = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $\beta = |\vec{b}|, \ldots$ — velikost vektorů
   $\vec{a^0} = \dfrac{1}{\alpha}\vec{a}, \ldots$ — jednotkový vektor stejné orientace, jako vektor $\vec{a}$
   $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ — báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ $(\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k})$

   Pokud nebude hrozit nedorozumění, nebudeme rozlišovat mezi vektorem a jeho umístěním.

   Úhlem vektorů rozumíme orientovaný dutý úhel, která tyto vektory svírají.

   $\varphi = \widehat{\vec{a}\vec{b}}$ — úhel vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ v tomto pořadí.

2. Skalární součin vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$:
   $\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha\beta \cos \widehat{\vec{a}\vec{b}} = \alpha\beta \cos\varphi$

   $\vec{a}\cdot\vec{b} = \alpha\beta\cos\varphi = \alpha(\beta\cos\varphi) = \beta(\alpha\cos\varphi)$: Skalární součin vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ je součin velikosti jednoho z vektorů a velikosti kolmého průmětu druhého z vektorů do směru prvního.

   Pro libovolné vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ platí:

   (i) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a} = \vec{o}$ nebo $\vec{b} = \vec{o}$ nebo $\vec{a} \perp \vec{b}$

   (ii) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \alpha^2 \cos 0 = \alpha^2$, $\alpha = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$, $\vec{a^0} \cdot \vec{a^0} = 1$

   (iii) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\alpha\beta} = \vec{a^0} \cdot \vec{b^0}$

   (iv) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, $s(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (s\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (s\vec{b})$ pro libovolný skalár s

   (v) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

   Je-li $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ ortonormální báze, tj. $\vec{\imath} \cdot \vec{\imath} = \vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, $\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{\imath} \cdot \vec{k} = \vec{\jmath} \cdot \vec{k} = 0$ (a tak tomu bude v tomto odstavci vždy), pak

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}) \cdot (b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k}) = \\
&= a_1b_1\vec{\imath} \cdot \vec{\imath} + a_1b_2\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} + a_1b_3\vec{\imath} \cdot \vec{k} + a_2b_1\vec{\jmath} \cdot \vec{\imath} + a_2b_2\vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} + \\
&\quad + a_2b_3\vec{\jmath} \cdot \vec{k} + a_3b_1\vec{k} \cdot \vec{\imath} + a_3b_2\vec{k} \cdot \vec{\jmath} + a_3b_3\vec{k} \cdot \vec{k} = \\
&= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3
\end{aligned}$$

3. Pravotočivý systém tří vektorů:
   Systém vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ v tomto pořadí je pravotočivý, jestliže $\widehat{\vec{a}\vec{b}} \in (0, \pi)$, $\widehat{\vec{b}\vec{c}} \in (0, \pi)$.

4. Vektorový součin vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$:
   $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{v}$, kde $|\vec{v}| = \alpha\beta \sin \widehat{\vec{a}\vec{b}}$, $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{b} \cdot \vec{v} = 0$ a systém vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$ je pravotočivý. (Je to vektor kolmý k rovině určené vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, jehož velikost je číselně rovna ploše rovnoběžníku určeného vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ a orientovaný podle pravidla pravé ruky.)

   Pro libovolné vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ platí:

   (i) $|\vec{a} \times \vec{b}| = \alpha\beta\sin\varphi = \alpha(\beta\sin\varphi) = \alpha\beta'$, $\quad (\varphi = \widehat{\vec{a}\vec{b}})$.
   Je-li tedy $\vec{b}\,'$ kolmý průmět vektoru $\vec{b}$ do roviny kolmé k vektoru $\vec{a}$, je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}\,'$

   (ii) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

   (iii) $s(\vec{a} \times \vec{b}) = (s\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (s\vec{b})$ pro libovolný skalár s

   (iv) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

D.: geometricky.

$\vec{a}$ kolmý k rovině papíru, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$ kolmé průměty vektorů $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Označme $\varphi_1 = \widehat{\vec{c}'\vec{b}'}$, $\varphi_2 = \widehat{\vec{b}'(\vec{a}\times\vec{c})}$, $\varphi_3 = \widehat{(\vec{a}\times\vec{c})(\vec{a}\times\vec{b})}$

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c})\cdot(\vec{b}'+\vec{c}') &= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}'+(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}'+(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}'+(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}' = \\ &= 0+\alpha\gamma'\beta'\cos(-\varphi_2)+\alpha\beta'\gamma'\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)+0 = \\ &= \alpha\beta'\gamma'(\cos\varphi_2+\cos(\pi-\varphi_2)) = \alpha\beta'\gamma'(\cos\varphi_2-\cos\varphi_2) = 0\end{aligned}$$

a tedy $(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c})\perp(\vec{b}'+\vec{c}')$, což znamená $\vec{a}\times(\vec{b}'+\vec{c}')^0 = (\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c})^0$.

Dále rovnoběžník určený vektory $\vec{c}'$ a $\vec{b}'$ je podobný rovnoběžníku určenému vektory $\vec{a}\times\vec{c}$ a $\vec{a}\times\vec{b}$ a poněvadž $|\vec{a}\times\vec{b}| = \alpha\beta'$, $|\vec{a}\times\vec{c}| = \alpha\gamma'$, platí

$|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}| = \alpha|\vec{b}'+\vec{c}'| = |\vec{a}\times(\vec{b}'+\vec{c}')|$.

Tedy $\vec{a}\times(\vec{b}'+\vec{c}') = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ a vzhledem k (i) je tvrzení dokázáno. □

(v) $\vec{a}\times\vec{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a} = 0$ nebo $\vec{b} = 0$ nebo $\vec{a}\|\vec{b}$ (tj. $\vec{a} = \kappa\vec{b}$ pro nějaký skalár κ)

(vi) Je-li ortonormální báze $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ navíc pravotočivá (tj. $\vec{\imath}\times\vec{\jmath} = \vec{k}$, $\vec{\jmath}\times\vec{k} = \vec{\imath}$, $\vec{k}\times\vec{\imath} = \vec{\jmath}$) pak

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= (a_1\vec{\imath}+a_2\vec{\jmath}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{\imath}+b_2\vec{\jmath}+b_3\vec{k}) = \\ &= a_1b_1\,\vec{\imath}\times\vec{\imath}+a_2b_1\,\vec{\jmath}\times\vec{\imath}+a_3b_1\,\vec{k}\times\vec{\imath}+a_1b_2\,\vec{\imath}\times\vec{\jmath}+a_2b_2\,\vec{\jmath}\times\vec{\jmath}+a_3b_2\,\vec{k}\times\vec{\jmath}+ \\ &\quad +a_1b_3\,\vec{\imath}\times\vec{k}+a_2b_3\,\vec{\jmath}\times\vec{k}+a_3b_3\,\vec{k}\times\vec{k} = \\ &= -a_2b_1\,\vec{k}+a_3b_1\,\vec{\jmath}+a_1b_2\,\vec{k}-a_3b_2\,\vec{\imath}-a_1b_3\,\vec{\jmath}+a_2b_3\,\vec{\imath} = \\ &= (a_2b_3-a_3b_2)\vec{\imath}-(a_1b_3-a_3b_1)\vec{\jmath}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}\end{aligned}$$

Vektorový součin lze tedy symbolicky zapsat $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

5. Ještě jedna interpretace vektorového součinu:
   Nechť nějaké těleso rotuje kolem pevné osy s úhlovou rychlostí ω. Zavedeme vektor $\vec{\omega}$ tak, aby byl rovnoběžný s osou rotace, měl velikost ω a byl orientován tak, že položíme-li na osu rotace pravou ruku s prsty ve směru rotace, bude $\vec{\omega}$ směřovat na stranu palce.
   Na ose rotace zvolíme vztažný bod O a polohu libovolného bodu tělesa popíšeme směrovým vektorem $\vec{r}$. Nechť $\vec{r} = \vec{b}+\vec{a}$, kde $\vec{b}$ leží v ose rotace a $\vec{a}$ je na něj kolmý.
   Velikost rychlosti bodu určeného polohovým vektorem $\vec{r}$ je $|\vec{v}| = \omega|\vec{a}|$. Vektor $\vec{v}$ je kolmý k vektoru $\vec{\omega}$ i k vektoru $\vec{a}$ a systém vektorů $\vec{\omega}$, $\vec{a}$, $\vec{v}$ je pravotočivý. Lze tedy psát $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{a} = \vec{\omega}\times(\vec{r}-\vec{b}) = \vec{\omega}\times\vec{r}-\vec{\omega}\times\vec{b} = \vec{\omega}\times\vec{r}$, neboť $\vec{b}\|\vec{\omega}$.

6. Smíšený součin vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:
   $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.
   Označme $\varphi = \widehat{\vec{b}\vec{c}}$, $\vartheta = \widehat{\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})}$. Pak $|\vec{b}\times\vec{c}| = \beta\gamma\sin\varphi$,
   $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \alpha\beta\gamma\sin\varphi\cos\vartheta = (\alpha\cos\vartheta)(\beta\gamma\sin\varphi)$,
   tedy $|[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]|$ je objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
   Úhel ϑ může být větší než pravý. V tom případě by vektor $\vec{a}$ směřoval na opačnou stranu, než na obrázku, systém vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ by nebyl pravotočivý.

   Platí:

   (i) Jestliže $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) > 0$ pak je systém vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ pravotočivý.

   (ii) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

   D.: Podle 4.(vi) je

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

□

5.10.2 Definice

Zobrazení $\vec{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) = f_1(t)\vec{\imath} + f_2(t)\vec{\jmath} + f_3(t)\vec{k}$ nazýváme *vektorovou funkcí*.

Reálnou funkci jedné reálné proměnné budeme někdy nazývat *skalární funkce*.

Poznámky: $\vec{f}$ je spojitá v t_0 právě tehdy, když $f_1,\ f_2,\ f_3$ jsou spojité v t_0

$\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t) = \vec{a}$ právě tehdy, když $\lim\limits_{t\to t_0} f_1(t) = a_1,\ \lim\limits_{t\to t_0} f_2(t) = a_2,\ \lim\limits_{t\to t_0} f_3(t) = a_3$.

Derivace: $\dfrac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t}(t_0) = \vec{f}\,'(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\vec{f}(t)-\vec{f}(t_0)}{t-t_0} = f_1'(t_0)\vec{\imath} + f_2'(t_0)\vec{\jmath} + f_3'(t_0)\vec{k}$.

Má-li vektorová funkce $\vec{f}$ derivaci v bodě t_0 je v t_0 spojitá.

5.10.3 Věta

Buďte $\vec{f},\ \vec{g}$ vektorové funkce mající derivaci, φ skalární funkce mající derivaci. Pak

1. $\dfrac{\mathrm{d}(\vec{f}\pm\vec{g})}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t} \pm \dfrac{\mathrm{d}\vec{g}}{\mathrm{d}t}$
2. $\dfrac{\mathrm{d}(\varphi\vec{f})}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{f} + \varphi\dfrac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t}$
3. $\dfrac{\mathrm{d}(\vec{f}\cdot\vec{g})}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{g} + \vec{f}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\vec{g}}{\mathrm{d}t}$
4. $\dfrac{\mathrm{d}(\vec{f}\times\vec{g})}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t}\times\vec{g} + \vec{f}\times\dfrac{\mathrm{d}\vec{g}}{\mathrm{d}t}$

D.: 1. a 2. jsou přímé důsledky 2.1.5.

3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{f}\cdot\vec{g}) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f_1g_1 + f_2g_2 + f_3g_3) = f_1'g_1 + f_1g_1' + f_2'g_2 + f_2g_2' + f_3'g_3 + f_3g_3' = \dfrac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{g} + \vec{f}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\vec{g}}{\mathrm{d}t}$
4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{f}\times\vec{g}) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big((f_2g_3 - f_3g_2)\vec{\imath} - (f_1g_3 - f_3g_1)\vec{\jmath} + (f_1g_2 - f_2g_1)\vec{k}\Big) =$

$$= (f_2'g_3 + f_2g_3' - f_3'g_2 - f_3g_2')\vec{\imath} - (f_1'g_3 + f_1g_3' - f_3'g_1 - f_3g_1')\vec{\jmath} + (f_1'g_2 + f_1g_2' - f_2'g_1 - f_2g_1')\vec{k} =$$

$$= (f_2'g_3 - f_3'g_2)\vec{\imath} - (f_1'g_3 - f_3'g_1)\vec{\jmath} + (f_1'g_2 - f_2g_1')\vec{k} + (f_2g_3' - f_3'g_2)\vec{\imath} - (f_1g_3' - f_3g_1')\vec{\jmath} + (f_1g_2' - f_2g_1')\vec{k} =$$

$$= \vec{f}\,'\times\vec{g} + \vec{f}\times\vec{g}\,'$$

□

5.10.4 Věta

Buď $\vec{f}$ nekonstantní jednotková funkce, tj. $\vec{f}(t)\cdot\vec{f}(t) = 1$ pro každé $t\in\mathrm{Dom}\,\vec{f}$, která má v každém $t\in\mathrm{Dom}\,\vec{f}$ derivaci. Pak vektory $\vec{f}(t)$ a $\vec{f}\,'(t)$ jsou kolmé pro každé $t\in\mathrm{Dom}\,\vec{f}$.

D.:

$$\begin{aligned} \vec{f}\cdot\vec{f} &= 1 \quad \Big/\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{f} + \vec{f}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t} &= 0 \\ 2\left(\frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{f}\right) &= 0 \end{aligned}$$

z čehož plyne tvrzení. □

Podle 5.10.3.2 je $\dfrac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(\varphi\vec{f}^0)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{f}^0 + \varphi\dfrac{\mathrm{d}\vec{f}^0}{\mathrm{d}t}$ a podle 5.10.4 je $\vec{f}^0 \perp \dfrac{\mathrm{d}\vec{f}^0}{\mathrm{d}t}$. Dostali jsme tedy rozklad derivace vektorové funkce na složku rovnoběžnou s touto funkcí a na složku na ni kolmou.

5.10.5 Poznámka

Graf spojité vektorové funkce $\vec{r}$ je křivka v prostoru $\mathbb{R}^3$. Má-li funkce $\vec{r}$ v bodě t_0 derivaci různou od $\vec{o}$, pak přímka o parametrické rovnici

$$\vec{p}(t) = \vec{r}(t_0) + (t - t_0)\vec{r}\,'(t_0)$$

je tečnou ke křivce $\vec{r} = \vec{r}(t)$ v bodě $\vec{r}(t_0)$:

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{p}(t)}{t - t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) - (t - t_0)\vec{r}\,'(t_0)}{t - t_0} = \vec{r}\,'(t_0) - \vec{r}\,'(t_0) = 0\,.$$

5.10.6 Definice

Funkci $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ nazýváme *skalární pole*, zobrazení $\vec{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ nazýváme *vektorové pole*.

$\vec{r} = (x, y, z)$ — polohový vektor bodu (x, y, z)
$f(x, y, z) = f(\vec{r}),\ \vec{g}(x, y, z) = \vec{g}(\vec{r})$
Složky vektorového pole jsou skalární pole.

5.10.7 Diferenciální operátory

Hamiltonův operátor (symbolický vektor) $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}$. (čte se „nabla“)

Je-li f skalární pole, definujeme jeho *gradient*: $\operatorname{grad} f = \nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$.
Gradient skalárního pole je vektorovým polem.
Je-li f vektorové pole, definujeme jeho

divergenci: $\operatorname{div}\vec{g} = \nabla\cdot\vec{g} = (\dfrac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k})\cdot(g_1\vec{\imath} + g_2\vec{\jmath} + g_3\vec{k}) = \dfrac{\partial g_1}{\partial x} + \dfrac{\partial g_2}{\partial y} + \dfrac{\partial g_3}{\partial z}$

rotaci: $\operatorname{rot}\vec{g} = \nabla\times\vec{g} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = \left(\dfrac{\partial g_3}{\partial y} - \dfrac{\partial g_2}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\dfrac{\partial g_3}{\partial x} - \dfrac{\partial g_1}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial x} - \dfrac{\partial g_1}{\partial y}\right)\vec{k}$

gradient: $\operatorname{grad}\vec{g} = \nabla\vec{g} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_3}{\partial x} & \dfrac{\partial g_3}{\partial y} & \dfrac{\partial g_3}{\partial z} \end{pmatrix}$

Divergence vektorového pole je skalární pole, rotace vektorového pole je vektorové pole.
Laplaceův operátor $\Delta = \nabla\cdot\nabla = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ přiřadí skalárnímu poli skalární pole, vektorovému poli vektorové pole.

5.10.8 Věta

Nechť $\varphi,\ \psi$ jsou skalární a $\vec{u},\ \vec{v}$ vektorová pole. Pak platí

1. $\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \psi\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{grad}\psi$.

D.: $\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi)\vec{\imath} + \dfrac{\partial}{\partial y}(\varphi\psi)\vec{\jmath} + \dfrac{\partial}{\partial z}(\varphi\psi)\vec{k} = \psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\imath} + \varphi\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\vec{\imath} + \psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\jmath} + \varphi\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\vec{\jmath} + \psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} + \varphi\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\vec{k}$ □

2. $\operatorname{div}(\varphi\vec{v}) = \operatorname{grad}\varphi \cdot \vec{v} + \varphi \operatorname{div}\vec{v}$

   D.: $\operatorname{div}(\varphi\vec{v}) = \dfrac{\partial\varphi v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi v_2}{\partial y} + \dfrac{\partial\varphi v_3}{\partial y} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}v_1 + \varphi\dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}v_2 + \varphi\dfrac{\partial v_2}{\partial y} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}v_3 + \varphi\dfrac{\partial v_3}{\partial z}$ □

3. $\operatorname{div}(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{v}\cdot\operatorname{rot}\vec{u} - \vec{u}\cdot\operatorname{rot}\vec{v}$

   D.:
$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vec{u}\times\vec{v}) &= \frac{\partial}{\partial x}(u_2v_3 - u_3v_2) - \frac{\partial}{\partial y}(u_1v_3 - u_3v_1) + \frac{\partial}{\partial z}(u_1v_2 - u_2v_1) = \\
&= \frac{\partial u_2}{\partial x}v_3 + \frac{\partial v_3}{\partial x}u_2 - \frac{\partial u_3}{\partial x}v_2 - \frac{\partial v_2}{\partial x}u_3 - \frac{\partial u_1}{\partial y}v_3 - \frac{\partial v_3}{\partial y}u_1 + \frac{\partial u_3}{\partial y}v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial y}u_3 + \\
&\quad + \frac{\partial u_1}{\partial z}v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial z}u_1 - \frac{\partial u_2}{\partial z}v_1 - \frac{\partial v_1}{\partial z}u_2 = \\
&= v_1\left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\right) + v_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}\right) + v_3\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) + \\
&\quad + u_1\left(\frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial y}\right) + u_2\left(\frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial z}\right) + u_3\left(\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$
   □

4. $\operatorname{grad}(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{v}\cdot\operatorname{grad}\vec{u} + \vec{u}\cdot\operatorname{grad}\vec{v}$. Přitom $\cdot$ na pravé straně rovnosti značí maticové násobení, vektory považujeme za řádkové.

   D.:
$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(\vec{u}\cdot\vec{v}) &= \operatorname{grad}(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) = \operatorname{grad}\sum_{i=1}^{3} u_iv_i = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}v_i + u_i\frac{\partial v_i}{\partial x}\right), \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}v_i + u_i\frac{\partial v_i}{\partial y}\right), \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial z}v_i + u_i\frac{\partial v_i}{\partial z}\right)\right) = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{3} v_i\frac{\partial u_i}{\partial x}, \sum_{i=1}^{3} v_i\frac{\partial u_i}{\partial y}, \sum_{i=1}^{3} v_i\frac{\partial u_i}{\partial z}\right) + \left(\sum_{i=1}^{3} u_i\frac{\partial v_i}{\partial x}, \sum_{i=1}^{3} u_i\frac{\partial v_i}{\partial y}, \sum_{i=1}^{3} u_i\frac{\partial v_i}{\partial z}\right) = \\
&= (v_1, v_2, v_3)\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} + (u_1, u_2, u_3)\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$
   □

5.10.9 Definice

Vektorová čára vektorového pole $\vec{g} = \vec{g}(\vec{r})$ je křivka v $\mathbb{R}^3$ taková, že vektor $\vec{g}(\vec{r})$ je tečným vektorem k této křivce v bodě určeném polohovým vektorem $\vec{r}$.

Je-li vektorové pole modelem proudění kapaliny, vektorové čáry se nazývají *proudnice*. Je-li vektorové pole modelem silového pole (gravitačního, elektromagnetického, ...), vektorové čáry se nazývají *siločáry*.

Má-li vektorová čára pole $\vec{g}$ parametrické rovnice $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$, pak podle 5.10.5 je $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g_1$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g_2$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = g_3$, neboli
$$\frac{\mathrm{d}x}{g_1} = \frac{\mathrm{d}y}{g_2} = \frac{\mathrm{d}z}{g_3}\,.$$
Tato rovnice se nazývá *diferenciální rovnice vektorové čáry*.

Naopak, jestliže diferenciály složek vektoru $\vec{r} = \vec{r}(t)$ splňují předchozí rovnici, pak
$$g_2\mathrm{d}x - g_1\mathrm{d}y = 0,\ g_3\mathrm{d}y - g_2\mathrm{d}z = 0,\ g_3\mathrm{d}x - g_1\mathrm{d}z = 0\,.$$

Odtud

$$\vec{o} = (g_3 \mathrm{d}y - g_2 \mathrm{d}z)\vec{\imath} - (g_3 \mathrm{d}x - g_1 \mathrm{d}z)\vec{\jmath} + (g_2 \mathrm{d}x - g_1 \mathrm{d}y)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = \mathrm{d}\vec{r} \times \vec{g}\,,$$

tedy vektory $\mathrm{d}\vec{r}$ a $\vec{g}$ jsou rovnoběžné.

5.10.10 Definice

Buď $\vec{g} = \vec{g}(\vec{r})$ vektorové pole. Existuje-li skalární pole $f = f(\vec{r})$ takové, že $\vec{g} = -\operatorname{grad} f$, pak se $\vec{g}$ nazývá *potenciálové pole* a f se nazývá *potenciál* vektorového pole $\vec{g}$.

5.10.11 Věta

Vektorové pole $\vec{g} = \vec{g}(\vec{r})$ je potenciálové s potenciálem třídy C^2 právě tehdy, když $\operatorname{rot} \vec{g} = \vec{o}$ v každém bodě $\operatorname{Dom} \vec{g}$.

D.: Nechť $\vec{g}$ je potenciálové pole a f je jeho potenciál. Pak
$g_1 = -\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $g_2 = -\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $g_3 = -\dfrac{\partial f}{\partial z}$ a tedy $\dfrac{\partial g_1}{\partial y} = \dfrac{\partial g_2}{\partial x}$, $\dfrac{\partial g_1}{\partial z} = \dfrac{\partial g_3}{\partial x}$, $\dfrac{\partial g_2}{\partial z} = \dfrac{\partial g_3}{\partial y}$.
Odtud $\operatorname{rot} \vec{g} = \left(\dfrac{\partial g_3}{\partial y} - \dfrac{\partial g_2}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\dfrac{\partial g_3}{\partial x} - \dfrac{\partial g_1}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial x} - \dfrac{\partial g_1}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{o}$.
Opačná implikace plyne z 5.3.9. □

5.10.12 Poznámka (ospravedlnění pojmu rotace)

Nechť tuhé těleso rotuje kolem pevné osy procházející počátkem soustavy souřadnic úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$. (sr. 5.10.1.5)
Rychlost každého bodu tělesa o polohovém vektoru $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ je $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, neboli

$$v_1 = \omega_2 z - \omega_3 y,\ v_2 = \omega_3 x - \omega_1 z,\ v_3 = \omega_1 y - \omega_2 x\,.$$

Úhlová rychlost $\vec{\omega}$ nezávisí na $\vec{r}$ a tedy

$$\frac{\partial v_2}{\partial z} = -\omega_1,\ \frac{\partial v_3}{\partial y} = \omega_1,\ \to\ \omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} = \omega_2,\ \frac{\partial v_3}{\partial x} = -\omega_2,\ \to\ \omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = -\omega_3,\ \frac{\partial v_2}{\partial x} = \omega_3,\ \to\ \omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)$$

Odtud plyne, že

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\vec{k}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{v}\,.$$

Úhlová rychlost rotace (ve významu „otáčení“) tuhého tělesa je rovna polovině rotace (ve významu „diferenciální operátor“) rychlosti jeho bodů.

Představíme-li si vektorové pole jako proudící kapalinu a je-li alespoň v jednom bodě rotace tohoto pole nenulová, lze si okolí tohoto bodu představit jako tuhé těleso, které rotuje. Neboli že v kapalině je vír.

Proto pole $\vec{g}$, které má (alespoň v jisté oblasti) nenulovou rotaci, se nazývá *vírové*. Potenciálové pole se někdy nazývá *nevírové*.

5.11 Cvičení

Zjistěte, zda existuje limita funkce $y = f(x, y)$ v daném bodě (x_0, y_0); pokud ano, vypočítejte ji.

1) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 - (x-y)^2}$, $(0,0)$, 2) $f(x,y) = \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}$, $(0,0)$,

3) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2}$, $(0,1)$, 4) $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy}$, $(0,\infty)$,

5) $f(x,y) = \sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$, (∞,∞), 6) $f(x,y) = \log_x(x+y)$, $(1,0)$.

Vypočítejte parciální derivace prvního a druhého řádu funkcí

7) $f(x,y) = xy + \dfrac{x}{y}$, 8) $f(x,y) = \ln(x+y^2)$, 9) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$,

10) $f(x,y) = x^y$, 11) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 12) $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$.

13) Ukažte, že funkce $f(x,y) = \ln\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ (resp. $f(x,y,z) = 1/\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$) splňuje Laplaceovu rovnici $f_{xx} + f_{yy} = 0$ (resp. $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$).

14) Najděte derivaci funkce $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ ve směru jednotkového vektoru, který svírá úhel α s kladným směrem osy x, v bodě $(1,1)$. Pro jaké α je tato derivace největší, nejmenší, rovna nule?

15) Vypočítejte směrovou derivaci funkce $f(x,y) = 1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ v bodě $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$, ve směru jednotkového vektoru vnitřní normály ke křivce $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ v bodě $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$.

16) Vypočítejte úhel mezi gradienty funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ v bodech $(\varepsilon,0,0)$, $(0,\varepsilon,0)$.

17) Najděte příklad funkce $z = f(x,y)$, která je v bodě $(0,0)$ spojitá, má v něm derivaci, ale nemá diferenciál.

Vypočítejte první diferenciál dané funkce v daném bodě

18) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$, $(\sqrt{3},1)$, 19) $f(x,y,z) = x^{y^z}$, $(\mathrm{e},1,0)$.

20) Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ v bodě (x_1,y_1,z_1).

Zjistěte, zda následující výrazy jsou diferenciály nějaké kmenové funkce. Pokud ano, určete ji.

21) $\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \dfrac{\mathrm{d}y}{1+y^2}$, 22) $\dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2x^2+2xy+y^2}$,

23) $(3x^2 - 3yz + 2)\mathrm{d}x + (3y^2 - 3xz + \ln y + 1)\mathrm{d}y + (3z^2 - 3xy + 1)\mathrm{d}z$.

Najděte první a druhé parciální derivace složených funkcí

24) $u(x,y) = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, 25) $u(x,y) = f\left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$, 26) $u(x,y,z) = f\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}\right)$.

Ukažte, že funkce u splňuje danou rovnici (φ, ψ jsou libovolné funkce).

27) $yu_x - xu_y = 0,\ u(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$, 28) $xu_x + \alpha yu_y + \beta zu_z = nu,\ u(x,y,z) = x^n\varphi\left(\dfrac{y}{x^\alpha}, \dfrac{z}{x^\beta}\right)$,

29) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0,\ u(x,y) = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$.

Postupným derivováním eliminujte z výrazů funkce φ, ψ.

30) $u(x,y) = x + \varphi(xy)$, 31) $u(x,y,z) = \varphi(x-y, y-z)$, 32) $u(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$.

Diferenciální rovnice transformujte do nových proměnných ξ, η.

33) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0,\ \xi = \dfrac{y}{x},\ \eta = xy$.

34) $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} - 2xyu_{xy} = xu_x + yu_y,\ \xi = \sqrt{x^2+y^2},\ \eta = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

35) $(1+x^2)u_{xx} + (1+y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0,\ \xi = \ln\left|y + \sqrt{1+y^2}\right|,\ \eta = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|$.

Určete Taylorův polynom 2. stupně s daným středem následujících funkcí

36) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x+y}{1-x+y}$, $(0,0)$, 37) $f(x,y) = x^y$, $(1,1)$,

38) $f(x,y,z) = \dfrac{x^3+y^3+z^3}{3} - xyz$, $(1,1,1)$.

Najděte stacionární body daných funkcí a určete jejich druh

39) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2y - 1$, 40) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 1$,

41) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, 42) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \dfrac{z^2}{2} - 3xz - 2y + 2z$,

43) $f(x,y,z) = xy^2z^3(1 - x - 2y - 3z)$, 44) $f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$.

45) dokažte, že rovnice $x^4 - xy + y^4 = 1$ vyjadřuje v okolí bodu $(0,1)$ jistou funkci $y = y(x)$. Zjistěte, zda je tato funkce v bodě 0 konvexní nebo konkávní.

46) Vyšetřete průběh funkce $y = y(x)$ dané implicitně rovnicí $\left(x^2+y^2\right)^2 = x^2 - y^2$.

Vypočítejte druhý diferenciál funkce $z = z(x,y)$, dané implicitně, v obecném bodě

47) $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{z}{y} + 1$, 48) $xyz = x + y + z$.

Najděte lokální extrémy funkce $z = z(x,y)$ dané implicitně rovnicí

49) $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z = 2$, 50) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

51) Napište rovnici tečny ke kružnici, která je průnikem roviny $x + y + z = 0$ se sférou $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, v bodě $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}, \dfrac{\sqrt{6}}{6}, -\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

52) Najděte extrémní vzdálenosti počátku souřadnic od bodů křivky dané rovnicí $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

53) Buďte φ, ψ skalární pole. Vypočítejte $\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\psi)$.

54) Buď $\vec{v}$ vektorové pole. Vypočítejte $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}$.

Výsledky: 1) neexistuje 2) 0 3) 1 4) neexistuje 5) neexistuje 6) neexistuje 7) $f_x = y + \frac{1}{y}, f_y = x - \frac{x}{y^2}$, $f_{xx} = 0, f_{yy} = \frac{2x}{y^3}, f_{xy} = 1 - \frac{1}{y^2}$ 8) $f_x = \frac{1}{x+y^2}, f_y = \frac{2y}{x+y^2}, f_{xx} = \frac{-1}{(x+y^2)^2}, f_{yy} = \frac{2x-2y^2}{(x+y^2)^2}, f_{xy} = \frac{-2y}{(x+y^2)^2}$ 9) $f_x = \frac{1}{x^2+1}, f_y = \frac{1}{y^2+1}, f_{xx} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}, f_{yy} = \frac{-2y}{(y^2+1)^2}, f_{xy} = 0$ 10) $f_x = yx^{y-1}, f_y = x^y \ln x$, $f_{xx} = (y^2-y)x^{y-2}, f_{yy} = x^y(\ln x)^2, f_{xy} = x^{y-1}(1 + y\ln x)$ 11) $f_x = \frac{-x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, f_y = \frac{-y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$, $f_z = \frac{-z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, f_{xx} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}, f_{yy} = \frac{-x^2+2y^2-z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}, f_{zz} = \frac{-x^2-y^2+2z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$, $f_{xy} = \frac{3xy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}, f_{xz} = \frac{3xz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}, f_{yz} = \frac{3yz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$ 12) $f_x = \frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z, f_y = -\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z, f_z = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln\frac{x}{y}$, $f_{xx} = \frac{z^2-z}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z, f_{yy} = \frac{z^2+z}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z, f_{zz} = \left(\frac{x}{y}\right)^z\left(\ln\frac{x}{y}\right)^2, f_{xy} = -\frac{z^2}{xy}\left(\frac{x}{y}\right)^z, f_{xz} = \frac{1+z\ln\frac{x}{y}}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $f_{yz} = -\frac{1+z\ln\frac{x}{y}}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z$ 14) $\cos\alpha + \sin\alpha$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$ nebo $\frac{7\pi}{4}$ 15) $\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{ab}$ 16) $\frac{\pi}{2}$

17) $f(x,y) = \begin{cases} 2x^2 - y, & x > 0, y \in [x^2, 2x^2) \\ 2y - x^2, & x > 0, y \in \left(\frac{x^2}{2}, x^2\right) \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$ 18) $\frac{\mathrm{d}x}{4} + \frac{\mathrm{d}y}{2}$ 19) $\mathrm{d}x$ 20) $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1$ 21) $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$

22) $-\operatorname{arctg}\frac{x+y}{x}$ 23) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2x + z + y\ln y$ 24) $u_x = -\frac{y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right), u_y = \frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)$, $u_{xx} = \frac{y}{x^3}\left(2f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)\right), u_{yy} = \frac{1}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right), u_{xy} = -\frac{1}{x^2}\left(f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)\right)$ 25) $u_x = yf'_{|1} + \frac{1}{y}f'_{|2}$, $u_y = xf'_{|1} - \frac{x}{y^2}f'_{|2}, u_{xx} = y^2 f''_{|11} + 2f''_{|12} + \frac{1}{y^2}f''_{|22}, u_{yy} = x^2 f''_{|11} - 2\frac{x^2}{y^2}f''_{|12} + \frac{x^2}{y^4}f''_{|22} + \frac{2x}{y^3}f'_{|2}$, $u_{xy} = xyf''_{|11} - \frac{x}{y^3}f''_{|22} + f'_{|1} - \frac{1}{y^2}f'_{|2}$ 26) $u_x = \frac{1}{y}f'_{|1}, u_y = -\frac{x}{y^2}f'_{|1} + \frac{1}{z}f'_{|2}, u_z = -\frac{y}{z^2}f'_{|2}, u_{xx} = \frac{1}{y^2}f''_{|11}$, $u_{yy} = \frac{x^2}{y^4}f''_{|11} - \frac{2x}{y^2 z}f''_{|12} + \frac{1}{z^2}f''_{|22} + \frac{x}{y^3}f'_{|1}, u_{zz} = \frac{y^2}{z^4}f''_{|22} + \frac{2y}{z^3}f'_{|2}, u_{xy} = -\frac{x}{y^3}f''_{|11} + \frac{1}{yz}f''_{|12} - \frac{1}{y^2}f'_{|1}, u_{xz} = -\frac{1}{z^2}f''_{|12}$, $u_{yz} = \frac{x}{yz^2}f''_{|12} - \frac{y}{z^3}f''_{|22} - \frac{1}{z^2}f'_{|2}$ 30) $xu_x - yu_y = x$ 31) $u_x + u_y + u_z = 0$ 32) $uu_{xy} = u_x u_y$ 33) $u_{\xi\eta} = \frac{1}{2\eta}u_\xi$

34) $u_{\eta\eta} = 0$ 35) $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$ 36) $\frac{\pi}{4} + x - xy$ 37) $1 - y + xy$

38) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (x-1)(y-1) - (x-1)(z-1) - (y-1)(z-1)$ 39) $(0,1)$ sedlo

40) na přímce $y = x+1$ (neostré) lokální minimum 41) $(1,1)$ ostré lokální minimum, $(0,0)$ sedlo 42) $(2,1,4)$ ostré lokální minimum, $(1,1,1)$ sedlo 43) $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right)$ ostré lokální maximum, $\left(0, y, \frac{1}{3}(2y-1)\right)$, $(x,0,y)$, $(x,y,0)$ nejsou ostré lokální extrémy 44) $\left(\frac{2k+1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi\right)$ ostré lokální maximum, $(k\pi, k\pi, k\pi)$ ostré lokální minimum

45) konkávní 46) Bernoulliho lemniskáta 47) $\frac{-z^2(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y)^2}{y^2(x+z)^3}$ 48) $\frac{2}{(1-xy)^2}\left(y(yz-1)\mathrm{d}x^2 + 2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x(xz-1)\mathrm{d}y^2\right)$

49) $z_{\min} = z\left(-3-\sqrt{6}, -3-\sqrt{6}\right) = -4 - 2\sqrt{6}$, $z_{\max} = z\left(-3+\sqrt{6}, -3+\sqrt{6}\right) = -4 + 2\sqrt{6}$

50) $z_{\min} = z(0,0) = -a$, $z_{\max} = z(0,0) = a$. 51) $x = \frac{\sqrt{6}}{6} + t$, $y = \frac{\sqrt{6}}{6} - t$, $z = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ 52) Nejmenší vzdálenost 1 je od bodů $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; největší vzdálenost 2 je od bodů $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 53) $\nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \varphi\Delta\psi$

54) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v} + \Delta\vec{v}$

Kapitola 6

Obyčejné diferenciální rovnice

6.1 Základní pojmy

6.1.1 Definice

Buď $G \subseteq \mathbb{R}^2$ množina s neprázdným vnitřkem, $f : G \to \mathbb{R}$. Rovnice

$$x' = f(t, x) \tag{6.1}$$

se nazývá *obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu rozřešená vzhledem k derivaci.*
Řešením této rovnice se rozumí diferencovatelná funkce $x : J \to \mathbb{R}$, kde $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval, která splňuje podmínky

$$(t, x(t)) \in G,\ \ x'(t) = f(t, x(t)) \text{ pro každé } t \in J.$$

Graf řešení rovnice (6.1) se nazývá *integrální křivka.*

6.1.2 Příklad

$G = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : \ t > 0\},\ \ f(t, x) = \dfrac{x}{t}.$
Funkce $x(t) = kt$, kde $k \in \mathbb{R}$ je řešením rovnice $x' = \dfrac{x}{t}$ na intervalu $J = (0, \infty)$.

Diferenciální rovnice může mít více řešení.

6.1.3 Definice

Nechť G, f mají stejný význam jako v 6.1.1 a nechť $(t_0, x_0) \in G$ je libovolný bod. Úloha najít řešení rovnice (6.1), které splňuje podmínku

$$x(t_0) = x_0 \tag{6.2}$$

se nazývá *počáteční* nebo *Cauchyova úloha*, podmínka (6.2) se nazývá *počáteční* nebo *Cauchyova podmínka.*

Příklad: Nechť $t_0 > 0,\ x_0 \in \mathbb{R}$. Funkce $x(t) = \dfrac{x_0}{t_0} t$ je řešením úlohy

$$x' = \frac{x}{t},\ \ x(t_0) = x_0$$

na intervalu $J = (0, \infty)$.

6.1.4 Definice

Nechť $x = x(t)$ je řešením úlohy (6.1) (6.2) na intervalu J a $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ je řešením úlohy (6.1) (6.2) na intervalu $\tilde{J}$, $t_0 \in J \cap \tilde{J}$. Jestliže $\tilde{J} \subseteq J$ a pro každé $t \in \tilde{J}$ je $x(t) = \tilde{x}(t)$, řekneme, že řešení $x = x(t)$ je *prodloužením řešení* $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ a že řešení $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ je *zúžením řešení* $x = x(t)$. Jestliže řešení $x = x(t)$ úlohy (6.1) (6.2) není zúžením žádného jiného řešení této úlohy, řekneme, že $x = x(t)$ je *úplným* (*neprodloužitelným*) *řešením* úlohy (6.1) (6.2).

V dalším budeme pod pojmem „řešení“ rozumět úplné řešení.

6.1.5 Příklad

$x(t) \equiv 0,\ x(t) = t^3,\ x(t) = \begin{cases} 0, & x < a \\ (x-a)^3, & x \geq a \end{cases}$, kde $a \geq 0$ je libovolné číslo, jsou tři různá úplná řešení úlohy

$$x' = 3\sqrt[3]{x^2},\ x(0) = 0.$$

6.1.6 Definice

Buď g funkce dvou proměnných. Řekneme, že g je *obecným řešením rovnice* (6.1), jestliže ke každému $(t_0, x_0) \in G$ existuje $C_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $x = x(t) = g(t, C_0)$ je řešením úlohy (6.1) (6.2).
Řešení úlohy (6.1) (6.2) se nazývá *partikulární řešení rovnice* (6.1).

Příklad: $x = Ct$ je obecným řešením rovnice z příkladu 6.1.2.
Rovnice z příkladu 6.1.5 nemá obecné řešení.

6.1.7 Geometrická interpretace

Rovnice (6.1) přiřazuje každému bodu z G právě jednu hodnotu $x' = f(t, x)$, tedy každému bodu $(t_0, x_0) \in G$ lze přiřadit směrový vektor tečny k integrální křivce v bodě (t_0, x_0), tj. přímky $x - x_0 = f(t_0, x_0)(t - t_0)$. Tento vektor má souřadnice $(1, f(t_0, x_0))$. To znamená, že rovnice (6.1) definuje na G vektorové pole. Toto pole se nazývá *směrové pole rovnice* (6.1).

Každá integrální křivka rovnice (6.1) je vektorovou čárou směrového pole (sr. 5.10.9). Směrové pole tedy poskytuje představu o průběhu řešení rovnice (6.1).

Vrstevnice funkce f, (tj. křivky zadané rovnicí $f(t, x) = c$) se nazývají *izokliny rovnice* (6.1). Jsou to křivky, na nichž mají vektory ze směrového pole stejný směr.

6.1.8 Definice

Buď $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ množina s neprázdným vnitřkem, $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^n$. Rovnice

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}),\ \text{kde } \mathbf{x}' = (x_1', x_2', \ldots, x_n') \tag{6.3}$$

se nazývá *systém n obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu* nebo *n-vektorová obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu*.

Počáteční podmínku k rovnici (6.3) lze zadat:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0). \tag{6.4}$$

Pojmy řešení, obecné řešení, partikulární řešení, úplné řešení rovnice (6.3) jsou analogiemi těchto pojmů z jednorozměrného případu. Obecné řešení závisí na n parametrech.

6.1.9 Definice

Buď $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ množina s neprázdným vnitřkem, $f : G \to \mathbb{R}$. Rovnice

$$x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}) \tag{6.5}$$

se nazývá *obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu rozřešená vzhledem k nejvyšší derivaci.*
Řešením této rovnice se rozumí n-krát diferencovatelná funkce $x : J \to \mathbb{R}$, kde $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval, která splňuje podmínky

$$(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)) \in G,\ x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)) \text{ pro každé } t \in J.$$

Počáteční (Cauchyovu) podmínku pro rovnici (6.5) zadáváme ve tvaru

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_0^1,\ x''(t_0) = x_0^2, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1}, \tag{6.6}$$

kde $(t_0, x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^{n-1}) \in G$.
Úplné řešení, obecné řešení, partikulární řešení rovnice (6.5) definujeme analogicky jako u rovnic prvního řádu. Obecné řešení závisí na n parametrech.

6.1.10 Poznámka

Řešení počáteční úlohy (6.5), (6.6) je ekvivalentní s řešením počátečního problému pro systém n diferenciálních rovnic prvního řádu:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{6.7}$$

$$x_1(t_0) = x_0,\ x_2(t_0) = x_0^2,\ \dots,\ x_n(t_0) = x_0^{n-1}, \tag{6.8}$$

v tomto smyslu: Je-li $x = x(t)$ řešením úlohy (6.5), (6.6), pak n-tice funkcí $x_1 = x, x_2 = x', x_3 = x'', \dots, x_n = x^{(n-1)}$ je řešením úlohy (6.7), (6.8) a je-li n-tice funkcí $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$ řešením úlohy (6.7), (6.8), pak je funkce $x = x(t) = x_1(t)$ řešením úlohy (6.5), (6.6).

6.2 Elementární metody řešení ODR

6.2.1 Exaktní rovnice

$$\begin{aligned} x' &= \frac{f(t,x)}{g(t,x)}\,, \quad \text{přičemž } \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = -\frac{\partial g(t,x)}{\partial t} \\ 0 &= f(t,x)\mathrm{d}t - g(t,x)\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Za uvedených podmínek je $f(t,x)\mathrm{d}t - g(t,x)\mathrm{d}x$ totálním diferenciálem nějaké funkce F dvou proměnných (sr. 5.3.9), přičemž platí $\mathrm{d}F(t,x) = 0$. Obecné řešení dané rovnice je tedy implicitně zadáno rovnicí $F(t,x) = C$, kde C je reálná konstanta.

6.2.2 Rovnice se separovanými proměnnými $x' = f(t)g(x)$

Rovností $g(x) = 0$ je implicitně zadáno *singulární* (konstantní) řešení.
Rovností

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = \int f(t)\mathrm{d}t$$

je implicitně zadáno obecné řešení dané rovnice.
Rovností

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{g(\xi)} = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

je implicitně zadáno partikulární řešení této rovnice, které splňuje počáteční podmínku (6.2).

6.2.3 Homogenní rovnice $x' = f\left(\frac{x}{t}\right)$

Zavedeme funkci $u = u(t) = \dfrac{x(t)}{t}$. Pak $x(t) = tu(t),\ x' = u + tu'$. Dosazením do původní rovnice dostaneme

$$u' = \frac{f(u) - u}{t}\,,$$

což je rovnice se separovanými proměnnými pro neznámou funkci u.

6.2.4 Rovnice typu $x' = f\left(\dfrac{at+bx+c}{\alpha t+\beta x+\gamma}\right)$

1. $c = \gamma = 0$. Pak $f\left(\dfrac{at+bx}{\alpha t+\beta x}\right) = f\left(\dfrac{a+b\frac{x}{t}}{\alpha+\beta\frac{x}{t}}\right)$ a daná rovnice je homogenní.

2. $c^2+\gamma^2 \neq 0$, $\dfrac{\alpha}{a} = \dfrac{\beta}{b} = k$.

   Zavedeme funkci $u = u(t) = at + bx$. Pak $u' = a + bx'$ a tedy $x' = \dfrac{u'-a}{b}$. Dosazením do původní rovnice dostaneme
$$u' = a + bf\left(\frac{u+c}{ku+\gamma}\right),$$
   což je rovnice se separovanými proměnnými pro neznámou funkci u.

3. $c^2+\gamma^2 \neq 0$, $a\beta \neq b\alpha$.
   Nechť m a n jsou řešením soustavy lineárních algebraických rovnic
$$\begin{aligned} am + bn &= -c \\ \alpha m + \beta n &= -\gamma\,. \end{aligned}$$
   Zavedeme funkce $u = u(t) = t - m$
   $v = v(t) = x - n$.
   Pak $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}v$,
   $at + bx + c = a(u+m) + b(v+n) + c = au + bv + (am+bn) + c = au + bv$,
   $\alpha t + \beta x + \gamma = \alpha(u+m) + \beta(v+n) + \gamma = \alpha u + \beta v + (\alpha m + bn) + \gamma = \alpha u + \beta v$
   Daná rovnice přejde na tvar
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = f\left(\frac{au+bv}{\alpha u+\beta v}\right),$$
   což je rovnice typu 1. pro neznámou funkci $v = v(u)$.

6.2.5 Lineární rovnice $x' = a(t)x + b(t)$

1. $b(t) \equiv 0$ (homogenní rovnice)
   Je to rovnice se separovanými proměnnými. Partikulární řešení počátečního problému (s podmínkou (6.2)) je:
$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} &= \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau \\ \ln x - \ln x_0 &= \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau \\ x &= x_0 \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$
   Obecné řešení homogenní lineární rovnice lze tedy zapsat
$$x = C \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau\,.$$

2. $b(t) \not\equiv 0$ (nehomogenní rovnice)
   Řešení hledáme ve tvaru
$$x(t) = C(t) \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau$$

(metoda variace konstanty). Pak $x' = (C'(t) + a(t)C(t)) \exp \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau$. Dosazením do dané rovnice dostaneme

$$
\begin{aligned}
(C'(t) + a(t)C(t)) \exp \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau &= a(t)C(t) \exp \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau + b(t) \\
C'(t) &= b(t) \exp \int\limits_{t}^{t_0} a(\tau)\mathrm{d}\tau \\
C(t) - C(t_0) &= \int\limits_{t_0}^{t} \left(b(\sigma) \exp \int\limits_{\sigma}^{t_0} a(\tau)\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}\sigma
\end{aligned}
$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice tedy je

$$
x(t) = \left[const + \int\limits_{t_0}^{t} \left(b(\sigma) \exp \int\limits_{\sigma}^{t_0} a(\tau)\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}\sigma \right] \exp \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau \,.
$$

Partikulární řešení splňující počáteční podmínku (6.2) je

$$
x(t) = \left[x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \left(b(\sigma) \exp \int\limits_{\sigma}^{t_0} a(\tau)\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}\sigma \right] \exp \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau \,.
$$

Jsou-li koeficienty konstantní, $a(t) \equiv A$, $b(t) \equiv B$, pak

$$
x(t) = \left(x_0 + \frac{B}{A} \right) \mathrm{e}^{A(t-t_0)} - \frac{B}{A} \,.
$$

Jiný postup při řešení nehomogenní rovnice:

$$
\begin{aligned}
x' - a(t)x &= b(t) \qquad\qquad / \ \mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} \\
x'\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} - a(t)x\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} &= b(t)\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} \right) &= b(t)\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} \\
x\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} &= \int b(t)\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\
x &= \mathrm{e}^{\int a(t)\mathrm{d}t} \int b(t)\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

6.2.6 Bernoulliova rovnice $x' = a(t)x + b(t)x^r\,, \quad r \in \mathbb{R}$

Zavedeme funkci $u = u(t) = x(t)^{1-r}$. Pak $x = u^{\frac{1}{1-r}}$, $x' = \dfrac{1}{1-r} u^{\frac{1}{1-r}-1}u'$. Dosadíme do dané rovnice:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-r} u^{\frac{r}{1-r}} u' &= a(t)u^{\frac{1}{1-r}} + b(t)u^{\frac{r}{1-r}} \qquad / \ (1-r)u^{\frac{r}{r-1}} \\
u' &= (1-r)a(t)u + (1-r)b(t)\,,
\end{aligned}
$$

Což je lineární rovnice pro neznámou funkci u.

Jsou-li koeficienty konstantní, $a(t) \equiv A$, $b(t) \equiv B$, lze použít substituci

$$
x = \left(y - \frac{B}{A} \right)^{-\frac{1}{r-1}} .
$$

pak

$$x' = -\frac{1}{r-1}\left(y - \frac{B}{A}\right)^{-\frac{1}{r-1}} y'$$

a tedy

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{r-1}\left(y-\frac{B}{A}\right)^{-\frac{1}{r-1}} y' &= \left(A + B\left(y-\frac{B}{A}\right)^{-1}\right)\left(y-\frac{B}{A}\right)^{-\frac{1}{r-1}} \\
-\frac{1}{r-1}y' &= \left(A + B\frac{A}{Ay-B}\right)\frac{Ay-B}{A} \\
\frac{1}{1-r}y' &= \frac{A^2y - AB + AB}{Ay-B}\frac{Ay-B}{A} \\
y' &= (1-r)Ay,
\end{aligned}$$

což je lineární homogenní rovnice.

6.2.7 Rovnice nerozřešená vzhledem k derivaci $F(t, x, x') = 0$

Zavedeme funkci $p = p(t) = x'(t)$.

1. Rovnice autonomní $\quad F(x, x') = 0$
   Rovnicí $F(x, p) = 0$ může být implicitně zadána funkce $p = p(x)$. Rovnici $F(x, p(x)) = 0$ derivujeme podle proměnné x:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x,p) + \frac{\partial F}{\partial p}(x,p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,p)}{\frac{\partial F}{\partial p}(x,p)},
\end{aligned}$$

   což je rovnice pro neznámou funkci p nezávisle proměnné x rozřešená vzhledem k derivaci. Je-li $p = p(x)$ řešením poslední rovnice, pak rovnice se separovanými proměnnými $x' = p(x)$ je řešením původní rovnice; její obecné řešení je tedy implicitně zadáno rovnicí

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{p(x)} = t + const\,.$$

2. Rovnice nezávisející na neznámé funkci $\quad F(t, x') = 0$.
   Rovnici $F(t, p) = 0$ derivujeme podle proměnné t:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t}(t,p) + \frac{\partial F}{\partial p}(t,p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}(t,p)}{\frac{\partial F}{\partial p}(t,p)},
\end{aligned}$$

   což je rovnice pro neznámou funkci $p = p(t)$ rozřešená vzhledem k derivaci. Je-li $p = p(t)$ řešením poslední rovnice, je funkce $x = x(t) = \int p(t)\mathrm{d}t$ obecným řešením dané rovnice.

3. Clairautova rovnice $\quad x = tx' + g(x')$.
   Rovnici $x = tp + g(p)$ derivujeme podle proměnné t:

$$\begin{aligned}
p &= p + t\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + g'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \\
0 &= (t + g'(p))\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

Musí tedy být $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = 0$ nebo $t = -g'(p)$.
Z první rovnosti a dané rovnice dostaneme obecné řešení

$$x(t) = ct + g(c),$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta; z druhé rovnice dostaneme parametrické vyjádření singulárního řešení

$$\begin{aligned} t &= -g'(p) \\ x &= -pg'(p) + g(p)\,, \end{aligned}$$

kde p je parametr.

4. Lagrangeova rovnice $\quad x = tf(x') + g(x')$.
   Rovnici $x = tf(p) + g(p)$ derivujeme podle proměnné t:

$$\begin{aligned} p &= f(p) + tf'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + g'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \\ p - f(p) &= (tf'(p) + g'(p))\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

   Má-li rovnice $p - f(p) = 0$ řešení $p \equiv c$, pak $x(t) = ct + c_1$ je singulárním řešením dané rovnice. Konstantu c_1 určíme dosazením do dané rovnice:

$$\begin{aligned} ct + c_1 &= tf(c) + g(c) \\ c_1 &= t(f(c) - c) + g(c) \end{aligned}$$

   a poněvadž $f(c) = c$, je $c_1 = g(c)$. Singulární řešení Lagrangeovy rovnice tedy je

$$x(t) = ct + g(c)\,,$$

   kde c je řešením rovnice $c = f(c)$ (je pevným bodem funkce f).
   Pro $p \neq f(p)$ dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p} = \frac{tf'(p) + g'(p)}{p - f(p)}\,,$$

   což je lineární rovnice pro neznámou funkci t nezávisle proměnné p. Označíme-li její řešení $t = t(p) = \Phi(p)$, pak

$$\begin{aligned} t &= \Phi(p) \\ x &= f(p)\Phi(p) + g(p) \end{aligned}$$

   je parametrickým vyjádřením obecného řešení Lagrangeovy rovnice.

6.2.8 Rovnice typu $x'' = f(x)$

Rovnici vynásobíme $2x'$:

$$\begin{aligned} 2x'x'' &= 2x'f(x) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x'^2\right) &= 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}f(x) \end{aligned}$$

Položíme-li $p = x'$, máme

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p^2 &= 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}f(x) \\ \frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= 2f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}x} &= 2f(x) \\ p^2 &= 2\int f(x)\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Položíme dále $F(x) = 2\int f(x)\mathrm{d}x$ a dostaneme

$$\begin{aligned} p &= \pm\sqrt{F(x)} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \pm\sqrt{F(x)}\,, \end{aligned}$$

což je rovnice prvního řádu se separovanými proměnnými.

6.2.9 Rovnice typu $F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \ldots, x^{(n)}) \; = \; 0, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$

Položíme $y = y(t) = x^{(k)}(t)$ a dostaneme rovnici

$$F(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-k)}) \; = \; 0\,,$$

což je rovnice řádu o k nižšího, než daná rovnice.

6.2.10 Autonomní rovnice typu $F(x, x', x'', \ldots, x^{(n)}) \; = \; 0$

Položíme $p = p(t) = x'(t)$. Pak

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \\ x''' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)^2 + p\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x^2}\right)p\,. \end{aligned}$$

Postupujeme-li tak dále, vidíme, že

$$x^{(k)} \; = \; f_k\left(p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}\right)$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$. (f_k je nějaká funkce k proměnných.) Dosazením do původní rovnice tedy dostaneme

$$F\left(x, p, p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, f_3\left(p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x^2}\right), \ldots, f_n\left(p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)\right) \; = \; 0\,,$$

neboli

$$G\left(x, p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}p}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right) \; = \; 0\,,$$

což je rovnice řádu o jedna nižšího, než daná rovnice.

6.2.11 Rovnice homogenní v $x, x', x'', \ldots, x^{(n)}$

Nechť F je funkce $n+1$ proměnných splňující podmínku

$$F(z_0, cz_1, cz_2, \ldots, cz_n) \; = \; cF(z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n) \tag{6.9}$$

pro každé $c \in \mathbb{R}$ a každé $(z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \operatorname{Dom} F$.
Řešení rovnice

$$F(t, x, x', x'' \ldots, x^{(n)}) \; = \; 0$$

lze hledat ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t}$, kde $y = y(t)$ je nová neznámá funkce. Je totiž

$$\begin{aligned} x' &= y\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} \\ x'' &= y'\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} + y^2\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} = (y' + y^2)\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} \\ x''' &= (y'' + 2yy')\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} + (y' + y^2)y\,\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} = (y'' + 3yy' + y^3)\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} \\ &\;\vdots \end{aligned}$$

Dosadíme-li z těchto rovnic do dané rovnice, vypadne vzhledem k podmínce (6.9) faktor $\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t}$ a dostaneme rovnici řádu o 1 nižšího, než byla daná rovnice.

6.2.12 Ekvidimensionální rovnice

Řekneme, že rovnice
$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) \;=\; 0$$
je *ekvidimensionální v nezávisle proměnné*, jestliže změna měřítka nezávisle proměnné $t \mapsto at$ pro každé $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nezmění její tvar. Transformace $t = \mathrm{e}^{\tau}$ převede danou rovnici na rovnici autonomní (typ 6.2.10).

6.3 Existence a jednoznačnost řešení systému ODR

Budeme se zabývat úlohou (6.3), (6.4). Pro vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ definujeme *normu* $|\mathbf{x}| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.

Poznamenejme, že funkce ρ definovaná na $(\mathbb{R}^n)^2$ předpisem $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ je metrikou na $\mathbb{R}^n$. (Je to taxíkářská metrika, 4.1.2.3.)

6.3.1 Lemma

Buď $\mathbf{f}$ spojitá na $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Funkce $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ je řešením úlohy (6.3), (6.4) na intervalu J právě tehdy, když pro každé $t \in J$ je $(t, \mathbf{x}(t)) \in G$ a
$$\mathbf{x}(t) \;=\; \mathbf{x}^0 + \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\mathrm{d}s\,. \tag{6.10}$$

D.: „$\Rightarrow$“ Nechť $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ je řešením úlohy (6.3), (6.4) na J. Pak
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{x}(s) \;=\; \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))$$
na J. Integrací této rovnosti podle s v mezích $[t_0, t]$ dostaneme:
$$\begin{aligned} [\mathbf{x}(s)]_{t_0}^{t} \;&=\; \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\mathrm{d}s \\ \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0) \;&=\; \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\mathrm{d}s \end{aligned}$$
a vzhledem k (6.4) funkce $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ splňuje (6.10).

„$\Leftarrow$“ Nechť funkce $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ splňuje (6.10). Pak $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 + \int\limits_{t_0}^{t_0} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\mathrm{d}s = \mathbf{x}^0$, tedy je splněna podmínka (6.4). Derivováním (6.10) podle t dostaneme (6.3). $\square$

Nechť $C^1(J)$ je množina (vektorových) funkcí $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ diferencovatelných na uzavřeném intervalu J takových, že $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$. Na této množině zavedeme metriku $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| \;:\; t \in J\}$ (metrika stejnoměrné konvergence, sr. 4.1.2.4). Prostor $(C^1(J), \rho)$ je úplný (sr. 4.4.2.4). Dále definujme zobrazení $F : C^1(J) \to C^1(J)$ předpisem:
$$F(\mathbf{x})(t) \;=\; \mathbf{x}^0 + \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\mathrm{d}s\,.$$
Řešení úlohy (6.3), (6.4), tedy funkce, která splňuje (6.10), je zřejmě pevným bodem zobrazení F.
Podaří-li se tedy ukázat, že F je kontrakce úplného metrického prostoru $(C^1(J), \rho)$ (sr. 4.5.9), z Banachovy věty 4.5.14 vyplyne, že existuje jediný pevný bod tohoto zobrazení, tedy že existuje jediné diferencovatelné řešení úlohy (6.3), (6.4).

6.3.2 Věta (Picard [1856 – 1941] – Lindelöf [1870 – 1946])

Buďte $a, b \in \mathbb{R},\ a, b > 0,\ t_0 \in \mathbb{R},\ \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Označme $\tilde{J} = [t_0, t_0 + a],\ D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| \leq b\}$, $m = \max\{|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})| : (t, \mathbf{x}) \in \tilde{J} \times D\}$, $\delta = \min\left\{a, \dfrac{b}{m}\right\}$. Nechť funkce $\mathbf{f} : \tilde{J} \times D \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a vzhledem k $\mathbf{x}$ Lipschitzovská (tj. existuje $L \in \mathbb{R}$ tak, že platí $|f(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ pro všechna $t \in \tilde{J},\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$). Pak existuje právě jedno řešení počátečního problému (6.3), (6.4) definované na intervalu $J = [t_0, t_0 + \delta]$.
Toto řešení je (stejnoměrnou) limitou posloupnosti funkcí $\{\mathbf{x}_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}^0 \\
\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\mathrm{d}s, \quad k = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}
$$

D.: Funkce $\mathbf{y}(t) = F(\mathbf{x})(t)$ je podle 3.4.3 diferencovatelná, $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$. To znamená, že zobrazení F definované před větou zobrazuje $C^1(J)$ do sebe. Buď $K > L$. Na $C^1(J)$ zavedeme metriku ρ^* vztahem

$$\rho^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\left\{\mathrm{e}^{-K(t-t_0)}|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| : t \in J\right\}.$$

Tato metrika je na $C^1(J)$ ekvivalentní s metrikou stejnoměrné konvergence ρ, neboť

$$\mathrm{e}^{-K\delta}\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \rho^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Prostor $(C^1(J), \rho^*)$ je tedy úplný.
Položme $P = \{\mathbf{x} \in C^1(J) : |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^0| \leq b \text{ pro každé } t \in J\}$. Podle 4.4.3 je $(\overline{P}, \rho^*)$ úplný prostor. Zobrazení F zobrazuje množinu $\overline{P}$ do sebe, neboť pro každou funkci $\mathbf{x} \in P$ platí

$$|F(\mathbf{x})(t) - \mathbf{x}^0| = \left|\int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\mathrm{d}s\right| \leq \int_{t_0}^{t} |\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))|\mathrm{d}s \leq (t - t_0)m \leq \delta m \leq b.$$

Ukážeme, že F je kontrakcí prostoru $(\overline{P}, \rho^*)$:

$$
\begin{aligned}
\rho^*(F(\mathbf{x}), F(\mathbf{y})) \leq \mathrm{e}^{-K(t-t_0)}|F(\mathbf{x})(t) - F(\mathbf{y})(t)| &= \mathrm{e}^{-K(t-t_0)}\left|\int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))\mathrm{d}s\right| \leq \\
&\leq \mathrm{e}^{-K(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} |\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))|\mathrm{d}s \leq \\
&\leq \mathrm{e}^{-K(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} L|\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)|\mathrm{d}s = \\
&= L\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-K(t-s)}\mathrm{e}^{-K(s-t_0)}|\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)|\mathrm{d}s \leq \\
&\leq L\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-K(t-s)}\rho^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathrm{d}s = \\
&= L\rho^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})\left[\frac{1}{K}\mathrm{e}^{-K(t-s)}\right]_{s=t_0}^{t} = \\
&= \frac{L}{K}\rho^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})\left(1 - \mathrm{e}^{-K(t-t_0)}\right) \leq \\
&\leq \frac{L}{K}\rho^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}).
\end{aligned}
$$

Poněvadž $L < K$, je $\dfrac{L}{K} < 1$, což znamená, že F je kontrakce. $\square$

6.3.3 Poznámky

1. Posloupnost funkcí zavedená v 6.3.2 se nazývá *Picardova posloupnost postupných aproximací.*

2. Analogické tvrzení platí, nahradíme-li v 6.3.2 interval $\tilde{J} = [t_0, t_0 + a]$ intervalem $[t_0 - a, t_0]$ nebo intervalem $[t_0 - a, t_0 + a]$.

3. Má-li funkce $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$ ohraničené parciální derivace všech složek podle každé z proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ na množině $\tilde{J} \times D$ (zavedené v 6.3.2), pak jsou předpoklady Picardovy – Lindelöfovy věty splněny.

   D.: Množina $\tilde{J} \times D$ je podle 4.4.8 kompaktní. Z ohraničenosti parciálních derivací funkce $\mathbf{f}$ plyne existence čísla
   $$M = \max\left\{ \frac{\partial f_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_j} : i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ (t, \mathbf{x}) \in \tilde{J} \times D \right\}.$$

   Podle 5.2.4 je pro všechna $t \in \tilde{J}$ a $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$:

   $$\begin{aligned} |\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})| &= \sum_{i=1}^{n} |f_i(t, \mathbf{x}) - f_i(t, \mathbf{y})| = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(t, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, \xi_k, y_{k+1}, \ldots, y_n)(x_k - y_k) \right| \le \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(t, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, \xi_k, y_{k+1}, \ldots, y_n) \right| |x_k - y_k| \le \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} M|x_k - y_k| = \sum_{i=1}^{n} M|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = nM|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \end{aligned}$$

   takže funkce $\mathbf{f}$ je vzhledem k $\mathbf{x}$ Lipschitzovská s konstantou nM. □

6.3.4 Důsledky

1. Má-li (vektorová) funkce $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$ ohraničené parciální derivace všech složek podle každé z proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ v jistém okolí bodu $(t_0, \mathbf{x}^0)$, pak počáteční problém (6.3), (6.4) má v okolí t_0 jediné řešení.

2. Má-li (skalární) funkce $f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ v jistém okolí bodu $(t_0, x_0, x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ ohraničené parciální derivace podle každé z proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pak počáteční problém (6.5), (6.6) má v okolí t_0 jediné řešení.

6.3.5 Věta (Peano [1890])

Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Označme $\tilde{J} = [t_0, t_0 + a]$, $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| \le b\}$, $m = \max\{|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})| : (t, \mathbf{x}) \in \tilde{J} \times D\}$, $\delta = \min\left\{a, \dfrac{b}{m}\right\}$. Nechť funkce $\mathbf{f} : \tilde{J} \times D \to \mathbb{R}^n$ je spojitá. Pak existuje alespoň jedno řešení počátečního problému (6.3), (6.4) definované na intervalu $J = [t_0, t_0 + \delta]$.

D.: Viz Kalas, Ráb: Obyčejné diferenciální rovnice, str. 67–70. □

6.4 Globální vlastnosti řešení systému ODR

6.4.1 Věta (o existenci úplného řešení)

Nechť funkce $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá na otevřené množině $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Je-li $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ řešení rovnice (6.3), pak je toto řešení buď úplné, nebo existuje úplné řešení $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$, které je prodloužením řešení $\mathbf{x}$.

D.: Viz Kalas, Ráb: Obyčejné diferenciální rovnice, str. 73–76. □

6.4.2 Definice

Buď $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Řekneme, že funkce $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je *lokálně lipschitzovská v G vzhledem k $\mathbf{x}$*, jestliže ke každému $(\tau, \mathbf{a}) \in G$ existuje okolí $\mathcal{O}_{\tau,\mathbf{a}} \subseteq G$ a číslo $L_{\tau,a} \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $(t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y}) \in \mathcal{O}_{\tau,\mathbf{a}}$ platí $|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})| \leq L_{\tau,\mathbf{a}}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

6.4.3 Věta (o globální jednoznačnosti)

Nechť funkce $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a lokálně lipschitzovská v G vzhledem k $\mathbf{x}$ a nechť $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ jsou dvě řešení (6.3). Jestliže existuje t_0 takové, že $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}(t_0)$, pak $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$ pro všechna t, v nichž jsou řešení $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ definována.

D.: Připusťme, že existuje $b > t_0$ takové, že $\mathbf{x}(b) \neq \mathbf{y}(b)$. Označme $c = \inf\{t : \mathbf{x}(t) \neq \mathbf{y}(t)\}$.
Funkce $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ jsou spojité (poněvadž jsou diferencovatelné).
Ukážeme, že $\mathbf{x}(c) = \mathbf{y}(c)$:
Připusťme, že $\mathbf{x}(c) \neq \mathbf{y}(c)$. Položme $\varepsilon = |\mathbf{x}(c) - \mathbf{y}(c)|$.
K $\frac{\varepsilon}{4} > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $t \in (c - \delta, c)$ je $|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(c)| < \frac{\varepsilon}{4}$ a $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(c)| < \frac{\varepsilon}{4}$.
Poněvadž pro $t \in (c - \delta, c)$ je $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$, platí pro $t \in (c - \delta, c)$:

$$\varepsilon = |\mathbf{x}(c) - \mathbf{y}(c)| = |\mathbf{x}(c) - \mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(c)| \leq |\mathbf{x}(c) - \mathbf{x}(t)| + |\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(c)| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

což je spor a tedy $\mathbf{x}(c) = \mathbf{y}(c)$.
Podle 6.3.2 existuje α takové, že pro $t \in [c, c + \alpha]$ je $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$, což je spor. □

6.4.4 Definice

Buď $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ úplné řešení rovnice (6.3) definované na intervalu (S, T), kde $-\infty \leq S < T \leq \infty$.
Řekneme, že $\xi \in \mathbb{R}^n$ je *ω-limitní bod řešení* $\mathbf{x}$, jestliže existuje posloupnost $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $t_k < T$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = T$ a $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}(t_k) = \xi$.
Řekneme, že $\xi \in \mathbb{R}^n$ je *α-limitní bod řešení* $\mathbf{x}$, jestliže existuje posloupnost $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $t_k > S$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = S$ a $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}(t_k) = \xi$.
Řekneme, že $\xi \in \mathbb{R}^n$ je *limitní bod řešení* $\mathbf{x}$, jestliže je ω-limitním bodem nebo α-limitním bodem.
Množina všech ω-limitních bodů řešení $\mathbf{x}$ se nazývá *ω-limitní množina řešení* $\mathbf{x}$, množina všech α-limitních bodů řešení $\mathbf{x}$ se nazývá *α-limitní množina řešení* $\mathbf{x}$, množina všech limitních bodů řešení $\mathbf{x}$ se nazývá *limitní množina řešení* $\mathbf{x}$.

6.4.5 Příklady

1. $x = \mathrm{e}^{at}$ je úplné řešení rovnice $x' = ax$ definované na intervalu $(-\infty, \infty)$. Je-li $a > 0$, je 0 α-limitním bodem tohoto řešení a ω-limitní body toto řešení nemá. Je-li $a < 0$, je 0 ω-limitním bodem tohoto řešení a α-limitní body toto řešení nemá. Je-li $a = 0$, je 1 α- i ω-limitním bodem tohoto řešení.

2. $x = \sin\frac{1}{t}$ je úplné řešení rovnice $x' = -\frac{\cos\frac{1}{t}}{t^2}$ definované na intervalu $(-\infty, 0)$. Interval $[-1, 1]$ je ω-limitní množinou tohoto řešení.

3. $\begin{aligned} x &= \cos \operatorname{tg} t \\ y &= \sin \operatorname{tg} t \end{aligned}$ je úplné řešení soustavy rovnic $\begin{aligned} x' &= -\frac{y}{\cos^2 t} \\ y' &= \frac{x}{\cos^2 t} \end{aligned}$ definované na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Limitní množina tohoto řešení je $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

6.4.6 Věta

Nechť funkce $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá na otevřené množině $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ a $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ je úplné řešení rovnice (6.3) definované na intervalu (S, T). Pak platí:
$T = \infty$ nebo každý ω-limitní bod řešení $\mathbf{x}$ leží na hranici G.
$S = -\infty$ nebo každý α-limitní bod řešení $\mathbf{x}$ leží na hranici G.

D.: Buď $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ úplné řešení rovnice (6.3) definované na intervalu (S, T), $T < \infty$ a buď ξ jeho ω-limitní bod. Kdyby $(T, \xi) \in G$, pak by existovalo okolí $\mathcal{O}_{T,\xi}$ bodu (T, ξ) takové, že $\mathcal{O}_{T,\xi} \subseteq G$, neboť G je otevřená. Podle 6.3.5 by existovalo řešení $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ rovnice (6.3) s počáteční podmínkou $\mathbf{y}(T) = \xi$ definované na $[T, T + \delta]$, kde δ je vhodné (malé) číslo. Funkce

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}(t) = \begin{cases} \mathbf{x}(t), & S < t < T \\ \mathbf{y}(t), & T + \delta \end{cases}$$

by byla řešením rovnice (6.3), které by bylo prodloužením řešení $\mathbf{x}$, což by byl spor s úplností řešení $\mathbf{x}$. Pro α-limitní bod se důkaz provede analogicky s využitím „levostranné varianty“ věty 6.3.5. □

6.4.7 Důsledek

Nechť $J = [t_0, \infty)$, $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |x| < a\}$, kde $t_0 \in \mathbb{R}$ a $0 < a \leq \infty$ a nechť funkce $\mathbf{f} : J \times D \to \mathbb{R}^n$ je spojitá. Jestliže existuje spojitá funkce $g : J \to \mathbb{R}$ taková, že úplné řešení $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ rovnice (6.3) definované na (S, T) splňuje pro každé $t \in [t_0, T)$ podmínku $|\mathbf{x}(t)| \leq g(t) < a$, pak $T = \infty$.

6.4.8 Důsledek

Nechť $J = [t_0, \infty)$ a funkce $\mathbf{f} : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spojitá. Jestliže existuje $m \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $(t, \mathbf{x}) \in J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ platí $|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})| \leq m$, pak každé úplné řešení rovnice (6.3) je definováno pro všechna $t \geq t_0$.

D.: Buď $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ úplné řešení rovnice (6.3). Podle 6.3.1 je

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\mathrm{d}s\,.$$

Pro každé t, pro něž je $\mathbf{x}(t)$ definováno, platí

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}(t)| &= \left| \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\mathrm{d}s \right| \leq |\mathbf{x}(t_0)| + \int_{t_0}^{t} |\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))|\mathrm{d}s \leq \\ &\leq |\mathbf{x}(t_0)| + m(t - t_0)\,. \end{aligned}$$

Tvrzení tedy plyne z 6.4.7, položíme-li $g(t) = |\mathbf{x}(t_0)| + m(t - t_0)$. □

Toto tvrzení umožňuje rozhodnout, zda lze každé řešení rovnice (6.3) prodloužit do nekonečna, aniž bychom toto řešení znali.

6.4.9 Věta (o spojité závislosti řešení na počátečních podmínkách a parametrech)

Buď Ω otevřená množina v $\mathbb{R}^{1+n+m}$ a nechť funkce $\mathbf{g} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je taková, že pro všechna $(\tau, \xi, \lambda) \in \Omega$, $\tau \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}^m$ má počáteční problém

$$\mathbf{x}' \;=\; \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \lambda), \quad \mathbf{x}(\tau) \;=\; \xi$$

právě jedno úplné řešení $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; \tau, \xi, \lambda)$. Pak toto řešení, chápané jako zobrazení $\mathbb{R}^{1+1+n+m} \to \mathbb{R}^n$, je spojité.

D.: Viz Kalas, Ráb: Obyčejné diferenciální rovnice, str. 82–83. □

Tato věta říká, že změní-li se málo funkce $\mathbf{f}$ v rovnici (6.3) a málo se změní počáteční podmínka (6.4), pak se řešení nového — změněného — problému liší na konečném intervalu málo od řešení původního problému.

6.5 Systémy lineárních ODR

6.5.1 Poznámky

1. Normy vektorů a matic

   Normu vektoru $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ definujeme předpisem $|\mathbf{x}| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.

   Normu matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ definujeme předpisem $|A| = \sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$.

   Na množině vektorů zavádíme metriku $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$,
   na množině matic zavádíme metriku $\rho(A, B) = |A - B|$.

2. Platí: $|A \cdot \mathbf{x}| \le |A|\,|\mathbf{x}|$.

   D.: Pro libovolné $i, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ je $|a_{ik}| \le \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Odtud plyne

$$\begin{aligned} |A\mathbf{x}| \;&=\; \left| \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right) \right| \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right| \;\le\; \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\,|x_k| \;=\; \sum_{k=1}^{n} \left(|x_k| \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \right) \\ &\le\; \sum_{k=1}^{n} \left(|x_k| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \;=\; \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k| \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right). \end{aligned}$$

   □

3. Vektorové a maticové funkce

$$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}=(x_i(t)),\quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(t)=\mathbf{x}'(t)=(x_i'(t))\,,\quad \int\limits_{t_0}^{t}\mathbf{x}(s)\mathrm{d}s=\left(\int\limits_{t_0}^{t}x_i(s)\mathrm{d}s\right)$$

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t)\end{pmatrix}=(a_{ij}(t))\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}(t)=A'(t)=\left(a_{ij}'(t)\right)\,,\quad \int\limits_{t_0}^{t}A(s)\mathrm{d}s=\left(\int\limits_{t_0}^{t}a_{i,j}(s)\mathrm{d}s\right)$$

Vektorová (maticová) funkce je spojitá, jsou-li všechny její složky spojité.

Systém lineárních obyčejných diferenciálních rovnic je tvaru

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1'(t) & = & a_{11}(t)x_1 & + & a_{12}(t)x_2 & + & \dots & + & a_{1n}(t)x_n & + & b_1(t)\\ x_2'(t) & = & a_{21}(t)x_1 & + & a_{22}(t)x_2 & + & \dots & + & a_{2n}(t)x_n & + & b_2(t)\\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ x_n'(t) & = & a_{n1}(t)x_1 & + & a_{n2}(t)x_2 & + & \dots & + & a_{nn}(t)x_n & + & b_n(t)\end{array}$$

Při označení

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t)\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}(t)=\begin{pmatrix} b_1(t)\\ b_2(t)\\ \vdots\\ b_n(t)\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}$$

lze tento systém zapsat v maticovém tvaru

$$\mathbf{x}' \quad = \quad A(t)\cdot\mathbf{x}+\mathbf{b}(t)\,. \tag{6.11}$$

Tuto rovnici nazýváme nehomogenní lineární rovnicí. Spolu s rovnicí 6.11 budeme uvazovat počáteční podmínku

$$\mathbf{x}(t_0) \quad = \quad \mathbf{x}^0\,. \tag{6.12}$$

6.5.2 Věta o existenci a jednoznačnosti řešení

Nechť maticová funkce $A=A(t)$ a vektorová funkce $\mathbf{b}=\mathbf{b}(t)$ jsou spojité na intervalu $J\subseteq\mathbb{R}$. Pak má počáteční problém (6.11), (6.12) právě jedno řešení, které existuje na celém intervalu J.

D.: Vzhledem k 6.3.2 a 6.4.3 stačí ukázat, že ke každému $\tau\in J$ existuje okolí $\mathcal{O}_\tau\subseteq J$ takové, že funkce $A(t)\mathbf{x}+\mathbf{b}(t)$ je Lipschitzovská vzhledem k $\mathbf{x}$ na $\mathbb{R}^n\times\mathcal{O}_\tau$.
Je-li τ vnitřní bod intervalu J, existuje $a\in\mathbb{R},\ a>0$ takové, že $[\tau-a,\tau+a]\subseteq J$.
Položme $L_\tau=\max\{|A(t)|:\ t\in[\tau-a,\tau+a]\}$ (toto maximum existuje podle 1.7.12), $\mathcal{O}_\tau=(\tau-a,\tau+a)$.
Pak pro každé $t\in\mathcal{O}_\tau$ a každé dva vektory $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ platí podle 6.5.1.2

$$|A(t)\mathbf{x}+\mathbf{b}(t)-(A(t)\mathbf{y}+\mathbf{b}(t))|=|A(t)\mathbf{x}-A(t)\mathbf{y}|=|A(t)(\mathbf{x}-\mathbf{y})|\le|A(t)|\,|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\le L_\tau|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\,.$$

Je-li τ pravý krajní bod intervalu J, položíme $\mathcal{O}_\tau=(\tau-a,\tau],\ L_\tau=\max\{|A(t)|:\ \tau-a\le t\le\tau\}$ a provedeme analogickou úvahu.
Pro levý krajní bod intervalu J provedeme důkaz podobně. □

6.5.3 Poznámka

Řešení problému (6.11), (6.12) lze hledat jako limitu Picardovy posloupnosti postupných aproximací. Zejména pro $A(t) = A = (a_{ij})$ (konstantní matice) a $\mathbf{b}(t) \equiv 0$ je (označíme-li E jednotkovou matici):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}^0(t) &= \mathbf{x}^0 = (x_i^0) \\
\mathbf{x}^1(t) &= \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^{t} A \cdot \mathbf{x}^0 \mathrm{d}s = \left(x_i^0 + \int_{t_0}^{t} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 \right) \mathrm{d}s \right) = \left(x_i^0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 (t - t_0) \right) \\
\mathbf{x}^2(t) &= \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(x_k^0 + \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j^0 (s - t_0) \right) \right) \mathrm{d}s = \\
&= \mathbf{x}^0 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k^0 (t - t_0) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ik} a_{kj} x_j^0 \frac{(t - t_0)^2}{2} \right) = \\
&= \mathbf{x}^0 + A \cdot \mathbf{x}^0 (t - t_0) + (A \cdot A) \cdot \mathbf{x}^0 \frac{(t - t_0)^2}{2} = \left(E + A(t - t_0) + \frac{A^2}{2} (t - t_0)^2 \right) \cdot \mathbf{x}^0 \\
&\vdots \\
\mathbf{x}^k(t) &= \left(E + A(t - t_0) + \frac{A^2}{2!} (t - t_0)^2 + \cdots + \frac{A^k}{k!} (t - t_0)^k \right) \cdot \mathbf{x}^0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Rovnici

$$\mathbf{x}' = A(t) \cdot \mathbf{x} \tag{6.13}$$

nazýváme *lineární homogenní rovnicí přidruženou k* (6.11).

6.5.4 Věta (princip superpozice)

Jsou-li $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t),\ \mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ řešení rovnice (6.13), pak také $c_1\mathbf{x}(t) + c_2\mathbf{y}(t)$, kde $c_1,\ c_2$ jsou konstanty, je řešením rovnice (6.13).

D.: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y}) = c_1\mathbf{x}' + c_2\mathbf{y}' = c_1 A(t) \cdot \mathbf{x} + c_2 A(t) \cdot \mathbf{y} = A(t) \cdot (c_1\mathbf{x}) + A(t) \cdot (c_2\mathbf{y}) = A(t) \cdot (c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y})$ □

6.5.5 Věta

Je-li maticová funkce $A = A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n$ spojitá na intervalu J, pak množina všech řešení rovnice (6.13) tvoří n-rozměrný vektorový prostor.

D.: $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{o}$ je řešením rovnice (6.13).
Podle 6.5.4 je libovolná lineární kombinace řešení (6.13) řešením (6.13).
Je-li $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$ báze n-rozměrného vektorového prostoru a $\mathbf{y}^k = \mathbf{y}^k(t)$ jsou řešení rovnice (6.13) s počátečními podmínkami $\mathbf{y}^k(t_0) = \mathbf{x}^k,\ k = 1, 2, \dots, n$, pak $\mathbf{y}^1(t), \mathbf{y}^2(t), \dots, \mathbf{y}^n(t)$ jsou lineárně nezávislé pro každé $t \in J$:

> Kdyby existovalo $t_1 \in J$ a konstanty $c_1, c_2, \dots, c_n$ ne všechny rovny nule takové, že $c_1\mathbf{y}^1(t_1) + c_2\mathbf{y}^2(t_1) + \cdots + c_n\mathbf{y}^n(t_1) = \mathbf{o}$, pak by podle 6.5.4 také $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t) = c_1\mathbf{y}^1(t) + c_2\mathbf{y}^2(t) + \cdots + c_n\mathbf{y}^n(t)$ bylo řešením rovnice (6.13) s počáteční podmínkou $\mathbf{z}(t_1) = \mathbf{o}$. Poněvadž ale $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{o}$ je řešením (6.13), vzhledem k jednoznačnosti řešení (sr. 6.5.2) by $\mathbf{z}(t) \equiv \mathbf{o}$.
> Zejména tedy $\mathbf{z}(t_0) = c_1\mathbf{y}^1(t_0) + c_2\mathbf{y}^2(t_0) + \cdots + c_n\mathbf{y}^n(t_0) = c_1\mathbf{x}^1 + c_2\mathbf{x}^2 + \cdots + c_n\mathbf{x}^n = \mathbf{o}$, což by byl spor s lineární nezávislostí vektorů $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$.

Dimense prostoru všech řešení je tedy alespoň n.
Buď $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{y}}(t)$ libovolné řešení rovnice (6.13) a položme $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{y}}(t_0)$. Pak $\tilde{\mathbf{x}} = \kappa_1 \mathbf{x}^1 + \kappa_2 \mathbf{x}^2 + \cdots + \kappa_n \mathbf{x}^n$ pro vhodné konstanty $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$, neboť $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ je báze. To znamená, že $\tilde{\mathbf{y}}(t_0) = \kappa_1 \mathbf{y}^1(t_0) + \kappa_2 \mathbf{y}^2(t_0) + \cdots + \kappa_n \mathbf{y}^n(t_0)$. Podle principu superpozice je $\mathbf{z}(t) = \tilde{\mathbf{y}}(t) - \kappa_1 \mathbf{y}^1(t) - \kappa_2 \mathbf{y}^2(t) - \cdots - \kappa_n \mathbf{y}^n(t)$ také řešením rovnice (6.13); přitom $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{o}$. Vzhledem k jednoznačnosti řešení rovnice (6.13) je $\mathbf{z}(t) = \mathbf{o}$ pro všechna $t \in J$ a tedy $\tilde{\mathbf{y}}(t) = \kappa_1 \mathbf{y}^1(t) + \kappa_2 \mathbf{y}^2(t) + \cdots + \kappa_n \mathbf{y}^n(t)$ pro všechna $t \in J$. To znamená, že funkce $\mathbf{y}^1 = \mathbf{y}^1(t), \mathbf{y}^2 = \mathbf{y}^2(t), \ldots, \mathbf{y}^n = \mathbf{y}^n(t)$ tvoří bázi prostoru všech řešení rovnice (6.13). $\square$

6.5.6 Definice

Libovolná báze prostoru všech řešení rovnice (6.13) se nazývá *fundamentální systém řešení rovnice* (6.13).

Nechť $\mathbf{y}^1 = \mathbf{y}^1(t), \mathbf{y}^2 = \mathbf{y}^2(t), \ldots, \mathbf{y}^n = \mathbf{y}^n(t)$ je fundamentální systém řešení rovnice (6.13). Obecné řešení této rovnice je

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) = c_1 \mathbf{y}^1(t) + c_2 \mathbf{y}^2(t) + \cdots + c_n \mathbf{y}^n(t)\,.$$

Označme

$$Y = Y(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & y_1^2(t) & \ldots & y_1^n(t) \\ y_2^1(t) & y_2^2(t) & \ldots & y_2^n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(t) & y_n^2(t) & \ldots & y_n^n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Matice $Y = Y(t)$ se nazývá *fundamentální matice řešení systému* (6.13). Tato matice je v důsledku lineární nezávislosti sloupců regulární, $\det Y(t) \neq 0$ pro každé $t \in J$. Obecné řešení rovnice (6.13) lze zapsat

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) = Y(t) \cdot \mathbf{c}\,.$$

Partikulární řešení počátečního problému (6.11), (6.12) je $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) = Y(t) \cdot \mathbf{c}^0$, kde $\mathbf{c}^0 = Y(t_0)^{-1} \cdot \mathbf{x}^0$. Tedy

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) = Y(t) \cdot Y(t_0)^{-1} \cdot \mathbf{x}^0\,.$$

Pro fundamentální matici řešení systému (6.13) $Y = Y(t)$ zřejmě platí $Y'(t) = A(t) \cdot Y(t)$.

6.5.7 Věta

Obecné řešení rovnice (systému) (6.11) je součtem obecného řešení přidružené homogenní rovnice (6.13) a nějakého partikulárního řešení rovnice (6.11):

$$\mathbf{x}(t) = Y(t) \cdot \mathbf{c} + \tilde{\mathbf{x}}(t)\,,$$

kde $Y(t)$ je fundamentální matice řešení rovnice (6.13) a $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ je libovolné řešení rovnice (6.11).

D.: $\mathbf{x}(t) = Y(t) \cdot \mathbf{c} + \tilde{\mathbf{x}}(t)$ je řešením rovnice (6.11), neboť $\mathbf{x}' = Y' \cdot \mathbf{c} + \tilde{\mathbf{x}}' = A \cdot Y \cdot \mathbf{c} + A \cdot \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{b} = A \cdot (Y \cdot \mathbf{c} + \tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{b}$. Řešení problému (6.11), (6.12) je $\mathbf{x}(t) = Y(t) \cdot \mathbf{c}^0 + \tilde{\mathbf{x}}(t)$, kde $\mathbf{c}^0 = Y(t_0)^{-1}(\mathbf{x}^0 - \tilde{\mathbf{x}}(t_0))$. $\square$

6.5.8 Nalezení partikulárního řešení rovnice (6.11) — metoda variace konstant

Řešení rovnice (6.11) hledáme ve tvaru $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(t) = Y(t) \cdot \mathbf{c}(t)$, kde $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ je nějaká vektorová funkce. Pak

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}' &= Y' \cdot \mathbf{c} + Y \cdot \mathbf{c}' = A \cdot Y \cdot \mathbf{c} + Y \cdot \mathbf{c}' \\ \tilde{\mathbf{x}}' &= A \cdot \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{b} = A \cdot Y \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} Y(t) \cdot \mathbf{c}'(t) &= b(t) \\ \mathbf{c}'(t) &= Y(t)^{-1} \cdot b(t) \\ \mathbf{c}(t) &= \eta + \int_{t_0}^{t} Y(s)^{-1} b(s) \mathrm{d}s\,, \end{aligned}$$

kde η je konstantní vektor.

Obecným řešením rovnice (6.11) je tedy

$$\mathbf{x}(t) \;=\; Y(t)\cdot\eta + \int\limits_{t_0}^{t} Y(t)\cdot Y(s)^{-1}\cdot b(s)\mathrm{d}s\,.$$

Aby toto řešení splňovalo počáteční podmínku (6.12), musí platit $\mathbf{x}^0 = Y(t_0)\cdot\eta$, neboli $\eta = Y(t_0)^{-1}\cdot\mathbf{x}^0$. Řešení počátečního problému (6.11), (6.12) je tedy

$$\mathbf{x}(t) \;=\; Y(t)\cdot Y(t_0)^{-1}\cdot\mathbf{x}^0 + \int\limits_{t_0}^{t} Y(t)\cdot Y(s)^{-1}\cdot b(s)\mathrm{d}s\,.$$

6.6 Lineární diferenciální rovnice vyššího řádu

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)x^{(n-2)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x \;=\; f(t)\,, \tag{6.14}$$

funkce $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0, f$ jsou definované na nějakém intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$.

Je-li $f(t) \equiv 0$, rovnice se nazývá *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní*.

Rovnice

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{n-1} + a_{n-2}(t)x^{n-2} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x \;=\; 0 \tag{6.15}$$

se nazývá *přidružená homogenní rovnice k rovnici* (6.14).

Spolu s rovnicí (6.14) uvažujeme počáteční podmínky

$$x(t_0) = x_0,\; x'(t_0) = x_0^1,\; \ldots,\; x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1}\,. \tag{6.16}$$

Podle 6.1.10 je rovnice (6.14) ekvivalentní s vektorovou rovnicí (se systémem rovnic)

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_2\\
x_2' &= x_3\\
&\vdots\\
x_{n-1}' &= x_n\\
x_n' &= -a_{n-1}(t)x_n - a_{n-2}(t)x_{n-1} - \cdots - a_1(t)x_2 - a_0(t)x_1 + f(t)
\end{aligned}$$

Odtud a z 6.5.2, 6.5.4 a 6.5.5 plynou

6.6.1 Věta (o existenci a jednoznačnosti řešení)

Jsou-li všechny funkce $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, f$ spojité na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$ a $t_0 \in J$, pak má počáteční problém (6.14), (6.16) právě jedno řešení, které existuje na celém intervalu J.

6.6.2 Věta (princip superpozice)

Jsou-li $x = x(t),\; y = y(t)$ řešením homogenní lineární rovnice (6.15) a $c_1,\; c_2$ jsou libovolné konstanty, pak také $z = z(t) = c_1x(t) + c_2y(t)$ je řešením této rovnice.

6.6.3 Věta

Jsou-li všechny funkce $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ spojité na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$, pak množina všech řešení rovnice (6.15) tvoří n-rozměrný vektorový prostor.

6.6.4 Definice

Báze $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$ vektorového prostoru všech řešení rovnice (6.15) se nazývá *fundamentální systém řešení rovnice* (6.15).

Řešení $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_k = x_k(t)$ rovnice (6.14) jsou lineárně nezávislá na intervalu J, jsou-li vektory

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \\ \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_2^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \dots, \begin{pmatrix} x_k(t) \\ x_k'(t) \\ \vdots \\ x_k^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

lineárně nezávislé pro každé $t \in J$.

Tvoří-li funkce $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$ fundamentální systém řešení rovnice (6.15), pak obecné řešení této rovnice je $x = x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t)$, kde $c_1, c_2, \dots, c_n$ jsou konstanty.

6.6.5 Definice

Buďte $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ funkce. Funkce

$$W = W(t) = W(t; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_m(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \dots & \varphi_m'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(m-1)}(t) & \varphi_2^{(m-1)}(t) & \dots & \varphi_m^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}$$

se nazývá *wronskián* funkcí $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$.

6.6.6 Věta

Funkce $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (6.15) právě tehdy, když každé z nich je řešením této rovnice a jejich wronskián je v nějakém bodě intervalu J nenulový.

D.: plyne z poznámek za 6.5.6. □

Z jednoznačnosti řešení rovnice (6.15) také plyne, že je-li wronskián řešení rovnice 6.15 nenulový v jednom bodě intervalu J, pak je nenulový ve všech bodech intervalu J.

6.6.7 Věta

Buď $x_1, x_2, \dots, x_n$ fundamentální systém řešení rovnice (6.15). Obecné řešení rovnice (6.14) je

$$x = x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) + \tilde{x}(t)\,,$$

kde $c_1, c_2, \dots, c_n$ jsou konstanty a $\tilde{x}_n$ je libovolné partikulární řešení rovnice (6.14).

D.: plyne z 6.5.7. □

6.6.8 Metoda variace konstant

Řešení rovnice (6.14) hledáme ve tvaru

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) + \cdots + c_n(t)x_n(t)\,,$$

kde $c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)$ jsou funkce a $x_1(t), x_2(t) \dots, x_n(t)$ je fundamentální systém řešení rovnice (6.15).

O funkcích $c_1, c_2, \dots, c_n$ budeme předpokládat, že splňují systém rovnic

$$\begin{aligned} c_1'x_1 + c_2'x_2 + \cdots + c_n'x_n &= 0 \\ c_1'x_1' + c_2'x_2' + \cdots + c_n'x_n' &= 0 \\ &\vdots \\ c_1'x_1^{(n-2)} + c_2'x_2^{(n-2)} + \cdots + c_n'x_n^{(n-2)} &= 0 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Pak

$$\begin{array}{rcl}
\tilde{x}' & = & c_1'x_1 + c_1x_1' + \cdots + c_n'x_n + c_nx_n' \;=\; c_1x_1' + \cdots + c_nx_n' \\
\tilde{x}'' & = & c_1'x_1' + c_1x_1'' + \cdots + c_n'x_n' + c_nx_n'' \;=\; c_1x_1'' + \cdots + c_nx_n'' \\
 & \vdots & \\
\tilde{x}^{(n-1)} & = & c_1x_1^{(n-1)} + \cdots + c_nx_n^{(n-1)} \\
\tilde{x}^{(n)} & = & c_1'x_1^{(n-1)} + c_1x_1^{(n)} \cdots + c_n'x_n^{(n-1)} + c_nx^{(n)}
\end{array}$$

Současně ale platí

$$\begin{array}{rcl}
\tilde{x}^{(n)} & = & -a_{n-1}(t)\tilde{x}^{(n-1)} - a_{n-2}(t)\tilde{x}^{(n-2)} - \cdots - a_1(t)\tilde{x}' - a_0(t)\tilde{x} + f(t) \;= \\
 & = & -a_{n-1}(c_1x_1^{(n-1)} + \cdots + c_nx_n^{(n-1)}) - \cdots - a_1(c_1x_1' + \cdots + c_nx_n') - a_0(c_1x_1^{+} \cdots + c_nx_n) + f \;= \\
 & = & c_1(-a_{n-1}x_1^{(n-1)} - \cdots - a_1x_1' - a_0x_1) + \cdots + c_n(-a_{n-1}x_n^{(n-1)} - \cdots - a_1x_n' - a_0x_n) + f \;= \\
 & = & c_1x_1^{(n)} + \cdots + c_nx_n^{(n)} + f\,.
\end{array}$$

(Poslední rovnost plyne z toho, že $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou řešeními přidružené homogenní rovnice.)

Celkem tedy dostaneme

$$c_1'x_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'x_n^{(n-1)} \;=\; f \tag{6.18}$$

Systém rovnic (6.17) a (6.18) je soustava n lineárních rovnic pro n neznámých $c_1', c_2', \ldots, c_n'$. Determinant této soustavy je wronskián fundamentálního systému řešení rovnice (6.15), je tedy podle 6.6.6 různý od 0 a systém rovnic (6.17), (6.18) má jediné řešení $c_1'(t) = \varphi_1(t), c_2'(t) = \varphi_2(t), \ldots, c_n'(t) = \varphi_n(t)$. Integrací těchto rovnic určíme $c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t)$.

6.6.9 Homogenní lineární rovnice s konstatntními koeficienty

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x' + a_0x \;=\; 0\,. \tag{6.19}$$

Řešení předpokládáme ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Pak

$$x'(t) = \lambda\mathrm{e}^{\lambda t},\; x''(t) = \lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t},\; \ldots,\; x^{(n)}(t) = \lambda^n\mathrm{e}^{\lambda t}$$

a tedy

$$\begin{array}{rcl}
\lambda^n\mathrm{e}^{\lambda t} + a_{n-1}\lambda^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda t} + a_{n-2}\lambda^{n-2}\mathrm{e}^{\lambda t} + \cdots + a_1\lambda\mathrm{e}^{\lambda t} + a_0\mathrm{e}^{\lambda t} & = & 0 \\
\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 & = & 0\,.
\end{array}$$

Poslední rovnice se nazývá *charakteristická rovnice* lineární diferenciální rovnice (6.19)

(i) Jsou-li $\lambda_1,\ \lambda_2$ dva různé kořeny charakteristické rovnice, pak $x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t},\ x_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (6.19).

D.: Že to jsou řešení, je vidět z předchozí úvahy, lineárně nezávislé jsou proto, že vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2^2 \\ \vdots \\ \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix}$ jsou pro $\lambda_1 \neq \lambda_2$ lineárně nezávislé. $\square$

(ii) Je-li λ_0 k-násobný kořen charakteristické rovnice, pak funkce $x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_0 t},\ x_2(t) = t\mathrm{e}^{\lambda_0 t},\ x_3(t) = t^2\mathrm{e}^{\lambda_0 t},\ \ldots,\ x_k(t) = t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (6.19).

D.: Jsou-li $\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$, $\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ řešení rovnice (6.19), pak podle 6.6.2 je také funkce $\dfrac{\mathrm{e}^{\lambda_0 t} - \mathrm{e}^{\lambda_1 t}}{\lambda_0 - \lambda_1}$ řešením rovnice (6.19). Limitním přechodem $\lambda_1 \to \lambda_0$ s využitím 2.3.6 dostaneme, že $\dfrac{0 - t\mathrm{e}^{\lambda_0 t}}{-1} = t\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$ je také řešením (6.19) (sr. 6.4.9).
Analogicky lze ukázat, že také $t^2\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$, $t^3\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$, $\ldots$, $t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$ jsou řešení rovnice (6.19).
Dále je

$$W(0; \mathrm{e}^{\lambda_0 t}, t\mathrm{e}^{\lambda_0 t}, t^2\mathrm{e}^{\lambda_0 t}, \ldots, t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda_0 t}) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_0^2 & 2\lambda_0 & 2 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_0^{k-1} & (k-1)\lambda_0^{k-2} & 2\begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \end{pmatrix} & \ldots & \ell!\begin{pmatrix} k-1 \\ \ell \end{pmatrix}\lambda_0^{k-\ell-1} & \ldots & (k-1)! \end{pmatrix} \neq 0\,,$$

takže funkce $x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_0 t}$, $x_2(t) = t\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$, $x_3(t) = t^2\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$, $\ldots$, $x_k(t) = t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$ jsou lineárně nezávislé. □

(iii) Jsou-li $\lambda_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $\lambda_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ k-násobné komplexně sdružené kořeny charakteristické rovnice, pak

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t,\ x_2(t) = t\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t,\ x_3(t) = t^2\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, \ldots,\ x_k(t) = t^{k-1}\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t,$$

$$x_{k+1}(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t,\ x_{k+2}(t) = t\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t,\ x_{k+3}(t) = t^2\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t, \ldots,\ x_{2k}(t) = t^{k-1}\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t$$

jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (6.19).

D.: $t^\ell\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}$, $t^\ell\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)t}$, $0 \le \ell < k$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (6.19) podle (ii). Tedy také

$$\begin{aligned} x_{\ell+1}(t) &= \frac{1}{2}\left(t^\ell\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t} + t^\ell\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)t}\right) = t^\ell\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t \\ x_{k+\ell+1}(t) &= \frac{1}{2}\left(t^\ell\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t} - t^\ell\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)t}\right) = t^\ell\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t \end{aligned}$$

jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (6.19). □

6.6.10 Eulerova rovnice $t^n x^{(n)} + a_{n-1}t^{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 t x' + a_0 x = f(t)$

Zavedeme substituci $t = \mathrm{e}^\tau$, tj. $\tau = \ln t$. Pak

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} \\ x'' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right) = -\frac{1}{t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right) \\ x''' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)\right) = -\frac{2}{t^3}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right) + \frac{1}{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}\tau^3} - \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}\right)\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t^3}\left(\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}\tau^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dosadíme-li do dané rovnice, vypadnou faktory t, t^2, $\ldots$, t^n, takže dostaneme rovnici s konstantními koeficienty.

6.6.11 Riccatiho rovnice $x' = P(t)x^2 + Q(t)x + R(t)$

Zavedeme substituci $x(t) = -\dfrac{y'(t)}{P(t)y(t)}$. Pak $x' = -\dfrac{Pyy'' - (P'y + Py')y'}{P^2y^2} = -\dfrac{y''}{Py} + \dfrac{P'y'}{P^2y} + \dfrac{y'^2}{Py^2}$ a tedy

$$\begin{aligned}
-\frac{y''}{Py} + \frac{P'y'}{P^2y} + \frac{y'^2}{Py^2} &= \frac{Py'^2}{P^2y^2} - \frac{Qy'}{Py} + R \\
-\frac{y''}{Py} + \frac{1}{Py}\left(\frac{P'}{P} + Q\right)y' - R &= 0 \\
y'' - \left(\frac{P'}{P} + Q\right)y' - PRy &= 0\,,
\end{aligned}$$

což je lineární homogenní rovnice druhého řádu.

6.6.12 Nalezení fundamentálního systému řešení rovnice $x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0$ v případě, že jedno řešení je známé

Předpokládejme, že známe jedno nekonstantní řešení $x_1 = x_1(t)$ dané rovnice. Zavedeme substituci

$$x(t) = x_1(t)y(t).$$

Pak $x' = x_1'y + x_1y'$, $x'' = x_1''y + 2x_1'y' + x_1y''$, tedy

$$\begin{aligned}
x_1''y + 2x_1'y' + x_1y'' + Px_1'y + Px_1y' + Qx_1y &= 0 \\
x_1y'' + (2x_1' + Px_1)y' + (x_1'' + Px_1' + Qx_1)\,y &= 0 \\
y'' + \left(P + 2\frac{x_1'}{x_1}\right)y' &= 0\,,
\end{aligned}$$

což je rovnice typu 6.2.9 pro neznámou funkci $y = y(t)$.

Položíme $z(t) = y'(t)$. Pak

$$\begin{aligned}
z' &= -\left(P(t) + 2\frac{x_1'(t)}{x_1(t)}\right)z \\
\ln z = \int \frac{\mathrm{d}z}{z} &= -\int \left(P(t) + 2\frac{x_1'(t)}{x_1(t)}\right)\mathrm{d}t = -\int P(t)\mathrm{d}t - \ln(x_1(t))^2 \\
z(t) &= \frac{1}{(x_1(t))^2}\mathrm{e}^{-\int P(t)\mathrm{d}t}\,.
\end{aligned}$$

Odtud plyne, že

$$y(t) = \int \frac{1}{(x_1(t))^2}\mathrm{e}^{-\int P(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

a tedy druhé řešení dané rovnice je

$$x_2(t) = x_1(t)\int \frac{1}{(x_1(t))^2}\mathrm{e}^{-\int P(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\,.$$

Poněvadž platí

$$W(t, x_1, x_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_1\int \frac{1}{x_1^2}\mathrm{e}^{-\int P} \\ x_1' & x_1'\int \frac{1}{x_1^2}\mathrm{e}^{-\int P} + \frac{1}{x_1}\mathrm{e}^{-\int P} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{-\int P(t)\mathrm{d}t} > 0\,,$$

tak $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ tvoří fundamentální systém řešení dané rovnice.

6.7 Diferenciální nerovnosti

6.7.1 Definice

Řešení $x^* = x^*(t)$ úlohy (6.1), (6.2) se nazývá *maximální řešení*, jestliže pro každé řešení $x = x(t)$ této úlohy platí $x(t) \le x^*(t)$ pro všechna t, v nichž jsou obě řešení definována.
Řešení $x_* = x_*(t)$ úlohy (6.1), (6.2) se nazývá *mminimální řešení*, jestliže pro každé řešení $x = x(t)$ této úlohy platí $x_*(t) \le x(t)$ pro všechna t, v nichž jsou obě řešení definována.

6.7.2 Věta (srovnávací)

Nechť $t_0 \in \mathbb{R},\ 0 < a \le \infty,\ J = [t_0, \infty),\ G = \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in J, |\mathbf{x}| < a\}$. Nechť dále $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce a $g : J \times [0, a) \to [0, \infty)$ je spojitá funkce taková, že $|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})| \le g(t, |\mathbf{x}|)$ pro $(t, \mathbf{x}) \in G$. Buď $u_0 \ge |\mathbf{x}^0|$ a $u^* = u^*(t)$ maximální řešení úlohy

$$u' = g(t, u), \quad u(t_0) = u_0$$

na intervalu J. Pak každé úplné řešení úlohy (6.3), (6.4) je definováno pro všechna $t \in J$ a platí

$$|\mathbf{x}(t)| \le u^*(t) \quad \text{pro } t \in J\,.$$

D.: Viz Kalas, Ráb: Obyčejné diferenciální rovnice, str. 91. $\square$

6.7.3 Důsledek

Nechť symboly $t_0,\ a,\ J,\ G$ mají stejný význam jako v 6.7.2. Nechť funkce $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a nechť existuje spojitá funkce $\varphi : J \to [0, \infty)$ taková, že

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})| \le \varphi(t)|\mathbf{x}| \quad \text{pro } (t, \mathbf{x}) \in G$$

a

$$\int_{t_0}^{\infty} \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau < \infty\,.$$

Pak pro každé $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ takové, že

$$|\mathbf{x}^0| \exp \int_{t_0}^{\infty} \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau < a$$

jsou úplná řešení úlohy (6.3), (6.4) definována pro všechna $t \in J$ a platí

$$|\mathbf{x}(t)| \le |\mathbf{x}^0| \exp \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau \quad \text{pro } t \in J\,.$$

D.: Plyne z 6.7.2 volbou $g(t, u) = \varphi(t)u,\ u_0 = |\mathbf{x}^0|$.
Jediné úplné (tedy maximální) řešení úlohy $u' = \varphi(t)u,\ u(t_0) = u_0$ je podle 6.2.5

$$u(t) = u_0 \exp \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau\,.$$

$\square$

6.8 Autonomní systémy

Budeme uvažovat systém rovnic

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})\,, \tag{6.20}$$

kde $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená. (6.20) se nazývá *autonomní systém obyčejných diferenciálních rovnic*, Ω se nazývá *fázový prostor*. V celém odstavci budeme předpokládat, že $\mathbf{f}$ je spojitá funkce taková, že počáteční problém: (6.20) s podmínkou

$$\mathbf{x}(t_0) \quad = \quad \mathbf{x}^0 \tag{6.21}$$

má jediné řešení pro každé $t_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$.

6.8.1 Věta

Je-li $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ řešením úlohy (6.20), (6.21), pak pro každé $\tau \in \mathbb{R}$ je $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t + \tau)$ řešením rovnice (6.20) s počáteční podmínkou $\mathbf{y}(t_0 - \tau) = \mathbf{x}^0$. Je-li $\mathbf{x}$ definováno na intervalu (t_1, t_2), je $\mathbf{y}$ definováno na intervalu $(t_1 - \tau, t_2 - \tau)$.

D.: $\mathbf{y}'(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(t + \tau) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t + \tau)) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t))$ □

Tato věta ukazuje, že autonomní systémy popisují děje invariantní vzhledem k posunutí v čase.

Bez újmy na obecnosti se tedy u autonomních systémů můžeme omezit na počátečními problémy s počáteční podmínkou

$$\mathbf{x}(0) \quad = \quad \mathbf{x}^0 \,. \tag{6.22}$$

Řešení $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ problému (6.20), (6.22) lze interpretovat buďto jako graf zobrazení $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \Omega$, nebo jako křivku v prostoru Ω zadanou parametricky. Tuto křivku nazveme $\mathbf{x}$ *trajektorií řešení* $\mathbf{x}$.

Příklad: $\begin{array}{rcl} x' & = & y \\ y' & = & -x \end{array}$ má obecné řešení $\begin{array}{rcl} x(t) & = & a \sin t + b \cos t \\ y(t) & = & a \cos t - b \sin t \end{array}$.
Poněvadž $x(t)^2 + y(t)^2 = a^2 + b^2$, jsou trajektorie řešení kružnice se středem v počátku.

6.8.2 Věta

Jsou-li $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ řešení systému (6.20), pak jejich trajektorie buďto splývají, nebo nemají žádný společný bod.

D.: Nechť $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{y}(t_1)$. Podle 6.8.1 je $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t + (t_1 - t_2))$ řešením rovnice (6.20) s počáteční podmínkou $\mathbf{z}(t_2) = \mathbf{x}(t_1)$. Trajektorie řešení $\mathbf{z}$ a $\mathbf{x}$ zřejmě splývají. Současně ale $\mathbf{z}$ je řešením rovnice (6.20) s počáteční podmínkou $\mathbf{z}(t_2) = \mathbf{y}(t_2)$ a z předpokládané jednoznačné řešitelnosti problému (6.20) s libovolnou počáteční podmínkou plyne $\mathbf{z} \equiv \mathbf{y}$. □

6.8.3 Definice

Bod $\mathbf{x}^0 \in \Omega$ se nazývá *stacionární bod* (*rovnovážný bod, ekvilibrium, kritický bod, singulární bod, degenerovaná trajektorie*) *rovnice* (6.20), jestliže $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = 0$.
Trajektorie rovnice (6.20) se nazývá *cyklus*, je-li uzavřenou křivkou.

6.8.4 Věta

Trajektorie řešení autonomního systému (6.20) jsou jednoho z typů:
- Stacionární body (odpovídají konstantním řešením);
- Cykly (odpovídají nekonstantním periodickým řešením);
- Trajektorie, které samy sebe neprotínají.

D.: Plyne z 6.8.2. □

Ve zbytku tohoto odstavce se budeme zabývat autonomními systémy v rovině

$$\begin{array}{rcl} x' & = & f(x, y) \\ y' & = & g(x, y) \end{array} \tag{6.23}$$

6.8.5 Definice

Křivka zadaná implicitně rovnicí $f(x, y) = 0$ (resp. $g(x, y) = 0$) se nazývá *x-nulklina* (resp. *y-nulklina*) *rovnice* (6.23).

Průsečík nulklin je stacionární bod, tečna k trajektorii v jejím průsečíku s x-nulklinou (resp. y-nulklinou) je rovnoběžná s osou y (resp. x).

6.8.6 Definice (typy stacionárních bodů v rovině)

Stacionární bod (x_0, y_0) systému (6.23) se nazývá

bod rotace, jestliže v jeho libovolném okolí leží cyklus, obsahující (x_0, y_0) ve svém vnitřku;

střed, jestliže existuje jeho ryzí okolí U takové, že každá trajektorie s $(x_0, y_0) \in U$ je cyklem obsahujícím (x_0, y_0) ve svém vnitřku (střed je speciálním případem bodu rotace);

ohnisko, jestliže existuje jeho ryzí okolí U takové, že pro každou trajektorii s $(x_0, y_0) \in U$ platí

$$\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (x_0, y_0) \text{ nebo } \lim_{t\to-\infty}(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$$

a pro orientovaný úhel $\psi(t)$, který svírá vektor $(x(t), y(t)) - (x_0, y_0)$ s nějakým pevným vektorem platí

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = \infty \text{ nebo } \lim_{t\to\infty} \psi(t) = -\infty \text{ nebo } \lim_{t\to-\infty} \psi(t) = \infty \text{ nebo } \lim_{t\to-\infty} \psi(t) = -\infty$$

(trajektorie se přibližuje ke stacionárnímu bodu (nebo se od něho vzdaluje) po spirále);

uzel, jestliže existuje jeho ryzí okolí U takové, že pro každou trajektorii s $(x_0, y_0) \in U$ platí

$$\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (x_0, y_0) \text{ nebo } \lim_{t\to-\infty}(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$$

a pro orientovaný úhel $\psi(t)$, který svírá vektor $(x(t), y(t)) - (x_0, y_0)$ s nějakým pevným vektorem existuje vlastní $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t)$ nebo $\lim\limits_{t\to-\infty} \psi(t)$;

sedlo, jestliže existuje jen konečný počet trajektorií $(x, y) = (x(t), y(t))$ takových, že

$$\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (x_0, y_0) \text{ nebo } \lim_{t\to-\infty}(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)\,.$$

6.8.7 Stacionární body lineárního homogenního autonomního systému

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \tag{6.24}$$

Jestliže $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, je $(0, 0)$ jediným stacionárním bodem tohoto systému. Charakteristická rovnice systému je

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0\,.$$

Pokud $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, není 0 jejím kořenem. V tomto případě může charakteristická rovnice mít

(i)	dva reálné kladné kořeny	—	$(0, 0)$ je uzel, $\lim\limits_{t\to-\infty}(x(t), y(t)) = (0, 0)$;
(ii)	dva reálné záporné kořeny	—	$(0, 0)$ je uzel, $\lim\limits_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (0, 0)$;
(iii)	dva reálné kořeny opačných znamének	—	$(0, 0)$ je sedlo;
(iv)	dvojnásobný kladný reálný kořen	—	$(0, 0)$ je uzel, $\lim\limits_{t\to-\infty}(x(t), y(t)) = (0, 0)$;
(v)	dvojnásobný záporný reálný kořen	—	$(0, 0)$ je uzel, $\lim\limits_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (0, 0)$;
(vi)	komplexně sdružené kořeny $\alpha \pm \mathrm{i}\beta, \alpha > 0$	—	$(0, 0)$ je ohnisko, $\lim\limits_{t\to-\infty}(x(t), y(t)) = (0, 0)$;
(vii)	komplexně sdružené kořeny $\alpha \pm \mathrm{i}\beta, \alpha < 0$	—	$(0, 0)$ je ohnisko, $\lim\limits_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (0, 0)$;
(viii)	komplexně sdružené kořeny $\pm\mathrm{i}\beta$	—	$(0, 0)$ je střed.

6.8.8 Věta

Buďte $P,\ Q$ funkce dvou proměnných spojité v okolí počátku. Nechť $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ a nechť existuje $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|P(x,y)| + |Q(x,y)|}{(|x| + |y|)^{1+\varepsilon}} = 0\,.$$

Uvažujme autonomní systém

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + P(x,y) \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + Q(x,y)\,. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Je-li bod $(0,0)$ uzlem nebo ohniskem pro systém (6.24), pak je stejného typu i pro systém (6.25).
Je-li bod $(0,0)$ středem pro systém (6.24), pak je bodem rotace nebo ohniskem pro systém (6.25). Je-li bod $(0,0)$ sedlem pro systém (6.24) a funkce $P,\ Q$ mají spojité parciální derivace podle obou proměnných v okolí počátku, pak je $(0,0)$ sedlem i pro systém (6.25).

D.: Hartman: Ordinary Differential Equations, kap. VIII □

6.8.9 Důsledek

Nechť (x_0, y_0) je stacionárním bodem systému (6.23) (tj. $f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0) = 0$) a funkce $f,\ g$ mají spojité druhé parciální derivace podle obou proměnných v okolí bodu (x_0,y_0). Označme

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ \ f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),\ \ g_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ \ g_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

a nechť $f_1g_2 - f_2g_1 \neq 0$.
Pak je bod (x_0,y_0) uzlem, ohniskem nebo sedlem pro systém (6.23), je-li počátek stacionárním bodem stejného typu pro lineární homogenní systém

$$\begin{aligned} x' &= f_1x + f_2y \\ y' &= g_1x + g_2y\,. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Je-li počátek středem pro systém (6.26), je bod (x_0,y_0) buďto ohniskem nebo bodem rotace pro systém (6.23).

D.: Plyne z 6.8.8 a z 5.4.3. □

6.8.10 Definice (Persidskij)

Nechť $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t)$ je řešení systému (6.20) definované na intervalu $[0,\infty)$. $\mathbf{x}_0$ se nazývá *stejnoměrně stabilní*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $t_0 \geq 0$ všechna řešení $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ systému (6.20) splňující podmínku $|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0(t_0)| < \delta$ existují pro všechna $t \geq t_0$ a splňují pro ně nerovnost $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)| < \varepsilon$.

6.8.11 Definice (Ljapunov [1857 – 1918])

Nechť $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t)$ je řešení systému (6.20) definované na intervalu $[0,\infty)$. $\mathbf{x}_0$ se nazývá *stejnoměrně asymptoticky stabilní*, je-li stejnoměrně stabilní a existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $t_1 \geq 0$ a všechna řešení $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ systému (6.20) splňující podmínku $|\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_0(t_1)| < \delta$ platí $\lim\limits_{t\to\infty} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)| = 0$.

Ze struktury prostoru řešení lineárního homogenního systému s konstantními koeficienty plynou

6.8.12 Věta

Řešení $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t) \equiv 0$ lineárního homogenního systému s konstantními koeficienty

$$\mathbf{x}' = A \cdot \mathbf{x} \tag{6.27}$$

je stejnoměrně stabilní právě tehdy, když každý kořen charakteristické rovnice $|A - \lambda E|$ má nekladnou reálnou část a každý kořen s nulovou reálnou částí je jednoduchý.

6.8.13 Věta

Řešení $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t) \equiv 0$ lineárního homogenního systému s konstantními koeficienty (6.27) je stejnoměrně asymptoticky stabilní právě tehdy, když každý kořen charakteristické rovnice $|A - \lambda E|$ má zápornou reálnou část.

Uvažujme nyní *perturbovaný lineární systém s konstantními koeficienty*

$$\mathbf{x}' = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) . \tag{6.28}$$

6.8.14 Věta

Buď $Y = Y(t)$ fundamentální matice řešení systému (6.27). Jestliže existují konstanty $K > 0$ a $\gamma < \dfrac{1}{K}$ takové, že

$$\int\limits_0^t |Y(t)Y(s)^{-1}|\mathrm{d}s \ \leq \ K \quad \text{pro } t \geq 0 \tag{6.29}$$

a

$$|\mathbf{g}(\mathbf{x})| \leq \gamma|\mathbf{x}| \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega \, ,$$

pak řešení $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t) \equiv 0$ je stejnoměrně asymptoticky stabilní.

D.: Kalas, Ráb: Obyčejné diferenciální rovnice, str 130 – 131 □

Poznámka: Podmínka (6.29) zaručí stejnoměrnou asymptotickou stabilitu nulového řešení systému (6.27). Věta říká, že je-li perturbace $\mathbf{g}$ v jistém smyslu dostatečně malá, zůstává zachována stejnoměrná asymptotická stabilita nulového řešení rovnice (6.28).

Z hlediska aplikací je důležité vyšetřování stejnoměrné asymptotické stability konstantních řešení (stacionárních bodů) rovnice (6.20).

Je-li $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{o}$, pak podle 5.4.3 je

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \mathbf{r}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \, ,$$

kde $A = (a_{ij}) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^0) \right)$ a $\mathbf{r}_1$ je Taylorův zbytek. Vyšetřování stejnoměrné asymptotické stability konstantních řešení rovnice (6.20) lze převést na vyšetřování stejnoměrné asymptotické stability nulového řešení rovnice

$$\mathbf{y}' \ = \ A \cdot \mathbf{y} + \mathbf{r}_1(\mathbf{y})$$

a tu vyšetřit podle 6.8.14.

6.9 Eulerova numerická metoda řešení ODR

Uvažujme počáteční problém (6.3), (6.4). Pro malé $h > 0$ platí

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}'(t) \approx \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} \, .$$

Označme $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}(t_0)$, $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}(t_0 + h)$, $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}(t_0 + 2h)$, $\ldots$, $\mathbf{x}^k = \mathbf{x}(t_0 + kh)$, $\ldots$ Pak je

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{x}^1 & \approx & \mathbf{x}^0 + h\mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}^0) \ = \ \tilde{\mathbf{x}}^1 \\
\mathbf{x}^2 & \approx & \mathbf{x}^1 + h\mathbf{f}(t_0 + h, \mathbf{x}^1) \ \approx \ \tilde{\mathbf{x}}^1 + \mathbf{f}(t_0 + h, \tilde{\mathbf{x}}^1) \\
& \vdots & \\
\mathbf{x}^k & \approx & \mathbf{x}^{k-1} + h\mathbf{f}(t_0 + kh, \mathbf{x}^{k-1}) \ \approx \ \tilde{\mathbf{x}}^{k-1} + \mathbf{f}(t_0 + kh, \tilde{\mathbf{x}}^{k-1}) \\
& \vdots &
\end{array}$$

Konečná posloupnost $\left\{\tilde{\mathbf{x}}^k\right\}_{k=0}^K$ definovaná rekuretně

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}^0 &= \mathbf{x}^0 \\
\tilde{\mathbf{x}}^k &= \tilde{\mathbf{x}}^{k-1} + h\mathbf{f}\left(t_0 + kh, \tilde{\mathbf{x}}^{k-1}\right), \quad k = 1, 2, \dots, K
\end{aligned}$$

aproximuje řešení úlohy (6.3), (6.4) v bodech $t_0, t_0 + h, \dots, t_0 + Kh$.

6.10 Cvičení

Řešte rovnice (Cauchyovy úlohy)

1) $2t(2x-3)\mathrm{d}t + (t^2+1)\mathrm{d}x = 0$
2) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{t-x}$
3) $t\mathrm{e}^x\mathrm{d}x + \dfrac{t^2+1}{x}\mathrm{d}t = 0$
4) $\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}x + \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}t = 0$
5) $t^2\mathrm{d}x + (x^2 - tx)\mathrm{d}t = 0$
6) $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{t+x}{x-t}$
7) $\left(t\sin\dfrac{x}{t} - x\cos\dfrac{x}{t}\right)\mathrm{d}t + t\cos\dfrac{x}{t}\,\mathrm{d}x = 0$
8) $2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x = \mathrm{e}^{t/2}$
9) $t\mathrm{d}x + x\mathrm{d}t = \sin t\mathrm{d}t$
10) $(t-1)^3x' + 4(t-1)^2x = t+1$
11) $\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}t + 2(t\mathrm{e}^{2x} - x)\mathrm{d}x = 0$
12) $(x^2+1)\mathrm{d}t + (2tx+1)\mathrm{d}x = 0$
13) $(t+x)\mathrm{d}t + (t+x^2)\mathrm{d}x = 0$
14) $t\mathrm{d}x - x\mathrm{d}t + t^3\mathrm{d}t = 0$
15) $(t^2+t-x)\mathrm{d}t + t\mathrm{d}x = 0$
16) $(\cos t + x\cos t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}x = 0;\ x(\pi/2) = 0$
17) $x' + 2x = t;\ x(0) = 2$
18) $(t+2x)\mathrm{d}t + (x+2t)\mathrm{d}x = 0;\ x(1) = 1$

19) Určete konstanty a, b, c tak, aby rovnice $(at^2 + bx^2)\mathrm{d}t + ctx\,\mathrm{d}x = 0$ byla exaktní a vyřešte ji.

Řešte rovnice

20) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$ 21) $x'' + tx' = 0$ 22) $tx''' - 2x'' = 0$

23) Předmět o hmotnosti m je v čase $t_0 = 0$ shozen s věže. Odpor vzduchu je přímo úměrný rychlosti jeho pádu. Určete, jakou dráhu urazí za čas t.

Ukažte, že $x = u(t)$ je řešením dané rovnice a rovnici vyřešte.

24) $u = t^2;\ t^2x'' - 2x = 0$ 25) $u = \sqrt{t};\ x'' + \dfrac{x}{4t^2} = 0\ (t > 0)$

Řešte rovnice (Cauchyovy úlohy)

26) $x'' + 2x = 0$
27) $x'' + 6x' + 5x = 0$
28) $x'' + 6x' + 9x = 0$
29) $x'' - 2x' + 4x = 0$
30) $x'' - x = 0;\ x(0) = 1,\ x'(0) = -2$
31) $x'' + 4x = 0;\ x(0) = 0,\ x'(0) = 2$
32) $x'' + x' = t$
33) $x'' + x = \sin t$
34) $x'' - x = \mathrm{e}^t$
35) $x'' - 3x' - 10x = -3$
36) $x'' - x' = \sin t$
37) $x'' - 3x' = \mathrm{e}^{3t} - 12t$
38) $x'' + x = \mathrm{cotg}\, t$
39) $x'' - 8x' = \mathrm{e}^{8t}$
40) $x'' + 2x' = t^2 - \mathrm{e}^t$

Řešte systémy rovnic

41) $\begin{aligned} x' &= -2x + y \\ y' &= 3x - 4y \end{aligned}$
42) $\begin{aligned} x' &= -x - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^t \\ y' &= \tfrac{4}{3}x + y - t \end{aligned}$

43) $\begin{aligned} x' + 3x + 2y &= 5\sin t \\ y' - 2x + 7y &= 8\cos t \end{aligned}$
44) $\begin{aligned} 4x' + 9y' + 2x + 31y &= \mathrm{e}^t \\ 3x' + 7y' + x + 24y &= 3 \end{aligned}$

Výsledky: 1)$x = \dfrac{3}{2} + \dfrac{C}{(t^2+1)^2}$ 2)$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^t + C$ 3)$\mathrm{e}^x(x-1) + \dfrac{t^2}{2} + \ln|t| = C$ 4)$(x + \sqrt{x^2-1})(t + \sqrt{t^2+1}) = C$ 5)$x = \dfrac{t}{\ln|t| + C}$ 6)$\dfrac{1}{2}\ln(t^2+x^2) + \mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{t} = C$ 7)$x = t\arcsin\dfrac{C}{t}$ 8)$x = \dfrac{t+C}{2}\mathrm{e}^{t/2}$ 9)$x = \dfrac{C - \cos t}{t}$ 10)$x = \dfrac{t^3 - 3t + C}{3(t-1)^4}$ 11)$t = \dfrac{x^2+C}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ 12)$t = \dfrac{C-x}{x^2+1}$ 13)$\dfrac{t^2}{2} + tx + \dfrac{x^3}{3} = C$ 14)$x = Ct - \dfrac{t^3}{2}$ 15)$x = Ct - t^2 - t\ln|t|$ 16)$x = \mathrm{e}^{1-\sin t} - 1$ 17)$x = \dfrac{t}{2} + \dfrac{9}{4}\mathrm{e}^{-2t} - \dfrac{1}{4}$ 18)$t^2 + 4tx + x^2 = 6$ 19)$c = 2b;\ \dfrac{at^3}{3} + btx^2 = C$ 20)$x = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2$ 21)$x = C_1\int \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t + C_2$ 22)$x = C_1t^4 + C_2t + C_3$ 23)$t = \dfrac{mgt}{k} + \dfrac{m^2g}{k^2}(\mathrm{e}^{-kt/m} - 1)$ 24)$x = \dfrac{C_1}{t} + C_2t^2$ 25)$x = \sqrt{t}\,(C_1\ln|t| + C_2)$ 26)$x = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-2t}$ 27)$x = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-5t}$ 28)$x = (C_1 + C_2t)\mathrm{e}^{-3t}$ 29)$x = \mathrm{e}^t(C_1\cos\sqrt{3}\,t + C_2\sin\sqrt{3}\,t)$ 30)$x = \dfrac{3\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^t}{2}$ 31)$x = \sin 2t$ 32)$x = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{t^2}{2} - t$

$33) x = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \dfrac{t \cos t}{2}$ $34) x = C_1 \mathrm{e}^t + C_2 \mathrm{e}^{-t} + \dfrac{t\mathrm{e}^t}{2}$ $35) x = C_1 \mathrm{e}^{5t} + C_2 \mathrm{e}^{-2t} + \dfrac{3}{10}$
$36) x = C_1 + C_2 \mathrm{e}^t + \dfrac{\cos t - \sin t}{2}$ $37) x = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{3t} + 2t^2 + \dfrac{t\mathrm{e}^{3t} + 4t}{3}$ $38) x = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \sin t \ln \left| \dfrac{1 + \cos t}{\sin t} \right|$
$39) x = C_1 + \left(C_2 + \dfrac{t}{8} \right) \mathrm{e}^{8t}$ $40) x = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-2t} + \dfrac{t^3}{6} - \dfrac{t^2}{4} + \dfrac{t}{4} - \dfrac{\mathrm{e}^t}{3}$ $41) x = A\mathrm{e}^{-t} + B\mathrm{e}^{-5t}, y = A\mathrm{e}^{-t} - 3B\mathrm{e}^{-5t}$
$42) x = A\mathrm{e}^{t/3} + B\mathrm{e}^{-t/3} - 6t, y = -2A\mathrm{e}^{t/3} - B\mathrm{e}^{-t/3} + 9t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + 9$
$43) x = A\mathrm{e}^{-5t} + Bt\mathrm{e}^{-5t} + \frac{365}{338} \sin t - \frac{307}{338} \cos t, y = \frac{2A-B}{2} \mathrm{e}^{-5t} + Bt\mathrm{e}^{-5t} + \frac{144}{338} \sin t + \frac{278}{338} \cos t$
$44) x = \mathrm{e}^{-4t}(A \cos t + B \sin t) + \frac{31}{26}\mathrm{e}^t - \frac{93}{17}, y = \mathrm{e}^{-4t}((B - A) \cos t - (B + A) \sin t) - \frac{2}{13}\mathrm{e}^t + \frac{6}{17}$

Kapitola 7

Úvod do variačního počtu

7.1 Funkcionál a jeho variace

7.1.1 Definice

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Zobrazení $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ se nazývá *norma*, jestliže

(N1) $(\forall x_1, x_2 \in V)(\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|)$

(N2) $(\forall x \in V)(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\|)$

(N3) $(\forall x \in V)(x \neq 0 \Rightarrow \|x\| \neq 0)$

7.1.2 Poznámky

Norma má vlastnosti:

1. $\|0\| = 0$

   D.: $0 = 0x$ pro libovolné $x \in V$. Tedy podle (N2) je $\|0\| = \|0x\| = |0|\ \|x\| = 0$ $\square$

2. $(\forall x \in V)(\|x\| \geq 0)$

   D.: S využitím (N1), (N2) a 1.:
   $\|x\| = \frac{1}{2}(\|x\| + \|x\|) = \frac{1}{2}(\|x\| + |-1|\ \|x\|) = \frac{1}{2}(\|x\| + \|-x\|) \geq \frac{1}{2}\,\|x + (-x)\| = \frac{1}{2}\,\|0\| = 0.$ $\square$

7.1.3 Poznámka

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ a $\|\cdot\|$ norma na něm. Zobrazení $\rho : V^2 \to \mathbb{R}$ definované předpisem $\rho(x,y) = \|x - y\|$ je metrikou na V.

D.: $\rho(x,y) = \|x - y\| = 0 \ \Leftrightarrow x - y = 0$ (podle (N3), 7.1.1, 7.1.2) $\Leftrightarrow x = y$
$\rho(x,y) = \|x - y\| = |-1|\ \|y - x\| = \|y - x\| = \rho(y,x)$
$\rho(x,z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x,y) + \rho(x,z)$ $\square$

Označení: $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\varepsilon = \mathcal{O}_{\varepsilon,V,\|\cdot\|} = \{x \in V : \ \|x\| < \varepsilon\}$

7.1.4 Definice

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Zobrazení $v : V \to \mathbb{R}$ se nazývá *funkcionál* (*na vektorovém prostoru* V). Funkcionál na V se nazývá *lineární*, jestliže pro všechna $x, y \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$v[x + y] = v[x] + v[y]\,, \qquad v[\alpha x] = \alpha v[x]\,.$$

7.1.5 Poznámka

Lineární funkcionál v na vektorovém prostoru V (chápaný jako zobrazení metrického prostoru V s metrikou zavedenou v 7.1.3 do metrického prostoru $\mathbb{R}$ s přirozenou metrikou) je spojitým zobrazením právě tehdy, když v je spojité v 0 (nulovém vektoru).

D.: Nechť zobrazení v je spojité v 0 a buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo. K ε existuje $\delta > 0$ takové, že pro každý vektor $z \in V$ takový, že $\|z\| < \delta$ platí $|v[z]| < \varepsilon$.
Buď nyní $x \in V$ libovolný vektor. Pro každý vektor $y \in V$ takový, že $\|x - y\| < \delta$ platí $|v[x] - v[y]| = |v[x - y]| < \varepsilon$, což znamená, že v je zobrazení spojité v $x \in V$.
Opačná implikace je triviální. □

7.1.6 Definice

Buď v funkcionál na reálném vektorovém prostoru V s normou $\|\cdot\|$, $x \in V$ a $\mathcal{A} \subseteq V$ vektorový podprostor.
$\mathcal{A}$ nazveme *prostor přípustných vektorů*, prvky z $\mathcal{A}$ nazveme *variace* (*přírůstky*) *argumentu* funkcionálu v.
Variace argumentu funkcionálu v se někdy značí δx.
Dále nechť $L(x)$ je lineární funkcionál na prostoru přípustných vektorů $\mathcal{A}$. Jestliže existuje funkcionál τ na $\mathcal{A}$ takový, že $\lim_{h \to 0} \tau[h] = 0$ přičemž platí

$$\Delta v[x] \;=\; v[x+h] - v[x] \;=\; L(x)[h] + \|h\|\, \tau[h]$$

pro všechny vektory $h \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}$. Pak lineární funkcionál $L(x)$ nazveme *variace funkcionálu v* (*v prostoru V s normou $\|\cdot\|$ na vektoru x vzhledem k množině $\mathcal{A}$*) a značíme $L(x) = \delta v(x)$.

7.1.7 Věta

Buď v funkcionál na reálném vektorovém prostoru V s normou $\|\cdot\|$, $x \in V$ a buď $\mathcal{A}$ prostor přípustných vektorů.
Definujme zobrazení $\varphi : \mathbb{R} \times V \times (\mathcal{A} \cap \mathcal{O})$ předpisem $\varphi(\alpha, x, h) = v[x + \alpha h]$. Existuje-li variace funkcionálu v na x vzhledem k $\mathcal{A}$, pak $\delta v(x)[h] = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\varphi(0, x, h)$.

D.: $\Delta v[x] = \varphi(\alpha, x, h) - \varphi(0, x, h)$, $\Delta\alpha = \alpha - 0 = \alpha$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\varphi(0,x,h) \;&=\; \lim_{\alpha\to 0}\frac{\varphi(\alpha,x,h)-\varphi(0,x,h)}{\alpha} \;=\; \lim_{\alpha\to 0}\frac{\Delta v[x]}{\alpha} \;=\; \lim_{\alpha\to 0}\frac{\delta v(x)[\alpha h] + \|\alpha h\|\,\tau[\alpha h]}{\alpha} \;=\\
&=\; \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha\delta v(x)[h] + |\alpha|\,\|h\|\,\tau[\alpha h]}{\alpha} \;=\; \delta v(x)[h] + \|h\| \lim_{\alpha\to 0}\operatorname{sgn}(\alpha)\tau[\alpha h] \;=\; \delta v(x)[h]
\end{aligned}$$

□

7.1.8 Definice

Buď v funkcionál na reálném vektorovém prostoru V s normou $\|\cdot\|$, $x \in V$ a buď $\mathcal{A}$ prostor přípustných vektorů.
Řekneme, že funkcionál v nabývá na $x \in V$ *lokálního maxima* (resp. *minima*) *vzhledem k $\mathcal{A}$*, jestliže existuje $\mathcal{O}$ tak, že pro každý vektor $h \in \mathcal{O} \cap \mathcal{A}$ je $v[x] \geq v[x+h]$ (resp. $v[x] \leq v[x+h]$).
Řekneme, že funkcionál v nabývá na $x \in V$ *ostrého lokálního maxima* (resp. *minima*) *vzhledem k $\mathcal{A}$*, jestliže existuje $\mathcal{O}$ tak, že pro každý vektor $h \in (\mathcal{O} \cap \mathcal{A}) \setminus \{0\}$ je $v[x] > v[x+h]$ (resp. $v[x] < v[x+h]$).
(Ostrá) lokální maxima a minima nazýváme souhrnně (*ostré*) *lokální extrémy* funkcionálu v vzhledem k $\mathcal{A}$.

7.1.9 Věta

Buď v funkcionál na reálném vektorovém prostoru V s normou $\|\cdot\|$, $x \in V$ a $\mathcal{A}$ prostor přípustných vektorů.
Jestliže funkcionál v nabývá na $x \in V$ svého lokálního extrému vzhledem k $\mathcal{A}$ a existuje-li variace $\delta v(x)$, pak $\delta v(x) = 0$ (tj. funkcionál, který každému vektoru z $\mathcal{A}$ přiřadí číslo 0).

D.: Nechť v nabývá na $x \in V$ svého lokálního maxima vzhledem k $\mathcal{A}$ a nechť existuje $\delta v(x)$.
Připusťme, že existuje takový vektor $h \in \mathcal{A}$ takový, že $\delta v(x)[h] > 0$.
Podle 7.1.7 je $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\varphi(0, x, h) > 0$. To podle 2.5.1 znamená, že funkce $\varphi(\cdot, x, h)$ (tj. funkce φ chápaná jako funkce pouze první proměnné, přičemž druhou a třetí proměnnou považujeme za parametry) je rostoucí

v okolí nuly. Existuje tedy $\tilde{\alpha} > 0$ takové číslo, že pro všechna $\alpha \in (0, \tilde{\alpha})$ je $\varphi(\alpha, x, h) > \varphi(0, x, h)$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné a $\alpha \in \left(0, \min\left\{\tilde{\alpha}, \frac{\varepsilon}{\|h\|}\right\}\right)$. Pak $\alpha h \in \mathcal{A}$ (neboť $\mathcal{A}$ je vektorový podprostor) a $\alpha h \in \mathcal{O}_\varepsilon$ (neboť $\|\alpha h\| = \alpha \|h\| < \frac{\varepsilon}{\|h\|} \|h\| = \varepsilon$).
Pro $\alpha h \in \mathcal{A}$ tedy platí, že

$$v[x + \alpha h] = \varphi(\alpha, x, h) > \varphi(0, x, h) = v[x]\,,$$

což znamená, že funkcionál v nenabývá v x svého lokálního maxima.
Analogicky ukážeme, že nemůže existovat vektor $h \in \mathcal{A}$ takový, aby $\delta v(x)[h] < 0$. Celkem tedy pro každý vektor $h \in \mathcal{A}$ je $\delta v(x)[h] = 0$.
Pro minimum se důkaz provede analogicky. □

7.1.10 Definice

Buď v funkcionál na reálném vektorovém prostoru V s normou $\|\cdot\|$ a $\mathcal{A}$ buď prostor přípustných vektorů. Vektor $x \in V$ se nazývá *extrémální vektor* (stručně *extrémála*) *funkcionálu* v (*vzhledem k prostoru přípustných vektorů* $\mathcal{A}$), jestliže $\delta v(x) = 0$, tj. $\delta v(x)[h] = 0$ pro každý vektor $h \in \mathcal{A}$.

7.2 Úlohy s pevnými konci

7.2.1 Úlohy typu $\int_a^b F(s, x(s), x'(s))\mathrm{d}s \to \mathrm{extr}$, $x(a) = x_1$, $x(b) = x_2$

Je-li F dvakrát diferencovatelná funkce tří proměnných, V prostor funkcí definovaných a spojitě diferencovatelných na intervalu $[a, b]$ a na V je zavedena některá z norem

$$\begin{aligned} \|x\|_0 &= \max\{|x(t)| : t \in [a, b]\} \\ \|x\|_1 &= \max\{\max\{|x(t)| : t \in [a, b]\}, \max\{|x'(t)| : t \in [a, b]\}\}\,, \end{aligned}$$

pak

$$v[x] = \int_a^b F(s, x(s), x'(s))\mathrm{d}s$$

je spojitý funkcionál na V.

Položme $\mathcal{A} = \{h \in V : h(a) = h(b) = 0\}$.

Hledáme lokální extrémy funkcionálu v vzhledem k $\mathcal{A}$. Navíc požadujeme, aby pro funkci $x \in V$, v níž se extrém realizuje, platilo $x(a) = x_1$, $x(b) = x_2$, kde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ jsou předem dané konstanty. V případě normy $\|\cdot\|_0$ mluvíme o *silných extrémech*, v případě normy $\|\cdot\|_1$ mluvíme o *slabých extrémech*. (Nabývá-li funkcionál v na x silného extrému vzhledem k $\mathcal{A}$, nabývá na této funkci i slabého extrému.)

Využijeme 7.1.7 a 7.1.9:

$$\varphi(\alpha, x, h) \;=\; \int_a^b F(s, x(s) + \alpha h(s), x'(s) + \alpha h'(s))\mathrm{d}s\,,$$

$$\delta v(x)[h] \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\varphi(0, x, h) \;=\; \int_a^b \left(F_x(s, x(s), x'(s))h(s) + F_{x'}(s, x(s), x'(s))h'(s)\right)\mathrm{d}s\,.$$

Podle 3.2.19.1 je

$$\int_a^b F_{x'}(s, x(s), x'(s))h'(s)\mathrm{d}s \;=\; \left[F_{x'}(s, x(s), x'(s))h(s)\right]_a^b - \int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{x'}(s, x(s), x'(s))\right)h(s)\mathrm{d}s$$

a poněvadž $h(a) = h(b) = 0$, platí

$$\delta v(x)[h] \;=\; \int\limits_a^b \left(F_x(s, x(s), x'(s)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F_{x'}(s, x(s), x'(s)) \right) h(s)\mathrm{d}s \;=\; 0\,.$$

Tato rovnost má platit pro libovolnou funkci h z prostoru přípustných funkcí $\mathcal{A}$, takže pro $t \in [a, b]$ musí být splněna *Eulerova rovnice*

$$F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{x'} \;=\; 0\,,$$

v rozepsaném tvaru

$$F_x - F_{x't} - F_{x'x}x' - F_{x'x'}x'' \;=\; 0\,.$$

Řešení (integrální křivky) Eulerovy rovnice splňující podmínky

$$x(a) = x_1, \quad x(b) = x_2$$

jsou extrémály funkcionálu v. Jsou to funkce podezřelé z toho, že na nich nabývá funkcionál v lokálního extrému.

Řešení Eulerovy rovnice v některých speciálních případech:

1. F nezávisí na x':

   $$F_x(t, x) \;=\; 0$$

   Rovnice není diferenciální, její řešení nezávisí na volitelných konstantách. Úloha: najít extrém funkcionálu $v[x] = \int\limits_a^b F(s, x(s))\mathrm{d}s$ s podmínkami $x(a) = x_1$, $x(b) = x_2$ obecně nemá řešení.

2. F závisí pouze na x':

   $$F_{x'x'}x'' \;=\; 0$$

   Odtud $F_{x'x'} = 0$ nebo $x'' = 0$.
   Je-li $x'' = 0$, pak $x(t) = C_1 t + C_2$, kde C_1, C_2 jsou konstanty.
   Je-li $F_{x'x'} = 0$ a λ je kořenem této (nediferenciální) rovnice s neznámou x', pak $x(t) = \lambda t + C$, kde C je konstanta.
   Extrémálou je tedy úsečka.

3. F nezávisí na t:

   $$F_x - F_{x'x}x' - F_{x'x'}x'' \;=\; 0$$

   Poněvadž $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F - x'F_{x'}) \;=\; F_x x' + F_{x'}x'' - x''F_{x'} - x'(F_{x'x}x' + F_{x'x'}x'') \;=\; x'(F_x - F_{x'x}x' - F_{x'x'}x'')$,
   Eulerova rovnice přejde na tvar

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F - x'F_{x'}) \;=\; 0\,,$$

   neboli

   $$F - x'F_{x'} \;=\; C\,,$$

   kde C je konstanta.

7.2.2 Úlohy typu $\int\limits_a^b F(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{x}'(s))\mathrm{d}s \to \mathrm{extr}$, $\mathbf{x}(a) = \mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}(b) = \mathbf{x}^2$

Je-li F dvakrát diferencovatelná funkce $2n+1$ proměnných, V prostor (vektorových) funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definovaných a spojitě diferencovatelných na intervalu $[a, b]$ a na V je zavedena některá z norem

$$\|\mathbf{x}\|_0 \;=\; \left\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T\right\|_0 \;=\; \sum_{i=1}^n \max\{|x_i(t)| :\, t \in [a, b]\}$$

$$\|\mathbf{x}\|_1 \;=\; \left\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T\right\|_1 \;=\; \sum_{i=1}^n \max\{\max\{|x_i(t)| :\, t \in [a, b]\}, \max\{|x_i'(t)| :\, t \in [a, b]\}\}\,,$$

pak

$$v[\mathbf{x}] = \int\limits_a^b F(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s), x_1'(s), x_2'(s), \dots, x_n'(s))\mathrm{d}s$$

je spojitý funkcionál na V.

Položme $\mathcal{A} = \{\mathbf{h} \in V : \mathbf{h}(a) = \mathbf{h}(b) = 0\}$.

Hledáme lokální extrémy funkcionálu v vzhledem k $\mathcal{A}$.

Položme $\mathbf{h}^i = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T \in \mathcal{A}$, kde $h_1 \equiv 0, h_2 \equiv 0, \dots, h_{i-1} \equiv 0, h_{i+1} \equiv 0, \dots, h_n \equiv 0$ a složka h_i je libovolná ($i = 1, 2, \dots, n$).

Analogicky jako v 7.2.1 odvodíme

$$0 = \delta v(\mathbf{x})[\mathbf{h}^i] =$$

$$= \int\limits_a^b \left(F_{x_i}(s, x_1(s), \dots, x_n(s), x'(s), \dots, x'(s)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F_{x_i'}(s, x_1(s), \dots, x_n(s), x'(s), \dots, x'(s)) \right) h_i(s)\mathrm{d}s$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

z čehož dostaneme soustavu Eulerových diferenciálních rovnic druhého řádu

$$F_{x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{x_i'} = 0\,, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Jejím řešením splňujícím podmínky

$$x_i(a) = x_i^1,\ x_i(b) = x_i^2, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

jsou extrémály funkcionálu v — (vektorové) funkce podezřelé z toho, že na nich nabývá funkcionál v lokálního extrému.

7.2.3 Úlohy typu $\int\limits_a^b F(s, x(s), x'(s), x''(s), \dots, x^{(n)}(s))\mathrm{d}s \to \mathrm{extr}$, $x(a) = \alpha_0$, $x'(a) = \alpha_1$, …, $x^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1}$, $x(b) = \beta_0$, $x'(b) = \beta_1$, …, $x^{(n-1)}(b) = \beta_{n-1}$

Je-li F $(n+1)$-krát diferencovatelná funkce $n+2$ proměnných, V prostor funkcí definovaných a $(n+1)$-krát spojitě diferencovatelných na intervalu $[a, b]$ a na V je zavedena některá z norem

$$\begin{aligned} \|x\|_k &= \max\Big\{\max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}, \max\{|x'(t)| : t \in [a,b]\}, \dots, \max\{|x^{(k)}(t)| : t \in [a,b]\}\Big\} \\ & \quad k = 0, 1, 2. \dots, n\,, \end{aligned}$$

pak

$$v[x] = \int\limits_a^b F(s, x(s), x'(s), x''(s), \dots, x^{(n)}(s))\mathrm{d}s$$

je spojitý funkcionál na V.

Položme $\mathcal{A} = \{h \in V : h(a) = h'(a) = \cdots = h^{(n-1)}(a) = 0 = h(b) = h'(b) = \cdots = h^{(n-1)}(b)\}$.

Opět využijeme 7.1.7 a 7.1.9:

$$\varphi(\alpha, x, h) = \int\limits_a^b F\left(s, x(s) + \alpha h(s), x'(s) + \alpha h'(s), x''(s) + \alpha h''(s), \dots, x^{(n)}(s) + \alpha h^{(n)}(s)\right)\mathrm{d}s\,,$$

$$\begin{aligned} \delta v(x)[h] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\varphi(0, x, h) = \int\limits_a^b \left(F_x h + F_{x'} h' + F_{x'} h'' + \cdots + F_{x^{(n)}} h^{(n)}\right)\mathrm{d}s = \\ &= \int\limits_a^b F_x h \mathrm{d}s + \int\limits_a^b F_{x'} h' \mathrm{d}s + \int\limits_a^b F_{x''} h'' \mathrm{d}s + \cdots + \int\limits_a^b F_{x^{(n)}} h^{(n)} \mathrm{d}s \end{aligned}$$

Druhý až $(n+1)$-ní integrál upravíme podle 3.2.19.1

$$\begin{aligned}
\int_a^b F_{x'}h'\mathrm{d}s &= [F_{x'}h]_a^b - \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{x'}h\mathrm{d}s = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{x'}h\mathrm{d}s \\
\int_a^b F_{x''}h''\mathrm{d}s &= [F_{x''}h']_a^b - \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{x''}h'\mathrm{d}s = -\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{x''}h\right]_a^b + \int_a^b \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}F_{x''}h\mathrm{d}s = \int_a^b \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}F_{x''}h\mathrm{d}s \\
&\ \vdots \\
\int_a^b F_{x^{(n)}}h^{(n)}\mathrm{d}s &= (-1)^n \int_a^b \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}F_{x^{(n)}}h\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}$$

Má-li na funkci $x \in V$ být extrém funkcionálu v, musí podle 7.1.9 být

$$\delta v(x)[h] = \int_a^b \left(F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{x'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}F_{x''} - \cdots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}F_{x^{(n)}}\right) h\mathrm{d}s = 0\,.$$

pro libovolnou funkci $h \in \mathcal{A}$. Odtud dostaneme *Eulerovu-Poissonovu diferenciální rovnici*

$$F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{x'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}F_{x''} - \cdots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}F_{x^{(n)}} = 0\,.$$

Její řešení (integrální křivky) splňující podmínky

$$x(a) = \alpha_0,\ x'(a) = \alpha_1,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1},\ x(b) = \beta_0,\ x'(b) = \beta_1,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(b) = \beta_{n-1}$$

jsou extrémály uvažované variační úlohy. Jsou to funkce podezřelé z toho, že na nich nabývá funkcionál v svého lokálního extrému.

Analogicky jako v 7.2.2 lze ukázat, že nutnou podmínkou pro extrém funkcionálu

$$v[\mathbf{x}] = \int_a^b F(s, x_1(s), x_1'(s), x_1''(s), \ldots, x_1^{(n_1)}(s), \ldots, x_m(s), x_m'(s), x_m''(s), \ldots, x_m^{(n_m)}(s))\mathrm{d}s$$

je soustava rovnic

$$F_{x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{x_i'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}F_{x_i''} - \cdots + (-1)^{n_i} \frac{\mathrm{d}^{n_i}}{\mathrm{d}s^{n_i}}F_{x_i^{(n_i)}} = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,.$$

7.3 Úlohy s volnými konci

7.3.1 Úlohy typu $\int_a^b F(s, x(s), x'(s))\mathrm{d}s \to \mathrm{extr}$, $x(a) = x_1$

Je-li F dvakrát diferencovatelná funkce tří proměnných, V prostor funkcí definovaných a spojitě diferencovatelných na intervalu $[a, b]$ a na V je zavedena některá z norem

$$\begin{aligned}
\|x\|_0 &= \max\{|x(t)| : t \in [a, b]\} \\
\|x\|_1 &= \max\{\max\{|x(t)| : t \in [a, b]\}, \max\{|x'(t)| : t \in [a, b]\}\}\,,
\end{aligned}$$

pak

$$v[x] = \int_a^b F(s, x(s), x'(s))\mathrm{d}s$$

je spojitý funkcionál na V.

Položme $\mathcal{A} = \{h \in V : h(a) = 0\}$.

Hledáme lokální extrémy funkcionálu v vzhledem k $\mathcal{A}$. Navíc požadujeme, aby pro funkci $x \in V$, v níž se extrém realizuje, platilo $x(a) = x_1$, kde $x_1 \in \mathbb{R}$ je předem daná konstanta. V případě normy $\|\cdot\|_0$ mluvíme o *silných extrémech*, v případě normy $\|\cdot\|_1$ mluvíme o *slabých extrémech*.

Využijeme 7.1.7 a 7.1.9:

$$\varphi(\alpha, x, h) = \int_a^b F(s, x(s) + \alpha h(s), x'(s) + \alpha h'(s))\mathrm{d}s\,,$$

$$\delta v(x)[h] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\varphi(0, x, h) = \int_a^b (F_x(s, x(s), x'(s))h(s) + F_{x'}(s, x(s), x'(s))h'(s))\,\mathrm{d}s\,.$$

Podle 3.2.19.1 je

$$\int_a^b F_{x'}(s, x(s), x'(s))h'(s)\mathrm{d}s = [F_{x'}(s, x(s), x'(s))h(s)]_a^b - \int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{x'}(s, x(s), x'(s))\right)h(s)\mathrm{d}s$$

a poněvadž $h(a) = 0$, platí

$$\delta v(x)[h] = F_{x'}(b, x(b), x'(b))h(b) + \int_a^b \left(F_x(s, x(s), x'(s)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{x'}(s, x(s), x'(s))\right)h(s)\mathrm{d}s = 0\,.$$

Tato rovnost platí pro každou přípustnou funkci $h \in \mathcal{A}$ právě tehdy, když funkce x splňuje na $[a, b]$ Eulerovu rovnici

$$F_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{x'}$$

a tzv. *podmínku transverzality*

$$F_{x'}(b, x(b), x'(b)) = 0\,.$$

7.3.2 Bolzova úloha $\Phi(x(a), x(b)) + \int_a^b F(s, x(s), x'(s))\mathrm{d}s \to \mathrm{extr}$

Je-li F dvakrát diferencovatelná funkce tří proměnných a Φ diferencovatelná funkce dvou proměnných, V prostor funkcí definovaných a spojitě diferencovatelných na intervalu $[a, b]$ s některou z norem

$$\begin{aligned}\|x\|_0 &= \max\{|x(t)| : t \in [a, b]\}\\ \|x\|_1 &= \max\{\max\{|x(t)| : t \in [a, b]\}, \max\{|x'(t)| : t \in [a, b]\}\}\,,\end{aligned}$$

pak

$$v[x] = \Phi(x(a), x(b)) + \int_a^b F(s, x(s), x'(s))\mathrm{d}s$$

je spojitý funkcionál na V.

Položme $\mathcal{A} = V$. Hledáme lokální extrémy funkcionálu v vzhledem k $\mathcal{A}$. V případě normy $\|\cdot\|_0$ mluvíme o *silných extrémech*, v případě normy $\|\cdot\|_1$ mluvíme o *slabých extrémech*. Opět využijeme 7.1.7 a 7.1.9:

$$\varphi(\alpha, x, h) = \Phi\left(x(a) + \alpha h(a), x(b) + \alpha h(b)\right) + \int_a^b F(s, x(s) + \alpha h(s), x'(s) + \alpha h'(s))\mathrm{d}s\,,$$

$$\delta v(x)[h] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\varphi(0, x, h) =$$

$$= \Phi_{x(a)}\,(x(a),x(b))\,h(a) + \Phi_{x(b)}\,(x(a),x(b))\,h(b) + \int_a^b \left(F_x(s,x(s),x'(s))h(s) + F_{x'}(s,x(s),x'(s))h'(s)\right)\mathrm{d}s\,.$$

Opět podle 3.2.19.1 je

$$\int_a^b F_{x'}(s,x(s),x'(s))h'(s)\mathrm{d}s \;=\; \left[F_{x'}(s,x(s),x'(s))h(s)\right]_a^b - \int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{x'}(s,x(s),x'(s))\right)h(s)\mathrm{d}s$$

takže

$$0 \;=\; \delta v(x)[h] \;=$$

$$\left(\Phi_{x(a)}\,(x(a),x(b)) - F_{x'}\,(a,x(a),x'(a))\right)h(a) + \left(\Phi_{x(b)}\,(x(a),x(b)) + F_{x'}\,(b,x(b),x'(b))\right)h(b) +$$
$$+ \int_a^b \left(F_x(s,x(s),x'(s)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{x'}(s,x(s),x'(s))\right)h(s)\mathrm{d}s\,.$$

Tato rovnost platí pro každou přípustnou funkci $h \in \mathcal{A}$ právě tehdy, když funkce x splňuje na $[a,b]$ Eulerovu rovnici

$$F_x \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{x'}$$

a podmínky transverzality

$$F_{x'}(a,x(a),x'(a)) \;=\; \Phi_{x(a)}\,(x(a),x(b))\;, \quad F_{x'}(b,x(b),x'(b)) \;=\; -\Phi_{x(b)}\,(x(a),x(b))\;.$$

Poznamenejme, že volbou $\Phi \equiv 0$ dostaneme úlohu předchozího typu bez omezení $x(a) = x_1$.

7.3.3 Úlohy typu $\int_a^\tau F(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s \to \mathrm{extr}$, $x(a) = x_1$

Nechť F je dvakrát diferencovatelná funkce tří proměnných, $C^1([a,\infty))$ množina funkcí definovaných, ohraničených a spojitě diferencovatelných na intervalu $[a,\infty)$, $V = C^1([a,\infty)) \times \mathbb{R}$. Na V lze zavést normu

$$\|(x,\tau)\|_0 \;=\; \max\left\{|\tau|, \sup\{|x(t)| : \, t \in [a,\infty)\}\right\}\,.$$

Pak

$$v[(x,\tau)] = \int_a^\tau F(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s$$

je spojitý funkcionál na V.

Položme $\mathcal{A} = \{(h,\nu) \in V : \, h(a) = 0\}$.

Hledáme lokální extrémy funkcionálu v vzhledem k $\mathcal{A}$ za podmínky $x(a) = x_1$. Opět využijeme 7.1.7 a 7.1.9:

$$\varphi(\alpha,(x,\tau),(h,\nu)) \;=\; \int_a^{\tau+\alpha\nu} F(s,x(s)+\alpha h(s),x'(s)+\alpha h'(s))\mathrm{d}s\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\varphi(\alpha,(x,\tau),(h,\nu)) \;=\; \nu F\left(\tau+\alpha\nu, x(\tau+\alpha\nu)+\alpha h(\tau+\alpha\nu), x'(\tau+\alpha\nu)+\alpha h'(\tau+\alpha\nu)\right) +$$
$$+ \int_a^{\tau+\alpha\nu} \left(F_x\left(s,x(s)+\alpha h(s),x'(s)+\alpha h'(s)\right)h(s) + F_{x'}\left(s,x(s)+\alpha h(s),x'(s)\alpha h'(s)\right)h'(s)\right)\mathrm{d}s\,,$$

$$\begin{aligned}\delta v(x,\tau)[(h,\nu)] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\varphi(0,(x,\tau),(h,\nu)) = \\ &= \nu F\left(\tau,x(\tau),x'(\tau)\right) + \int\limits_a^\tau \left(F_x\left(s,x(s),x'(s)\right)h(s) + F_{x'}\left(s,x(s),x'(s)\right)h'(s)\right)\mathrm{d}s\,.\end{aligned}$$

Poněvadž podle 3.2.19.1 a vzhledem k $h(a)=0$ je

$$\int\limits_a^\tau F_{x'}(s,x(s),x'(s))h'(s)\mathrm{d}s = \left[F_{x'}(s,x(s),x'(s))h(s)\right]_a^\tau - \int\limits_a^\tau \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{x'}\left(s,x(s),x'(s)\right)\right)h(s)\mathrm{d}s =$$

$$= F_{x'}(\tau,x(\tau),x'(\tau))h(\tau) - \int\limits_a^\tau \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{x'}\left(s,x(s),x'(s)\right)\right)h(s)\mathrm{d}s\,,$$

tak platí

$$0 = \delta v(x,\tau)[(h,\nu)] =$$

$$= \nu F\left(\tau,x(\tau),x'(\tau)\right) + F_{x'}(\tau,x(\tau),x'(\tau))h(\tau) + \int\limits_a^\tau \left(F_x\left(s,x(s),x'(s)\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{x'}\left(s,x(s),x'(s)\right)\right)h(s)\mathrm{d}s\,.$$

Tato rovnost je splněna pro každou dvojici $(h,\nu)\in\mathcal{A}$ právě tehdy, když funkce x splňuje Eulerovu rovnici

$$F_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{x'}$$

a podmínky transverzality

$$F\left(\tau,x(\tau),x'(\tau)\right) = 0\,, \qquad F_{x'}\left(\tau,x(\tau),x'(\tau)\right) = 0\,.$$

Část III

Funkcionální analýza

Kapitola 8

Nekonečné řady

8.1 Pojem řady a jejího součtu

8.1.1 Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Položme

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1\,, \\ s_2 &= a_1 + a_2\,, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3\,, \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,. \end{aligned}$$

Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *posloupnost částečných součtů nekonečné řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Poznámka: Budeme uvažovat i nekonečné řady tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ a p.

Prvky posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývají *členy řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

8.1.2 Definice

Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonečná řada a $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost jejích častečných součtů.

Jestliže existuje vlastní limita $\lim s_n = s$, řekneme, že *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje*, číslo s nazýváme jejím *součtem* a píšeme $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Neexistuje-li vlastní limita $\lim s_n$, řekneme, že *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje*. Je-li přitom $\lim s_n = \pm\infty$, řekneme, že *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *určitě diverguje*, neexistuje-li ani nevlastní $\lim s_n$, řekneme, že *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *osciluje*.

8.1.3 Příklad — Geometrická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots$$

Členy řady: $a_n = aq^{n-1}$
Částečné součty: $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + \cdots + q^{n-1})$

Platí:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= a(1+q+\cdots+q^{n-1}+q^n) = a+aq(1+q+\cdots+q^{n-1}) = a+qs_n \\ s_{n+1} &= a_{n+1}+s_n = aq^n+s_n \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} aq^n+s_n &= a+qs_n \\ s_n(1-q) &= a(1-q^n) \\ s_n &= a\frac{1-q^n}{1-q} \end{aligned}$$

Je-li $|q|<1$, pak $\lim q^n=0$; je-li $q>1$, pak $\lim q^n=\infty$; je-li $q\le -1$, pak neexistuje vlastní ani nevlastní limita posloupnosti $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$; je-li $q=1$, nemá předchozí vyjádření smysl a je $s_n=na$.
Celkem: Geometrická řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ konverguje pro $|q|<1$ a má součet $\dfrac{a}{1-q}$, určitě diverguje pro $q\ge 1$ a osciluje pro $q\le -1$.

8.1.4 Věta (Cauchyovo - Bolzanovo kriterium)

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když ke každému $\varepsilon>0$ existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n\ge n_0$ a $m\in\mathbb{N}$ platí $|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+m}|<\varepsilon$.

D.: Plyne bezprostředně z 1.3.22. □

8.1.5 Věta (nutná podmínka konvergence)

Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim a_n=0$.

D.: Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=\lim s_n=s$. Pak $\lim a_n=\lim(s_n-s_{n-1})=\lim s_n-\lim s_{n-1}=s-s=0$. □

Poznámka: Tato podmínka není postačující — $\lim\frac{1}{n}=0$ ale $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ určitě diverguje do $+\infty$. Viz 1.1.2.1.

8.1.6 Definice

Buďte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonečná řada, $n\in\mathbb{N}$ libovolné pevně zvolené. Řada $R_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n+k}=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots$ (utvořená vynecháním prvních n členů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$) se nazývá *$n$-tý zbytek řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

8.1.7 Věta

Konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, konverguje i každý její zbytek a platí $\lim R_n=0$.

Konverguje-li alespoň jeden zbytek řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, konverguje i tato řada.

D.: Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Označme $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů zbytku R_n. Je $\sigma_k=s_{n+k}-s_n$.
Posloupnost $\{s_{n+k}\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje a tedy podle 1.3.6.4 konverguje i $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$.
Dále $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_k)=\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{k\to\infty}(s_{n+k}-s_n))=\lim\limits_{n\to\infty}(s-s_n)=s-s=0$.
Konverguje-li R_n, je $R_n\in\mathbb{R}$ a tedy $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k+R_n$, což jakožto součet dvou reálných čísel je reálné číslo. □

8.1.8 Věta (asociativní zákon)

Nechť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a nechť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Označme $n_0 = 0$ a položme

$$b_k = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k} \, .$$

Pak řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje a platí $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

D.: Posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ je vybraná z posloupnosti částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots =$$
$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots =$$
$$= b_1 + b_2 + \cdots + b_k + \cdots$$

Tvrzení nyní plyne z 1.3.14. $\square$

Poznámka: Předpoklad o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je podstatný:
$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ osciluje, posloupnost částečných součtů je $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$
$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$
$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1$
Řada $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ se nazývá *Grandiho*.

8.1.9 Věta (distributivní zákon)

Nechť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a nechť $c \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo. Pak konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, .$$

D.: Označme s_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$
s'_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$.
Pak $s'_n = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = cs_n$. Tvrzení nyní plyne z poznámky za 1.3.6. $\square$

Poznámka: Komutativní zákon obecně neplatí.

8.1.10 Věta

Konvergují-li řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, pak konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, .$$

D.: Označme s_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$
s'_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$
S_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$.
Pak $S_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = s_n + s'_n$.
Tvrzení nyní plyne z 1.3.6.2 $\square$

8.1.11 Věta

Nechť řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^1,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2, \dots,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^k$ konvergují a nechť $c_1,\ c_2, \dots,\ c_k$ jsou reálná čísla. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (c_1 a_n^1 + c_2 a_n^2 + \cdots + c_k a_n^k)$ konverguje a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_1 a_n^1 + c_2 a_n^2 + \cdots + c_k a_n^k) = c_1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^1 + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \cdots + c_k \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k \,,$$

neboli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{k} c_m a_n^m = \sum_{m=1}^{k} c_m \sum_{n=1}^{\infty} a_n^m \,.$$

D.: Úplnou indukcí z 8.1.9 a 8.1.10. □

Poznámka: Zejména pro $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 1$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{k} a_n^m = \sum_{m=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^m \,.$$

Symbol k v poslední formuli nelze nahradit symbolem ∞.

8.1.12 Věta (Cauchyova o aritmetických průměrech)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

D.: Označme $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$.
Připusťme $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n > \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Zvolme čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n < \alpha < \beta < \limsup_{n\to\infty} b_n \,.$$

Existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \geq n_1$ je $a_n < \alpha$. Pro $n > n_1$ tedy platí

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}}{n} + \frac{a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_n}{n} < \\ &< \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}}{n} + \frac{\alpha(n - n_1)}{n} \,. \end{aligned}$$

Pro $n \to \infty$ konverguje pravá strana této nerovnosti k α. To znamená, že existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $b_n \leq \alpha < \beta$. Odtud plyne, že $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n \leq \beta$, což je spor.
Platí tedy $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Analogicky ukážeme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$.
Celkem tedy je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty} b_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} b_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, z čehož vyplyne tvrzení. □

8.1.13 Poznámka o sumaci divergentních řad

Oscilujícím řadám jsme dosud nepřiřazovali žádný symbol jako jejich součet. Někdy je ale užitečné i takovým řadám nějaký „součet“ přiřadit. Taková zobecněná sumace musí splňovat jisté přirozené podmínky:

(i) Je-li $\sum a_n = a$ ve smyslu definice 8.1.2, musí být $\sum a_n = a$ v zobecněném smyslu.

(ii) Je-li $\sum a_n = a,\ \sum b_n = b$ v zobecněném smyslu a $\alpha,\ \beta$ jsou reálná čísla, pak $\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b$ v zobecněném smyslu.

Sumace, která splňuje (i) a (ii), se nazývá *regulární*.

Cesàrova [1859 – 1906] metoda (metoda aritmetických průměrů): Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada a $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost jejích částečných součtů. Jestliže platí $\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = a$, pak klademe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ v Cesàrově smyslu.

Z 8.1.12 plyne, že Cesàrova sumace je regulární.

8.2 Řady s nezápornými členy

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

8.2.1 Věta

Řada $\sum_{n=1}^{\infty}$ s nezápornými členy buď konverguje nebo určitě diverguje k $+\infty$. Konverguje právě tehdy, když posloupnost jejích částečných součtů je ohraničená.

D.: $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$. Posloupnost částečných součtů je neklesající a tvrzení plyne z 1.3.4, 1.3.9 a 1.3.12.5. □

Poznámka: Všechna následující tvrzení mohou být formulována se změněnými předpoklady. Místo „pro každé $n \in \mathbb{N}$“ lze psát „existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \geq n_0$“. (Sr. 8.1.7)

8.2.2 Věta (Integrální Cauchyovo - Maclaurinovo kriterium)

Nechť f je funkce definovaná na $[1, \infty)$, která je zde nezáporná a nerostoucí. Nechť $f(n) = a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}$ konverguje právě tehdy, když konverguje nevlastní integrál $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

D.: Poněvadž je f na $[1, \infty)$ monotonní, je podle 3.2.11 integrabilní na $[1, b]$ pro každé $b > 1$.

Označme $J_n = \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$.

Pro každé $x \in [i, i+1], \ i \in \mathbb{N}$ platí $a_i = f(i) \geq f(x) \geq f(i+1) = a_{i+1}$ a tedy

$$a_i = \int_i^{i+1} a_i \mathrm{d}x \geq \int_i^{i+1} f(x)\mathrm{d}x \geq \int_i^{i+1} a_{i+1}\mathrm{d}x = a_{i+1}\,.$$

Sečtením těchto nerovností pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$ dostaneme

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = s_{n-1} \geq \int_1^n f(x)\mathrm{d}x = J_n \geq a_2 + a_3 + \cdots + a_n = s_n - a_1\,,$$

neboli

$$s_n - a_1 \leq J_n \leq s_{n-1}\,.$$

Nechť $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ konverguje. Pak podle 1.6.4 konverguje posloupnost $\{J_n\}$ a tedy podle 1.3.4 je ohraničená. Existuje $K \in \mathbb{R}$, že $J_n \leq K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Celkem $s_n \leq K + a_1$, je shora ohraničená a neklesající, tedy konvergentní (podle 1.3.9) a podle 8.2.1 je i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Nechť $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ diverguje. Poněvadž f je nezáporná, je funkce $F(t) = \int_1^t f(x)\mathrm{d}x$ neklesající a tedy $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \infty$. Odtud $\lim J_n = \infty$ a také podle poznámky za 1.3.11 $\lim s_{n-1} = \lim s_n = \infty$. □

8.2.3 Příklad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

konverguje pro $k > 1$ a diverguje pro $k \leq 1$. (Viz 3.5.2.)

8.2.4 Věta (první srovnávací kriterium)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$. Pak platí: Konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; diverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, diverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

D.: Označme s_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

s'_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Pak $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n = s'_n$.

Je-li $\lim s'_n = b < \infty$, pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n \leq s'_n \leq b$, neboť posloupnost $\{s'_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající. Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je také neklesající a je shora ohraničená, což podle 1.3.9 znamená, že je konvergentní. Je-li $\lim s_n = \infty$, je podle poznámky za 1.3.11 také $\lim s'_n = \infty$. □

8.2.5 Definice

Buďte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ řady s nezápornými členy. Je-li $a_n \leq b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, nazývá se řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *majorantou* řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá *minorantou* řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Větu 8.2.4 lze přeformulovat: S konvergentní řadou s nezápornými členy konverguje i každá její minoranta, s divergentní řadou s nezápornými členy diverguje i každá její majoranta.

8.2.6 Věta (limitní srovnávací kriterium)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ řada s kladnými členy a nechť existuje $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = c \in \mathbb{R}^*$. Pak platí: Je-li $c < \infty$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Je-li $c > 0$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, pak diverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

D.: Nechť $c < \infty$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Posloupnost $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je podle 1.3.4 ohraničená, existuje tedy $K \in \mathbb{R}$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $\dfrac{a_n}{b_n} \leq K$, neboli $a_n \leq K b_n$. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} K b_n$ je podle 8.1.9 konvergentní, takže podle 8.2.4 je konvergentní i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nechť $c > 0$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. K $\varepsilon \in (0, c) > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $\dfrac{a_n}{b_n} > c - \varepsilon > 0$. Položme $k = \min\left\{\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2}, \ldots, \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}}, c - \varepsilon\right\}$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $\dfrac{a_n}{b_n} \geq k$, neboli $a_n \geq k b_n$. Kdyby řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergovala, pak by podle 8.1.9 a 8.2.4 konvergovala i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, což by byl spor. □

Důsledek: Buďte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ řady s kladnými členy. Jestliže existuje $\lim \dfrac{a_n}{b_n} \in (0, \infty)$, pak řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ současně konvergují nebo divergují.

8.2.7 Věta (odmocninové (Cauchyovo) kriterium)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Existuje-li takové $q \in [0, 1)$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\sqrt[n]{a_n} \le q$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Platí-li pro nekonečně mnoho indexů n nerovnost $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ určitě diverguje.

D.: Je-li $\sqrt[n]{a_n} \le q$, pak $a_n \le q^n$ a první tvrzení plyne z 8.2.4 a 8.1.3.
Je-li $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ pro nekonečně mnoho indexů n, pak $a_n \ge 1$ pro nekonečně mnoho indexů n a nemůže být $\lim a_n = 0$. Druhé tvrzení tedy plyne z 8.1.5 a 8.2.1. □

8.2.8 Věta (limitní odmocninové kriterium)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy a nechť existuje $\lim \sqrt[n]{a_n} = c \in \mathbb{R}^*$.

Je-li $c < 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, je-li $c > 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ určitě diverguje.

D.: Nechť $c < 1$ a buď $\varepsilon \in (0, 1 - c)$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \ge n_0$ je $\sqrt[n]{a_n} < c + \varepsilon < 1$. První tvrzení plyne z 8.2.7 a 8.1.7.
Nechť $c > 1$ a buď $\varepsilon \in (0, c - 1)$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \ge n_0$ je $\sqrt[n]{a_n} > c - \varepsilon > 1$. Druhé tvrzení plyne z 8.2.7. □

8.2.9 Věta (druhé srovnávací kriterium)

Buďte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ řady s kladnými členy a nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Pak platí:
Konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; diverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, diverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

D.: $0 < \dfrac{a_2}{a_1} \le \dfrac{b_2}{b_1}$, $0 < \dfrac{a_3}{a_2} \le \dfrac{b_3}{b_2}, \ldots, 0 < \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \le \dfrac{b_n}{b_{n-1}}$.
Vynásobením těchto nerovností dostaneme $0 < \dfrac{a_n}{a_1} \le \dfrac{b_n}{b_1}$, neboli $a_n \le \dfrac{a_1}{b_1} b_n$.
Konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje podle 8.1.9 i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_1}{b_1} b_n$ a tedy podle 8.2.4 konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
Nechť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Kdyby řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergovala, pak by podle již dokázané části věty řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergovala a to by byl spor. □

8.2.10 Věta (podílové (d'Alembertovo [1717 – 1783]) kriterium)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy. Existuje-li takové $q \in [0, 1)$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le q$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Platí-li pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

D.: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le q = \dfrac{q^{n+1}}{q^n}$ a první tvrzení plyne z 8.2.9 a 8.1.3.
Je-li $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$, pak $a_{n+1} \ge a_n$, posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je kladná a neklesající, nemůže tedy být $\lim a_n = 0$.
Druhé tvrzení plyne z 8.1.5. $\square$

8.2.11 Věta (limitní podílové kriterium)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy a nechť existuje $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = c \in \mathbb{R}^*$.
Je-li $c < 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, je-li $c > 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ určitě diverguje.

D.: Nechť $c < 1$ a buď $\varepsilon \in (0, 1-c)$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \ge n_0$ je $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < c + \varepsilon < 1$. První tvrzení plyne z 8.2.10 a 8.1.7.
Nechť $c > 1$ a buď $\varepsilon \in (0, c-1)$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \ge n_0$ je $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > c - \varepsilon$, tedy $a_{n+1} > (c-\varepsilon)a_n > a_n$, posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je kladná a rostoucí, nemůže tedy být $\lim a_n = 0$. Druhé tvrzení plyne z 8.1.5. $\square$

8.2.12 Lemma

Buď $\{a_n\}$ posloupnost kladných čísel. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a \in \mathbb{R}^*$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

D.: Ukážeme, že $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$.
Je-li $a = \infty$, je tvrzení triviální.
Nechť $a < \infty$ a zvolme $b \in \mathbb{R},\ b > a$. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \ge n_0$ je $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < b$. Tedy

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < b,\ \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} < b,\ \ldots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}} < b\,,$$

z čehož vynásobením dostaneme

$$\frac{a_n}{a_{n_0}} \;<\; b^{n-n_0}\,.$$

Odtud

$$\sqrt[n]{a_n} \;<\; \sqrt[n]{a_{n_0}}\, b^{\frac{n-n_0}{n}}\,.$$

Ze spojitosti exponenciální funkce plyne

$$\lim_{n\to\infty} b^{\frac{n-n_0}{n}} \;=\; \lim_{n\to\infty} b^{1-\frac{n_0}{n}} = b\,.$$

Dále

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_{n_0}} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln a_{n_0}} = 1\,.$$

Celkem tedy $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le b$.
Poněvadž $b > a$ bylo libovolné, je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le a$.

Analogicky ukážeme $\liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \ge \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$, takže celkem $a \le \liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le a$. $\square$

Z lemma plyne: pokud lze dokázat konvergenci řady s nezápornými členy pomocí podílového kriteria, pak ji lze dokázat i pomocí kriteria odmocninového. Podílové kriterium tedy není silnější, než odmocninové.

8.2.13 Další kriteria konvergence

Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s kladnými členy.

1. Logaritmické kriterium:
   Nechť existuje $\lim \dfrac{\ln a_n}{\ln n} = c$. Je-li $c < -1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, je-li $c > -1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

2. Raabeovo kriterium:
   Nechť existuje $\lim n \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = c$. Je-li $c > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, je-li $c < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

3. Gaussovo [1777 – 1855] kriterium:
   Nechť existuje $\varepsilon > 0$ a ohraničená posloupnost $\{\Theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové že

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\Theta_n}{n^{1+\varepsilon}}\,.$$

   Je-li $\lambda > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
   Je-li $\lambda < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
   Je-li $\lambda = 1$ a $\mu > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
   Je-li $\lambda = 1$ a $\mu \le 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

8.3 Řady absolutně a neabsolutně konvergentní

8.3.1 Věta

Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost. Jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

D.: Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje a buď $\varepsilon > 0$ libovolné.
Podle 8.1.4 existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ a $n \ge n_0$ platí
$\big|\,|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}|\,\big| = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| < \varepsilon$ a tedy
$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| < \varepsilon$, což podle 8.1.4 znamená, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. $\square$

8.3.2 Definice

Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje neabsolutně* (*relativně*), jestliže konverguje, avšak řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ určitě diverguje.

8.3.3 Poznámky

1. Jestliže konverguje řada s nezápornými (nekladnými) členy, pak konverguje absolutně.

2. Poněvadž řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ má nezáporné členy, platí pro absolutní konvergenci analogická kriteria jako v 8.2.

3. Konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ neabsolutně, pak má podle 8.1.7 nekonečně mnoho kladných a nekonečně mnoho záporných členů.

8.3.4 Věta

Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

D.: Označme s_n posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a S_n posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Pak $|s_n| = |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = S_n$. Podle 1.3.6.1 a 1.3.5.1 je
$\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} s_n\right| = \lim\limits_{n\to\infty} |s_n| \leq \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. $\square$

8.3.5 Věta

Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená posloupnost, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ konverguje absolutně.

D.: Existuje $k \in \mathbb{R}$, že $|c_n| < k$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle 8.1.4 existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ a každé $m \in \mathbb{N}$ platí $|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| < \dfrac{\varepsilon}{k}$. Tedy také
$|c_{n+1}a_{n+1}| + |c_{n+2}a_{n+2}| + \cdots + |c_{n+m}a_{n+m}| = |c_{n+1}|\,|a_{n+1}| + |c_{n+2}|\,|a_{n+2}| + \cdots + |c_{n+m}|\,|a_{n+m}| <$
$< k|a_{n+1}| + k|a_{n+2}| + \cdots + k|a_{n+m}| = k(|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}|) < k\dfrac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$,
a tedy podle 8.1.4 řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ konverguje. $\square$

8.3.6 Definice

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá *alternující*, jestliže platí $a_n a_{n+1} < 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. (T.j. členy řady střídají znaménka.)

Je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných čísel, pak jsou řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n$ alternující.

8.3.7 Věta (Leibnizovo [1646 – 1716] kriterium)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Alternující řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

D.: Nutnost plyne z 8.1.5.
Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Poněvadž $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel, pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_k - a_{k+1} \geq 0$.
Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a každé $m \in \mathbb{N}$ sudé platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + (a_{n+m-1} - a_{n+m}) = \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+m-2} - a_{n+m-1}) - a_{n+m} \leq \\ &\leq a_{n+1}\,, \end{aligned}$$

a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a každé $m \in \mathbb{N}$ liché platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + (a_{n+m-2} - a_{n+m-1}) + a_{n+m} = \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots - (a_{n+m-1} - a_{n+m}) \leq \\ &\leq a_{n+1}\,. \end{aligned}$$

Tedy pro všechna $n, m \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \;\leq\; a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + (-1)^{m-1} a_{n+m} \;\leq\; a_{n+1}\,.$$

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n < \varepsilon$. Pro libovolné $n \geq n_0$ a každé $m \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$\left|(-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \cdots + (-1)^{n+m-1} a_{n+m}\right| \;=$$

$$=\; |(-1)^n|\left|a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + (-1)^{m-1} a_{n+m}\right| \;=$$

$$=\; a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + (-1)^{m-1} a_{n+m} \;\leq\; a_{n+1} \;<\; \varepsilon\,,$$

což podle 8.1.4 znamená, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konverguje. □

8.3.8 Příklad

Leibnizova řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ konverguje.

Poněvadž podle 1.1.2.1 řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverguje, konverguje Leibnizova řada neabsolutně.

8.3.9 Poznámka

Předpoklad, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost, nelze v 8.3.7 vynechat.
Například řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 + (-1)^n}{n} \;=\; -1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} + \frac{3}{6} - \cdots - \frac{1}{2n+1} + \frac{3}{2n+2} - \cdots$$

diverguje. Kdyby tato řada konvergovala, pak by podle 8.1.8 konvergovala také řada

$$\left(-1 + \frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{6}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{3}{2n+2}\right) + \cdots \;=\; \frac{1}{2} + \frac{5}{12} + \frac{9}{30} + \cdots + \frac{4n+1}{4n^2+6n+2} + \cdots\,,$$

avšak podle 8.2.6 řada $\sum\limits_{n=0}^{n} \frac{4n+1}{4n^2+6n+2}$ diverguje, neboť

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n+1}{4n^2+6n+2}}{\frac{1}{n}} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+n}{4n^2+6n+2} \;=\; 1$$

a harmonická řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ podle 8.2.3 diverguje.

8.3.10 Další kriteria neabsolutní konvergence

1. Dirichletovo [1805 – 1859] kriterium
   Nechť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel s $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ a nechť posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je ohraničená. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ konverguje.

2. Abelovo [1802 – 1829] kriterium
   Nechť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotonní ohraničená posloupnost. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ konverguje.

8.3.11 Definice

Nechť $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ je permutace množiny $\mathbb{N}$ (posloupnost přirozených čísel taková, že každé číslo se v ní vyskytuje právě jednou) a nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\lambda_n}$ se nazývá *přeřazením řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. (Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\lambda_n}$ *vznikla z řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ přeřazením.)

Například: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$
$a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + a_6 + a_5 + \cdots$
$a_1 + a_3 + a_2 + a_5 + a_7 + a_4 + a_9 + a_{11} + a_6 + \cdots$

8.3.12 Definice

Řekneme, že pro konvergentní řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *platí komutativní zákon*, jestliže každá řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\lambda_n}$ vzniklá z této řady přeřazením konverguje a má týž součet.
Řada, pro niž platí komutativní zákon, se nazývá *bezpodmínečně konvergentní*, řada, pro niž neplatí komutativní zákon, se nazývá *podmíněně konvergentní*.

8.3.13 Věta

Pro absolutně konvergentní řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ platí komutativní zákon, t.j. absolutně konvergentní řada je bezpodmínečně konvergentní.

D.: Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje a buď $\varepsilon > 0$ libovolné.
Podle 8.1.4 existuje $r \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq r,\ m \in \mathbb{N}$ platí $|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| < \varepsilon$.
Čísla $1, 2, \ldots, r$ se vyskytují v permutaci $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ množiny $\mathbb{N}$. Poněvadž jich je konečně mnoho, existuje $t \in \mathbb{N}$, že $\{1, 2, \ldots, r\} \subseteq \{\lambda_n\}_{n=1}^{t}$.
Pro libovolné $n \geq t$ a $k \in \mathbb{N}$ platí $\left|a_{\lambda_{n+1}}\right| + \left|a_{\lambda_{n+2}}\right| + \cdots + \left|a_{\lambda_{n+k}}\right| \leq |a_{r+1}| + |a_{r+2}| + \cdots + |a_{r+m}|$, kde $r + m$ je největší z indexů $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots, \lambda_{n+k}$. Tedy $\left|a_{\lambda_{n+1}}\right| + \left|a_{\lambda_{n+2}}\right| + \cdots + \left|a_{\lambda_{n+k}}\right| < \varepsilon$ a podle 8.1.4 řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\lambda_n}$ konverguje absolutně.
Označme s_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a S_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\lambda_n}$. Pro $n \geq \max\{r, t\}$ platí
$|s_n - S_n| = |a_1 + a_2 + \cdots + a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \cdots + a_n - (a_{\lambda_1} + a_{\lambda_2} + \cdots + a_{\lambda_n})| \leq$
$\leq |a_{r+1}| + |a_{r+2}| + \cdots + |a_{r+m}| < \varepsilon$,
tedy $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n - S_n) = 0$, což znamená $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. $\square$

8.3.14 Lemma

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je neabsolutně konvergentní řada. Pak řada sestavená z jejích kladných (resp. záporných) členů je určitě divergentní k $+\infty$ (resp. k $-\infty$).

D.: Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ je řada s kladnými členy sestavená z kladných členů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-q_n)$ je řada s kladnými členy sestavená ze záporných členů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
Označme s_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,
s_n^+ částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$, $\quad s_n^-$ částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-q_n)$.
Buďte $k,\ l$ taková přirozená čísla, že $s_n = s_k^+ - s_l^-$. Přitom $k + l = n$ a pro $n \to \infty$ také $k \to \infty$, $l \to \infty$.
Kdyby $\lim\limits_{k\to\infty} s_k^+ \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{l\to\infty} s_l^- \in \mathbb{R}$, pak by $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = s_k^+ + s_l^-$, z čehož by vyplynulo, že řada

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Kdyby $\lim\limits_{k\to\infty} s_k^+ = \infty$ a $\lim\limits_{l\to\infty} s_l^- \in \mathbb{R}$, pak by podle 1.3.12.2 a 1.3.4 platilo $\lim\limits_{l\to\infty} s_n = \infty$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ by divergovala.

Kdyby $\lim\limits_{k\to\infty} s_k^+ \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{l\to\infty} s_l^- \infty$, pak by platilo $\lim\limits_{l\to\infty} s_n = -\infty$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ by divergovala.

Podle 8.2.1 tedy je $\lim\limits_{k\to\infty} s_k^+ = \lim\limits_{l\to\infty} s_l^- = \infty$. $\square$

8.3.15 Věta (Riemann [1826 – 1866])

Z libovolné neabsolutně konvergentní řady lze vhodným přeřazením obdržet řadu konvergentní k libovolnému předem danému číslu, řadu určitě divergentní nebo řadu oscilující.

D.: Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je neabsolutně konvergentní řada a nechť $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost jejích kladných členů, $\{-q_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost jejích zápornných členů. Podle 8.3.14 jsou řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ určitě divergentní k $+\infty$.

Buď $a \in \mathbb{R}$ libovolné. Buď $n_1 \in \mathbb{N}$ nejmenší číslo s vlastností

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} > a\,.$$

Buď $m_1 \in \mathbb{N}$ nejmenší číslo s vlastností

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{m_1} < a\,.$$

Dále buď $n_2 > n_1$ nejmenší číslo s vlastností

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{m_1} + p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \cdots + p_{n_2} > a$$

a $m_2 > m_1$ nejmenší číslo s vlastností

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{m_1} + p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \cdots + p_{n_2} - q_{m_1+1} - q_{m1+2} - \cdots - q_{m_2} < a\,.$$

Atd.

Výsledkem je jistá řada vzniklá přeřazením řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Nechť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je její posloupnost částečných součtů.

Je-li $s_n > a$, pak $s_n - a <$poslední kladný člen.

Je-li $s_n < a$, pak $s_n - a >$poslední záporný člen.

Tedy $q_l < s_n - a < p_k$ pro vhodná $k,\ l$.

Poněvadž $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, je podle 8.1.5 $\lim\limits_{l\to\infty} q_l = \lim\limits_{k\to\infty} p_k = 0$ a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$.

Dále ukážeme, že řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ lze přeřadit tak, aby vzniklá řada divergovala k $+\infty$.

Buď $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} > 1\,.$$

Buď $n_2 \in \mathbb{N},\ n_2 > n_1$ takové, že

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 + p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \cdots + p_{n_2} > 2\,.$$

Buď $n_3 \in \mathbb{N},\ n_3 > n_2$ takové, že

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 + p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \cdots + p_{n_2} - q_2 + p_{n_2+1} + p_{n_2+2} + \cdots + p_{n_3} > 3\,.$$

Atd.

Výsledkem je řada určitě divergující k $+\infty$.

Analogicky lze ukázat, že řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ lze přeřadit tak, aby vzniklá řada divergovala k $-\infty$.

Nakonec řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ přeřadíme tak, aby výsledkem byla řada oscilující.
Buď $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} > 1\,.$$

Buď $m_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{m_1} < -1\,.$$

Buď $n_2 \in \mathbb{N},\ n_2 > n_1$ takové, že

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{m_1} + p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \cdots + p_{n_2} > 1\,.$$

Atd.
Výsledkem je oscilující řada. □

Z Riemannovy věty plyne, že neabsolutně konvergentní řada je podmíněně konvergentní.

8.4 Dvojné řady

8.4.1 Definice

Zobrazení $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ se nazývá *dvojná posloupnost*.

Zápis: $f(m,n) = f_{mn}$, nebo $a_{mn},\ b_{mn},\ \ldots$
$\{a_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$, stručně $\{a_{mn}\}$
Čísla a_{mn} se nazývají *členy* této posloupnost. Lze je uspořádat do schématu (nekonečné matice):

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

8.4.2 Poznámky

Snadno lze definovat ohraničenost dvojné posloupnosti: Existují konstanty $k, K \in \mathbb{R}$ že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ je $k \le a_{mn} \le K$.

Nelze definovat monotonnost dvojné posloupnosti. Lze definovat monotonnost vzhledem k jednomu indexu: $\{a_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ je monotonní vzhledem k druhému indexu, je-li posloupnost $\{a_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ monotonní pro každé $m \in \mathbb{N}$.

8.4.3 Definice

Řekneme, že dvojná posloupnost $\{a_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ má limitu $a \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existují čísla $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ taková, že pro každá dvě $m, n \in \mathbb{N}$, $m \ge m_0,\ n \ge n_0$ platí $|a_{mn} - a| < \varepsilon$.
Píšeme $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{mn} = a,\ \lim a_{mn} = a,\ a_{mn} \to a$.
Má-li posloupnost $\{a_{mn}\}$ limitu $a \in \mathbb{R}$, řekneme, že je *konvergentní*.

8.4.4 Poznámky

1. Analogicky lze definovat nevlastní limity dvojné posloupnosti.

2. Některé věty o limitách posloupnosti lze snadno přenést na dvojné posloupnosti. Zejména 1.3.3, 1.3.5.1–3, 1.3.6 a 1.3.7.

3. Konvergentní dvojná posloupnost nemusí být ohraničená.

   Například $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$ má limitu 1 a není ohraničená.

8.4.5 Věta (Cauchyovo - Bolzanovo kriterium)

Dvojná posloupnost $\{a_{mn}\}$ konverguje právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé dvě dvojice $(m, n), (p, q) \in \mathbb{N}^2$ takové, že $m \geq n_0,\ n \geq n_0,\ p \geq n_0,\ q \geq n_0$ platí $|a_{mn} - a_{pq}| < \varepsilon$.

D.: „$\Rightarrow$“ Triviální (analogicky jako 1.3.22).

„$\Leftarrow$“ Položme $b_n = a_{nn}$ (diagonální posloupnost). $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, existuje tedy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \in \mathbb{R}$.
Ukážeme, že také $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{mn} = a$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné.
K $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro $m \geq n_1,\ n \geq n_1,\ p \geq n_1,\ q \geq n_1$ platí $|a_{mn} - a_{pq}| < \frac{\varepsilon}{2}$.
K $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_2$ platí $|b_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Pro každé $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí
$|a_{mn} - a| = |a_{mn} - a_{nn} + b_n - a| \leq |a_{mn} - a_{nn}| + |b_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$ $\square$

8.4.6 Definice

Buď $\{a_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ dvojná posloupnost a položme

$$s_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{\substack{i \leq m \\ j \leq n}} a_{ij}\,.$$

Dvojná posloupnost $\{s_{mn}\}$ se nazývá *posloupnost částečných součtů dvojné řady* $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum a_{mn}$.
Řekneme, že dvojná řada $\sum a_{mn}$ *konverguje a má součet* s, jestliže $\lim\limits_{m,n\to\infty} s_{mn} = s \in \mathbb{R}$. Řekneme, že tato dvojná řada určitě diverguje k ∞ (k $-\infty$), jestliže $\lim\limits_{m,n\to\infty} s_{mn} = \infty$ ($\lim\limits_{m,n\to\infty} s_{mn} = -\infty$).

8.4.7 Poznámky

Snadno lze dokázat následující tvrzení:

1. Nutná podmínka konvergence dvojné řady $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ je $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{mn} = 0$.
   $(a_{mn} = s_{mn} - s_{m-1\,n} - s_{m\,n-1} + s_{m-1\,n-1})$
2. Cauchyovo - Bolzanovo kriterium:
   Dvojná řada $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ konverguje právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé dvě dvojice (m, n), $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ takové, že $m \geq n_0,\ n \geq n_0$ platí

$$\left| \sum_{\substack{n \leq i \leq n+p \\ m \leq j \leq m+q}} a_{ij} \right| < \varepsilon\,.$$

3. Jestliže $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = a \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} b_{mn} = b \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, pak
$\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} (c_1 a_{mn} + c_2 b_{mn}) = c_1 \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} + c_2 \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} b_{mn}$.

4. Nechť $a_{mn} \geq 0$ pro všechna m, $n \in \mathbb{N}$. Dvojná řada $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ konverguje právě tehdy, když posloupnost jejích částečných součtů je shora ohraničená.

5. Nechť pro všechna m, $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \leq a_{mn} \leq b_{mn}$. Potom: konverguje-li řada $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} b_{mn}$, pak konverguje i řada $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$; diverguje-li řada $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$, pak diverguje i řada $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} b_{mn}$.

6. Konverguje-li řada $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|$, pak konverguje i řada $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$.

8.4.8 Definice

Řekneme, že dvojná řada $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje dvojná řada $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|$.

8.4.9 Věta (komutativní zákon pro dvojné řady)

Nechť dvojná řada $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ konverguje absolutně a nechť $\mathbb{N}^2 = \bigcup\limits_{k \in I} N_k$ je disjunktní rozklad množiny $\mathbb{N}^2$ a nechť každá množina N_k je vyjádřena ve tvaru konečné nebo spočetné posloupnosti.
Je-li množina N_k nekonečná, pak řada $\sum\limits_{(m,n) \in N_k} a_{mn}$ absolutně konverguje.

Označíme-li $\sum\limits_{(m,n) \in N_k} a_{mn} = z_k$, pak platí $\sum\limits_{k \in I} z_k = \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$. Přitom je-li množina I nekonečná, řada $\sum\limits_{k \in I} z_k$ konverguje absolutně.

Náznak důkazu:

Množinu $\mathbb{N}^2$ lze vyjádřit jako prostou posloupnost $\{(m_1, n_1), (m_2, n_2), \dots, (m_l, n_l), \dots\}$.
Označíme-li $b_l = a_{m_l, n_l}$, lze řadu $\sum\limits_{l=1}^{\infty} b_l$ považovat za přeřazení dvojné řady $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$.

Podle 8.3.13 řada $\sum\limits_{l=1}^{\infty} b_l$ konverguje absolutně a platí $\sum\limits_{l=1}^{\infty} b_l = \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$.

Zřejmě $\sum\limits_{(m,n) \in \mathbb{N}_k} |a_{mn}| \leq \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ a tedy podle 8.4.7.4 řada $\sum\limits_{(m,n) \in \mathbb{N}_k} a_{mn}$ konverguje absolutně.

Řadu $\sum\limits_k z_k = \sum\limits_k \left(\sum\limits_{(m,n) \in \mathbb{N}_k} a_{mn} \right)$ lze považovat za přeřazení řady $\sum\limits_{l=1}^{\infty} b_l$.
Podle 8.3.13 řada $\sum\limits_k z_k$ konverguje absolutně a platí $\sum\limits_k z_k = \sum\limits_l b_l$.
(Podrobný důkaz viz např. Jarník, Diferenciální počet II, Věta 39) $\square$

8.4.10 Sumační metody dvojných řad

Konstrukce popsaná v předchozí větě se nazývá sumační metoda dvojné řady. Aplikovat sumační metodu na dvojnou řadu $\sum a_{mn}$ znamená

— Množinu $\mathbb{N}^2$ vyjádřit jako sjednocení konečné nebo spočetné posloupnosti po dvou disjunktních množin N_k.

— Každou množinu N_k uspořádat do konečné nebo spočetné posloupnosti.

— Utvořit součty (řady) $\sum\limits_{(m,n)\in N_k} a_{mn} = z_k$.

— Utvořit součet (řadu) $\sum\limits_k z_k$.

Jestliže dvojná řada $\sum a_{mn}$ konverguje absolutně, pak konverguje absolutně i každá takto vytvořená řada a platí $\sum a_{mn} = \sum z_k$.

Některé významné sumační metody:

- *Sumace po čtvercích*
  $N_1 = \{(1,1)\}$
  $N_2 = \{(2,1),(2,2),(1,2)\}$
  $N_3 = \{(3,1),(3,2),(3,3),(2,3),(1,3)\}$
  $\vdots$
  Pak $\sum a_{mn} = a_{11} + (a_{21} + a_{22} + a_{12}) + (a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{23} + a_{13}) + \cdots$

- *Sumace po diagonálách*
  $N_1 = \{(1,1)\}$
  $N_2 = \{(2,1),(1,2)\}$
  $N_3 = \{(3,1),(2,2),(1,3)\}$
  $\vdots$
  Pak $\sum a_{mn} = a_{11} + (a_{21} + a_{12}) + (a_{31} + a_{22} + a_{13}) + \cdots$

- *Dvojnásobné řady*
  $N_k = \{(k,1),(k,2),(k,3),\dots\}$ (k-tý řádek)
  nebo
  $N_k = \{(1,k),(2,k),(3,k),\dots\}$ (k-tý sloupec)
  Pak $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}\right)$ nebo $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{mn}\right)$

8.5 Součin řad

8.5.1 Definice

Buďte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ nekonečné řady. Jejich *součinem* rozumíme dvojnou řadu $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} c_{mn}$, kde $c_{mn} = a_m b_n$.

8.5.2 Věta

Nechť řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = b$ konvergují absolutně. Pak jejich součin $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} c_{mn}$ konverguje rovněž absolutně a platí $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} = ab$.

D.: Označme $s = \sum |a_m|$, $t = \sum |b_n|$,
ρ_m částečné součty řady $\sum |a_m|$, σ_n částečné součty řady $\sum |b_n|$,
$\tilde{\rho}_m$ částečné součty řady $\sum a_m$, $\tilde{\sigma}_n$ částečné součty řady $\sum b_n$,
s_{mn} částečné součty dvojné řady $\sum |c_{mn}| = \sum |a_m b_n|$.
$s_{mn} = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} |a_i b_j| = \sum\limits_{i=1}^{m} |a_i| \sum\limits_{j=1}^{n} |b_j| = \rho_m \sigma_n \le st$ a podle 8.4.7.4 $\sum |c_{mn}|$ konverguje, tedy $\sum c_{mn}$ konverguje absolutně.
Na dvojnou řadu $\sum c_{mn}$ lze aplikovat sumaci po čtvercích.
Dostaneme $\sum c_{mn} = c_{11} + (c_{21} + c_{22} + c_{12}) + (c_{31} + c_{32} + c_{33} + c_{23} + c_{13}) + \cdots$.
Částečné součty této řady jsou
$s_1 = c_{11} = a_1 b_1 = \tilde{\rho}_1 \tilde{\sigma}_1$
$s_2 = c_{11} + (c_{21} + c_{22} + c_{12}) = a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2 = (a_1 + a_2) b_1 + (a_1 + a_2) b_2 = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = \tilde{\rho}_2 \tilde{\sigma}_2$

$\vdots$

$s_n = \tilde{\rho}_n \tilde{\sigma}_n$ $\square$

Aplikací nějaké sumační metody dostaneme konkrétní tvary součinů řad.

Sumace po čtvercích $\Rightarrow$ *Dirichletův součin řad*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = a_1b_1 + (a_2b_1 + a_2b_2 + a_1b_2) + (a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 + a_2b_3 + a_1b_3) + \cdots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \sum_{i=1}^{n-1} b_i \ + \ a_n b_n \ + \ b_n \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)$$

Sumace po diagonálách $\Rightarrow$ *Cauchyův součin řad*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = a_1b_1 + (a_2b_1 + a_1b_2) + (a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

8.5.3 Věta

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = b$ jsou konvergentní řady a nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ je jejich Dirichletův součin. Pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje a platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = ab$.

D.: Označíme-li ρ_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,

σ_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$,

s_n částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$,

pak analogicky jako v důkazu věty 8.5.2 ukážeme, že $s_n = \rho_n \sigma_n$, z čehož podle 1.3.6.3 vyplyne $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = ab$, tedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = ab$. $\square$

Poznámka: Pro Cauchyův součin podobné tvrzení neplatí:
Položme $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Podle 8.3.7 řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergují.
Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ je jejich Cauchyův součin, tedy

$$\begin{aligned}
c_n &= (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{1}}\right), \\
|c_n| &= \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{1}} \ \geq \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} = \frac{n+1}{n+1} = 1,
\end{aligned}$$

takže nemůže platit $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ a podle 8.1.5 řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ nekonverguje.

8.5.4 Věta (Mertens [1840 – 1927])

Nechť řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = a$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = b$ konvergují a alespoň jedna z nich absolutně. Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ je jejich Cauchyův součin. Pak $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konverguje a platí $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = ab$.

D.: Nechť $\sum a_n$ konverguje absolutně a označme ρ_n, resp. σ_n, resp. s_n částečné součty řady $\sum a_n$, resp. $\sum b_n$, resp. $\sum c_n$. Pak

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \rho_n &= a, \\
\lim_{n\to\infty} \sigma_n &= b, \\
s_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0) = \\
&= a_0(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) + a_1(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_nb_0 = \\
&= a_0\sigma_n + a_1\sigma_{n-1} + \cdots + a_n\sigma_0
\end{aligned}$$

Označme $\beta_n = \sigma_n - b$. Pak $\sigma_n = b + \beta_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Tedy

$$s_n = a_0(b+\beta_n) + a_1(b+\beta_{n-1}) + \cdots + a_n(b+\beta_0) = b(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0 \,.$$

Označme $\omega_n = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0$ Pak $s_n = b\rho_n + \omega_n$. Nyní stačí ukázat, že $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 0$, neboť $\lim\limits_{n\to\infty} b\rho_n = b \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = ab$.

Řada $\sum |a_n|$ konverguje, to znamená, že má ohraničené částečné součty, neboli existuje $m \in \mathbb{R},\ m > 0$, že

$$|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| \le m, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, to znamená, že posloupnost $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená, neboli existuje $k \in \mathbb{R},\ k > 0$, že

$$|\beta_n| < k, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, k číslu $\dfrac{\varepsilon}{2m} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \ge n_1$ platí

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2m} \,.$$

$\sum |a_n|$ konverguje, takže podle 8.1.4 k číslu $\dfrac{\varepsilon}{2k} > 0$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \ge n_2$ a $p \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2k} \,.$$

Buď $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pro libovolné $n > 2n_0$ platí

$$\begin{aligned}
|\omega_n| &= |a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0| \le \\
&\le |a_0|\,|\beta_n| + |a_1|\,|\beta_{n-1}| + \cdots + |a_{n_0}|\,|\beta_{n-n_0}| + |a_{n_0+1}|\,|\beta_{n-n_0-1}| + \cdots + |a_n|\,|\beta_0| \le \\
&\le (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n_0}|)\frac{\varepsilon}{2m} + (|a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + \cdots + |a_n|)k \le m\frac{\varepsilon}{2m} + \frac{\varepsilon}{2k}k = \varepsilon \,,
\end{aligned}$$

což znamená $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 0$. $\square$

8.5.5 Věta (Cesàro [1859 – 1906])

Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = a$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = b$ jsou konvergentní řady a nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ je jejich Cauchyův součin. Je-li $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} = ab$.

D.: Označme ρ_n, resp σ_n částečný součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, resp. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ a dále $\alpha_n = \rho_n - a$, $\beta_n = \sigma_n - b$. Pak $\lim_{n\to\infty} \rho_n = a$, $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = b$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$, $\rho_n = a + \alpha_n$, $\sigma_n = b + \beta_n$.
V důkazu věty 8.5.4 jsme ukázali, že $s_n = a_0\sigma_n + a_1\sigma_{n-1} + \cdots + a_n\sigma_0$. Odtud plyne

$$\begin{aligned} s_0 + s_1 + \cdots + s_n &= a_0\sigma_0 + (a_0\sigma_1 + a_1\sigma_0) + \cdots + (a_0\sigma_n + a_1\sigma_{n-1} + \cdots + a_n\sigma_0) = \\ &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)\sigma_0 + (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1})\sigma_1 + \cdots + a_0\sigma_n = \\ &= (a + \alpha_n)(b + \beta_0) + (a + \alpha_{n-1})(b + \beta_1) + \cdots + (a + \alpha_0)(b + \beta_n) = \\ &= (n+1)ab + a(\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_n) + b(\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n) + \\ &\quad + \alpha_n\beta_0 + \alpha_{n-1}\beta_1 + \cdots + \alpha_0\beta_n\,. \end{aligned}$$

Dále

$$\frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} = ab + a\frac{\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_n}{n+1} + b\frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n+1} + \frac{\alpha_n\beta_0 + \alpha_{n-1}\beta_1 + \cdots + \alpha_0\beta_n}{n+1}\,.$$

Podle 8.1.12 je $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n+1} = 0$.
K dokončení důkazu tedy stačí ukázat, že $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n\beta_0 + \alpha_{n-1}\beta_1 + \cdots + \alpha_0\beta_n}{n+1} = 0$.
Posloupnosti $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ jsou podle 1.3.4 ohraničené, a tedy existuje $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ takové, že $|\alpha_n| \le k$, $|\beta_n| \le k$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
Buď nyní $\varepsilon > 0$ libovolné.
K $\frac{\varepsilon}{k} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro $n \ge n_1$ je $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{k}$ a existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro $n \ge n_2$ je $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{k}$.
Buď $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pro $n > 2n_0$ platí

$$\begin{gathered} |\alpha_0\beta_n + \alpha_1\beta_{n-1} + \cdots + \alpha_{n_0}\beta_{n-n_0} + \alpha_{n_0+1}\beta_{n-n_0-1} + \cdots + \alpha_n\beta_0| \le \\ (|\alpha_0|\,|\beta_n| + |\alpha_1|\,|\beta_{n-1}| + \cdots + |\alpha_{n_0}|\,|\beta_{n-n_0}|) + (|\alpha_{n_0+1}|\,|\beta_{n-n_0-1}| + \cdots + |\alpha_n|\,|\beta_0|) < \\ \left(k\frac{\varepsilon}{k} + k\frac{\varepsilon}{k} + \cdots + k\frac{\varepsilon}{k}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{k}k + \frac{\varepsilon}{k}k + \cdots + \frac{\varepsilon}{k}k\right) = (n+1)\varepsilon\,. \end{gathered}$$

To znamená, že pro $n > n_0$ je $\frac{\alpha_n\beta_0 + \alpha_{n-1}\beta_1 + \cdots + \alpha_0\beta_n}{n+1} < \varepsilon$. $\Box$

Z 8.1.12 a 8.5.5 bezprostředně plyne

8.5.6 Věta (Abel [1802 – 1829])

Buďte $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$ konvergentní řady a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ jejich Cauchyův součin. Jestliže $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konverguje, pak $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = ab$.

Poznámka: Porovnáním s 8.1.13 vidíme, že platí i obecnější tvrzení: Buďte $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$ konvergentní řady. Jestliže jejich Cauchyův součin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konverguje v Cesàrově smyslu, pak $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = ab$ v Cesàrově smyslu.

8.6 Posloupnosti a řady funkcí

8.6.1 Definice

Nechť f_n, $n \in \mathbb{N}$ a f jsou reálné funkce takové, že $\mathrm{Dom}\, f \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Dom}\, f_n$.

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *bodově konverguje k funkci* f *na množině* $M \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Dom}\, f_n$ a píšeme

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, jestliže pro každé $x \in M$ číselná posloupnost $\{f_n(x)\}$ konverguje k $f(x)$, neboli když pro každé $x \in M$ je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
Množina $\left\{ x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n : \{f_n(x)\} \text{ konverguje} \right\}$, se nazývá *obor bodové konvergence posloupnosti funkcí* $\{f_n\}$.

Posloupnost funkcí $\{f_n\}$ bodově konverguje k funkci f na množině M, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ a každému $x \in M$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Všimněme si, že číslo n_0 závisí na ε i na x.

Má-li každá z funkcí posloupnosti $\{f_n\}$ nějakou vlastnost, limitní funkce $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ tutéž vlastnost mít může, ale nemusí.

— Jsou-li všechny funkce f_n nezáporné (nekladné), je i funkce f nezáporná (nekladná).

— Jsou-li všechny funkce f_n neklesající (nerostoucí), je i funkce f neklesající (nerostoucí).

— Jsou-li všechny funkce f_n klesající (rostoucí), nemusí být funkce f klesající (rostoucí).
Např. $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{n} = 0$

— Jsou-li všechny funkce f_n ohraničené, nemusí být funkce f ohraničená.
Např. $f_n(x) = \dfrac{n}{nx+1}$ na intervalu $(0,\infty)$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{x}$

— Jsou-li všechny funkce f_n spojité, nemusí být funkce f spojitá.
Např. $f_n(x) = x^{2n}$, $x \in [-1,1]$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1,1) \\ 1, & |x| = 1 \end{cases}$

8.6.2 Definice

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ *konverguje stejnoměrně na množině* $M \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n$ *k funkci* f a píšeme $f_n \rightrightarrows f$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ a každé $x \in M$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Všimněme si, že číslo n_0 závisí pouze na ε.
Jestliže posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje na množině M k funkci f stejnoměrně, pak na této množině konverguje k funkci f bodově. Opak obecně neplatí.
Je-li množina M uzavřeným intervalem $[a,b]$ a každá z funkcí f_n je spojitá, je stejnoměrná konvergence těchto funkcí konvergencí posloupnosti v metrickém prostoru $(\mathrm{C}[a,b], \rho_C)$ (sr. 4.1.2.4). Podle 4.4.2.6 je tento prostor úplný, což znamená, že stejnoměrná limita spojitých funkcí je funkcí spojitou.

8.6.3 Příklady

Nechť $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$.

- Posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje na intervalu $[1,2]$ stejnoměrně k funkci $f(x) \equiv 0$.

  D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Položme $n_0 = \left[\dfrac{2}{\varepsilon} + 1\right]$. Pak $n_0 > \dfrac{2}{\varepsilon}$, $\dfrac{2}{n_0} < \varepsilon$.
  Pro $n \geq n_0$ platí $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2} < \dfrac{2nx}{n^2x^2} = \dfrac{2}{nx} \leq \dfrac{2}{n} \leq \dfrac{2}{n_0} < \varepsilon$. $\square$

- Posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje na intervalu $[0,1]$ bodově k funkci $f(x) \equiv 0$, ale tato konvergence není stejnoměrná.

D.: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2nx}{1+n^2x^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2} = 0$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}$.

$f_n(\frac{1}{n}) = \dfrac{2n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} = \dfrac{2}{2} = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro $\varepsilon \in (0,1)$ je tedy $|f_n(\frac{1}{n}) - f(x)| = |f_n(\frac{1}{n})| = 1 > \varepsilon$.
$\square$

8.6.4 Věta (Cauchyovo - Bolzanovo kriterium)

Posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na množině $M \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0,\ m \geq n_0$ a každé $x \in M$ platí $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

D.: „$\Rightarrow$“ analogie 1.3.22

„$\Leftarrow$“ Pro každé $x \in M$ je číselná posloupnost $\{f_n(x)\}$ cauchyovská. Existuje tedy bodová $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

Ukážeme, že $f_n \rightrightarrows f$.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n, m \geq n_0$ a každé $x \in M$ platí $|f_m(x) - f_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Odtud $|f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. $\square$

Poznámka: Posloupnost funkcí, která má vlastnost z 8.6.4, se nazývá *stejnoměrně cauchyovská.*

8.6.5 Věta

Nechť posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na množině $M \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n$ k funkci f a nechť g je funkce ohraničená na M. Pak $gf_n \rightrightarrows gf$ na M.

D.: Existuje $k \in \mathbb{R}$, že $|g(x)| < k$ pro každé $x \in M$.
Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K $\dfrac{\varepsilon}{k} > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_0$ a $x \in M$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{k}$. Nyní pro každé $x \in M$ a $n \geq n_0$ platí $|g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| = |g(x)||f_n(x) - f(x)| < k\dfrac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$. $\square$

8.6.6 Věta

Buďte $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ posloupnosti funkcí a $M \subseteq \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n\right) \cap \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} g_n\right)$ Jestliže $f_n \rightrightarrows f,\ g_n \rightrightarrows g$ na M pak $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$ na M.

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné.
K $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $x \in M$ a $n \geq n_1$ je $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
K $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $x \in M$ a $n \geq n_2$ je $|g_n(x) - g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Tedy pro všechna $x \in M$ a $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí
$|f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$

8.6.7 Důsledek

Nechť $f_n^1 \rightrightarrows f^1, f_n^2 \rightrightarrows f^2, \ldots, f_n^k \rightrightarrows f^k,\ c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$. Pak

$$c_1 f_n^1 + c_2 f_n^2 + \cdots + c_k f_n^k = \sum_{i=1}^{k} c_i f_n^i \rightrightarrows \sum_{i=1}^{k} c_i f^i\,.$$

8.6.8 Definice

Buď $\{f_n\}$ posloupnost funkcí, $M \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$. Posloupnost funkcí $\{s_n\}$ se nazývá *posloupnost částečných součtů řady funkcí* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Řekneme, že řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *bodově konverguje na množině M a má zde součet s*, jestliže $\{s_n\}$ bodově konverguje k funkci s na M.

Množina $\left\{x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n : \sum f_n(x) \text{ konverguje}\right\}$, se nazývá *obor bodové konvergence řady funkcí* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Řekneme, že řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *stejnoměrně konverguje na množině M a má zde součet s*, jestliže $\{s_n\}$ stejnoměrně konverguje k funkci s na M.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = s$ bodově na M, jestliže pro každé $x \in M$ je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)$.

Jestliže řada funkcí konverguje na nějaké množině stejnoměrně, pak na ní konverguje bodově. Opak obecně neplatí.

8.6.9 Věta

Nechť řady funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^1 = s^1, \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^2 = s^2, \ldots, \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^k = s^k$ konvergují ke svým součtům stejnoměrně na množině $M \subseteq \bigcap\limits_{j=1}^{k} \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n^j \right)$ a $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{j=1}^{k} c_j f_n^j \right)$ konverguje stejnoměrně k $\sum\limits_{j=1}^{k} c_j s^j$ na M.

D.: Plyne z 8.6.7. □

8.6.10 Věta (Cauchyovo - Bolzanovo kriterium)

Řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na množině $M \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$, $m \in \mathbb{N}$ a $x \in M$ platí $|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| < \varepsilon$.

D.: Aplikací 8.6.4 na posloupnost částečných součtů. □

8.6.11 Definice

Řekneme, že řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje na množině $M \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n$ absolutně*, jestliže pro každé $x \in M$ konverguje (číselná) řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

8.6.12 Věta (srovnávací kriterium)

Buďte $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnosti funkcí, $M \subseteq \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n \right) \cap \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} g_n \right)$ a nechť $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in M$. Jestliže řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ konverguje stejnoměrně na M, pak řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje na M stejnoměrně a absolutně.

D.: Nejprve poznamenejme, že z podmínky $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ plyne, že všechny funkce g_n jsou nezáporné.
Absolutní bodová konvergence plyne z 8.2.4. Ukážeme, že konvergence je stejnoměrná.
Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle 8.6.10 existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0,\ m \in \mathbb{N},\ x \in M$ platí

$$|g_{n+1}(x) + g_{n+2}(x) + \cdots + g_{n+m}(x)| = g_{n+1}(x) + g_{n+2}(x) + \cdots + g_{n+m}(x) < \varepsilon\,.$$

Tedy

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+m}(x)| &\le |f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+m}(x)| \le \\ &\le g_{n+1}(x)+g_{n+2}(x)+\cdots+g_{n+m}(x) < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

□

8.6.13 Důsledek (Weierstrassovo [1815 – 1897] kriterium)

Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnosti funkcí, $M \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n$ a nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in M$ platí $|f_n(x)| \le a_n \in \mathbb{R}$. Jestliže (číselná) řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje absolutně a stejnoměrně na M.

8.6.14 Kriteria stejnoměrné konvergence

Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnosti funkcí, $M \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Dom} f_n$.

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *nerostoucí* (resp. *neklesající*) na M, jestliže pro každé $x \in M$ je číselná posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí (resp. neklesající). Je-li $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí nebo neklesající, nazývá se *monotonní*.

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *stejnoměrně ohraničená* na M, jestliže existuje konstanta $k \in \mathbb{R}$ taková, že pro všechna $x \in M$ a všechna $n \in \mathbb{N}$ je $|f_n(x)| \le k$.

1. Dirichletovo kriterium:
   Nechť posloupnost funkcí $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotonní na M, $g_n \rightrightarrows 0$ na M a posloupnost částečných součtů řady funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ je stejnoměrně ohraničená na M. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ stejnoměrně konverguje na M.
2. Důsledek Dirichletova kriteria:
   Nechť číselná posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotonní taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a posloupnost částečných součtů řady funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ je stejnoměrně ohraničená M. Pak řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ stejnoměrně konverguje na M.
3. Abelovo kriterium:
   Nechť posloupnost funkcí $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ je stejnoměrně ohraničená na M a nechť řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konverguje na M. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ stejnoměrně konverguje na M.

8.7 Vlastnosti stejnoměrně konvergentních posloupností a řad

8.7.1 Věta

Nechť posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $J \subseteq \bigcap \operatorname{Dom} f_n$ k funkci f. Je-li každá z funkcí f_n spojitá v bodě $x_0 \in J$, pak je f spojitá v bodě x_0.

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné.
Poněvadž $f_n \rightrightarrows f$ na J, existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro $n \ge n_1,\ x \in J$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Poněvadž f_n je spojitá v x_0, existuje $\delta > 0$, že pro $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap J$ platí $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Poněvadž $f_n(x_0) \to f(x_0)$, existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro $n \ge n_2$ platí $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Pro $n \ge \max\{n_1, n_2\}$ a každé $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap J$ platí

$$\begin{aligned} |f(x)-f(x_0)| &= |f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(x_0)+f_n(x_0)-f(x_0)| \le \\ &\le |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

□

8.7.2 Důsledek

Nechť posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $J \subseteq \bigcap \mathrm{Dom}\, f_n$ k funkci f. Je-li každá z funkcí f_n spojitá na J, pak je f spojitá na J.

8.7.3 Věta (Moore [1882–1974] - Osgood [1864–1943])

Nechť posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $J \subseteq \bigcap \mathrm{Dom}\, f_n$ k funkci f. Nechť $x_0 \in J$ nebo x_0 je krajní bod intervalu J a nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R}$. (V případě, že x_0 je krajní bod intervalu J, jedná se o příslušnou jednostrannou limitu.) Pak existuje $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ a platí $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, neboli

$$\lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) .$$

D.: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné.
Podle 8.6.4 existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m, n \geq n_0,\ x \in J$ platí $|f_m(x) - f_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Limitním přechodem pro $x \to x_0$ dostaneme $|a_m - a_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy Cauchyovská a podle 1.3.22 existuje $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$.
Ukážeme, že $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$:
$f_n \rightrightarrows f$ na J $\Rightarrow$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_2,\ x \in J$ je $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
$\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = a_n$ $\Rightarrow$ existuje $\delta > 0$, že pro $x \in ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) \cap J$ je $|f_n(x) - a_n| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ $\Rightarrow$ existuje $n_3 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_3$ je $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Pro $n \geq \max\{n_2, n_3\}$ platí $|f(x) - a| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - a_n + a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. $\square$

8.7.4 Věta

Nechť posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $[a, b] \subseteq \bigcap \mathrm{Dom}\, f_n$ k funkci f. Nechť všechny funkce f_n jsou na $[a, b]$ integrabilní v Riemannově smyslu a $x_0 \in [a, b]$ je libovolný. Pak funkce f je integrabilní na $[a, b]$ a pro každé $x \in [a, b]$ platí $\int\limits_{x_0}^{x} f(t) \mathrm{d}t = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t) \mathrm{d}t$, neboli

$$\int_{x_0}^{x} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t = \lim_{n \to \infty} \left(\int_{x_0}^{x} f_n(t) \mathrm{d}t \right) ,$$

přičemž konvergence posloupnosti funkcí na pravé straně je stejnoměrná na intervalu $[a, b]$.

D.: Nejdříve ukážeme, že $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$ je integrabilní. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné.
Poněvadž $f_n \rightrightarrows f$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $x \in [a, b]$ platí $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$.
Poněvadž funkce f_{n_0} je integrabilní, podle 3.2.10 existuje dělení $D = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \in \vartheta([a, b])$ takové, že $S(D, f_{n_0}) - s(D, f_{n_0}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Označme $\tilde{m}_i = \inf\{f_{n_0}(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $\tilde{M}_i = \sup\{f_{n_0}(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$,
$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

Pak $|\tilde{m}_i - m_i| < \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$, $|\tilde{M}_i - M_i| < \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$, takže $M_i - m_i < \tilde{M}_i - \tilde{m}_i + \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Dále

$$\begin{aligned}
S(D,f) - s(D,f) &= \sum_{i=1}^{k} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \le \\
&\le \sum_{i=1}^{k}\left(\tilde{M}_i - \tilde{m}_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)(x_i - x_{i-1}) = \\
&= \sum_{i=1}^{k}\left(\tilde{M}_i - \tilde{m}_i\right)(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i=1}^{k}(x_i - x_{i-1}) = \\
&= S(D, f_{n_0}) - s(D, f_{n_0}) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

což podle 3.2.10 znamená, že funkce f je integrabilní.
Označme $\mathrm{R}[a,b]$ množinu všech Riemannovsky integrabilních (a tedy ohraničených) funkcí definovaných na intervalu $[a,b]$. Pro $\varphi, \psi \in \mathrm{R}[a,b]$ položme

$$\rho_S(\varphi,\psi) = \sup\{|\varphi(x) - \psi(x)| : x \in [a,b]\}\,.$$

Analogicky jako v 4.1.2.4 ověříme, že $(\mathrm{R}[a,b], \rho_S)$ je metrický prostor a snadno nahlédneme, že stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí integrabilních na intervalu $[a,b]$ je konvergencí posloupnosti v prostoru $(\mathrm{R}[a,b], \rho_S)$. (Podle první části důkazu je prostor $(\mathrm{R}[a,b], \rho_S)$ úplný.)
Definujme zobrazení $F : \mathrm{R}[a,b] \to \mathrm{C}[a,b]$ předpisem

$$F(\varphi)(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\mathrm{d}t\,.$$

Pro $\varphi, \psi \in \mathrm{R}[a,b]$ platí:

$$\begin{aligned}
\rho_C(F(\varphi), F(\psi)) &= \max\{|F(\varphi)(x) - F(\psi)(x)| : x \in [a,b]\} = \\
&= \max\left\{\left|\int_{x_0}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x}\psi(t)\mathrm{d}t\right| : x \in [a,b]\right\} = \\
&= \max\left\{\left|\int_{x_0}^{x}(\varphi(t) - \psi(t))\mathrm{d}t\right| : x \in [a,b]\right\} \le \\
&\le \max\left\{\left|\int_{x_0}^{x}|\varphi(t) - \psi(t)|\mathrm{d}t\right| : x \in [a,b]\right\} \le \\
&\le \max\left\{\left|\int_{x_0}^{x}\sup\{|\varphi(\tau) - \psi(\tau)| : \tau \in [a,b]\}\mathrm{d}t\right| : x \in [a,b]\right\} = \\
&= \max\{|(x - x_0)|\,\rho_S(\varphi,\psi) : x \in [a,b]\} = \max\{(b - x_0), (x_0 - a)\}\,\rho_S(\varphi,\psi)\,.
\end{aligned}$$

Označíme-li tedy $L = \max\{(b-x_0),(x_0-a)\}$, je $\rho_C(F(\varphi),F(\psi)) \le L\rho_S(\varphi,\psi)$, což znamená, že F je Lipschitzovské zobrazení a podle 4.5.10 spojité.
Podle 4.5.3 převádí spojité zobrazení metrických prostorů konvergentní posloupnost na konvergentní posloupnost a platí

$$\lim_{n\to\infty} F(f_n) = F\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)\,,$$

což je formule z tvrzení věty. Navíc konvergence posloupnosti v prostoru $\mathrm{C}[a,b]$ je stejnoměrnou konvergencí posloupnosti funkcí. □

8.7.5 Věta

Nechť posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $[a,b] \subseteq \bigcap \operatorname{Dom} f_n$ k funkci f. Nechť všechny funkce f_n jsou na $[a,b]$ integrabilní v Riemannově smyslu. Pak funkce f je integrabilní na $[a,b]$ a platí $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$, neboli

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t \;=\; \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right).$$

D.: plyne bezprostředně z 8.7.4 a z toho, že z konvergence stejnoměrné plyne bodová. □

8.7.6 Věta

Buď $\{f_n\}$ posloupnost funkcí diferencovatelných na otevřeném intervalu $J \subseteq \bigcap \operatorname{Dom} f_n$. Nechť existuje $x_0 \in J$ takový bod, že (číselná) posloupnost $\{f_n(x_0)\}$ konverguje. Jestliže posloupnost funkcí $\{f_n'\}$ konverguje stejnoměrně na J, pak posloupnost $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na J k diferencovatelné funkci f, pro niž platí $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ pro každé $x \in J$, neboli

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' \;=\; \lim_{n\to\infty} f_n'(x)\,, \quad \text{tj.} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)\right).$$

D.: Především poznamenejme, že vzhledem k 3.3.16 zůstává věta 8.7.4 v platnosti, zaměníme-li $[a,b]$ za (a,b). Podle 3.4.3 a 3.1.5 existuje posloupnost $\{c_n\}$ taková, že

$$f_n(x) = c_n + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\mathrm{d}t\,.$$

Odtud plyne, že $f_n(x_0) = c_n$ a tedy podle předpokladu existuje $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Podle předpokladu dále existuje funkce g taková, že $f_n' \rightrightarrows g$ na J. Pro $x \in J$ položme

$$f(x) = c + \int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t\,.$$

Funkce f je podle 3.4.3 diferencovatelná. Podle 8.7.4 $\int\limits_{x_0} f_n'(t)\mathrm{d}t \rightrightarrows \int\limits_{x_0} g(t)\mathrm{d}t$, takže $f_n = c_n + \int\limits_{x_0} f_n'(t)\mathrm{d}t \rightrightarrows c + \int\limits_{x_0} g(t)\mathrm{d}t = f$ a podle 3.4.3 pro každé $x \in J$ je $f'(x) = g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$. □

Poznámky:

1. Předpoklad o existenci $x_0 \in J$ takového, že existuje $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) \in \mathbb{R}$ nelze obecně vynechat.

   Např.: $f_n(x) \equiv n,\ f_n' \equiv 0 \rightrightarrows 0$, avšak $\{f_n\}$ nekonverguje.

2. Z předpokladu stejnoměrné konvergence posloupnosti diferencovatelných funkcí $\{f_n\}$ neplyne (ani bodová) konvergence posloupnosti funkcí $\{f_n'\}$.
   Např.: $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin nx,\ J = (-2\pi, 2\pi)$. Pak $f_n \rightrightarrows 0,\ f_n'(x) = \cos nx,\ f_n'(\pi) = \cos n\pi = (-1)^n$.

Následující věty plynou z předchozích užitím posloupnosti částečných součtů řady funkcí.

8.7.7 Věta

Nechť řada funkcí $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na intervalu $J \subseteq \bigcap \operatorname{Dom} f_n$ k funkci f. Je-li každá z funkcí f_n spojitá na J, pak je f spojitá na J.

8.7.8 Věta

Nechť řada funkcí $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na intervalu $J \subseteq \bigcap \mathrm{Dom}\, f_n$ k funkci f. Nechť $x_0 \in J$ nebo x_0 je krajní bod intervalu J a nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R}$. (V případě, že x_0 je krajní bod intervalu J, jedná se o příslušnou jednostrannou limitu.) Pak řada $\sum a_n$ konverguje, existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ a platí $\sum a_n = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, neboli

$$\sum \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\sum f_n(x) \right) .$$

8.7.9 Věta

Nechť řada funkcí $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na intervalu $[a, b] \subseteq \bigcap \mathrm{Dom}\, f_n$ k funkci f. Nechť všechny funkce f_n jsou na $[a, b]$ integrabilní v Riemannově smyslu a $x_0 \in [a, b]$ je libovolný. Pak funkce f je integrabilní na $[a, b]$ a pro každé $x \in [a, b]$ platí $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \sum \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\mathrm{d}t$, neboli

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum f_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum \left(\int_{x_0}^{x} f_n(t)\mathrm{d}t \right) ,$$

přičemž konvergence řady funkcí na pravé straně je stejnoměrná na intervalu $[a, b]$.

8.7.10 Věta

Nechť řada funkcí $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na intervalu $[a, b] \subseteq \bigcap \mathrm{Dom}\, f_n$ k funkci f. Nechť všechny funkce f_n jsou na $[a, b]$ integrabilní v Riemannově smyslu. Pak funkce f je integrabilní na $[a, b]$ a platí $\int\limits_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t = \sum \int\limits_{a}^{b} f_n(t)\mathrm{d}t$, neboli

$$\int_{a}^{b} \left(\sum f_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum \left(\int_{a}^{b} f_n(t)\mathrm{d}t \right) .$$

8.7.11 Věta

Buď $\sum f_n$ řada funkcí diferencovatelných na otevřeném intervalu $J \subseteq \bigcap \mathrm{Dom}\, f_n$. Nechť existuje $x_0 \in J$ takový bod, že (číselná) řada $\sum f_n(x_0)$ konverguje. Jestliže řada funkcí $\sum f_n'$ konverguje stejnoměrně na J, pak řada $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na J k diferencovatelné funkci f, pro niž platí $f'(x) = \sum f_n'(x)$ pro každé $x \in J$, neboli

$$\left(\sum f_n(x) \right)' = \sum f_n'(x) , \quad \text{tj.} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\sum f_n(x) \right) = \sum \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x) \right) .$$

8.8 Mocninné řady

8.8.1 Definice

Buď $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel, $x_0 \in \mathbb{R}$. *Mocninná (potenční) řada se středem x_0 a koeficienty a_n* je řada funkcí $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Specielně pro $x_0 = 0$ jde o řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$.

Substituce $y = x - x_0$ převede řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ v řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$. Proto se v první části tohoto odstavce (po 8.8.11) omezíme na mocninné řady tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Mocninná řada konverguje ve svém středu a má zde součet a_0.

8.8.2 Definice

Buď $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mocninná řada. Jestliže tato řada konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, řekneme, že *řada* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *vždy konverguje*. Jestliže tato řada pro každé $x \neq 0$ diverguje, řekneme, že *řada* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *vždy diverguje*.

Příklady:

1. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ vždy diverguje.

   Buď $x_1 \in \mathbb{R}$ libovolné. Pro $n \geq \dfrac{2}{|x_1|}$ je $|n^n x_1^n| \geq 2^n \to \infty$, a tedy nemůže být $\lim\limits_{n\to\infty} n^n x_1^n = 0$. Podle 8.1.5 (číselná) řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x_1^n$ diverguje.

2. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ vždy konverguje.

   $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x|}{n+1} = 0$, takže podle 8.2.11 číselná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ řada absolutně konverguje.

8.8.3 Věta

Buď $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mocninná řada.

Jestliže existuje $x_0 \in \mathbb{R}$ takové, že (číselná) řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ konverguje, pak pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x| < |x_0|$ řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje absolutně.

Jestliže existuje $x_0 \in \mathbb{R}$ takové, že (číselná) řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ diverguje, pak pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x| > |x_0|$ řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverguje.

Jestliže mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ani vždy nekonverguje, ani vždy nediverguje, pak existuje $r \in \mathbb{R}$ takové, že tato řada konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x| < r$ a diverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x| > r$.

D.:
- Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ konverguje. Buď $x \in \mathbb{R}$, $|x| < x_0$.

  Poněvadž $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ konverguje, podle 8.1.5 je $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n x_0^n| = 0$ a tedy podle 1.3.4 existuje $k \in \mathbb{R}$, že $|a_n x_0^n| \leq k$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

  Pro $x \in \mathbb{R}$, $|x| < |x_0|$ platí $|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \dfrac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \left| \dfrac{x}{x_0} \right|^n < k \left| \dfrac{x}{x_0} \right|^n$.

  Podle 8.1.3 řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} k \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ konverguje a tedy podle 8.2.4 konverguje i řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, neboli $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje absolutně.

- Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ diverguje. Kdyby existovalo $x_1 \in \mathbb{R}$, $|x_1| > |x_0|$ takové, že by $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ konvergovala, pak by podle již dokázané části konvergovala i řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$.

- Označme $M = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0, \ \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konverguje} \right\}$. Poněvadž $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ vždy nediverguje, existuje podle předchozího tvrzení horní závora množiny M. Podle 1.1.7 existuje $r = \sup M \in \mathbb{R}$.
  Je-li $x \in \mathbb{R}, |x| > r$, pak $x \notin M$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverguje.
  Je-li $x \in \mathbb{R}, |x| < r$, pak podle 1.1.6(s2*) existuje $x_0 \in M$ takové, že $x_0 > |x|$. Podle prvního tvrzení řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje absolutně. $\square$

8.8.4 Definice

Číslo r z 8.8.3 se nazývá *poloměr konvergence* mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, a otevřený interval $(-r, r)$ se nazývá *konvergenční interval* této řady.
Jestliže řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ vždy konverguje, klademe $r = \infty$, jestliže tato řada vždy diverguje, klademe $r = 0$.

Příklad: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$
Pro $x = 1$ se jedná o řadu harmonickou, tedy podle 1.1.2.1 divergentní.
Pro $x = -1$ se jedná o řadu Leibnizovu, tedy podle 8.3.8 konvergentní.
V tomto případě je tedy $r = 1$, konvergenční interval je $(-1, 1)$, obor konvergence je $[-1, 1)$.

8.8.5 Věta (Cauchy [1789 –1857] - Hadamard [1865 – 1963])

Buď $\sum a_n x^n$ mocninná řada a r její poloměr konvergence. Pak

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

Přitom klademe $r = 0$ pro $\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ a $r = \infty$ pro $\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

D.:

- Nechť $\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Ukážeme, že $\sum a_n x^n$ vždy konverguje.
  Buď $x_0 \in \mathbb{R}, \ x_0 \neq 0$ libovolné. Pak $\dfrac{1}{2|x_0|} > 0 = \limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_0$ platí $\dfrac{1}{2|x_0|} > \sqrt[n]{|a_n|}$, tedy $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \dfrac{1}{|x_0|^n} > |a_n|$. Odtud $|a_n|\,|x_0|^n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Řada $\sum \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ podle 8.1.3 konverguje a tedy podle 8.2.4 řada $\sum a_n x_0^n$ konverguje absolutně.
- Nechť $\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$. Ukážeme, že $\sum a_n x^n$ vždy diverguje.
  Buď $x_0 \in \mathbb{R}, \ x_0 \neq 0$ libovolné. Pak pro nekonečně mnoho indexů n platí $\sqrt[n]{|a_n|} > \dfrac{1}{|x_0|}$ a tedy pro nekonečně mnoho indexů n platí $|a_n|\,|x_0|^n > 1$. To znamená, že nemůže být $\lim\limits_{n \to \infty} a_n x_0^n = 0$ a tedy podle 8.1.5 řada $\sum a_n x_0^n$ diverguje.
- Nechť $0 < a = \limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
  - Buď $x_0 \in \mathbb{R}, \ 0 < |x_0| < \dfrac{1}{a}$. Ukážeme, že $\sum a_n x_0^n$ konverguje.
    Zvolme $b \in \mathbb{R}, \ |x_0| < b < \dfrac{1}{a}$. Pak $\dfrac{1}{b} > a$ a tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_0$ je $\sqrt[n]{|a_n|} < \dfrac{1}{b}$.
    Odtud $\sqrt[n]{|a_n|}\,|x_0| < \dfrac{|x_0|}{b}, \ |a_n x_0^n| < \dfrac{1}{b^n}|x_0|^n = \left(\dfrac{|x_0|}{b}\right)^n$. Poněvadž $\dfrac{|x_0|}{b} < 1$, řada $\sum \left(\dfrac{|x|}{b}\right)^n$ podle 8.1.3 konverguje, a tedy podle 8.2.4 řada $\sum a_n x_0^n$ konverguje absolutně.

– Buď $x_0 \in \mathbb{R}$, $|x_0| > \dfrac{1}{a}$. Ukážeme, že $\sum a_n x_0^n$ diverguje.

Pro nekonečně mnoho indexů n platí $\sqrt[n]{|a_n|} > \dfrac{1}{|x_0|}$, $|a_n x_0^n| > 1$ a nemůže být $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n x_0^n| = 0$.

Podle 8.1.5 řada $\sum a_n x_0^n$ diverguje.

□

8.8.6 Důsledek

Buď $\{a_n\}$ posloupnost kladných čísel. Jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a \in \mathbb{R}^*$, pak mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence $r = \dfrac{1}{a}$ (přitom klademe $r = 0$ pro $a = \infty$ a $r = \infty$ pro $a = 0$).

D.: Plyne z 8.2.12. □

8.8.7 Věta

Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence $r > 0$. Pak tato řada konverguje stejnoměrně na libovolném uzavřeném intervalu $[a, b] \subseteq (-r, r)$.
Konverguje-li řada $\sum a_n r^n$, pak mocninná řada $\sum a_n x^n$ konverguje stejnoměrně na uzavřeném intervalu $[a, r]$ pro libovolné $a \in (-r, r)$.
Konverguje-li řada $\sum a_n (-r)^n$, pak mocninná řada $\sum a_n x^n$ konverguje stejnoměrně na uzavřeném intervalu $[-r, a]$ pro libovolné $a \in (-r, r)$.

D.: Položme $c = r - \dfrac{1}{2}(r - \max\{|a|, |b|\})$. Pak pro každé $x_0 \in [a, b]$ je $|x_0| < c$, tedy $|a_n x_0^n| < |a_n c^n|$. Podle 8.8.3 řada $\sum |a_n c^n|$ konverguje a tedy podle 8.6.13 řada $\sum a_n x^n$ konverguje absolutně a stejnoměrně na $[a, b]$.
Nechť řada $\sum a_n r^n$ konverguje. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $r = 1$. (V opačném případě lze použít substituci $x \mapsto \dfrac{x}{r}$.)
(Číselná) řada $\sum a_n = \sum a_n 1^n$ konverguje.
Ukážeme, že řada funkcí $\sum a_n x^n$ konverguje stejnoměrně na $[0, 1]$.
Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle 8.1.4 existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ a libovolné $m \in \mathbb{N}$ je $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Buď $x \in [0, 1)$. Pak

$$|a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots + a_{n+m}x^{n+m}| =$$

$$\begin{aligned} = \; & |a_{n+1}(x^{n+1} - x^{n+2} + x^{n+2} - x^{n+3} + x^{n+3} - \cdots - x^{n+m} + x^{n+m}) + \\ & + a_{n+2}(x^{n+2} - x^{n+3} + x^{n+3} - \cdots - x^{n+m} + x^{n+m}) + \cdots + \\ & + a_{n+m-1}(x^{n+m-1} - x^{n+m} + x^{n+m}) + a_{n+m}x^{n+m}| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \; & |a_{n+1}(x^{n+1} - x^{n+2}) + (a_{n+1} + a_{n+2})(x^{n+2} - x^{n+3}) + \\ & + (a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3})(x^{n+3} - x^{n+4}) + \cdots + (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m-1})(x^{n+m-1} - x^{n+m}) + \\ & + (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m})x^{n+m}| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \; & |(1-x)[a_{n+1}x^{n+1} + (a_{n+1} + a_{n+2})x^{n+2} + (a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3})x^{n+3} + \cdots + \\ & + (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m-1})x^{n+m-1}] + (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m})x^{n+m}| \leq \end{aligned}$$

$$\leq (1-x)\varepsilon(x^{n+1} + x^{n+2} + x^{n+3} + \cdots + x^{n+m-1}) + \varepsilon x^{n+m} =$$

$$= (1-x)\frac{\varepsilon}{2}x^{n+1}\frac{1 - x^{n+m-1}}{1-x} + \frac{\varepsilon}{2}x^{n+m} = \frac{\varepsilon}{2}(x^{n+1} - x^{2n+m} + x^{n+m}) \leq \varepsilon x^{n+1} < \varepsilon .$$

Tedy pro každé $x \in [0, 1]$ je $|a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots + a_{n+m}x^{n+m}| < \varepsilon$, což podle 8.6.10 znamená, že řada funkcí $\sum a_n x^n$ konverguje stejnoměrně na $[0, 1]$.
Třetí tvrzení lze dokázat analogicky. □

8.8.8 Věta (Abel [1802 – 1829])

Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence r. Pak součet s této řady je funkce spojitá na intervalu $(-r, r)$.
Nechť $0 < r < \infty$ a řada $\sum a_n r^n$ (resp. řada $\sum a_n (-r)^n$) je konvergentní. Pak součet s řady $\sum a_n x^n$ je funkce zleva spojitá v bodě r (resp. zprava spojitá v bodě $-r$).

D.: Věta plyne z 8.8.7, 8.7.7 a 8.7.8. $\square$

8.8.9 Poznámky

1. Nechť mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má poloměr konvergence r. Pak řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n \;=\; \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \mathrm{d}t$$

má také poloměr konvergence r. (sr. 8.7.9)

D.: $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \cdot r = r$ $\square$

2. Nechť mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má poloměr konvergence r. Pak řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \;=\; \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)'$$

má také poloměr konvergence r. (sr. 8.7.11)

3. Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence r. Pak součet $s(x)$ této řady má na $(-r, r)$ derivace všech řádů, přičemž k-tou derivaci obdržíme k-násobným derivováním této řady „člen po členu“ a vzniklá mocninná řada má opět poloměr konvergence r.

8.8.10 Příklad

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg}(x) \;&=\; \int_0^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \operatorname{arctg} t \,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \;=\; \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \mathrm{d}t \;= \\
&=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}t \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
\frac{\pi}{4} \;&=\; \operatorname{arctg} 1 \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \qquad \Rightarrow \qquad \pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}
\end{aligned}$$

$$4 \sum_{n=0}^{499999} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \;=\; 3.14159\underline{0}6535897932\underline{40}4626433832\underline{6}9502884197$$

(Podtržením jsou vyznačeny nesprávné cifry; jsou čtyři na prvních čtyřiceti desetinných místech.)

8.8.11 Definice

Buď f funkce, která má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů. *Taylorovou řadou funkce f v bodě x_0* rozumíme mocninnou řadu

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{2!}(x - x_0)^3 + \cdots \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \,.$$

Specielně pro $x_0 = 0$ mluvíme o *Maclaurinově řadě*.

8.8.12 Věta

Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů. Její Taylorova řada konverguje na nějakém intervalu J obsahujícím bod x_0 k funkci f právě tehdy, když pro posloupnost jejích Taylorových zbytků platí $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

D.: Využijeme větu 2.4.8 a označení v ní používané. Pro posloupnost $\{s_n\}$ částečných součtů Taylorovy řady platí $s_n(x) = T_n(x) = f(x) - R_n$. $\square$

8.8.13 Věta

Nechť mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má poloměr konvergence r. Pak je tato řada Taylorovou řadou svého součtu f v konvergenčním intervalu ($f^{(n)}(x_0) = a_n n!$).

D.: Analogicky jako 2.4.5. $\square$

8.8.14 Definice

Funkce f se nazývá *analytická v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 takové, že na něm lze f vyjádřit jako součet mocninné řady. T.j. pro $x \in \mathcal{O}(x_0)$ platí $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.
Funkce f se nazývá *analytická na otevřeném intervalu* J, je-li analytická v každém $x \in J$.

Je-li funkce f analytická, její vyjádření mocninou řadou (rozvoj do mocninné řady) je Taylorovou řadou. Zejména analytická funkce f má derivace všech řádů.

Opačné tvrzení neplatí. Funkce, která má derivace všech řádů nemusí být analytická.

Příklad: Funkce $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ má v bodě 0 derivace všech řádů rovny 0, tedy její Maclaurinova řada $0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots$ má na intervalu $(-\infty, \infty)$ součet 0, a přitom $f(x) > 0$ pro $x \neq 0$, což znamená, že funkce f není v bodě 0 analytická.

D.: Je-li $x > 0$, pak $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-1/x}$,

$f''(x) = -\dfrac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-1/x} + \dfrac{1}{x^4}\mathrm{e}^{-1/x} = P_2\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x}$, kde P_2 je polynom,

$f''' = P_2'\left(\dfrac{1}{x}\right)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-1/x} + \dfrac{1}{x^2}P_2\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x} = P_3\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x}$, kde P_3 je polynom, atd.

$\lim\limits_{x\to 0_+} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x} = \lim\limits_{t\to\infty} P_n(t)\mathrm{e}^{-1/x} = 0.$

Je-li $x < 0$, pak $f(x) = \mathrm{e}^{1/x}$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x} = Q_1\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{1/x}$, kde Q_1 je polynom,

$f''(x) = \dfrac{2}{x^3}\mathrm{e}^{1/x} + \dfrac{1}{x^4}\mathrm{e}^{1/x} = Q_2\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{1/x}$, kde Q_2 je polynom, atd.

$\lim\limits_{x\to 0_-} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{x\to 0_-} Q_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{1/x} = \lim\limits_{t\to\infty} Q_n(-t)\mathrm{e}^{-t} = 0.$

Celkem tedy je $f^{(n)}(0) = \lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$. $\square$

8.8.15 Maclaurinovy řady některých elementárních funkcí

1. $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}, \qquad r = \infty$
2. $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad r = \infty$
3. $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad r = \infty$
4. $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n}, \qquad r = 1, \quad x \in (-1,1]$
5. $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right) x^n, \qquad r = 1, \quad x \in (-1,1)$
6. $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad r = 1, \quad x \in [-1,1]$

Sr. 2.4.7 a 8.8.10.

8.8.16 Aplikace mocninných řad

1. Výpočet funkčních hodnot
2. Výpočet limit
3. Výpočet derivací
4. Výpočet určitých i neurčitých integrálů
5. Sumace číselných řad
6. Výpočet obecného členu posloupnosti zadané rekurentně
7. Řešení počátečních úloh pro obyčejné diferenciální rovnice

8.9 Cvičení

Najděte součty řad

1) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} + \dots$ 2) $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48} + \dots$

3) $\frac{2}{3} + \frac{3}{9} + \frac{4}{27} + \frac{5}{81} + \frac{6}{243} + \dots$ 4) $1 + q\cos\alpha + q^2\cos 2\alpha + q^3\cos 3\alpha + \dots$

Rozhodněte o konvergenci řad

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{1000}}$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n+1}$ 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$ 12) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

13) Dokažte, že řada převrácených hodnot členů aritmetické posloupnosti diverguje.

Rozhodněte o konvergenci a absolutní konvergenci řad

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ 15) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2+1}{n^2}\cos\frac{\pi n^2}{n^2+1}$

17) Ukažte, že druhá mocnina (chápaná jako Cauchyův součin) konvergentní řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ je řada divergentní.

Najděte obory konvergence a absolutní konvergence řad funkcí

18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$ 19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ 20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x+n}$

21) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 22) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ 23) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n$

24) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 2^{2n}}{3n} x^n(1-x)$ 25) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ 26) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n^2}$

Rozhodněte, zda uvedené řady konvergují na daném intervalu stejnoměrně

27) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $(-2,2)$ 28) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n})x^n$, $[-\frac{1}{2},\frac{2}{3}]$ 29) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x-1}{x^n}$, $[1,2]$

Najděte poloměry konvergence mocninných řad

30) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}}$ $(a>1)$ 31) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n}$ $(a>0,\ b>0)$ 32) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n x^{2n}$

Najděte obory konvergence mocninných řad

33) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$ 34) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ 35) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{n+1} x^n$

Funkce rozviňte v Maclaurinovu řadu

36) $\frac{x}{1+x-2x^2}$ 37) $\frac{1}{1-x-x^2}$ 38) $\frac{1-\frac{1}{2}x}{1-x+x^2}$

39) $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$ 40) $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ 41) $x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$

Najděte součet mocninné řady

42) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n$ 43) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 44) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^{2n}$

45) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ 46) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$ 47) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$

Najděte součet číselné řady

48) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{13}-\dots$ 49) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n n!}$

50) $1-\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}-\dots$ 51) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!}$

S přesností alespoň 0.001 vypočítejte integrály

52) $\int\limits_0^{0.2} \sin x^2 \mathrm{d}x$ 53) $\int\limits_0^{0.4} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x$ 54) $\int\limits_0^{0.1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}$

Vypočítejte limity

55) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ 56) $\lim\limits_{x\to\infty} ((x^3-x^2+\frac{x}{2})\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6+1})$ 57) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$

Výsledky: 1)$\frac{1}{2}$ **2)**$\frac{3}{4}$ **3)**$\frac{5}{4}$ **4)**$\frac{1-q\cos\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}$ **5)**diverguje **6)**diverguje **7)**konverguje **8)**konverguje **9)**diverguje **10)**konverguje **11)**konverguje **12)**konverguje **14)**diverguje **15)**konverguje relativně **16)**konverguje absolutně **18)**absolutně pro $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ **19)**absolutně pro $x\in(-1,1)$ **20)**relativně pro $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,-2,-3,\dots\}$ **21)**absolutně pro $x\in(1,\infty)$ **22)**absolutně pro $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ **23)**absolutně pro $x\in(-1,1)$, relativně pro $x<1$ **24)**absolutně pro $x\in\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ **25)**absolutně pro $x\in(-\infty,-1)\cup(-\frac{1}{3},\infty)$ **26)**absolutně pro $x\in(-1,1]$ **27)**ano **28)**ano **29)**ne **30)**∞ **31)**$\max\{a,b\}$ **32)** $\sqrt{2}$ **33)**$(-2,2)$ **34)**$[-1,1]$ **35)**$\left[-\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ **36)**$\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-(-2)^n)x^n, |x|<\frac{1}{2}$ **37)**$\frac{1}{\sqrt{5}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}+(-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\right)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, kde $\{a_n\}$ je Fibonacciho posloupnost 1,1,2,3,5,8,13,21,…, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, $|x|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **38)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\cos\frac{n\pi}{3})x^n, |x|<1$ **39)**$\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n+\frac{1-(-1)^n}{2}\right)x^n, |x|<1$ **40)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n}, |x|<1$ **41)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}, |x|\le1$ **42)** $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4})$ **43)**$\ln\frac{1}{1-x}, -1\le x<1$ **44)** $2x\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2), |x|\le1$ **45)**$\frac{1+x}{(1-x)^3}, |x|<1$ **46)** $\mathrm{e}^{x^2}(1+2x^2)$ **47)**$\frac{\ln(1-x)}{x}+\frac{1}{1-x}, |x|<1$ **48)**$\frac{1}{3}\ln2+\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$ **49)**$\frac{3}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$ **50)**$\frac{\sqrt{2}}{2}$ **51)**$\frac{1}{2\mathrm{e}}$ **52)** 0.001 **53)** 0.364 **54)** 0.1 **55)** $-\frac{1}{12}$ **56)** $\frac{1}{6}$ **57)** $\frac{1}{2}$

Kapitola 9

Fourierovy řady

9.1 Hilbertův prostor

9.1.1 Definice

Buď V reálný vektorový prostor a $(\ \cdot \mid \cdot\ ) : V \times V \to \mathbb{R}$ zobrazení, které pro všechna $u, v, w \in V$ splňuje podmínky:

(U1) $u \neq 0 \Rightarrow (\ u \mid u\ ) > 0$,

(U2) $(\ u \mid v\ ) = (\ v \mid u\ )$,

(U3) $(\ \alpha u \mid v\ ) = \alpha (\ u \mid v\ )$,

(U4) $(\ u + v \mid w\ ) = (\ u \mid w\ ) + (\ v \mid w\ )$.

Zobrazení $(\ \cdot \mid \cdot\ )$ se nazývá *skalární* (nebo též *vnitřní*) *součin vektorů.*

9.1.2 Poznámky

1. $u = 0 \Leftrightarrow (\ u \mid u\ ) = 0$

   D.: Je-li $u = 0$ pak $u = 0v$ pro libovolný vektor $v \in V$ a tedy podle (U3) je
   $(\ u \mid u\ ) = (\ 0v \mid u\ ) = 0 (\ v \mid u\ ) = 0$
   Je-li $(\ u \mid u\ ) = 0$, podle (U1) nemůže být $u \neq 0$. $\square$

2. $(\ u \mid \alpha v\ ) = \alpha (\ u \mid v\ )$

   D.: $(\ u \mid \alpha v\ ) = (\ \alpha v \mid u\ ) = \alpha (\ v \mid u\ ) = \alpha (\ u \mid v\ )$
   První rovnost plyne z (U2), druhá z (U3) a třetí opět z (U2). $\square$

3. $(\ u \mid v + w\ ) = (\ u \mid v\ ) + (\ u \mid w\ )$

   D.: $(\ u \mid v + w\ ) = (\ v + w \mid u\ ) = (\ v \mid u\ ) + (\ w \mid u\ ) = (\ u \mid v\ ) + (\ u \mid w\ )$
   První rovnost plyne z (U2), druhá z (U4) a třetí opět z (U2). $\square$

9.1.3 Věta (Cauchyova [1789 – 1857] - Bunjakovského [1804 – 1889] - Schwarzova [1843 – 1921] nerovnost)

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $(\ \cdot \mid \cdot\ )$. Pak pro všechna $u, v \in V$ platí

$$\left|(\ u \mid v\ )\right| \leq \sqrt{(\ u \mid u\ )(\ v \mid v\ )},$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když vektory u, v jsou lineárně závislé.

D.: Nechť $(\ u \mid v\ ) \neq 0$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ podle (U1), 9.1.2.1 a pravidel pro počítání se skalárním součinem platí

$$0 \leq (\ \alpha u + v \mid \alpha u + v\ ) = \alpha^2 (\ u \mid u\ ) + 2\alpha (\ u \mid v\ ) + (\ v \mid v\ ),$$

což znamená, že kvadratická rovnice s neznámou α

$$(\ u \mid u\ )\,\alpha^2 + 2\,(\ u \mid v\ )\,\alpha + (\ v \mid v\ ) = 0 \tag{9.1}$$

má nejvýše jeden reálný kořen, tedy $4\,(\ u \mid v\ )^2 - 4\,(\ u \mid u\ )\,(\ v \mid v\ ) \leq 0$, neboť koeficient u α^2 je kladný. Odtud plyne dokazovaná nerovnost.

Ukážeme, že jsou-li vektory $u,\ v$ lineárně závislé, nastane ve Schwarzově nerovnosti rovnost. Nechť tedy $v = \beta u$, pak

$$\begin{aligned} |(\ u \mid v\ )| &= |\beta\,(\ u \mid u\ )| = \sqrt{\beta^2\,(\ u \mid u\ )\,(\ u \mid u\ )} = \sqrt{(\ u \mid u\ )\,(\ \beta u \mid \beta u\ )} = \\ &= \sqrt{(\ u \mid u\ )\,(\ v \mid v\ )}\,. \end{aligned}$$

Nakonec ukážeme, že nastává-li ve Schwarzově nerovnosti rovnost, jsou vektory $u,\ v$ lineárně závislé. Nechť tedy $(\ u \mid v\ )^2 = (\ u \mid u\ )\,(\ v \mid v\ )$.

Je-li $(\ u \mid u\ ) \neq 0$, má rovnice (9.1) kořen $\alpha = -\dfrac{|(\ u \mid v\ )|}{(\ u \mid u\ )}$ a pro takové α je $(\ \alpha u + v \mid \alpha u + v\ ) = 0$, což podle 9.1.2.1 znamená, že $\alpha u + v = 0$, neboli $v = -\alpha u$.

Je-li $(\ u \mid u\ ) = 0$, je tvrzení triviální. □

9.1.4 Věta

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $(\ \cdot \mid \cdot\ )$. Pro $u \in V$ položme $\|u\| = \sqrt{(\ u \mid u\ )}$. Pak pro všechna $u, v \in V,\ \alpha \in \mathbb{R}$ platí

(N1) $u \neq 0 \Leftrightarrow \|u\| > 0$,

(N2) $\|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\|$,

(N3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

D.: Jediné netriviální tvrzení je (N3). S využitím 9.1.3 dostaneme:

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= (\ u+v \mid u+v\ ) = (\ u \mid u\ ) + 2\,(\ u \mid v\ ) + (\ v \mid v\ ) = \\ &= \|u\|^2 + 2|\,(\ u \mid v\ )\,| + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\sqrt{(\ u \mid u\ )\,(\ v \mid v\ )} + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2\,. \end{aligned}$$

□

Cauchyovu - Bunjakovského - Schwarzovu nerovnost lze zapsat:

$$|(\ u \mid v\ )| \leq \|u\|\,\|v\| \quad \text{nebo} \quad (\ u \mid v\ )^2 \leq \|u\|^2\,\|v\|^2\,.$$

9.1.5 Definice

Buď V reálný vektorový prostor a $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ zobrazení, které pro všechna $u, v \in V,\ \alpha \in \mathbb{R}$ splňuje podmínky (N1), (N2), (N3) z 9.1.4. Pak $\|\cdot\|$ se nazývá *norma* (*na vektorovém prostoru* V).

9.1.6 Věta

Buď V reálný vektorový prostor s normou $\|\cdot\|$. Definujme zobrazení $\rho : V \times V \to \mathbb{R}$ předpisem $\rho(u, v) = \|u - v\|$. Pak ρ je metrika na V.

D.: Axiomy totožnosti a symetrie jsou zřejmé. Trojúhelníková nerovnost plyne z (N3):
$\rho(u, w) = \|u - w\| = \|u - v + v - w\| \leq \|u - v\| + \|v - w\| = \rho(u, v) + \rho(v, w)$. □

Je-li V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $(\ \cdot \mid \cdot\ )$, budeme V uvažovat současně s normou zavedenou v 9.1.4 a s metrikou zavedenou v 9.1.6.

9.1.7 Věta

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $(\ \cdot \mid \cdot\ )$, pak zobrazení $(\ \cdot \mid \cdot\ ) : V \times V \to \mathbb{R}$ je spojité.

D.: Na $V \times V$ zavedeme metriku ρ_2 předpisem $\rho_2((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = \sqrt{\|u_1 - u_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2}$.
Pro všechny dvojice $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in V \times V$ platí

$$\|u_1 - u_2\| \leq \rho_2((u_1, v_1), (u_2, v_2)),\ \|v_1 - v_2\| \leq \rho_2((u_1, v_1), (u_2, v_2)) .$$

Buď $(u_0, v_0) \in V \times V$ libovolná dvojice a $\varepsilon > 0$ libovolné číslo. Položme

$$\delta = \frac{\sqrt{(\|u_0\| + \|v_0\|)^2 + 2\varepsilon} - \|u_0\| - \|v_0\|}{2} .$$

Pak $\delta > 0$ a $\delta^2 + (\|u_0\| + \|v_0\|)\,\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.
Buď dále $(u_1, v_1) \in V \times V$ libovolná dvojice taková, že $\rho_2((u_1, v_1), (u_0, v_0)) < \delta$. Pak s využitím 9.1.3 dostaneme

$$\begin{aligned}
|(\ u_1 \mid v_1\ ) - (\ u_0 \mid v_0\ )| &= |(\ u_1 - u_0 \mid v_1 - v_0\ ) + (\ u_0 \mid v_1 - v_0\ ) + (\ u_1 - u_0 \mid v_0\ )| \ \leq \\
&\leq |(\ u_1 - u_0 \mid v_1 - v_0\ )| + |(\ u_0 \mid v_1 - v_0\ )| + |(\ u_1 - u_0 \mid v_0\ )| \ \leq \\
&\leq \|u_1 - u_0\|\,\|v_1 - v_0\| + \|u_0\|\,\|v_1 - v_0\| + \|v_0\|\,\|u_1 - u_0\| \ \leq \\
&\leq \delta^2 + \|u_0\|\,\delta + \|v_0\|\,\delta = \frac{\varepsilon}{2} \ < \ \varepsilon ,
\end{aligned}$$

což znamená, že zobrazení $(\ \cdot \mid \cdot\ )$ je spojité v (u_0, v_0). Poněvadž (u_0, v_0) byla libovolná dvojice z $V \times V$, je toto zobrazení spojité na $V \times V$. $\square$

9.1.8 Důsledek

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $(\ \cdot \mid \cdot\ )$ a $\{v_n\}_{n1}^{\infty}$ posloupnost vektorů taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} \|v_n\| = \|v\|$ a pro libovolný vektor $u \in V$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} (\ v_n \mid u\ ) = (\ v \mid u\ )$.

D.: Plyne z 4.5.3. $\square$

9.1.9 Definice

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $(\ \cdot \mid \cdot\ )$. Řekneme, že vektory $u, v \in V$ jsou *ortogonální* a píšeme $u \perp v$, jestliže $u \neq 0 \neq v$ a $(\ u \mid v\ ) = 0$.
Řekneme, že množina $S \subseteq V$ je *ortogonální*, jestliže pro každé dva různé vektory $u, v \in S$ je $u \perp v$. Jestliže navíc pro každý vektor $u \in S$ platí $\|u\| = 1$, nazývá se množina S *ortonormální*.

Je-li množina S ortogonální, je množina $\left\{\frac{1}{\|u\|} u : u \in S\right\}$ zřejmě ortonormální.

Označení: Je-li V vektorový prostor a $S \subseteq V$, pak podprostor generovaný množinou S (lineární obal množiny S, množinu všech lineárních kombinací vektorů z S) označíme $\mathrm{Lin}(S)$.
Mohutnost množiny M označíme $\mathrm{card}\, M$.

9.1.10 Věta (Gramova [1850–1916] - Schmidtova [1876–1959] ortogonalizace)

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $(\ \cdot \mid \cdot\ )$ a $S \subseteq V$ konečná nebo spočetná lineárně nezávislá množina. Pak existuje ortonormální množina $R \subseteq V$ taková, že $\mathrm{Lin}(S) = \mathrm{Lin}(R)$ a $\mathrm{card}\, S = \mathrm{card}\, R$.

D.: Nechť $S = \{u_1, u_2, \dots\}$. Definujme vektory $x_1, x_2, \dots$ a $u_1, u_2, \dots$ takto:

$$\begin{aligned}
x_1 &= u_1 & v_1 &= \frac{1}{\|x_1\|} x_1 \\
x_2 &= u_2 - \left(u_2 \,\middle|\, v_1 \right) v_1 & v_2 &= \frac{1}{\|x_2\|} x_2 \\
&\vdots & &\vdots \\
x_{k+1} &= u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \left(u_{k+1} \,\middle|\, v_i \right) v_i & v_{k+1} &= \frac{1}{\|x_{k+1}\|} x_{k+1} \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

Tento postup končí, je-li množina S konečná vyčerpáním všech jejích prvků. Jinak můžeme neomezeně pokračovat. Položíme $R = \{v_1, v_2, \dots\}$. Zřejmě je $\operatorname{card} S = \operatorname{card} R$.
Úplnou indukcí ověříme, že vektor v_n je lineární kombinací vektorů $u_1, u_2, \dots, u_n$ a naopak, vektor u_n je lineární kombinací vektorů $v_1, v_2, \dots, v_n$. Tedy $\mathrm{Lin}(S) = \mathrm{Lin}(R)$.
Je-li množina $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ortogonální, tak pro každé $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ platí

$$\begin{aligned}
\left(x_{k+1} \,\middle|\, x_j \right) &= \left(u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \left(u_{k+1} \,\middle|\, v_i \right) v_i \,\middle|\, x_j \right) = \\
&= \left(u_{k+1} \,\middle|\, x_j \right) - \sum_{i=1}^{k} \left(u_{k+1} \,\middle|\, v_i \right) \left(v_i \,\middle|\, x_j \right) = \\
&= \left(u_{k+1} \,\middle|\, x_j \right) - \sum_{i=1}^{k} \left(u_{k+1} \,\middle|\, x_i \right) \frac{1}{\|x_i\|^2} \left(x_i \,\middle|\, x_j \right) = \\
&= \left(u_{k+1} \,\middle|\, x_j \right) - \left(u_{k+1} \,\middle|\, x_j \right) = 0 .
\end{aligned}$$

Tedy $x_{k+1} \perp x_j$ pro každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, což znamená, že množina $\{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ je ortogonální. Z principu matematické indukce plyne, že množina $\{x_1, x_2, \dots\}$ je ortogonální a tedy množina R je ortonormální. $\square$

9.1.11 Poznámka

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $\left(\cdot \,\middle|\, \cdot \right)$ a $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost vektorů z V. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$. Řekneme, že *nekonečná řada vektorů* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *konverguje k vektoru* s a píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$, jestliže $\lim_{n \to \infty} s_n = s$ v prostoru s metrikou zavedenou v 9.1.4.

9.1.12 Věta

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $\left(\cdot \,\middle|\, \cdot \right)$, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormální posloupnost vektorů z V a $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel.

- Je-li prostor V úplný a číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2$ konverguje, pak také řada vektorů $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n u_n$ konverguje.
- Jestliže řada vektorů $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n u_n$ konverguje k vektoru $v \in V$, pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2$ konverguje a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\gamma_n = \left(v \,\middle|\, u_n \right)$.

D.: Označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k u_k$.

Nechť V je úplný a $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2$ konverguje. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle 8.1.4 existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro

$n \geq n_0,\ m \in \mathbb{N}$ je $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} \gamma_k^2\right| < \varepsilon$. Pro $n \geq n_0,\ p \geq n_0,\ p > n$ je tedy

$$\begin{aligned}\|s_p - s_n\|^2 &= \left\|\sum_{k=n+1}^{p} \gamma_k u_k\right\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{p} \gamma_k u_k \,\middle|\, \sum_{k=n+1}^{p} \gamma_k u_k \right) = \\ &= \sum_{k=n+1}^{p} \sum_{j=n+1}^{p} \gamma_k \gamma_j \left(u_k \mid u_j \right) = \sum_{k=n+1}^{p} \gamma_k^2 < \varepsilon ,\end{aligned}$$

což znamená, že posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská a protože je V úplný, je tato posloupnost konvergentní.
Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n u_n = v \in V$. Kdyby $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 = \infty$, pak by z analogického výpočtu jako v předchozím kroku vyplynulo, že posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ by nebyla cauchyovská, což by byl spor s její předpokládanou konvergencí.
S využitím 9.1.8 dostaneme

$$\left(v \mid u_k \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i u_i \,\middle|\, u_k \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \left(u_i \mid u_k \right) = \lim_{n\to\infty} \gamma_k = \gamma_k .$$

□

9.1.13 Definice

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $\left(\cdot \mid \cdot \right)$, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormální posloupnost vektorů z V a $v \in V$. Čísla $\gamma_n = \left(v \mid u_n \right)$ se nazývají *Fourierovy koeficienty vektoru v vzhledem k ortonormální posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$* a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n u_n$ se nazývá *Fourierova řada vektoru v vzhledem k ortonormální posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$*.

9.1.14 Věta

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $\left(\cdot \mid \cdot \right)$, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormální posloupnost vektorů z V, $v \in V$, $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost Fourierových koeficientů vektoru v vzhledem k posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost reálných čísel. Pak pro každé $n \in N$ platí nerovnost

$$\left\| v - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i u_i \right\| \leq \left\| v - \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i \right\|$$

(mezi všemi lineárními kombinacemi vektorů $u_1, u_2, \ldots, u_n$ má od vektoru v nejmenší vzdálenost ta, jejíž koeficienty jsou Fourierovými koeficienty vektoru v) a

$$\left\| v - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i u_i \right\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2$$

(Besselova identita).

D.: Dokazovaná nerovnost i Besselova identita plynou z rovnosti

$$\begin{aligned}
\left\| v - \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i \right\|^2 &= \left(v - \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i \,\middle|\, v - \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i \right) = \\
&= \|v\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(u_i \mid v \right) - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(v \mid u_i \right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j \left(u_i \mid u_j \right) = \\
&= \|v\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \beta_i \gamma_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 = \|v\|^2 + \sum_{i=1}^{n} (\beta_i^2 - 2\beta_i\gamma_i) = \\
&= \|v\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left((\beta_i - \gamma_i)^2 - \gamma_i^2 \right) = \|v\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \gamma_i)^2 .
\end{aligned}$$

□

9.1.15 Důsledek (Besselova [1784 – 1846] nerovnost)

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $\left(\cdot \mid \cdot \right)$, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormální posloupnost vektorů z V, $v \in V$, $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost Fourierových koeficientů vektoru v vzhledem k posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pak platí

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \le \|v\|^2 .$$

Z Besselovy nerovnosti a z 9.1.12 plyne, že v úplném prostoru Fourierova řada libovolného vektoru konverguje.

9.1.16 Věta

Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem $\left(\cdot \mid \cdot \right)$, který je úplný, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormální posloupnost vektorů z V a $v \in V$. Fourierova řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n u_n$ vektoru v vzhledem k $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k vektoru v právě tehdy, když platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 = \|v\|^2$$

(Parsevalova rovnost).

D.: Podle 9.1.8 a 9.1.14 platí

$$\left\| v - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n u_n \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| v - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i u_i \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\|v\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \right) = \|v\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 .$$

□

9.1.17 Definice

Reálný vektorový prostor, který je úplný a v němž existuje nekonečná ortonormální podmnožina se nazývá *Hilbertův prostor*.

9.1.18 Příklad

Nechť ℓ^2 je množina posloupností $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ takových, že řada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2$ konverguje.

Jsou-li $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}, \{\beta_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^2$ pak řada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta_i$ konverguje absolutně.

D.: $|\alpha_i\beta_i| \le \max\{\alpha_i^2, \beta_i^2\}$

$\sum\limits_{i=1}^{k} \max\{\alpha_i^2, \beta_i^2\} \le \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i^2 + \sum\limits_{i=1}^{k} \beta_i^2 \le \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \beta_i^2 < \infty.$

Řada s nezápornými členy $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \max\{\alpha_i^2, \beta_i^2\}$ má ohraničenou posloupnost částečných součtů. Podle 8.2.1 tato řada konverguje, takže podle 8.2.4 konverguje i řada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\alpha_i\beta_i|$. □

ℓ^2 tvoří reálný vektorový prostor a lze snadno ověřit, že zobrazení $(\ \cdot \mid \cdot\ ) : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}$ definované pro $u = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^2,\ v = \{\beta_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^2$ předpisem $(\ u \mid v\ ) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i\beta_i$ je skalární součin.

Položme $e_n = \{\delta_{ni}\}_{i=1}^{\infty}$, kde $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \ne j \\ 1, & i = j \end{cases}$. Pak zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $e_n \in \ell^2,\ \|e_n\| = 1$, $(\ e_n \mid e_m\ ) = 0$ pro $n \ne m$. Tedy $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortonormální posloupnost v ℓ^2.

Buď $u = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^2$ libovolný vektor. Fourierovy koeficienty tohoto vektoru vzhledem k $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou

$$\gamma_n = (\ u \mid e_n\ ) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\delta_{ni} = \alpha_n\,.$$

Dále

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left\| u - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \left(\ u - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \,\middle|\, u - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\ \right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left((\ u \mid u\ ) - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, (\ u \mid e_i\ ) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j\, (\ e_i \mid e_j\ ) \right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i^2 = 0\,,
\end{aligned}$$

takže Fourierova řada libovolného vektoru $u \in \ell^2$ konverguje k u.

9.2 Prostor $\mathcal{L}^2(a, b)$

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*,\ a < b$.

Symbolem $\mathcal{C}^2(a, b)$ označíme množinu všech funkcí f spojitých na intervalu (a, b), pro něž $\int\limits_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x < \infty$. Jsou-li $a, b \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{x\to a+} f(x) \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x\to b-} f(x) \in \mathbb{R}$, je nerovnost triviální. V opačném případě říká, že příslušný nevlastní integrál konverguje.

9.2.1 Poznámky

1. Jsou-li $f, g \in \mathcal{C}^2(a, b)$, pak $\int\limits_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x < \infty$ a $-\infty < \int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x < \infty$.

   D.: Nechť uvažované integrály jsou nevlastní. (V opačném případě by tvrzení bylo triviální.)

   $$\int_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \ \le\ \int_a^b \max\{(f(x))^2, (g(x))^2\}\mathrm{d}x \ \le\ \int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x + \int_a^b (g(x))^2\mathrm{d}x \ <\ \infty\,.$$

   Druhá nerovnost plyne z 3.5.8. □

2. Jsou-li $f, g \in \mathcal{C}^2(a, b)$, pak také $f + g \in \mathcal{C}^2(a, b)$ a pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\alpha f \in \mathcal{C}^2(a, b)$.

D.:

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x &= \int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x + 2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b (g(x))^2\mathrm{d}x \ \le \\
&\le \int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x + 2\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| + \int_a^b (g(x))^2\mathrm{d}x \ \le \\
&\le \int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x + 2\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x + \int_a^b (g(x))^2\mathrm{d}x \ < \ \infty\,, \\
\int_a^b (\alpha f(x))^2\mathrm{d}x &= \alpha^2\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x \ < \ \infty\,.
\end{aligned}$$

□

3. $\mathcal{C}^2(a,b)$ tvoří reálný vektorový prostor, nulovým vektorem je funkce $f\equiv 0$. (Budeme ji značit 0.)

   D.: Plyne bezprostředně z předchozího tvrzení. □

4. Zobrazení $\Phi : \mathcal{C}^2(a,b)\times\mathcal{C}^2(a,b)\to\mathbb{R}$ dané předpisem $\Phi(f,g)=\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ je skalárním součinem.

   D.: Nejprve poznamenejme, že zobrazení Φ je podle 1. definováno korektně.
   Ověříme platnost podmínky (U1):
   Nechť $f\neq 0$. Pak existuje $x_0\in(a,b)$ takové, že $f(x_0)\neq 0$ a ze spojitosti funkce f plyne existence okolí $\mathcal{O}(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq(a,b)$ bodu x_0 takového, že $(f(x_0))^2\geq\varepsilon>0$ pro všechna $x\in\mathcal{O}(x_0)$.
   Podle 3.3.1 je $\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}(f(x))^2\mathrm{d}x\geq 2\varepsilon\delta$ a tedy
   $\Phi(f,f)=\int\limits_a^b(f(x))^2\mathrm{d}x=\int\limits_a^{x_0-\delta}(f(x))^2\mathrm{d}x+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}(f(x))^2\mathrm{d}x+\int\limits_{x_0+\delta}^{b}(f(x))^2\mathrm{d}x\geq 0+2\varepsilon\delta+0>0.$
   Platnost podmínek (U2) – (U4) je zřejmá. □

5. Jsou-li $f,g\in\mathcal{C}^2(a,b)$, pak $\left|\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \ \leq\sqrt{\int\limits_a^b(f(x))^2\mathrm{d}x}\sqrt{\int\limits_a^b(g(x))^2\mathrm{d}x}\,.$

   D.: Plyne z předchozího tvrzení a z 9.1.3. □

9.2.2 Definice

Buď f funkce definovaná na intervalu (a,b).
Řekneme, že funkce f je *po částech spojitá*, je-li množina jejich bodů nespojitosti konečná.
Řekneme, že funkce f je *po částech monotonní*, existují-li čísla $x_0,x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^*$ taková, že
$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ a funkce f je monotonní na každém z intervalů $(x_{i-1},x_i),\ i=1,2,\ldots,n.$

Symbolem $\tilde{\mathcal{L}}^2(a,b)$ označíme množinu všech po částech spojitých funkcí f definovaných na intervalu (a,b), pro něž $\int\limits_a^b(f(x))^2\mathrm{d}x<\infty$.

Pro každou funkci $f\in\tilde{\mathcal{L}}^2(a,b)$ označíme symbolem $N(f)$ množinu jejích bodů nespojitosti.

9.2.3 Poznámky

1. Na množině $\tilde{\mathcal{L}}^2(a,b)$ definujme relaci $\sim$ předpisem: $f\sim g \ \Leftrightarrow \int\limits_a^b(f(x)-g(x))^2\mathrm{d}x=0$. Pak $\sim$ je relací ekvivalence na množině $\tilde{\mathcal{L}}^2(a,b)$.

D.: Reflexivita a symetrie jsou zřejmé.
Nechť $f \sim g,\ g \sim h$. Buďte $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^*$ taková, že $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ a $N(f) \cup N(g) \cup N(h) \subseteq \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Pak každá z funkcí $f,\ g,\ h$ je spojitá v každém intervalu (x_{i-1}, x_i) a platí $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x)-g(x))^2 \mathrm{d}x = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (g(x)-h(x))^2 \mathrm{d}x = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$.
S využitím 9.2.1.5 dostaneme

$$\begin{aligned}
0 \ &\leq\ \int_a^b (f(x)-h(x))^2 \mathrm{d}x \ = \ \int_a^b (f(x)-g(x)+g(x)-h(x))^2 \mathrm{d}x \ = \\
&=\ \int_a^b (f(x)-g(x))^2 \mathrm{d}x + 2\int_a^b (f(x)-g(x))(g(x)-h(x)) \mathrm{d}x + \int_a^b (g(x)-h(x))^2 \mathrm{d}x \ = \\
&=\ 0 + 2\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x)-g(x))(g(x)-h(x)) \mathrm{d}x + 0 \ \leq \\
&\leq\ 2\sum_{n=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x)-g(x))(g(x)-h(x)) \mathrm{d}x \right| \ \leq \\
&\leq\ 2\sum_{n=1}^{n} \sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x)-g(x))^2 \mathrm{d}x} \sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i} (g(x)-h(x))^2 \mathrm{d}x} \ = \ 0\,.
\end{aligned}$$

takže $\int\limits_a^b (f(x)-h(x))^2 \mathrm{d}x = 0$, což znamená $f \sim h$. □

2. Jsou-li $f, g, f_1, g_1 \in \tilde{\mathcal{L}}^2(a,b)$ a platí $f \sim f_1,\ g \sim g_1$, pak $-\infty \ < \ \int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f_1(x)g_1(x)\mathrm{d}x \ < \ \infty$.

   D.: Buďte $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^*$ taková, že $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ a $N(f) \cup N(g) \cup N(f_1) \cup N(g_1) \subseteq \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.
   Pak $\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ a $f, g \in \mathcal{C}^2(x_{i-1}, x_i)$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Z 9.2.1.1 tedy plyne $-\infty < \int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x < \infty$.
   Dále podle 9.2.1.2 $f, g_1, f-f_1, g-g_1 \in \mathcal{C}^2(x_{i-1}, x_i)$ a $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x)-f_1(x))^2 \mathrm{d}x = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (g(x)-g_1(x))^2 \mathrm{d}x = 0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. S využitím 9.2.1.5 dostaneme

$$\begin{aligned}
0 \ \leq\ \left| \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f_1(x)g_1(x)\mathrm{d}x \right| \ &=\ \left| \int_a^b (f(x)g(x) - f_1(x)g_1(x))\mathrm{d}x \right| \ = \\
&= \left| \int_a^b (f(x)g(x) - f(x)g_1(x) + f(x)g_1(x) - f_1(x)g_1(x))\mathrm{d}x \right| \ = \\
&= \left| \int_a^b f(x)(g(x)-g_1(x))\mathrm{d}x + \int_a^b (f(x)-f_1(x))g_1(x)\mathrm{d}x \right| \ \leq \\
&\leq \left| \int_a^b f(x)(g(x)-g_1(x))\mathrm{d}x \right| + \left| \int_a^b (f(x)-f_1(x))g_1(x)\mathrm{d}x \right| \ =
\end{aligned}$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(g(x)-g_1(x))\mathrm{d}x\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x)-f_1(x))g_1(x)\mathrm{d}x\right| \leq$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(g(x)-g_1(x))\mathrm{d}x\right| + \sum_{i=1}^{n} \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x)-f_1(x))g_1(x)\mathrm{d}x\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x))^2\mathrm{d}x} \sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i} (g(x)-g_1(x))^2\mathrm{d}x} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x)-f_1(x))^2\mathrm{d}x} \sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i} (g_1(x))^2\mathrm{d}x} = 0\,.$$

Odtud plyne rovnost mezi integrály. □

3. Jsou-li $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \tilde{\mathcal{L}}^2(a,b)$ takové, že $f_1 \sim f_2,\ g_1 \sim g_2$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$ a $\alpha f_1 \sim \alpha f_2$.

D.: $0 = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))^2\mathrm{d}x = \int_a^b ((f_1(x) - f_2(x)) - 0)^2\mathrm{d}x$, takže $f_1 - f_2 \sim 0$. Podle předchozího je $\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))(g_1(x) - g_2(x))\mathrm{d}x = \int_a^b 0(g_1(x) - g_2(x))\mathrm{d}x = 0$, tedy

$$\int_a^b ((f_1(x)+g_1(x)) - (f_2(x)+g_2(x)))^2\mathrm{d}x = \int_a^b ((f_1(x)-f_2(x)) + (g_1(x)-g_2(x)))^2\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b (f_1(x)-f_2(x))^2\mathrm{d}x + 2\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))(g_1(x)-g_2(x))\mathrm{d}x + \int_a^b (g_1(x)-g_2(x))^2\mathrm{d}x = 0\,.$$

Dále

$$\int_a^b (\alpha f_1(x) - \alpha f_2(x))^2\mathrm{d}x = \alpha^2 \int_a^b (f_1(x)-f_2(x))^2\mathrm{d}x = 0\,.$$

□

Pro každé $f \in \tilde{\mathcal{L}}^2(a,b)$ položme $\langle f \rangle = \{h \in \tilde{\mathcal{L}}^2(a,b) : f \sim h\}$. Neboli: množiny $\langle f \rangle$ jsou třídy rozkladu množiny $\tilde{\mathcal{L}}^2(a,b)$ podle ekvivalence $\sim$, $\langle f \rangle \in \tilde{\mathcal{L}}^2(a,b)/\sim$; $\langle f \rangle = \langle g \rangle \ \Leftrightarrow f \sim g$.

Označme $\mathcal{L}^2(a,b) = \tilde{\mathcal{L}}^2(a,b)/\sim$.

Dále pro $\langle f \rangle, \langle g \rangle \in \mathcal{L}^2(a,b)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ klademe

$$\begin{aligned} \langle f \rangle + \langle g \rangle &= \langle f_1 + g_1 \rangle && \text{(součet)} \\ \alpha\langle f \rangle &= \langle \alpha f \rangle && \text{(násobení skalárem)} \end{aligned}$$

přičemž $f_1 \in \langle f \rangle,\ g_1 \in \langle g \rangle$. Podle 9.2.3.3 součet ani násobení skalárem nezávisí na výběru representantů f_1, g_1.

Množina $\mathcal{L}^2(a,b)$ tvoří reálný vektorový prostor. Jeho nulovým prvkem $\langle 0 \rangle$ je třída obsahující funkci $f \equiv 0$.

Zobrazení $(\ \cdot \mid \cdot\ ) : \mathcal{L}^2(a,b) \times \mathcal{L}^2(a,b) \to \mathbb{R}$ definované pro $\langle f \rangle, \langle g \rangle \in \mathcal{L}^2(a,b)$ předpisem

$$(\ \langle f \rangle \mid \langle g \rangle\ ) = \int_a^b f_1(x)g_1(x)\mathrm{d}x\,,$$

kde $f_1 \in \langle f \rangle$, $g_1 \in \langle g \rangle$, nezávisí podle 9.2.3.2 na výběru representantů f_1, g_1.

Nechť $f_1 \in \langle f\rangle$. Pak platí

$$\left(\langle f\rangle \mid \langle f\rangle \right) = \int_a^b (f_1(x))^2 \mathrm{d}x \geq 0\,,$$

$$\left(\langle f\rangle \mid \langle f\rangle \right) = 0 \;\Rightarrow\; \int_a^b (f_1(x))^2 \mathrm{d}x = 0 \;\Rightarrow\; f_1 \sim 0 \Rightarrow\; 0 \in \langle f\rangle \Rightarrow\; \langle f\rangle = 0\,.$$

Je tedy splněna podmínka (U1) z 9.1.1. Platnost podmínek (U2) – (U4) je zřejmá. Zobrazení $\left(\,\cdot \mid \cdot\, \right)$ je skalárním součinem na $\mathcal{L}^2(a,b)$.

V dalším budeme pro zjednodušení zápisu prvky množiny $\mathcal{L}^2(a,b)$ značit stejně jako funkce z množiny $\tilde{\mathcal{L}}^2(a,b)$. (Třídy rozkladu ztotožňujeme s representanty.)

Vzdálenost dvou funkcí $f,\ g$ v prostoru $\mathcal{L}^2(a,b)$ je

$$\|f-g\| \;=\; \sqrt{\int_a^b (f(x)-g(x))^2 \mathrm{d}x}$$

a nazývá se *střední odchylka funkcí* $f,\ g$.

Konvergence posloupnosti funkcí v prostoru $\mathcal{L}^2(a,b)$ se nazývá *konvergence (posloupnosti funkcí) podle středu*.

9.3 Fourierovy řady vzhledem k trigonometrickému systému

Uvažujme prostor $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ a posloupnost funkcí

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}.$$

Platí

$$\left(1 \mid 1 \right) \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \;=\; 2\pi\,,$$

$$\left(\cos nx \mid \cos nx \right) \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \mathrm{d}x \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2} \mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{1}{2} + \frac{\sin 2nx}{4n}\right]_{-\pi}^{\pi} \;=\; \pi\,,$$

$$\left(\sin nx \mid \sin nx \right) \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \mathrm{d}x \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2nx}{2} \mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{1}{2} - \frac{\sin 2nx}{4n}\right]_{-\pi}^{\pi} \;=\; \pi\,,$$

$$\left(1 \mid \cos nx \right) \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{1}{n} \sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} \;=\; 0\,,$$

$$\left(1 \mid \sin nx \right) \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \mathrm{d}x \;=\; \left[-\frac{1}{n} \cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} \;=\; -\frac{1}{n}\left((-1)^n - (-1)^n\right) \;=\; 0\,,$$

$$\left(\sin nx \mid \cos mx \right) \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n+m)x + \sin(n-m)x) \mathrm{d}x \;=\; 0\,.$$

Odtud plyne, že uvažovaná posloupnost funkcí je ortogonální v prostoru $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ a tedy posloupnost funkcí

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \dots\right\}$$

je ortonormální posloupností funkcí v prostoru $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$. Tato posloupnost se nazývá *trigonometrický systém funkcí.*

Je-li $f \in \mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$, pak Fourierova řada této funkce vzhledem ke zmíněné ortonormální posloupnosti je

$$\alpha_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + \beta_n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right),$$

kde

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x, \quad \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, \quad \beta_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x, \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

Tuto řadu lze zapsat v přehlednějším tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,,$$

kde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x\,,\ n = 0,1,2,\ldots \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\,,\ n = 1,2,\ldots.$$

Z 9.1.16 a 8.3.13 plyne

9.3.1 Věta

Buď $f \in \mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$. Fourierova řada funkce f vzhledem k trigonometrickému systému konverguje k funkci f podle středu (v metrice prostoru $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$) právě tehdy, když

$$\frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \|f\|^2\,.$$

Z 9.1.4 a 8.1.5 plyne

9.3.2 Věta

Nechť $f \in \mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ a $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ jsou Fourierovy koeficienty této funkce vzhledem k trigonometrickému systému. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

9.3.3 Věta (Dirichlet [1805 – 1859])

Nechť funkce f je ohraničená, po částech spojitá a po částech monotonní na intervalu $[-\pi,\pi]$. Pak její Fourierova řada vzhledem k trigonometrickému systému bodově konverguje na intervalu $[-\pi,\pi]$ k funkci $\tilde{f}$, přičemž

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi,\pi),\ f \text{ je spojitá v } x \\ \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{t\to x-} f(t) + \lim\limits_{t\to x+} f(t) \right), & x \in (-\pi,\pi),\ f \text{ není spojitá v } x \\ \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{t\to -\pi+} f(t) + \lim\limits_{t\to \pi-} f(t) \right), & x \in \{-\pi,\pi\} \end{cases}.$$

D.: Viz V. Novák, Nekonečné řady.
Poznamenejme jen, že podle 1.6.15 příslušné jednostranné limity existují. $\square$

Zřejmě $\tilde{f} \sim f$, t.j. $\tilde{f} = f$ v prostoru $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$.

(Bodový) součet Fourierovy řady vzhledem k trigonometrickému systému je 2π-periodická funkce. Tedy (bodový) součet Fourierovy řady je 2π-periodické rozšíření funkce, která je na intervalu $(-\pi,\pi)$ ekvivalentní (ve smyslu 9.2.3.1) funkci f.

Je-li $f \in \mathcal{L}^{\in}(-\pi,\pi)$ sudá funkce, pak $b_n = 0,\ n = 1,2,\dots$ a Fourierova řada této funkce vzhledem k trigonometrickému systému má tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \text{kde } a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\ n = 0,1,2,\dots .$$

Tato řada se nazývá *kosinová* (*řada funkce* f).

Je-li $f \in \mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ lichá funkce, pak $a_n = 0,\ n = 0,1,2,\dots$ a Fourierova řada této funkce vzhledem k trigonometrickému systému má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad \text{kde } b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\ n = 0,1,2,\dots .$$

Tato řada se nazývá *sinová* (*řada funkce* f).

9.3.4 Příklad

Nechť $f(x) = x$ pro $x \in [-\pi,\pi]$. Je to funkce lichá, proto $a_n = 0,\ n = 0,1,2,\dots$.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right) = \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\pi\cos n\pi - \frac{1}{n}\pi\cos n\pi) + \frac{1}{n^2}\left[\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}\right) = \\
&= -\frac{2}{n}\cos n\pi = -\frac{2}{n}(-1)^n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}
\end{aligned}$$

Tedy pro $x \in (-\pi,\pi)$ je

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx .$$

Zejména pro $x = \frac{\pi}{2}$ je

$$\frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2} = 2(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1},$$

tedy

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

9.3.5 Věta (Dirichlet [1805 – 1859] - Jordan [1838 – 1922])

Nechť funkce f je 2π-periodická, ohraničená, po částech spojitá a po částech monotonní na intervalu $[-\pi,\pi]$. Je-li f spojitá na intervalu (a,b), pak Fourierova řada funkce f vzhledem k trigonometrickému systému konverguje stejnoměrně k funkci f na každém uzavřeném podintervalu intervalu (a,b).

D.: Viz V. Novák, Nekoneěné řady.
Poznamenejme jen, že interval (a,b) nemá žádný vztah k intervalu $[-\pi,\pi]$. □

9.3.6 Příklad

$f(x) = x^2$ pro $x \in [-\pi, \pi]$. S využitím výsledku 9.3.4 dostaneme

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\int_0^x t\mathrm{d}t = 2\int_0^x \left(2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt\right)\mathrm{d}t = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\int_0^x \sin nt\mathrm{d}t = \\ &= 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{1}{n}[-\cos nt]_0^x = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}(\cos 0 - \cos nx) = \\ &= 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}(1-\cos nx) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx \end{aligned}$$

(Výpočet je korektní, neboť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}(1-\cos nx)$ konverguje absolutně.)
Současně platí

$$\frac{a_0}{2} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{6\pi}[x^3]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Tedy pro $x \in [-\pi, \pi]$ je

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx.$$

Zejména pro $x = \pi$ je

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos n\pi = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}(-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

z čehož

$$\pi^2 = 6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Mimochodem také vyšlo

$$\pi^2 = 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

9.3.7 Fourierovy řady funkcí z prostoru $\mathcal{L}^2(a, b)$

Nechť $f \in \mathcal{L}^2(a, b)$ je ohraničená, po částech spojitá a po částech monotonní. Položme $g(t) = f\left(\dfrac{b-a}{2\pi}t + \dfrac{a+b}{2}\right)$. Pak g je ohraničená, po částech spojitá a po částech monotonní funkce definovaná na intervalu $[-\pi, \pi]$ a platí $f(x) = g\left(\dfrac{2x-a-b}{b-a}\pi\right)$. Podle 9.3.3 je

$$\begin{aligned} g(t) &\sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt), \text{ kde} \\ \alpha_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\mathrm{d}t, \ n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin nx\mathrm{d}t, \ n = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Substitucí $t = \dfrac{2x-a-b}{b-a}\pi,\ \mathrm{d}t = \dfrac{2\pi}{b-a}\mathrm{d}x$ a při označení $\varphi_n = \dfrac{2}{b-a}n\pi,\ \psi_n = \dfrac{b+a}{b-a}n\pi$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\cos nt &= \cos(\varphi_n x - \psi) = \cos\varphi_n x\,\cos\psi_n + \sin\varphi_n x\,\sin\psi_n\,,\\
\sin nt &= \sin(\varphi_n x - \psi) = \sin\varphi_n x\,\cos\psi_n - \cos\varphi_n x\,\sin\psi_n\,,\\
\alpha_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b g(\varphi_n x-\psi)\cos(\varphi_n x-\psi)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{2}{b-a}\left(\cos\psi_n\int_a^b f(x)\cos\varphi_n x\mathrm{d}x + \sin\psi_n\int_a^b f(x)\sin\varphi_n x\mathrm{d}x\right),\\
\beta_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b g(\varphi_n x-\psi)\sin(\varphi_n x-\psi)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{2}{b-a}\left(\cos\psi_n\int_a^b f(x)\sin\varphi_n x\mathrm{d}x - \sin\psi_n\int_a^b f(x)\cos\varphi_n x\mathrm{d}x\right).
\end{aligned}$$

Označme

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi}{b-a}x\mathrm{d}x\,, \quad n=0,1,2,\dots\,,\\
b_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi}{b-a}x\mathrm{d}x\,, \quad n=0,1,2,\dots\,.
\end{aligned} \tag{9.2}$$

Tedy

$$\begin{aligned}
f(x) = g\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\pi\right) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n\cos\psi_n + b_n\sin\psi_n)(\cos\varphi_n x\,\cos\psi_n + \sin\varphi_n x\,\sin\psi_n) + \\
&\quad +(b_n\cos\psi_n - a_n\sin\psi_n)(\sin\varphi_n x\,\cos\psi_n - \cos\varphi_n x\,\sin\psi_n)] = \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(\cos\varphi_n x\,\cos^2\psi_n + \sin\varphi_n x\,\sin\psi_n\,\cos\psi_n - \\
&\quad -\sin\varphi_n x\,\sin\psi_n\,\cos\psi_n + \cos\varphi_n x\,\sin^2\psi_n)a_n + \\
&\quad (\cos\varphi_n x\,\sin\psi_n\,\cos\psi_n + \sin\varphi_n x\,\sin^2\psi_n + \\
&\quad +\sin\varphi_n x\,\cos^2\psi_n - \cos\varphi_n x\,\sin\psi_n\,\cos\psi_n)b_n] = \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\varphi_n x + b_n\sin\varphi_n x)\,.
\end{aligned}$$

To znamená, že

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{b-a}x + b_n\sin\frac{2n\pi}{b-a}x\right), \tag{9.3}$$

kde koeficienty $a_n,\ b_n$ jsou dány vztahy (9.2).

Pro bodovou a stejnoměrnou konvergenci řady (9.3) platí věty analogické 9.3.3 a 9.3.5.

9.3.8 Příklad

Definujme funkci $(\cdot)$ zvanou *vzdálenost k nejbližžšímu celému číslu* předpisem $(x) = \min\{x-[x],[x+1]-x\}$. Tato funkce má zřejmě periodu 1. Najdeme její Fourierovu řadu na intervalu $[0,1]$.

$$a_0 = 2\left(\int_0^{\frac12} x\mathrm{d}x + \int_{\frac12}^1 (1-x)\mathrm{d}x\right) = 2\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac12} - \left[\frac{(1-x)^2}{2}\right]_{\frac12}^1\right) = 2\left(\frac18+\frac18\right) = \frac12\,,$$

$$a_n = 2\left(\int_0^{\frac12} x\cos 2n\pi x \mathrm{d}x + \int_{\frac12}^{1}(1-x)\cos 2n\pi x \mathrm{d}x\right) =$$
$$= 2\left(\left[\frac{x}{2n\pi}\sin 2n\pi x + \frac{1}{4n^2\pi^2}\cos 2n\pi x\right]_0^{\frac12} + \left[\frac{1}{2n\pi}\sin 2n\pi x - \frac{x}{2n\pi}\sin 2n\pi x - \frac{1}{4n^2\pi^2}\cos 2n\pi x\right]_{\frac12}^{1}\right) =$$
$$= 2\left(\frac{1}{4n^2\pi^2}\cos n\pi - \frac{1}{4n^2\pi^2} - \frac{1}{4n^2\pi^2} + \frac{1}{4n^2\pi^2}\cos n\pi\right) = \frac{1}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n \text{ sudé} \\ -\dfrac{2}{n^2\pi^2}, & n \text{ liché} \end{cases}$$

$$b_n = 2\left(\int_0^{\frac12} x\sin 2n\pi x \mathrm{d}x + \int_{\frac12}^{1}(1-x)\sin 2n\pi x \mathrm{d}x\right) =$$
$$= 2\left(\left[\frac{1}{4n^2\pi^2}\sin 2n\pi x - \frac{x}{2n\pi}\cos 2n\pi x\right]_0^{\frac12} + \left[\frac{x}{2n\pi}\cos 2n\pi x - \frac{1}{4n^2\pi^2}\sin 2n\pi x - \frac{1}{2n\pi}\cos 2n\pi x\right]_{\frac12}^{1}\right) =$$
$$= 2\left(-\frac{1}{4n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{4n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{2n\pi}\cos n\pi\right) = 0$$

Celkem

$$(x) = \frac14 - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos 2(2n+1)\pi x\,.$$

Zejména pro $x = 0$ dostaneme

$$0 = \frac14 - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\,, \quad \text{tj. } \pi^2 = 8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\,.$$

9.4 Fourierův integrál

Buď f spojitá funkce definovaná na intervalu $(-\infty,\infty)$ taková, že $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\mathrm{d}t$ konverguje. Dále buď $\ell > 0$.

Podle 9.3.7 pro každé $x \in \left(-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right)$ je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{\ell}x + b_n\sin\frac{2n\pi}{\ell}x\right),$$

kde

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} f(t)\cos\frac{2n\pi}{\ell}t\mathrm{d}t,\ n = 0,1,2,\ldots \qquad b_n = \frac{2}{\ell}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} f(t)\sin\frac{2n\pi}{\ell}t\mathrm{d}t,\ n = 1,2,\ldots\,.$$

Tedy

$$f(x) = \frac{1}{\ell}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} f(t)\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\ell}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} f(t)\left(\cos\frac{2n\pi}{\ell}t\cos\frac{2n\pi}{\ell}x + \sin\frac{2n\pi}{\ell}t\sin\frac{2n\pi}{\ell}x\right)\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{\ell}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}}\left(f(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi}{\ell}\cos\frac{2n\pi}{\ell}(t-x)\right)\mathrm{d}t\,.$$

Abychom dostali vzorec platný pro každé $x \in (-\infty,\infty)$, provedeme limitní přechod $\ell \to \infty$.

Z konvergence nevlastního integrálu $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\mathrm{d}t$ plyne $\lim\limits_{\ell\to\infty} \left| \int\limits_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} f(t)\mathrm{d}t \right| < \infty$ a tedy

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} f(t)\mathrm{d}t \;=\; 0\,.$$

Výraz

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{2\pi}{\ell} \cos \frac{2n\pi}{\ell}(t-x)$$

je integrální součet příslušný k funkci $g(\lambda) = \cos\lambda(t-x)$, dělení $D = \left\{0, \frac{2\pi}{\ell}, \frac{4\pi}{\ell}, \dots, \frac{2m\pi}{\ell}\right\}$ intervalu $\left[0, \frac{2m\pi}{\ell}\right]$ a výběru representantů $\left\{\frac{2\pi}{\ell}, \frac{4\pi}{\ell}, \dots, \frac{2m\pi}{\ell}\right\}$ (sr. 3.2.8). Lze tedy očekávat, že za jistých předpokladů bude platit

$$\lim_{\ell\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{\ell} \cos \frac{2n\pi}{\ell}(t-x) \;=\; \int\limits_{0}^{\infty} \cos\lambda(t-x)\mathrm{d}\lambda$$

a také

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\lambda \;=\; \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\cos\lambda x\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t + \sin\lambda x\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\lambda\,.$$

9.4.1 Věta

Nechť funkce f je definována na intervalu $(-\infty, \infty)$ s případnou výjimkou izolované množiny bodů. Je-li splněna alespoň jedna z podmínek

(i) integrál $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t$ absolutně konverguje,

(ii) funkce f a její derivace jsou po částech spojité na každém konečném intervalu, přičemž případné body nespojitosti jsou prvního druhu a navíc platí $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$,

pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to x+} f(t) + \lim_{t\to x-} f(t)\right) \;=\; \int\limits_{0}^{\infty} \left(a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\right)\mathrm{d}\lambda\,,$$

kde

$$a(\lambda) \;=\; \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t, \quad b(\lambda) \;=\; \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t.$$

D.: V. Jarník, Integrální počet II, str. 524 – 533. (Věta je tam dokázána s poněkud obecnějšími předpoklady.) □

Zejména je-li f v bodě x spojitá, platí

$$f(x) \;=\; \int\limits_{0}^{\infty} \left(a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\right)\mathrm{d}\lambda\,.$$

Je-li funkce f sudá, pak

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \cos \lambda t \mathrm{d}t, \quad b(\lambda) \equiv 0,$$

Je-li funkce f lichá, pak

$$a(\lambda) \equiv 0, \quad b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \sin \lambda t \mathrm{d}t.$$

Příklad: Funkci $f(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}$, $0 < x < \infty$, $\alpha > 0$ vyjádřit Fourierovým integrálem

a) jako sudou funkci

$$\begin{aligned}
a(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} \cos \lambda t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} Re\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} Re \int_0^\infty \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\lambda - \alpha)t} \mathrm{d}t = \\
&= \frac{2}{\pi} Re \frac{1}{\mathrm{i}\lambda - \alpha} \left[\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\lambda - \alpha)t} \right]_0^\infty = \frac{2}{\pi} Re \frac{1}{\mathrm{i}\lambda - \alpha} = \frac{2}{\pi} Re \frac{\alpha + \mathrm{i}\lambda}{\alpha^2 + \lambda^2} = \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 + \lambda^2)} \\
\mathrm{e}^{-\alpha x} &= \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{\alpha^2 + \lambda^2} \mathrm{d}\lambda
\end{aligned}$$

b) jako lichou funkci

$$\begin{aligned}
b(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin \lambda t \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} Im\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} \mathrm{d}t = \frac{2\lambda}{\pi(\alpha^2 + \lambda^2)} \\
\mathrm{e}^{-\alpha x} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda \sin \lambda x}{\alpha^2 + \lambda^2} \mathrm{d}\lambda
\end{aligned}$$

9.5 Aplikace Fourierových řad

Řešení lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty a s periodickou pravou stranou

$$x'' + px' + qx = f(t), \tag{9.4}$$

kde $p, q \in \mathbb{R}$, f je reálná T-periodická funkce po částech spojitá a po částech monotonní na intervalu $[0, T]$.

Hledáme partikulární T-periodické řešení rovnice (9.4), které je po částech spojité a po částech monotonní na intervalu $[0, T]$.

Označme $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Podle 9.3.7 pro všechna $t \in \mathbb{R}$, v nichž je funkce f spojitá, platí

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right),$$

kde

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t) \cos n\omega t \mathrm{d}t, \ n = 0, 1, 2, \ldots \qquad b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t) \sin n\omega t \mathrm{d}t, \ n = 1, 2, \ldots .$$

Řešení rovnice (9.4) hledáme ve tvaru

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t \right).$$

Jest

$$x'(t)=\sum_{n=1}^{\infty} n\omega\left(B_n\cos n\omega t-A_n\sin n\omega t\right)\,,\quad x''(t)=-\sum_{n=1}^{\infty} n^2\omega^2\left(A_n\cos n\omega t+B_n\sin n\omega t\right)\,.$$

Dosazením do rovnice (9.4) dostaneme

$$\frac{qA_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(((q-n^2\omega^2)A_n+pn\omega B_n)\cos n\omega t+((q-n^2\omega^2)B_n-pn\omega A_n)\sin n\omega t) \;=$$

$$=\;\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\right)\,.$$

Z nezávislosti (ortogonality) funkcí 1, $\cos\omega t$, $\sin\omega t$, $\cos 2\omega t$, $\sin 2\omega t$, …, $\cos n\omega t$, $\sin n\omega t$, … plyne

$$\begin{aligned}\frac{qA_0}{2} &= \frac{a_0}{2}\,,\\ (q-n^2\omega^2)A_n+pn\omega B_n &= a_n\,,\\ -pn\omega A_n+(q-n^2\omega^2)B_n &= b_n\,.\end{aligned}\tag{9.5}$$

Pokud $q\neq 0$, dostaneme z první rovnice $A_0=\dfrac{a_0}{q}$.

Determinant soustavy lineárních algebraických rovnic (9.5) je

$$\begin{vmatrix}(q-n^2\omega^2) & pn\omega\\ -pn\omega & (q-n^2\omega^2)\end{vmatrix}\;=\;(q-n^2\omega^2)^2+p^2n^2\omega^2\,.$$

Nechť nejprve komplexní číslo $\mathrm{i}n\omega$ není kořenem charakteristické rovnice diferenciální rovnice (9.4) pro každé $n\in\mathbb{N}$, tedy

$$\begin{aligned}(\mathrm{i}n\omega)^2+\mathrm{i}pn\omega+q &\neq 0\,,\\ (q-n^2\omega^2)+\mathrm{i}pn\omega &\neq 0\,,\\ (q-n^2\omega^2)^2+p^2n^2\omega^2 &\neq 0\,.\end{aligned}$$

V tomto případě má systém (9.5) jediné řešení. Je-li navíc $q\neq 0$, má diferenciální rovnice (9.4) T-periodické, po částech spojité a po částech monotonní řešení, které je Fourierovou řadou určeno jednoznačně až na izolovanou množinu bodů nespojitosti. Je-li $q=0$, $a_0=0$, má rovnice (9.4) nekonečně mnoho T-periodických řešení, které se od sebe liší o aditivní konstantu.

Jestliže pro nějaké $n_0\in\mathbb{N}$ je komplexní číslo $\mathrm{i}n\omega$ kořenem charakteristické rovnice diferenciální rovnice (9.4) a $a_{n_0}^2+b_{n_0}^2\neq 0$, nemá systém (9.5) řešení. To znamená, že rovnice (9.4) nemá po částech spojité a po částech monotonní T-periodické řešení. V tomto případě mluvíme o *resonanci.*

Jestliže pro nějaké $n_0\in\mathbb{N}$ je komplexní číslo $\mathrm{i}n\omega$ kořenem charakteristické rovnice diferenciální rovnice (9.4), $a_{n_0}^2+b_{n_0}^2=0$ a současně $q\neq 0$ nebo $a_0=0$, má rovnice (9.4) nekonečně mnoho T-periodických řešení.

Příklad:

$$x''-x\;=\;|\sin t|$$

Funkce $f(t)=|\sin t|$ je π-periodická, spojitá a sudá. Je tedy $\omega=2$ a

$$|\sin t|=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos 2nt\,,$$

přičemž

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\cos 2nt\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(1+2n)t+\sin(1-2n)t)\mathrm{d}t \;=\\ &= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(1+2n)t}{1+2n}+\frac{\cos(1-2n)t}{1-2n}\right]_0^{\pi} \;=\; -\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{1+2n}}{1+2n}+\frac{(-1)^{1-2n}}{1-2n}-\frac{1}{1+2n}-\frac{1}{1-2n}\right) \;=\\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1+2n}+\frac{1}{1-2n}\right) \;=\; \frac{4}{\pi(1-4n^2)}\,.\end{aligned}$$

Je tedy

$$|\sin t| \;=\; \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nt}{4n^2-1}\,.$$

Partikulární π-periodické řešení je

$$-\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos 2nt + B_n \sin 2nt)\,,$$

přičemž

$$(-1-4n^2)A_n = -\frac{4}{\pi(4n^2-1)}\,, \qquad (-1-4n^2)B_n = 0\,.$$

Odtud $A_n = \dfrac{4}{\pi(16n^4-1)}$, $B_n = 0$ a tedy π-periodické řešení je

$$-\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nt}{16n^4-1}\,.$$

Obecné řešení přidružené homogenní rovnice je $A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-t}$, takže obecné řešení dané rovnice je

$$x(t) \;=\; A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-t} - \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nt}{16n^4-1}\,.$$

9.6 Cvičení

Rozviňte ve Fourierovu řadu na intervalu $[-\pi,\pi]$ funkce
1) $f(x)=x^2$ 2) $f(x)=|x|$ 3) $f(x)=|\sin x|$
Rozviňte ve Fourierovu řadu funkce
4) $f(x)=\mathrm{e}^x,\ x\in[-h,h]$ 5) $f(x)=x,\ x\in[a,a+2l]$ 6) $f(x)=x\cos x,\ x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
Rozviňte ve Fourierovu řadu periodické funkce
7) $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$ 8) $f(x)=\arcsin(\sin x)$ 9) $f(x)=x-[x]$
Rozviňte ve Fourierovu řadu 2π-periodické funkce, jestliže
10) $f(x)=x$ pro $x\in[0,\pi)$ a f je sudá,
11) $f(x)=x$ pro $x\in[0,\pi)$ a f je lichá,
12) $f(x)=\frac{\pi}{4}$ pro $x\in[0,\pi)$ a f je lichá,
13) $f(x)=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi x}{4}$ pro $x\in[0,\pi)$ a f je sudá,
a určete součty těchto řad.

Najděte součty řad
14) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ 15) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$
16) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$ 17) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$
18) $1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\dots$ 19) $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\dots$

Výsledky: 1) $\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx$ **2)** $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x$ **3)** $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\cos 2kx$
4) $2\operatorname{sh}h\left[\frac{1}{2h}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{h^2+(k\pi)^2}(h\cos\frac{k\pi x}{h}-\pi k\sin\frac{k\pi x}{h}\right]$ **5)** $a+l+\frac{2l}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(\sin\frac{k\pi a}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}-\cos\frac{k\pi a}{l}\sin\frac{k\pi x}{l})$
6) $\frac{16}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}k}{(4k^2-1)^2}\sin 2kx$ **7)** $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos(2k+1)x$ **8)** $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x$ **9)** $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi kx}{k}$
10) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x$ **11)** $2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sin kx$ **12)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$ **13)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$ **14)** $\frac{\pi^2}{12}$ **15)** $\frac{\pi^2}{6}$
16) $\frac{\pi^2}{8}$ **17)** $\frac{\pi}{4}$ **18)** $\frac{\pi}{3}$ **19)** $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

Kapitola 10

Okrajové úlohy pro obyčejné lineární diferenciální rovnice druhého řádu

10.1 Formulace úloh

Označení: $C^k(0,\ell)$ — množina funkcí k-krát diferencovatelných na $(0,\ell)$, $\ell \in \mathbb{R}^*$.

10.1.1 Diferenciální operátor

Buďte $a, b, c \in C^0(0,\ell)$. *Lineární diferenciální operátor druhého řádu* $L = L(a,b,c) : C^2(0,\ell) \to C^0(0,\ell)$ definujeme předpisem

$$Ly(x) \ = \ a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x)\,, \quad x \in (0,\ell)\,.$$

Rovnice

$$Ly \ = \ g \in C^0(0,\ell)$$

je lineární diferenciální rovnice druhého řádu; v případě $g \equiv 0$ homogenní, v opačném nehomogenní.

Buďte $p \in C^1(0,\ell)$, $q \in C^0(0,\ell)$. Pak operátor $L(p,p',-q)$ daný vztahem

$$L(p,p',-q)y(x) \ = \ p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) - q(x)y(x) \ = \ (p(x)y'(x))' - q(x)y(x)$$

nazveme *samoadjungovaný*. Každý lineární diferenciální operátor druhého řádu $L(a,b,c)$, pro jehož koeficienty a, b platí

$$b(x) \ = \ a'(x)\,, \quad x \in (0,\ell)$$

je samoadjungovaný. Rovnice

$$-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) \ = \ f(x)\,, \quad x \in (0,\ell)$$

se nazývá *samoadjungovaná* nebo *Sturmova - Liouvilleova* rovnice.

Každou lineární diferenciální rovnici lze vyjádřit v samoadjungovaném tvaru.

D.: Buď

$$h(x) \ = \ \int \frac{b(x) - a'(x)}{a(x)}\mathrm{d}x\,, \quad \rho(x) \ = \ \mathrm{e}^{h(x)}\,.$$

Pak

$$\begin{aligned}(\rho(x)a(x))' \ &= \ \left(\mathrm{e}^{h(x)}a(x)\right)' \ = \ \mathrm{e}^{h(x)}h'(x)a(x) + \mathrm{e}^{h(x)}a'(x) \ = \ \rho(x)\frac{b(x) - a'(x)}{a(x)}a(x) + \rho(x)a'(x) \ = \\ &= \ \rho(x)b(x)\,,\end{aligned}$$

tedy

$$\rho(x)a(x)y''(x) + \rho(x)b(x)y'(x) + \rho(x)c(x)y(x) \ = \ \rho(x)g(x)$$

je samoadjungovaná rovnice ($p = -\rho a$, $q = \rho c$, $f = \rho g$).$\square$

10.1.2 Okrajové podmínky

Budeme hledat řešení rovnice

$$Ly(x) \;=\; f(x)\,,$$

které splňuje některé z následujících podmínek.

Newtonovy podmínky:

$$\alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) \;=\; y_0\,, \qquad \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell) \;=\; y_1\,,$$

přičemž $\alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0 \neq \alpha_1^2 + \beta_1^2$.

Dirichletovy podmínky:

$$y(0) \;=\; y_0\,, \qquad y(\ell) \;=\; y_1\,.$$

(Jsou zvláštním případem Newtonových podmínek pro $\alpha_0 = \alpha_1 = 1,\ \beta_0 = \beta_1 = 0$.)

Neumannovy podmínky:

$$y'(0) \;=\; y_0\,, \qquad y'(\ell) \;=\; y_1\,.$$

(Jsou zvláštním případem Newtonových podmínek pro $\alpha_0 = \alpha_1 = 0,\ \beta_0 = \beta_1 = 1$.)

Podmínky periodičnosti:

$$y(x) = y(x+\ell) \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}\,.$$

Podmínky omezenosti:

$$y(x) \text{ je omezená pro } x \to 0+\,, \qquad \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell) \;=\; y_1\,,$$

nebo

$$\alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) \;=\; y_0\,, \qquad y(x) \text{ je omezená pro } x \to \ell-\ .$$

Jakoukoliv okrajovou podmínku nazveme *homogenní*, jestliže s libovolnými dvěma funkcemi $y_1,\ y_2$, které této podmínce vyhovují, vyhovuje téže podmínce i jejich libovolná lineární kombinace $k_1 y_1 + k_2 y_2$.

Newtonovy podmínky s $y_0 = y_1 = 0$, podmínky periodičnosti i podmínky omezenosti s $y_1 = 0$ nebo $y_0 = 0$ jsou homogenní.

Okrajová úloha, v níž rovnice i okrajové podmínky jsou homogenní se nazývá *homogenní okrajová úloha*, v opačném případě *nehomogenní okrajová úloha*.

10.1.3 Symetrický diferenciální operátor

Řekneme, že *operátor L je symetrický na množině $M \subseteq C^2(0,\ell)$*, jestliže pro všechny $u, v \in M$ platí

$$\int_0^\ell Lu(x)v(x)\mathrm{d}x \;=\; \int_0^\ell u(x)Lv(x)\mathrm{d}x\ .$$

Buď $L = L(-p, -p', q)$ samoadjungovaný operátor. Pak platí (s využitím 3.2.19.1.)

$$\int_0^\ell Lu(x)v(x)\mathrm{d}x - \int_0^\ell u(x)Lv(x)\mathrm{d}x \;=$$

$$= \int_0^\ell \left[(-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x))v(x) - u(x)(-(p(x)v'(x))' + q(x)v(x))\right]\mathrm{d}x \;=$$

$$= \int_0^\ell \left[(p(x)v'(x))'u(x) - (p(x)u'(x))'v(x)\right]\mathrm{d}x \;=$$

$$= \left[p(x)v'(x)u(x)\right]_0^\ell - \int_0^\ell p(x)v'(x)u'(x)\mathrm{d}x - \left[p(x)u'(x)v(x)\right]_0^\ell + \int_0^\ell p(x)u'(x)v'(x)\mathrm{d}x \;=$$

$$= p(\ell)v'(\ell)u(\ell) - p(0)v'(0)u(0) - p(\ell)u'(\ell)v(\ell) + p(0)u'(0)v(0) \;=$$
$$= p(\ell)(v'(\ell)u(\ell) - u'(\ell)v(\ell)) - p(0)(v'(0)u(0) - u'(0)v(0))\,.$$

- Samoadjungovaný operátor $L = L(-p, -p', q)$ je symetrický na množině funkcí, které splňují homogenní Newtonovy podmínky.

  D.: Je-li $\beta_0 \neq 0$, pak $u'(0) = -\dfrac{\alpha_0}{\beta_0}u(0), v'(0) = -\dfrac{\alpha_0}{\beta_0}v(0)$, takže $v'(0)u(0) - u'(0)v(0) = 0$.
  Je-li $\alpha_0 \neq 0$, pak $u(0) = -\dfrac{\beta_0}{\alpha_0}u'(0), v(0) = -\dfrac{\beta_0}{\alpha_0}v'(0)$, takže opět $v'(0)u(0) - u'(0)v(0) = 0$.
  Analogicky ověříme, že $v'(\ell)u(\ell) - u'(\ell)v(\ell) = 0$. □

- Pokud funkce p je ℓ-periodická, pak samoadjungovaný operátor $L = L(-p, -p', q)$ je symetrický na množině ℓ-periodických funkcí.

10.1.4 Homogenní okrajová úloha s parametrem

Nechť $\lambda \in \mathbb{R}$. Uvažujme homogenní okrajovou úlohu pro rovnici

$$Lv(x) \;=\; \lambda v(x)\,.$$

Tato úloha má vždy *triviální řešení* $v \equiv 0$. Pokud existuje netriviální řešení $v = v(x)$, nazveme ho *vlastní funkcí okrajové úlohy* a parametr λ nazveme *vlastním číslem operátoru* L.

Je-li λ vlastní číslo operátoru L a $v = v(x)$ je příslušná vlastní funkce uvažované okrajové úlohy, pak také funkce cv je pro libovolnou konstantu $c \in \mathbb{R}$ vlastní funkcí.

Jestliže vlastnímu číslu λ odpovídá k lineárně nezávislých vlastních funkcí, řekneme, že λ je k*-násobné vlastní číslo*.

Označme M_L množinu funkcí splňujících příslušné homogenní okrajové podmínky. Je-li operátor L symetrický na množině M_L a $0 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2$ jsou jeho dvě vlastní čísla, pak odpovídající vlastní funkce jsou ortogonální v prostoru $\mathcal{L}^2(0, \ell)$.

D.:

$$\begin{aligned}\int_0^\ell v_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x \;&=\; \frac{1}{\lambda_1}\int_0^\ell \lambda_1 v_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{\lambda_1}\int_0^\ell Lv_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{\lambda_1}\int_0^\ell v_1(x)Lv_2(x)\mathrm{d}x \;=\\ &=\; \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\int_0^\ell v_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Kdyby $\int_0^\ell v_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x \neq 0$ pak by $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1$, což by byl spor. □

10.1.5 Sturmova-Liouvilleova úloha

$$\begin{aligned}-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) \;&=\; \lambda y(x)\,, \qquad x \in (0, \ell)\,,\\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) \;&=\; 0 \;=\; \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell)\,.\end{aligned}$$

- Každému vlastnímu číslu Sturmovy-Liouvilleovy úlohy přísluší právě jedna normovaná vlastní funkce.

- Sturmova-Liouvilleova úloha má nekonečně mnoho vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, pro která platí

$$\min\{q(x) : x \in [0, l]\} \;\leq\; \lambda_1 \;<\; \lambda_2 \;<\; \cdots\,; \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n \;=\; \infty\,.$$

- Vlastní funkce $v_n = v_n(x)$ odpovídající vlastnímu číslu λ_n má v intervalu $(0, \ell)$ právě n nulových bodů. Mezi každými dvěma nulovými body vlastní funkce v_n leží právě jeden nulový bod vlastní funkce v_{n+1}.

- Posloupnost $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ normovaných vlastních funkcí Sturmovy-Liouvilleovy úlohy tvoří úplnou ortonormální posloupnost na $[0, \ell]$. Tj. je-li funkce $f \in \mathcal{L}^2(0, \ell)$, pak Fourierova řada funkce f vzhledem k ortognormální posloupnosti $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k funkci f podle středu (konvergence v prostoru $\mathcal{L}^2(0, \ell)$). Je-li funkce f navíc spojitá a splňuje homogenní okrajové podmínky, je tato konvergence stejnoměrná.

  D.: J. Kalas, M. Ráb: Obyčejné diferenciální rovnice, MU Brno 1995, str. 158–163. Důkaz je tam proveden pro případ $p \equiv 1$. □

10.2 Řešení nehomogenní okrajové úlohy

10.2.1 Nehomogenní rovnice s homogenními Newtonovými podmínkami — Fourierova metoda

$$\begin{aligned} Ly(x) &\equiv -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = f(x)\,, \quad x \in (0,\ell)\,, \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) &= 0 = \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell)\,. \end{aligned}$$

- Najdeme posloupnost vlastních čísel $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ a ortogonální posloupnost příslušných vlastních funkcí $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ Sturmovy-Liouvilleovy úlohy, tj. rostoucí posloupnost čísel $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ a posloupnost funkcí $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, které splňují:
$$Lv_n(x) = \lambda_n v_n(x)\,,$$
$$\alpha_0 v_n(0) + \beta_0 v_n'(0) = 0 = \alpha_1 v_n(\ell) + \beta_1 v_n'(\ell)\,.$$

- Funkci f vyjádříme ve tvaru
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n v_n(x)\,, \quad \text{kde} \quad d_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^l f(\xi) v_n(\xi) \mathrm{d}\xi\,.$$

- Řešení úlohy hledáme ve tvaru
$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x)\,.$$
Musí tedy platit
$$Ly(x) = L\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n L v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n v_n(x)\,,$$
takže
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n v_n(x)\,,$$
z čehož plyne
$$c_n = \frac{d_n}{\lambda_n}\,, \quad n = 1, 2, \dots\,,$$
pokud všechna vlastní čísla jsou nenulová.
Hledané řešení tedy je
$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x)}{\lambda_n \|v_n\|^2} \int_0^{\ell} f(\xi) v_n(\xi) \mathrm{d}\xi = \int_0^{\ell} \left(f(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(\xi) v_n(x)}{\lambda_n \|v_n\|^2} \right) \mathrm{d}\xi\,.$$
Označíme-li
$$G(x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(\xi) v_n(x)}{\lambda_n \|v_n\|^2}\,,$$
lze řešení zapsat
$$y(x) = \int_0^{\ell} f(\xi) G(x,\xi) \mathrm{d}\xi\,.$$

10.2.2 Nehomogenní rovnice s homogenními Newtonovými podmínkami — metoda variace konstant

$$\begin{aligned} Ly(x) &\equiv -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = f(x)\,, \quad x \in (0,\ell)\,, \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) &= 0 = \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell)\,. \end{aligned}$$

- Najdeme řešení $u,\ v$ dvou pomocných homogenních úloh

$$\begin{aligned} Lu &= -(pu')' + qu = 0\,, \qquad & \alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) &= 0\,, \\ Lv &= -(pv')' + qv = 0\,, \qquad & \alpha_1 v(\ell) + \beta_1 v'(\ell) &= 0\,. \end{aligned}$$

  Funkce $u,\ v$ nejsou určeny jednoznačně. Vezmeme ty, které jsou lineárně nezávislé.

- Pro Wronskián $W(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x)$ funkcí $u,\ v$ platí $p(x)W(x) \equiv K$, kde K je nenulová konstanta, neboť

$$\begin{aligned} (pW)' &= (p(uv' - u'v))' = p'uv' + pu'v' + puv'' - p'u'v - pu''v - pu'v' = \\ &= (pv'' + p'v')u - (pu'' + p'u')v = (pv')'\,u - (pu')'\,v = qvu - quv = 0\,, \end{aligned}$$

  kdyby $K = 0$, pak by $W \equiv 0$, což by byl spor s lineární nezávislostí.

- Řešení úlohy hledáme ve tvaru

$$y(x) = c_1(x)u(x) + c_2(x)v(x)\,,$$

  kde funkce c_1, c_2 splňují

$$\begin{aligned} c_1'(x)u(x) + c_2'(x)v(x) &= 0\,, \\ c_1'(x)u'(x) + c_2'(x)v'(x) &= -\frac{f(x)}{p(x)} \end{aligned} \tag{10.1}$$

  (sr. 6.6.8). Platí tedy

$$c_1'(x) = \frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} 0 & v(x) \\ -\frac{f(x)}{p(x)} & v'(x) \end{vmatrix} = \frac{f(x)v(x)}{K}\,, \quad c_2'(x) = \frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} u(x) & 0 \\ u'(x) & -\frac{f(x)}{p(x)} \end{vmatrix} = -\frac{f(x)u(x)}{K}\,. \tag{10.2}$$

- Funkce $y(x)$ má splňovat okrajové podmínky, tj.

$$\begin{aligned} \alpha_0\,[c_1(0)u(0) + c_2(0)v(0)] + \beta_0\,[c_1'(0)u(0) + c_1(0)u'(0) + c_2'(0)v(0) + c_2(0)v'(0)] &= 0\,, \\ \alpha_1\,[c_1(\ell)u(\ell) + c_2(\ell)v(\ell)] + \beta_1\,[c_1'(\ell)u(\ell) + c_1(\ell)u'(\ell) + c_2'(\ell)v(\ell) + c_2(\ell)v'(\ell)] &= 0\,, \end{aligned}$$

  po úpravě s využitím (10.1)

$$\begin{aligned} c_1(0)(\alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0)) + c_2(0)(\alpha_0 v(0) + \beta_0 v'(0)) &= 0\,, \\ c_1(\ell)(\alpha_1 u(\ell) + \beta_1 u'(\ell)) + c_2(\ell)(\alpha_1 v(\ell) + \beta_1 v'(\ell)) &= 0\,; \end{aligned}$$

  každá z funkcí splňuje jednu okrajovou podmínku, tedy

$$\begin{aligned} c_2(0)(\alpha_0 v(0) + \beta_0 v'(0)) &= 0\,, \\ c_1(\ell)(\alpha_1 u(\ell) + \beta_1 u'(\ell)) &= 0\,, \end{aligned}$$

  takže

$$c_1(\ell) = 0\,, \quad c_2(0) = 0\,. \tag{10.3}$$

- Funkce $c_1,\ c_2$ jsou řešením rovnic (10.2) s počátečními podmínkami (10.3) a jsou tedy dány výrazy

$$c_1(x) = \frac{1}{K}\int_\ell^x f(\xi)v(\xi)\mathrm{d}\xi\,, \qquad c_2(x) = -\frac{1}{K}\int_0^x f(\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

- Řešení úlohy je

$$y(x) \;=\; -\frac{u(x)}{K}\int\limits_x^\ell f(\xi)v(\xi)\mathrm{d}\xi - \frac{v(x)}{K}\int\limits_0^x f(\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

Označíme-li

$$G(x,\xi) \;=\; \begin{cases} -\dfrac{u(x)v(\xi)}{K}, & 0\le x<\xi\le\ell \\ -\dfrac{v(x)u(\xi)}{K}, & 0\le\xi<x\le\ell \end{cases},$$

lze řešení zapsat

$$y(x) \;=\; \int\limits_0^\ell f(\xi)G(x,\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

10.2.3 Greenova funkce

Funkci $G:[0,\ell]\times[0,\ell]\to\mathbb{R}$ nazveme *Greenovou funkcí homogenní okrajové úlohy*

$$\begin{aligned} Ly(x) \;&\equiv\; -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) \;=\; 0\,, \quad x\in(0,\ell)\,, \\ \alpha_0 y(0)+\beta_0 y'(0) \;&=\; 0 \;=\; \alpha_1 y(\ell)+\beta_1 y'(\ell)\,. \end{aligned}$$

kde $p(x)>0$ pro $x\in[0,l]$, jestliže

(i) G je spojitá pro $x\in[0,\ell]\times[0,\ell]$,

(ii) G je symetrická, tj. $G(x,\xi)=G(\xi,x)$,

(iii) pro každé $\xi\in[0,\ell]$ má funkce $G(\cdot,\xi)$ spojité derivace druhého řádu,

(iv) pro každé $\xi\in[0,\ell]$ je funkce $G(\cdot,\xi)$ řešením uvažované okrajové úlohy,

(v) $\lim\limits_{x\to\xi+} G_x(x,\xi) - \lim\limits_{x\to\xi-} G_x(x,\xi) = -\dfrac{1}{p(\xi)}$ pro $\xi\in(0,\ell)$.

Platí: Má-li uvažovaná homogenní okrajová úloha jen triviální řešení $y\equiv 0$ a jsou-li $p\in C^1(0,\ell),\; q\in C^2(0,\ell)$, existuje právě jedna její Greenova funkce. Nehomogenní okrajová úloha

$$\begin{aligned} Ly(x) \;&\equiv\; -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) \;=\; f(x)\,, \quad x\in(0,\ell)\,, \\ \alpha_0 y(0)+\beta_0 y'(0) \;&=\; 0 \;=\; \alpha_1 y(\ell)+\beta_1 y'(\ell)\,. \end{aligned}$$

má pak jediné řešení tvaru

$$y(x) \;=\; \int\limits_0^\ell f(\xi)G(x,\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

D.: I. Kiguradze: Okrajové úlohy pro systémy lineárních obyčejných diferenciálních rovnic, MU Brno 1997, str. 82. Důkaz je proveden pro mnohem obecnější situaci. □

10.2.4 Úloha s nehomogenními okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} Ly(x) \;&\equiv\; -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) \;=\; f(x)\,, \quad x\in(0,\ell)\,, \\ \alpha_0 y(0)+\beta_0 y'(0) \;&=\; y_0\,, \qquad \alpha_1 y(\ell)+\beta_1 y'(\ell) \;=\; y_1\,. \end{aligned}$$

Jestliže funkce $w=w(x)$ splňuje okrajové podmínky

$$\alpha_0 w(0)+\beta_0 w'(0) \;=\; y_0\,, \qquad \alpha_1 w(\ell)+\beta_1 w'(\ell) \;=\; y_1$$

a funkce $u=u(x)$ je řešením úlohy

$$Lu(x) \;=\; f(x) - Lw(x)$$

s homogenními okrajovými podmínkami

$$\alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) \;=\; 0 \;=\; \alpha_1 u(\ell) + \beta_1 u'(\ell)\,,$$

pak funkce

$$y(x) \;=\; u(x) + w(x)$$

je řešením uvažované úlohy.

Funkci w je vhodné volit v co nejjednodušším tvaru, například polynom.

10.3 Cvičení

Řešte okrajové úlohy

1) $-y'' - \dfrac{2}{x}y' = 0,\ x \in (0,1);\ y(1) = y_0$, y je omezená pro $x \to 0_+$.

2) $-\left(x^2y'\right)' = 0,\ x \in (1,\infty);\ y(1) = y_0,\ \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0.$

3) $-\left(xy'\right)' = 0,\ x \in (1,\infty);\ y(1) = y_0$, y je omezená pro $x \to \infty$.

4) $-xy'' - y' = 0,\ x \in (1,2);\ y(1) = y_1,\ y(2) = 0.$

5) $-x^2y'' - xy' + k^2y = 0,\ x \in (0,\ell);\ y(\ell) = 1$, y je omezená pro $x \to 0_+$; k je parametr.

6) $-xy'' - y' = -x,\ x \in (0,\ell);\ y(0) = y(\ell) = 0.$

7) $-y'' = \sin x,\ x \in (0,2\pi);\ y'(0) = y'(2\pi) = 0.$

Najděte vlastní funkce okrajových úloh a vlastní čísla příslušných operátorů

8) $-v'' = \lambda v,\ x \in (0,\ell);\ v'(0) = v'(\ell) = 0.$

9) $-v'' = \lambda v,\ x \in \mathbb{R};\ v(x) = v(x+2\pi).$

10) $-v'' + qv = \lambda v,\ x \in (0,\ell);\ v'(0) = 0,\ v(\ell) = 0$; q je parametr.

Řešte okrajové úlohy

11) $-y'' - \omega^2 y = f(x),\ x \in (0,\ell);\ y(0) = y(\ell) = 0$; ω je parametr.

12) $-y'' - 3y = \dfrac{\pi - x}{2},\ x \in (0,\pi);\ y(0) = y(\pi) = 0.$

13) Najděte Greenovu funkci úlohy $-y'' + y = 0,\ y(0) = y(1) = 0.$

Výsledky: 1) $y(x) = y_0$ **2)** $y(x) = \frac{y_0}{x}$ **3)** $y(x) = y_0$ **4)** $y(x) = y_1 \frac{\ln 2 - \ln x}{\ln 2}$ **5)** $y(x) = \left(\frac{x}{\ell}\right)^{|k|}$ **6)** nemá řešení **7)** $y(x) = \sin x - x + C$, C je libovolná konstanta **8)** $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$, $v_n(x) = \cos\frac{n\pi}{\ell},\ n = 0,1,2,\ldots$ **9)** $\lambda_n = n^2$, $v_n(x) = C_n\cos nx + D_n \sin nx$, C_n, D_n jsou libovolné konstanty, $C_0 \neq 0$, $n = 0,1,2,\ldots$ **10)** $\lambda_n = q + \left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\right)^2$, $v_n(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x$. **11)** $y(x) = B\sin\frac{k\pi}{\ell}x + \frac{1}{\omega}\int\limits_0^x f(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}(\xi - x)\mathrm{d}\xi$ pro $\frac{\omega\ell}{\pi} = k \in \mathbb{N}$ a $\int\limits_0^\ell f(\xi)\sin\frac{k\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi = 0$, B je libovolná konstanta;

$y(x) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^x f(\xi)\sin\omega(\xi - x)\mathrm{d}\xi - \frac{\sin\omega x}{\omega\sin\omega\ell}\int\limits_0^\ell f(\xi)\sin\omega(\xi - x)\mathrm{d}\xi = 2\ell\int\limits_0^x f(\xi)\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi}{\ell}\xi\sin\frac{k\pi}{\ell}x}{k^2\pi^2 - \omega^2\ell^2}\mathrm{d}\xi$ pro $\frac{\omega\ell}{\pi} \notin \mathbb{N}$

12) $y(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k(k^2-3)} = \frac{\pi}{6}\left(\cos\sqrt{x} - \operatorname{cotg}\sqrt{3}\pi\ \sin\sqrt{3}x\right) + \frac{1}{6}(x - \pi)$ **13)** $G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}(1-x)\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{sh}1}, & 0 \le \xi \le x \le 1 \\ \frac{\operatorname{sh}x\operatorname{sh}(1-\xi)}{\operatorname{sh}1}, & 0 \le x < \xi \le 1 \end{cases}$

Kapitola 11

Speciální funkce a distribuce

11.1 Funkce Γ

11.1.1 Poznámky

1. Nevlastní integrál $\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ absolutně konverguje pro každé $x > 0$.

   D.: Je-li $x > 1$, integrál $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ není nevlastní.
   Je-li $x \le 1$, vezmeme $\delta \in (0, x)$. Pak $\lim\limits_{t\to 0+} t^{1-\delta}\left|\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\right| = \lim\limits_{t\to 0+} \mathrm{e}^{-t}t^{x-\delta} = 0$ a podle 3.5.15 a 3.5.12 nevlastní integrál $\int\limits_0^1 \left|\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\right| \mathrm{d}t$ konverguje.
   Dále je
   $$\lim_{t\to\infty} ((x+1)\ln t - t) = \lim_{\tau\to 0+}\left((x+1)\ln\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau}\right) = -\lim_{\tau\to 0+}\frac{\tau(x+1)\ln\tau + 1}{\tau} = -\infty,$$
   neboť podle 2.3.6 platí
   $$\lim_{\tau\to 0+}\tau\ln\tau = \lim_{\tau\to 0+}\frac{\ln\tau}{\frac{1}{\tau}} = \lim_{\tau\to 0+}\frac{\frac{1}{\tau}}{-\frac{1}{\tau^2}} = -\lim_{\tau\to 0+}\tau = 0,$$
   takže podle 1.6.8 platí $\lim\limits_{t\to\infty} t^2\left|\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\right| = \lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{x+1} = \lim\limits_{t\to\infty} e^{(x+1)\ln t - t} = 0 < \infty$,
   což podle 3.5.6.2 znamená, že $\int\limits_1^\infty \left|\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\right| \mathrm{d}t$ konverguje. □

2. Pro $x > 0$ položme
   $$\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t\,. \tag{11.1}$$
   Pro každé $x > 0$ a každé $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ pak platí
   $$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)\cdots(x+n)}\,. \tag{11.2}$$

   D.: Úplnou indukcí:
   Podle 3.2.19.1 je $\Gamma(x+1) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x}\mathrm{d}t = -\left[\mathrm{e}^{-t}t^{x}\right]_{t=0}^\infty + x\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t = x\Gamma(x)$, takže (11.2) platí pro $n = 0$.
   Podobně $\Gamma(x+n+2) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x+n+1}\mathrm{d}t = -\left[\mathrm{e}^{-t}t^{x+n+1}\right]_{t=0}^\infty + (x+n+1)\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x+n}\mathrm{d}t =$
   $= (x+n+1)\Gamma(x+n+1)$, což je indukční krok. □

Podle (11.1) je

$$\Gamma(1) \;=\; \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \;=\; -\left[\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty \;=\; 1\,.$$

Z (11.2) nyní pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ plyne

$$1 = \Gamma(1) = \frac{\Gamma(n+2)}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)} = \frac{\Gamma(n+2)}{(n+1)!}, \quad \text{tj. } \Gamma(n+2) = (n+1),$$

tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\Gamma(n) = (n-1)!\,$.

11.1.2 Definice

Funkce Γ je pro každé $x > 0$ definována vztahem (11.1), pro $x < 0$, $x \notin \mathbb{Z}$ je funkce Γ definována vztahem (11.2), kde za n vezmeme $[-x] = -[x] - 1$, t.j.

$$\Gamma(x) \;=\; \frac{\Gamma(x - [x])}{x(x+1)\cdots(x-[x]-1)}\,.$$

$\operatorname{Dom}\Gamma = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

11.1.3 Věta

1. Pro každé $x \in \operatorname{Dom}\Gamma$ platí

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{neboli} \quad \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$$

a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\Gamma(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-n)\Gamma(x-n)\,.$$

2. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ platí

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}\,.$$

D.:

1. Pro $x > 0$ byl první vztah dokázán v 11.1.1.2, pro $x \in (-1, 0)$ je podle definice $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$, což je první vztah a pro $x < -1$ je

$$x\Gamma(x) = x\frac{\Gamma(x-[x])}{x(x+1)\cdots(x-[x]-1)} = \frac{\Gamma(x+1-[x+1])}{(x+1)(x+2)\cdots(x+1-[x+1]-1)} = \Gamma(x+1)\,,$$

což je opět první vztah. Ten druhý z něho plyne indukcí.

2. Nechť $x \in (0, 1)$. Pak

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) \;=\; \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-x}\mathrm{d}s \;=\; \iint\limits_{[0,\infty)\times[0,\infty)} \mathrm{e}^{-(t+s)}s^{-x}t^{x-1}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\,.$$

Položíme $u = s+t$, $v = \dfrac{t}{s}$, neboli $s = \dfrac{u}{v+1}$, $t = \dfrac{uv}{v+1}$. Podle věty o transformaci dvojného integrálu dostaneme

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(1-x) \;&=\; \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-u} \left(\frac{v+1}{u}\right)^x \left(\frac{uv}{v+1}\right)^x \frac{v+1}{uv}\frac{u}{(v+1)^2}\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}s \;= \\ &=\; \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \int\limits_0^\infty \frac{v^{x-1}}{v+1}\mathrm{d}v \;=\; \int\limits_0^\infty \frac{v^{x-1}}{v+1}\mathrm{d}v\,.\end{aligned}$$

Podle známého vzorce z teorie integrálu [Jarník, I2, str. 277–281] je

$$\int_0^\infty \frac{v^{x-1}}{v+1} \mathrm{d}v = \frac{\pi}{\sin \pi x} .$$

Nechť $x > 1$. Pak podle 1. je $\Gamma(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-[x])\Gamma(x-[x])$. $1 - x < 0$, takže podle definice

$$\Gamma(1-x) = \frac{\Gamma(1-x+[x])}{(1-x)(2-x)\cdots([x]-x)} = \frac{(-1)^{[x]}\Gamma(1-x+[x])}{(x-1)(x-2)\cdots(x-[x])} ,$$

$x - [x] \in (0,1)$, takže podle již dokázaného je

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(1-x) &= (-1)^{[x]}\Gamma(x-[x])\Gamma(1-x+[x]) = (-1)^{[x]}\frac{\pi}{\sin \pi(x-[x])} = \\ &= (-1)^{[x]}\frac{\pi}{\sin \pi x \cos \pi[x] - \cos \pi x \sin \pi[x]} = (-1)^{[x]}\frac{\pi}{(-1)^{[x]}\sin \pi x} = \frac{\pi}{\sin \pi x} . \end{aligned}$$

Nechť $x < 0$. Pak podle definice je $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x-[x])}{x(x+1)\cdots(x-[x]-1)}$ a podle 1. je
$\Gamma(1-x) = -x(-x-1)\cdots(-x+1+[x])\Gamma(1-x+[x]) = (-1)^{[x]}x(x+1)\cdots(x-[x]-1)\Gamma(1-x+[x])$.
Opět $x - [x] \in (0,1)$ a podle již dokázaného

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = (-1)^{[x]}\Gamma(x-[x])\Gamma(1-x+[x]) = (-1)^{[x]}\frac{\pi}{\sin \pi(x-[x])} = \frac{\pi}{\sin \pi x} .$$

□

Známe-li $\Gamma(x)$ pro $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, lze podle 11.1.3 vypočítat $\Gamma(x)$ pro jakékoliv $x \in \mathrm{Dom}\,\Gamma$. Již víme, že $\Gamma(1) = 1$. Položíme-li v 11.1.3.2 $x = \frac{1}{2}$, dostaneme

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi \quad \text{neboli} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} .$$

Odtud také plyne

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{\frac{1}{2}-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} . \tag{11.3}$$

Podle vět z teorie integrálů závislých na parametrech platí

$$\lim_{x\to 0+} \Gamma(x) = \lim_{x\to 0+} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t = \infty, \text{ neboť } \lim_{t\to 0+} \frac{\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0+} \mathrm{e}^{-t} = 1 > 0,$$

a

$$\lim_{x\to 0-} \Gamma(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \Gamma(1) \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty .$$

11.1.4 Logaritmická derivace funkce Γ

$$\psi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

Omezíme se na $\mathrm{Dom}\,\psi = (0, \infty)$.

Podle 11.1.3 platí

$$\begin{aligned} \psi(x+1) &= \frac{1}{x} + \psi(x) \\ \psi(x) &= \psi(x-n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k} \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N},\ n < x \\ \psi(x+n) &= \psi(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x+k} \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N} \qquad (11.4) \\ \psi(1-x) - \psi(x) &= \pi \operatorname{cotg} \pi x \end{aligned}$$

Tyto vztahy lze využít pro výpočet hodnot funkce ψ, známe-li $\psi(x)$ pro $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Podle vět z teorie integrálů závislých na parametrech platí pro $x > 0$

$$\Gamma'(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t \;=\; \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\ln t\mathrm{d}t\,. \tag{11.5}$$

Položíme $\gamma \;=\; -\Gamma'(1) \;=\; -\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\ln t\mathrm{d}t \;=\; 0.5772157\cdots$ (Eulerova konstanta). Dosadíme-li v (11.4) 1 za x, dostaneme

$$\psi(n+1) \;=\; -\gamma + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\,.$$

Platí (tzv. Frullaniho integrál)

$$\ln t \;=\; \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\xi} - \mathrm{e}^{-\xi t}}{\xi}\mathrm{d}\xi\,. \tag{11.6}$$

Dosadíme do (11.5) a dostaneme

$$\begin{aligned}\Gamma'(x) \;&=\; \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\left(\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\xi} - \mathrm{e}^{-\xi t}}{\xi}\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}t \;=\; \int\limits_0^\infty \frac{1}{\xi}\left(\mathrm{e}^{-\xi}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t - \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t(\xi+1)}t^{x-1}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\xi \;=\\ &=\; \int\limits_0^\infty \frac{1}{\xi}\left(\mathrm{e}^{-\xi}\Gamma(x) - \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t(\xi+1)}t^{x-1}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\xi\,.\end{aligned}$$

Ve vnitřním integrálu zavedeme substituci $u = t(\xi+1)$ a dostaneme

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t(\xi+1)}t^{x-1}\mathrm{d}t \;=\; \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-u}\left(\frac{u}{\xi+1}\right)^{x-1}\frac{\mathrm{d}u}{\xi+1} \;=\; \frac{1}{(\xi+1)^x}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-u}u^{x-1}\mathrm{d}u \;=\; \frac{1}{(\xi+1)^x}\Gamma(x)\,,$$

takže

$$\Gamma'(x) \;=\; \Gamma(x)\int\limits_0^\infty \frac{1}{\xi}\left(\mathrm{e}^{-\xi} - (\xi+1)^{-x}\right)\mathrm{d}\xi \;=\; \Gamma(x)\left(\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\xi}}{\xi}\mathrm{d}\xi - \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi(\xi+1)^x}\right)\,,$$

což znamená, že

$$\psi(x) \;=\; \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\xi}}{\xi}\mathrm{d}\xi - \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi(\xi+1)^x}\,.$$

Ve druhém integrálu zavedeme substituci $\xi + 1 = \mathrm{e}^t$:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi(\xi+1)^x} \;=\; \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t - 1)\mathrm{e}^{tx}} \;=\; \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t$$

a v prvním přeznačíme integrační proměnnou. Dostaneme

$$\psi(x) \;=\; \int\limits_0^\infty \left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} - \frac{e^{-tx}}{1-e^{-t}}\right)\mathrm{d}t\,. \tag{11.7}$$

Zejména pro $x = 1$ dostaneme

$$-\gamma \;=\; \int\limits_0^\infty \left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right)\mathrm{d}t\,.$$

Odečteme-li poslední dvě rovnice, dostaneme

$$\psi(x) \;=\; -\gamma + \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{1 - e^{-t}} dt\,.$$

Zavedeme substituci $\eta = e^{-t}$:

$$\psi(x) \;=\; -\gamma + \int_0^1 \frac{1 - \eta^{x-1}}{1 - \eta} d\eta\,.$$

Pro $\eta \in [-1, 1)$ je $\frac{1}{1-\eta} = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n$, takže

$$\int_0^1 \frac{1 - \eta^{x-1}}{1 - \eta} d\eta \;=\; \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (\eta^n - \eta^{n+x-1}) d\eta \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x}\right)\,.$$

(Výpočet je podle 8.8.8 korektní, neboť poslední řada konverguje.) Je tedy

$$\psi(x) \;=\; -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x}\right)\,. \tag{11.8}$$

11.1.5 Rozvoj funkce Γ ve Weierstrassův nekonečný součin

Podle (11.8) je

$$\frac{d}{dt} \ln \Gamma(t) \;=\; -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+t}\right)\,.$$

Integrujeme-li tuto rovnost podle t v mezích od 1 do $x+1$, dostaneme

$$\ln \Gamma(x+1) \;=\; -\gamma x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)\,.$$

Odtud dostaneme

$$\Gamma(x+1) \;=\; e^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{x}{n}} \frac{1}{1 + \frac{x}{n}}\,, \qquad \frac{1}{\Gamma(x+1)} \;=\; e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{x}{n}} \left(1 + \frac{x}{n}\right)\,.$$

11.1.6 Asymptotické vyjádření funkce Γ

Z (11.7) s využitím (11.6) dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma'(\xi+1)}{\Gamma(\xi+1)} \;&=\; \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t\xi} e^{-t}}{1 - e^{-t}}\right) dt \;=\; \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t\xi}}{e^t - 1}\right) dt \;= \\
&=\; \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-t\xi}}{t} dt + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t\xi} dt - \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right) e^{-t\xi} dt \;= \\
&=\; \ln \xi + \frac{1}{2\xi} - \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right) e^{-t\xi} dt\,.
\end{aligned}$$

Zintegrujeme tuto rovnost podle ξ v mezích od 1 do x:

$$\ln \Gamma(x+1) - \ln \Gamma(2) \;=\; x \ln x - x + 1 + \frac{1}{2} \ln x - \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right) \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} dt\,.$$

Při označení $f(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1}\right)\frac{1}{t}$ a s využitím $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\ \Gamma(2) = 1$ máme

$$\ln\Gamma(x) \ = \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln x - x + 1 - \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t + \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t\,. \tag{11.9}$$

Označme

$$I \ = \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, \quad J \ = \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{d}t, \quad \omega(x) \ = \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t\,.$$

Platí

$$\begin{aligned} J - I \ &= \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{d}t - \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \ = \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{d}t \ = \\ &= \int\limits_0^\infty \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1}\right)\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{t} + \frac{1}{\mathrm{e}^{t/2} - 1}\right)\frac{2}{t}\right)\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{d}t \ = \\ &= \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{t} + \frac{1 - (e^{t/2} + 1)}{\mathrm{e}^t - 1}\right)\frac{e^{-t/2}}{t}\mathrm{d}t \ = \int\limits_0^\infty \left(\frac{e^{-t/2}}{t} - \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}\,, \end{aligned}$$

takže (při výpočtu využijeme (11.6))

$$\begin{aligned} J \ &= \int\limits_0^\infty \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1}\right)\mathrm{e}^{-t} + \frac{e^{-t/2}}{t} - \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} \ = \\ &= \int\limits_0^\infty \left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t/2}}{t} + \frac{\mathrm{e}^{-t} - 1}{\mathrm{e}^t - 1}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} \ = \int\limits_0^\infty \left(\frac{\mathrm{e}^{-t/2} - \mathrm{e}^{-t}}{t} + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-t}(1 - \mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t - 1}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} \ = \\ &= \int\limits_0^\infty \left(\frac{\mathrm{e}^{-t/2} - \mathrm{e}^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} \ = \\ &= \int\limits_0^\infty \left(\left(\frac{\mathrm{e}^{-t/2} - \mathrm{e}^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-t/2}}{2}\right)\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t/2}}{t}\right)\mathrm{d}t \ = \\ &= \int\limits_0^\infty \frac{2\left(\mathrm{e}^{-t/2} - \mathrm{e}^{-t}\right) - t\left(2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t/2}\right)}{2t^2}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t/2}}{t}\mathrm{d}t \ = \\ &= \int\limits_0^\infty \frac{\left(-\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t/2}\right)t - \left(e^{-t} - \mathrm{e}^{-t/2}\right)}{t^2}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} \ = \\ &= \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t/2}}{t}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\ln 2 \ = \left[\frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t/2}}{t}\right]_0^\infty - \frac{1}{2}\ln 2 \ = \\ &= -\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t/2}}{t} - \frac{1}{2}\ln 2 \ = \lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t/2} + \mathrm{e}^{-t}\right) - \frac{1}{2}\ln 2 \ = \ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\,. \end{aligned}$$

Položíme-li v (11.9) $x = \frac{1}{2}$, dostaneme

$$\ln\sqrt{\pi} \ = \ \frac{1}{2} - I + J\,,$$

což spolu s předchozím výsledkem dá

$$I \ = \ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\pi + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 \ = \ 1 - \frac{1}{2}\ln 2\pi\,.$$

Dosadíme do (11.9) a dostaneme

$$\ln \Gamma(x) \;=\; \left(x - \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \omega(x) \,.$$

Funkce f je na intervalu $(0, \infty)$ klesající, $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$ a

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0+} f(t) \;&=\; \lim_{t\to 0+} \frac{t\mathrm{e}^t - t - 2\mathrm{e}^t + 2 + 2t}{2t^2\left(\mathrm{e}^t - 1\right)} \;=\; \lim_{t\to 0+} \frac{\mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^t + 1}{4t\left(\mathrm{e}^t - 1\right) + 2t^2\mathrm{e}^t} \;=\\
&=\; \lim_{t\to 0+} \frac{-\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t}{(4+4t)\mathrm{e}^t + \left(4t + 2t^2\right)\mathrm{e}^t - 4} \;=\; \lim_{t\to 0+} \frac{\mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t}{\left(8 + 4t + 4 + 8t + 2t^2\right)\mathrm{e}^t} \;=\; \frac{1}{12}\,,
\end{aligned}$$

což znamená, že

$$|\omega(x)| \;=\; \left|\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t\right| \;\le\; \int_0^\infty |f(t)|\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t \;\le\; \frac{1}{12}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t \;=\; -\frac{1}{12x}\left[\mathrm{e}^{-tx}\right]_0^\infty \;=\; \frac{1}{12x}\,,$$

z čehož plyne, že $\lim\limits_{x\to\infty} \omega(x) = 0$, takže pro velká x lze psát

$$\ln \Gamma(x) \;\approx\; \left(x - \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \frac{1}{2} \ln 2\pi\,, \qquad \text{neboli} \qquad \Gamma(x) \;\approx\; \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}}\, \mathrm{e}^{-x}\,. \tag{11.10}$$

Odtud dostaneme

$$n! \;=\; \Gamma(n+1) \;\approx\; \sqrt{2\pi}\,(n+1)^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n-1}$$

a poněvadž

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n-1}}{n^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n}} \;=\; \frac{1}{\mathrm{e}} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \;=\; \frac{1}{\mathrm{e}}\,\mathrm{e}\,1 \;=\; 1\,,$$

lze psát

$$n! \;\approx\; \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

pro velká n (Stirlingova formule).

11.2 Besselovy funkce

11.2.1 Definice

Obyčejná lineární homogenní rovnice druhého řádu

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \nu^2) y(x) \;=\; 0\,, \tag{11.11}$$

kde $\nu \in \mathbb{R}$, $x \in (0, \infty)$ se nazývá *Besselova rovnice řádu* ν.

Rovnici (11.11) lze ekvivalentně zapsat

$$x\left(x y'(x)\right)' + (x^2 - \nu^2) y(x) \;=\; 0\,.$$

11.2.2 Řešení rovnice (11.11) Frobeniovou metodou

Řešení předpokládáme ve tvaru

$$y(x) \;=\; a_0 x^\sigma + a_1 x^{\sigma+1} + a_2 x^{\sigma+2} + \cdots \;=\; \sum_{k=0}^\infty a_k x^{\sigma+k}\,, \tag{11.12}$$

kde $\sigma \in \mathbb{R}$ je tzv. *charakteristický součinitel*, jehož hodnotu určíme později. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $a_0 \neq 0$ (a_0 je první nenulový koeficient). Pak je

$$\begin{array}{rcrcrcl} x^2y'' & = & a_0\sigma(\sigma-1)x^\sigma & + & a_1(\sigma+1)\sigma x^{\sigma+1} & + & \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k(\sigma+k)(\sigma+k-1)x^{\sigma+k}\,, \\ xy'(x) & = & a_0\sigma x^\sigma & + & a_1(\sigma+1)x^{\sigma+1} & + & \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k(\sigma+k)x^{\sigma+k}\,, \\ x^2y(x) & = & & & & & \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_{k-2}x^{\sigma+k}\,, \\ -\nu^2y(x) & = & -\nu^2a_0x^\sigma & - & \nu^2a_1x^{\sigma+1} & + & \sum\limits_{k=2}^{\infty}(-\nu^2a_k)x^{\sigma+k}\,. \end{array}$$

Tedy

$$a_0(\sigma^2-\nu^2)+a_1(\sigma^2+2\sigma+1-\nu^2)x^{\sigma+1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(a_k(\sigma^2+2\sigma k+k^2-\nu^2)+a_{k-2}\right)x^{\sigma+k} \;=\; 0\,,$$

takže musí platit

$$\begin{aligned} a_0(\sigma^2-\nu^2) &= 0 \\ a_1(\sigma^2+2\sigma+1-\nu^2) &= 0 \\ a_k(\sigma^2+2\sigma k+k^2-\nu^2)+a_{k-2} &= 0\,, \quad k=2,3,\ldots \end{aligned}$$

Z první z těchto rovnic dostaneme tzv. *charakteristickou rovnici*

$$\sigma^2-\nu^2 \;=\; 0\,, \quad \text{tj. } \sigma \;=\; \pm\nu\,. \tag{11.13}$$

Tento vztah dosadíme do zbývajících rovnic a dostaneme

$$a_1(2\sigma+1) \;=\; 0 \tag{11.14}$$

$$a_k(2\sigma+k)k+a_{k-2} \;=\; 0\,, \quad k=2,3,\ldots\,. \tag{11.15}$$

(i) $2\sigma+k\neq 0$ pro každé $k\in\mathbb{N}$.
Pak z (11.14) plyne $a_1=0$ a z (11.15) $a_k=-\dfrac{a_{k-2}}{k(2\sigma+k)}$, tedy $a_1=a_3=a_5=\cdots=0$.
Pro $k=2m$ ze (11.15) dostaneme

$$\begin{aligned} a_{2m} &= -\frac{a_{2(m-1)}}{4m(m+\sigma)} = -\frac{-\dfrac{a_{2(m-2)}}{4(m-1)(m-1+\sigma)}}{4m(m+\sigma)} = \frac{a_{2(m-2)}}{4^2m(m-1)(m+\sigma)(m-1+\sigma)} = \cdots = \\ &= \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}m!(m+\sigma)(m-1+\sigma)\cdots(1+\sigma)}\,. \end{aligned}$$

Zvolíme $a_0=\dfrac{1}{2^\sigma\Gamma(\sigma+1)}$ a s využitím 11.1.3.1 dostaneme

$$a_{2m}=\frac{(-1)^m}{2^{2m+\sigma}\Gamma(m+1)\Gamma(m+\sigma+1)}\,.$$

S využitím (11.13) dostaneme formální řešení rovnice (11.11) ve tvaru

$$y(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k\pm\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu}\,. \tag{11.16}$$

Abychom ověřili, že se jedná o řešení, je potřeba ukázat, že tato řada konverguje pro každé $x>0$. Pro poloměr konvergence r mocninné řady

$$S(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2^{2k}\Gamma(k+1)\Gamma(k\pm\nu+1)}x^{2k}$$

podle 8.8.5 s využitím (11.10) platí

$$\frac{1}{r} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\frac{1}{2^{2k}\Gamma(k+1)\Gamma(k\pm\nu+1)}} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\frac{1}{2\pi(k+1)^{k+1/2}(k\pm\nu+1)^{k\pm\nu+1/2}\mathrm{e}^{-2k\mp\nu-1}}} = 0\,,$$

takže tato řada konverguje absolutně a stejnoměrně pro každé $x\in\mathbb{R}$. Řada (11.16) tedy konverguje absolutně a stejnoměrně pro každé $x>0$. (Pro $x=0$ nemusí být $y(x)=x^{\pm\nu}S(x)$ vůbec definována.)

(ii) Existuje $k_1\in\mathbb{N}$, že $2\sigma+k_1=0$, tedy $\sigma=-\dfrac{k_1}{2}$.

(ii.1) k_1 je liché.
Z (11.15) dostaneme

$$\begin{aligned} a_k &= -\frac{a_{k-2}}{k(k-k_1)}\,, \quad k=k_1+2, k_1+4,\dots \\ a_{k-2} &= -a_k k(k-k_1)\,, \quad k=3,5,\dots,k_1. \end{aligned}$$

Koeficient a_{k_1} je další volný parametr ovlivňující řešení.
Položíme-li $a_{k_1}=0$, dostaneme jako v případě **(i)** $a_1=a_3=a_5=\dots=0$.
Na koeficientech se sudými indexy se nic nemění, řešení rovnice (11.11) je opět dáno řadou (11.16).

(ii.2) k_1 je sudé.
Z (11.15) pro $k=2(m+1)$ dostaneme $a_{2m}=-2(m+1)(2m+2-k_1)a_{2(m+1)}$, takže

$$\begin{aligned} a_0 &= -2(2-k_1)a_2 = -2(2-k_1)(-2(1+1)(2+2-k_1)a_4) = 2^2\cdot 2(2-k_1)(4-k_1)a_4 = \dots = \\ &= (-1)^{k_1/2}2^{k_1}\,(k_1/2)!\,(2-k_1)(4-k_1)\cdots(k_1-k_1)a_{k_1} = 0\,, \end{aligned}$$

což je spor s předpokladem. V tomto případě tedy nelze porovnáváním koeficientů najít řešení rovnice (11.11) tvaru (11.12).

11.2.3 Definice

Funkce

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

se nazývá *Besselova funkce prvního druhu řádu* ν. Je-li pro nějaké $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ číslo $k+\nu+1$ celé nekladné (tj. $k+\nu+1\notin\operatorname{Dom}\Gamma$), klademe k-tý člen uvažované řady roven 0.

Označme

$$u_\nu = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Pak je $J_\nu(x)=\left(\dfrac{x}{2}\right)^\nu u_\nu(x)$.

11.2.4 Poznámka

$$u_\nu(0) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\,, \quad u_\nu'(0) = 0\,.$$

D.: První vzorec plyne z toho, že $\Gamma(1)=1$.

$$\begin{aligned} u_\nu'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2k}{2\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}. \end{aligned}$$

(Poslední rovnost plyne z faktu, že $\Gamma(k+1)=k\Gamma(k)$.) □

11.2.5 Vlastnosti Besselovy funkce prvního druhu

1. Funkce $J_\nu(x)$ je spojitá na $(0,\infty)$.

   D.: Plyne z toho, že $u_\nu(x)$ jakožto součet mocninné řady je funkce spojitá. □

2. $\lim\limits_{x\to 0+} J_\nu(x) = \begin{cases} 1\,, & \nu = 0 \\ 0\,, & \nu > 0 \text{ nebo } \nu \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \\ \infty(-1)^{[\nu]}\,, & \nu \in (-\infty,0)\setminus\mathbb{Z} \end{cases}$.

   D.: Plyne bezprostředně z 11.2.4. □

3. $\left(x^{-\nu}J_\nu(x)\right)' = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\,,\ \left(x^{\nu}J_\nu(x)\right)' = x^{\nu}J_{\nu-1}(x)\,.$

   D.: Platí:

$$\begin{aligned}
\left(x^{-\nu}J_\nu(x)\right)' &= \left(2^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\right)' = \\
&= 2^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2k}{2\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} = \\
&= 2^{-\nu}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} = \\
&= 2^{-\nu}\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(k-1)} = \\
&= 2^{-\nu}\frac{x}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \\
&= -2^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \\
&= -x^{-\nu}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \\
&= -x^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+(\nu+1)+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu+1}
\end{aligned}$$

   Druhý vztah lze dokázat analogicky. □

4. $J_{\nu+1}(x) \ = \ \dfrac{2\nu}{x}J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x)\,,\ \ J'_\nu(x) \ = \ \dfrac{1}{2}\left(J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)\right).$
   První formule (rekurentní vzorec) umožňuje vypočítat $J_{\nu+1}(x)$ ze znalosti $J_\nu(x)$ a $J_{\nu-1}(x)$; druhá formule je vzorec pro derivaci Besselovy funkce prvního druhu.

   D.: První formuli z 3. vynásobíme x^ν, druhou $x^{-\nu}$ a rozepíšeme derivaci součinu. Tím dostaneme

$$J'_\nu(x) - \frac{\nu}{x}J_\nu(x) \ = \ -J_{\nu+1}(x)\,, \quad J'_\nu(x) + \frac{\nu}{x}J_\nu(x) \ = \ J_{\nu-1}(x)\,.$$

   Odečtením těchto rovnic dostaneme první formuli, sečtením druhou. □

5. Platí

$$\begin{aligned}
J_0(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{\left((2k)!!\right)^2}\,,
\end{aligned}$$

   kde $(2k)!! = 2k(2k-2)(2k-4)\cdots 2$.

6. $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos x\,, \quad J_{1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x\,.$

D.: Poněvadž podle 11.1.3 je pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) &= \left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(k-\frac{2k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{2^k}\sqrt{\pi} = \\ &= \frac{(2k)!}{(2k)!!2^k}\sqrt{\pi} = \frac{(2k)!}{k!2^{2k}}\sqrt{\pi}\,,\end{aligned}$$

platí $\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = k!\dfrac{(2k)!}{k!2^{2k}}\sqrt{\pi} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}}\sqrt{\pi}$ a tedy

$$\begin{aligned}J_{-1/2} &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}}{(2k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,.\end{aligned}$$

Druhý vztah se dokáže analogicky. □

11.2.6 Věta (Nulové body Besselových funkcí celočíselného řádu)

Funkce J_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ má jednoduché nulové body $x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \ldots$ takové, že

$$0 < x_{n1} < x_{n2} < x_{n3} < \cdots\,, \quad \lim_{k\to\infty} x_{nk} = \infty$$

a posloupnost $\{x_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ nemá hromadné body. Funkce J_n, $n = 1, 2, \ldots$ má navíc n-násobný nulový bod $x_{n0} = 0$.

D.: Viz např. G.N.Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, 1922, kap. XV. □

11.2.7 Věta (Orthogonalita Besselových funkcí celočíselného řádu)

Besselovy funkce J_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ splňují pro každé $a > 0$ a všechna $k, l \in \mathbb{N}$ rovnost

$$\int_0^a \xi J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right) J_n\left(\frac{x_{nl}}{a}\xi\right) \mathrm{d}\xi = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ \frac{1}{2}a^2\left(J_{n+1}(x_{nk})\right)^2, & k = l \end{cases}$$

kde x_{nk} (resp. x_{nl}) je k-tý (resp. l-tý) jednoduchý nulový bod funkce J_n.

D.: Položme $f(\xi) = J_n\left(\dfrac{x_{nk}}{a}\xi\right)$, $g(\xi) = J_n\left(\dfrac{x_{nl}}{a}\xi\right)$. Pak

$$\frac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = \frac{x_{nk}}{a}J_n'\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right), \quad \frac{\mathrm{d}^2 f(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} = \left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2 J_n''\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right).$$

Poněvadž J_n je řešením Besselovy rovnice (11.11), platí

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 f(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} &= \left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)^{-2}\left(-\frac{x_{nk}}{a}\xi J_n'\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right) - \left(\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)^2 - n^2\right)J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)\right) = \\ &= -\frac{1}{\xi^2}\left(\xi\frac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \left(\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)^2 - n^2\right)f(\xi)\right),\end{aligned}$$

tedy

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \left(\left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2 - \frac{n^2}{\xi^2}\right)f(\xi) = 0.$$

Analogicky dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2 g(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}g(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \left(\left(\frac{x_{nl}}{a}\right)^2 - \frac{n^2}{\xi^2}\right) f(\xi) = 0.$$

První rovnost vynásobíme ξg, druhou vynásobíme ξf a odečteme je:

$$\xi\left(gf'' - fg''\right) + \left(gf' - fg'\right) + \xi fg\left(\left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_{nl}}{a}\right)^2\right) = 0.$$

Po úpravě

$$\xi\left(gf'' + g'f' - g'f' - fg''\right) + \left(gf' - fg'\right) + \xi fg\frac{x_{nk}^2 - x_{nl}^2}{a^2} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi\left(gf' - fg'\right)\right) = \frac{x_{nl}^2 - x_{nk}^2}{a^2}\xi fg.$$

Integrací poslední rovnosti v mezích od 0 do a dostaneme

$$a\left(g(a)f'(a) - f(a)g'(a)\right) = \frac{x_{nl}^2 - x_{nk}^2}{a^2}\int_0^a \xi f(\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

Poněvadž $f(a) = J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}a\right) = 0$ a $g(a) = J_n\left(\frac{x_{nl}}{a}a\right) = 0$, platí

$$0 = \frac{x_{nl}^2 - x_{nk}^2}{a^2}\int_0^a \xi J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right) J_n\left(\frac{x_{nl}}{a}\xi\right)\mathrm{d}\xi\,,$$

takže pro $k \neq l$ je dokazovaná rovnost splněna.

Poněvadž J_n splňuje Besselovu rovnici (11.11), platí pro každé $x > 0$ rovnost

$$x^2 J_n(x) = n^2 J_n(x) - xJ_n'(x) - x^2 J_n''(x).$$

Integrací per partes s využitím této rovnosti dostaneme

$$\begin{aligned}\int x\left(J_n(x)\right)^2\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x^2\left(J_n(x)\right)^2 - \int x^2 J_n(x)J_n'(x)\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}x^2\left(J_n(x)\right)^2 - \int\left(n^2 J_n(x)J_n'(x) - x\left(J_n'(x)\right)^2 - x^2 J_n''(x)J_n'(x)\right)\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}x^2\left(J_n(x)\right)^2 - \int\left(\frac{n^2}{2}\left[\left(J_n(x)\right)^2\right]' - \left[\frac{x^2}{2}\left(J_n'(x)\right)^2\right]'\right)\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}x^2\left(J_n(x)\right)^2 - \frac{n^2}{2}\left(J_n(x)\right)^2 + \frac{x^2}{2}\left(J_n'(x)\right)^2 = \frac{x^2}{2}\left(\left(J_n(x)\right)^2 + \left(J_n'(x)\right)^2\right) - \frac{n^2}{2}\left(J_n(x)\right)^2.\end{aligned}$$

Podle 11.2.5.4 je $\left(J_n(x)\right)^2 + \left(J_n'(x)\right)^2 = \left(J_n(x)\right)^2 + \left(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right)^2$ a tento výraz je podle 11.2.5.2 pro x z pravého okolí nuly ohraničený. To znamená, že

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{2}\left[\left(J_n(x)\right)^2 + \left(J_n'(x)\right)^2\right] = 0.$$

Dále podle 11.2.5.2 je také

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{2}\left(nJ_n(x)\right)^2 = 0.$$

Platí tedy

$$\begin{aligned}\int_0^a \xi\left[J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)\right]^2\mathrm{d}\xi &= \frac{a^2}{x_{nk}^2}\int_0^{x_{nk}} x\left[J_n(x)\right]^2\mathrm{d}x = \\ &= \frac{a^2}{x_{nk}^2}\left[\frac{x_{nk}^2}{2}\left(\left(J_n(x_{nk})\right)^2 + \left(J_n'(x_{nk})\right)^2\right) - \frac{n^2}{2}\left(J_n(x_{nk})\right)^2\right] = \frac{a^2}{2}\left(J_n'(x_{nk})\right)^2.\end{aligned}$$

Podle 11.2.5.3 je

$$-x^{-n}J_{n+1}(x) = \left(x^{-n}J_n(x)\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}J_n(x) + x^{-n}J_n'(x),$$

takže $J_n'(x_{nk}) = -J_{n+1}(x_{nk})$. Celkem tedy

$$\int_0^a \xi \left[J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)\right]^2 \mathrm{d}\xi = \frac{a^2}{2}\left(J_{n+1}(x_{nk})\right)^2,$$

což je dokazovaná rovnost pro $k = l$. □

11.2.8 Věta

Nechť $\nu \in \mathbb{Z}$ a v je řešením Besselovy rovnice (11.11) lineárně nezávislé na J_ν. Pak $\left|\lim_{x\to 0+} v(x)\right| = \infty$.

D.: Označme

$$W = W(x) = W(x; J_\nu, v) = \begin{vmatrix} J_\nu(x) & v(x) \\ J_\nu'(x) & v'(x) \end{vmatrix} = J_\nu(x)v'(x) - J_\nu'(x)v(x)$$

wronskián funkcí J_ν, v. S využitím faktu, že J_ν a v jsou řešením rovnice (11.11) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}W = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(J_\nu v' - J_\nu' v\right) = J_\nu' v' + J_\nu v'' - J_\nu'' v - J_\nu' v' = J_\nu v'' - J_\nu'' v =$$

$$= J_\nu \frac{(\nu^2 - x^2)v - xv'}{x^2} - v\frac{(\nu^2 - x^2)J_\nu - xJ_\nu'}{x^2} = \frac{1}{x}\left(J_\nu' v - J_\nu v'\right) = -\frac{1}{x}W.$$

Wronskián W tedy splňuje diferenciální rovnici $W' = -\dfrac{W}{x}$, což znamená, že

$$W(x) = \frac{C}{x},$$

kde C je nějaká nenulová konstanta (neboť funkce J_ν, v jsou nezávislé). Dále platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{J_\nu}\right) = \frac{v' J_\nu - vJ_\nu'}{J_\nu^2} = \frac{W}{J_\nu^2} = \frac{C}{xJ_\nu^2}.$$

Buď $\alpha > 0$ libovolná konstanta. Integrací poslední rovnosti v mezích od x do α dostaneme

$$\frac{v(x)}{J_\nu(x)} = D - C\int_x^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2},$$

kde $D = \dfrac{v(\alpha)}{J_\nu(\alpha)}$ je konstanta. Odtud plyne, že pro každé $x \in (0, \alpha)$ platí

$$v(x) = J_\nu(x)\left(D - C\int_x^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2}\right)$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0+} v(x) = D\lim_{x\to 0+} J_\nu(x) - C\lim_{x\to 0+} J_\nu(x)\int_x^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2}. \tag{11.17}$$

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Položme $\eta = \begin{cases}(1+\varepsilon)^2, & \nu = 0 \\ \varepsilon^2, & \nu \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\end{cases}$. Pak $\eta > 0$ a podle 11.2.5.2 k němu existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $\xi \in (0, \delta)$ je $\left(J_\nu(\xi)\right)^2 < \eta$. Odtud plyne, že pro $x \in (0, \delta)$ platí

$$\int_x^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2} = \int_x^\delta \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2} + \int_\delta^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2} > \frac{1}{\eta}\int_x^\delta \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} + \int_\delta^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2} = \frac{1}{\eta}\ln\frac{\delta}{x} + \int_\delta^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2},$$

tedy

$$\lim_{x\to 0+}\int_x^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2} \geq \int_\delta^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2} + \frac{1}{\eta}\lim_{x\to 0+}\ln\frac{\delta}{x} = \infty.$$

Odtud vzhledem k 11.2.5.2 a (11.17) dále plyne, že pro $\nu = 0$ je

$$\lim_{x\to 0+} v(x) = (-\operatorname{sgn} C)\,\infty$$

a pro $\nu \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ podle de l'Hospitalova pravidla a podle 11.2.5.4 je

$$\lim_{x\to 0+} v(x) = -C\lim_{x\to 0+} J_\nu(x)\int_x^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2} = -C\lim_{x\to 0+}\frac{\int_x^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2}}{\frac{1}{J_\nu(x)}} = -C\lim_{x\to 0+}\frac{-\frac{1}{x\left(J_\nu(x)\right)^2}}{-\frac{J'_\nu(x)}{\left(J_\nu(x)\right)^2}} =$$

$$= -C\lim_{x\to 0+}\frac{1}{xJ'_\nu} = -C\lim_{x\to 0+}\frac{2}{x\left(J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)\right)}\,.$$

Podle 11.2.5.2 je funkce $x \mapsto J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}$ v pravém okolí nuly ohraničená a tedy $\left|\lim_{x\to 0+} v(x)\right| = \infty$. $\square$

11.2.9 Věta

Je-li $\nu \notin \mathbb{Z}$, jsou Besselovy funkce prvního druhu J_ν a $J_{-\nu}$ řešením rovnice (11.11) a jsou lineárně nezávislé. Tvoří tedy fundamentální systém řešení rovnice (11.11).
Je-li $\nu = n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, platí $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ pro každé $x \in (0,\infty)$.

D.: Funkce $J_\nu,\ J_{-\nu}$ byly v 11.2.2 nalezeny jako řešení rovnice (11.11). Stačí tedy ověřit tvrzení o nezávislosti. Je-li $\nu = 0$, je tvrzení triviální. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\nu > 0$.
Wronskián funkcí $J_\nu,\ J_{-\nu}$ je

$$\begin{aligned}
W(x, J_\nu, J_{-\nu}) &= \begin{vmatrix} J_\nu(x) & J_{-\nu}(x) \\ J'_\nu(x) & J'_{-\nu}(x)\end{vmatrix} = J_\nu(x)J'_{-\nu}(x) - J_{-\nu}(x)J'_\nu(x) = \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu u_\nu(x)\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} u_{-\nu}(x)\right)' - \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} u_{-\nu}(x)\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} u_\nu(x)\right)' = \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu u_\nu(x)\left(-\frac{\nu}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-1} u_{-\nu}(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} u'_{-\nu}(x)\right) - \\
&\quad - \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} u_{-\nu}(x)\left(\frac{\nu}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} u_\nu(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} u'_\nu(x)\right) = \\
&= u_\nu(x)u'_{-\nu}(x) - u_{-\nu}(x)u'_\nu(x) - \frac{2\nu}{x}u_\nu(x)u_{-\nu}(x)\,.
\end{aligned}$$

Podle 11.2.4 pro $\nu \notin \mathbb{Z}$ platí $\left|\lim_{x\to 0+} W(x, J_\nu, J_{-\nu})\right| = \infty$, což znamená, že pro nějaké $x > 0$ je $W(x, J_\nu, J_{-\nu}) \neq 0$ a tedy podle 6.6.6 funkce $J_\nu,\ J_{-\nu}$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (11.11).
Nechť $n \in \mathbb{N}$. Podle konvence v definici 11.2.3 je

$$\begin{aligned}
J_{-n}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+n} \frac{1}{\Gamma(k+n+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = (-1)^n J_n(x)\,.
\end{aligned}$$

$\square$

11.2.10 Definice

Funkce Y_ν definovaná pro každé $\nu \in \mathbb{R}$ a každé $x \in (0, \infty)$ vztahem

$$Y_\nu(x) \;=\; \lim_{\xi \to \nu} \frac{J_\xi(x) \cos \pi\nu - J_{-\xi}(x)}{\sin \pi\xi}$$

se nazývá *Besselova funkce druhého druhu řádu* ν. (Někdy také *Neumannova funkce*.)

Pokud $\nu \notin \mathbb{Z}$, je jmenovatel zlomku za limitou nenulový a tedy pro $\nu \notin \mathbb{Z}$ lze psát

$$Y_\nu(x) \;=\; \frac{J_\nu(x) \cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu}\,.$$

Je-li $\nu = n \in \mathbb{Z}$, jsou čitatel i jmenovatel zlomku za limitou nulové a limitu lze tedy vypočítat podle 2.3.6:

$$Y_n(x) \;=\; \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) \right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x) \right]_{\nu=n} \right).$$

11.2.11 Věta

Funkce Y_ν je řešením rovnice (11.11) pro libovolné $\nu \in \mathbb{R}$. Pro wronskián funkcí J_ν a Y_ν platí $W(x, J_\nu, Y_\nu) = \dfrac{2}{\pi x}$. (Funkce J_ν a Y_ν tedy tvoří fundamentální systém řešení rovnice (11.11).)

D.: Viz např. G.N.Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, 1922, str. 58–76. □

11.2.12 Poznámka

Besselovy funkce druhého druhu splňují stejné vztahy, jako funkce prvního druhu:

$$\begin{aligned}
\left(x^{-\nu} Y_\nu(x)\right)' &= -x^{-\nu} Y_{\nu+1}(x)\,, \\
\left(x^{\nu} Y_\nu(x)\right)' &= x^{\nu} Y_{\nu-1}(x)\,, \\
Y_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x) - Y_{\nu-1}(x)\,, \\
Y_\nu'(x) &= \frac{1}{2}\left(Y_{\nu-1}(x) - Y_{\nu+1}(x)\right)
\end{aligned}$$

11.3 Legendreovy polynomy

11.3.1 Definice

Legendreův polynom stupně $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je pro každé $x \in \mathbb{R}$ definován vztahem

$$P_n(x) \;=\; \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^2 - 1)^n\,.$$

Zejména

$$\begin{array}{lll}
P_0(x) = 1 & P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
P_1(x) = x & P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) & P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)
\end{array}$$

Poněvadž

$$(x^2 - 1)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^{2(n-k)} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k} \;=\; n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} x^{2n-2k}\,,$$

platí

$$P_n(x) \;=\; \frac{1}{2^n} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} x^{2n-2k}\,.$$

Tedy pro $m \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}
P_{2m} &= \frac{\mathrm{d}^{2m}}{\mathrm{d}x^{2m}} \sum_{k=0}^{2m} \frac{(-1)^k}{2^{2m} k!(2m-k)!} x^{4m-2k} = \\
&= \frac{\mathrm{d}^{2m-1}}{\mathrm{d}x^{2m-1}} \sum_{k=0}^{2m} \frac{(-1)^k (4m-2k)}{2^{2m} k!(2m-k)!} x^{4m-2k-1} = \\
&= \frac{\mathrm{d}^{2m-1}}{\mathrm{d}x^{2m-1}} \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{(-1)^k (4m-2k)}{2^{2m} k!(2m-k)!} x^{4m-2k-1} = \\
&= \frac{\mathrm{d}^{2m-2}}{\mathrm{d}x^{2m-2}} \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{(-1)^k (4m-2k)(4m-2k-1)}{2^{2m} k!(2m-k)!} x^{4m-2k-2} = \\
&= \frac{\mathrm{d}^{2m-2}}{\mathrm{d}x^{2m-2}} \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{(-1)^k (4m-2k)!}{2^{2m} k!(2m-k)!(4m-2k-2)!} x^{4m-2k-2} = \cdots = \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k (4m-2k)!}{2^{2m} k!(2m-k)!(2m-2k)!} x^{2(m-k)} ,
\end{aligned}$$

analogicky

$$P_{2m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k (4m-2k-2)!}{2^{2m-1} k!(2m-k-1)!(2m-2k-1)!} x^{2(m-k)-1} ,$$

souhrnně

$$P_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} . \tag{11.18}$$

11.3.2 Věta

Legendreův polynom P_n je pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ řešením diferenciální rovnice

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0 .$$

D.: Položme $\eta(x) = \frac{1}{2^n n!}(x^2-1)^n$. Pak $\eta'(x) = \frac{2xn(x^2-1)^{n-1}}{2^n n!}$, takže $(x^2-1)\eta'(x) = 2xn\eta(x)$. Derivujme tuto nerovnost $(n+1)$-krát (s využitím 2.2.2.7):

$$\begin{aligned}
(x^2-1)\eta^{(n+2)}(x) + (n+1)2x\eta^{(n+1)}(x) + \frac{n(n+1)}{2} 2\eta^{(n)}(x) &= 2n \left(x\eta^{(n+1)}(x) + (n+1)\eta^{(n)}(x) \right) , \\
(x^2-1)\eta^{(n+2)}(x) + 2x\eta^{(n+1)}(x) - n(n+1)\eta^{(n)}(x) &= 0 ,
\end{aligned}$$

a poněvadž $\eta^{(n)}(x) = P_n(x)$, tvrzení je dokázáno. □

Rovnici z tvrzení věty lze také zapsat ve tvaru

$$\left((1-x^2)y'(x)\right)' + n(n+1)y(x) = 0 . \tag{11.19}$$

11.3.3 Věta

Posloupnost Legendreových polynomů $\{P_0, P_1, P_2, \dots\}$ je ortogonální v prostoru $\mathcal{L}^2(-1,1)$.

Norma Legendreova polynomu P_n je $\|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Posloupnost $\left\{ \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}P_1, \sqrt{\frac{5}{2}}P_2, \dots, \sqrt{n+\frac{1}{2}}P_n, \dots \right\}$ je ortonormální v prostoru $\mathcal{L}^2(-1,1)$.

D.: Buďte $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Rovnici (11.19) jednou napíšeme pro $y(x) = P_m(x)$ a vynásobíme $P_n(x)$, podruhé ji napíšeme pro $y(x) = P_n(x)$ a vynásobíme $P_m(x)$:

$$\begin{aligned} \left((1-x^2)P_m'(x)\right)' P_n(x) + m(m+1)P_m(x)P_n(x) &= 0\,, \\ \left((1-x^2)P_n'(x)\right)' P_m(x) + n(n+1)P_n(x)P_m(x) &= 0\,. \end{aligned}$$

Tyto rovnice odečteme, upravíme a zintegrujeme v mezích od -1 do 1. Dostaneme

$$\begin{aligned} \left((1-x^2)P_m'(x)\right)' P_n(x) - \left((1-x^2)P_n'(x)\right)' P_m(x) + (m(m+1) - n(n+1))P_n(x)P_m(x) &= 0\,, \\ \left((1-x^2)(P_m'(x)P_n(x) - P_m(x)P_n'(x))\right)' + (m-n)(m+n+1)P_n(x)P_m(x) &= 0\,, \\ \left[(1-x^2)(P_m'(x)P_n(x) - P_m(x)P_n'(x))\right]_{-1}^{1} + (m-n)(m+n+1)\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x &= 0\,, \end{aligned}$$

a poněvadž první sčítanec se rovná nule, platí pro $m \neq n$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = 0\,.$$

Pro výpočet $\|P_n\|^2 = \int_{-1}^{1} (P_n(x))^2\mathrm{d}x$ použijeme n-krát metodu per partes. Pro zjednodušení zápisu označíme $Q(x) = (x^2-1)^n$ a uvědomíme si, že 1 a -1 jsou $2n$-násobné kořeny polynomu Q.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (P_n(x))^2\mathrm{d}x &= \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \int_{-1}^{1} Q^{(n)}(x)Q^{(n)}(x)\mathrm{d}x = \\ &= \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \left(\left[Q^{(n-1)}(x)Q^{(n)}(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} Q^{(n+1)}(x)Q^{(n-1)}(x)\mathrm{d}x\right) = \\ &= -\left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \int_{-1}^{1} Q^{(n+1)}(x)Q^{(n-1)}(x)\mathrm{d}x = \cdots = (-1)^n \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \int_{-1}^{1} Q^{(2n)}(x)Q(x)\mathrm{d}x = \\ &= (-1)^n \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \int_{-1}^{1} (2n)!(x^2-1)^n\mathrm{d}x = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} (x+1)^n(x-1)^n\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Pro výpočet integrálu $\int_{-1}^{1} (x+1)^n(x-1)^n\mathrm{d}x$ opět použijeme n-krát metodu per partes:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (x+1)^n(x-1)^n\mathrm{d}x &= \left[(x+1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} n(x+1)^{n-1}\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1} (x+1)^{n-1}(x-1)^{n+1}\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{n}{n+1}\left(\left[(x+1)^{n-1}\frac{(x-1)^{n+2}}{n+2}\right]_{-1}^{1} - \frac{n-1}{n+2}\int_{-1}^{1}(x+1)^{n-2}(x-1)^{n+2}\mathrm{d}x\right) = \\ &= \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}\int_{-1}^{1}(x+1)^{n-2}(x-1)^{n+2}\mathrm{d}x = \cdots = \frac{n(n-1)\cdots 1}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}(-1)^n\int_{-1}^{1}(x-1)^{2n}\mathrm{d}x = \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n)!}(-1)^n\left[\frac{(x-1)^{2n+1}}{2n+1}\right]_{-1}^{1} = -\frac{(n!)^2}{(2n)!}(-1)^n\frac{(-2)^{2n+1}}{2n+1} = (-1)^n\frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)} \end{aligned}$$

Celkem tedy

$$\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2 \mathrm{d}x = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} (-1)^n \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)} = \frac{2}{2n+1} .$$

Třetí tvrzení je nyní zřejmé. □

11.3.4 Rekurentní vztahy pro Legendreovy polynomy

Pomocí (11.18) lze odvodit:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) , \quad n = 1, 2, \dots \\ P_n'(x) &= \frac{n}{1-x^2} \left(P_{n-1}(x) - x P_n(x)\right) , \quad n = 1, 2, \dots . \end{aligned}$$

11.4 Čebyševovy-Laguerreovy polynomy

11.4.1 Definice

Čebyševův-Laguerreův polynom stupně $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je pro každé $x > 0$ definován vztahem

$$L_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(\mathrm{e}^{-x} x^n\right) .$$

Zejména

$$\begin{array}{lll} L_0(x) = 1 & L_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 & L_4(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x + 1 \\ L_1(x) = -x + 1 & L_3(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1 & L_5(x) = -\frac{1}{120}x^5 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 5x^2 - 5x + 1 \end{array}$$

11.4.2 Explicitní vyjádření Čebyševova-Laguerreova polynomu

Nechť $L_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{nk} x^k$. S využitím Leibnizovy formule dostaneme

$$L_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \mathrm{e}^{-x} \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}} x^n = \frac{\mathrm{e}^x}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mathrm{e}^{-x} \frac{n!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!} , \qquad (11.20)$$

takže

$$a_{nk} = \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} .$$

Odtud dostaneme

$$\frac{a_{n(k+1)}}{a_{nk}} = -\frac{k!}{(k+1)!} \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = -\frac{k!n!k!(n-k)!}{(k+1)!n!(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{k-n}{(k+1)^2} ,$$

tedy

$$a_{n(k+1)} = \frac{k-n}{(k+1)^2} a_{nk} , \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \qquad a_{n0} = \binom{n}{0} = 1 .$$

11.4.3 Rekurentní vztahy pro Čebyševovy-Laguerreovy polynomy

S využitím (11.20) dostaneme

$$
\begin{aligned}
nL_n(x) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} \frac{n}{k!}x^k + n\,, \\
xL_n'(x) &= x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} \frac{k}{k!}x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{(k-1)!}x^k\,,
\end{aligned}
$$

tedy

$$
\begin{aligned}
nL_n(x) - xL_n'(x) &= n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{n}{k}-1\right)x^k = n + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \binom{n}{k} \frac{n-k}{k!}x^k = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \binom{n}{k} \frac{n-k}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{n-k}{k!}x^k = \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\frac{x^k}{k!} = nL_{n-1}(x)\,.
\end{aligned}
$$

Odtud dostaneme vyjádření derivace Čebyševova-Laguerreova polynomu pomocí tohoto polynomu a polynomu nižšího stupně:

$$
L_n'(x) = \frac{n}{x}\left(L_n(x) - L_{n-1}(x)\right). \tag{11.21}
$$

S využitím (11.20) také dostaneme

$$
\begin{aligned}
L_n'(x) - L_{n-1}'(x) &= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \left[\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}\right] \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\left[\frac{n}{n-k}-1\right] \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\frac{x^k}{k!} = -\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \binom{n-1}{k}\frac{x^k}{k!} = -L_{n-1}(x)\,.
\end{aligned}
$$

Máme tedy další rekurentní formuli

$$
L_n'(x) - L_{n-1}'(x) + L_{n-1}(x) = 0\,. \tag{11.22}
$$

Z formulí (11.21) a (11.22) dostaneme

$$
\frac{n}{x}\left(L_n(x) - L_{n-1}(x)\right) = L_{n-1}'(x) - L_{n-1}(x)\,,
$$

tedy

$$
L_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)L_{n-1}(x) + \frac{x}{n}L_{n-1}'(x)\,, \tag{11.23}
$$

což je formule pro výpočet Čebyševova-Laguerreova polynomu pomocí Čebyševova-Laguerreova polynomu stupně nižšího a jeho derivace. Napíšeme-li tuto formuli pro $n+1$ místo pro n a za L_n' dosadíme z (11.21), dostaneme

$$
L_{n+1}(x) = \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)L_n(x) + \frac{x}{n+1}\frac{n}{x}\left(L_n(x) - L_{n-1}(x)\right).
$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$$
(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)\,.
$$

Tento vzorec lze použít k postupnému výpočtu Čebyševových-Laguerreových polynomů z prvních dvou

$$
L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x.
$$

11.4.4 Diferenciální rovnice pro Čebyševovy-Laguerreovy polynomy

Derivováním rovnice (11.21) dostaneme

$$L_n''(x) \;=\; -\frac{n}{x^2}\left(L_n(x)-L_{n-1}(x)\right)+\frac{n}{x}\left(L_n'(x)-L_{n-1}'(x)\right).$$

Do této rovnice dosadíme z (11.22) za výraz $L_n'(x)-L_{n-1}'(x)$ a upravíme:

$$\begin{aligned} xL_n''(x) &= -\frac{n}{x}\left(L_n(x)-L_{n-1}(x)\right)-nL_{n-1}(x)\,, \\ xL_n''(x) &= -\frac{n}{x}L_n(x)+\left(\frac{n}{x}-n\right)L_{n-1}(x)\,. \end{aligned}$$

Za výraz $L_{n-1}(x)$ v poslední rovnici dosadíme z (11.21) a dostaneme

$$xL_n''(x) \;=\; -\frac{n}{x}L_n(x)+\frac{n(1-x)}{x}\left(-\frac{x}{n}L_n'(x)+L_n(x)\right),$$

po úpravě

$$xL_n''(x) \;=\; (x-1)L_n'(x)-nL_n(x)\,.$$

To znamená, že Čebyševovy-Laguerreovy polynomy L_n jsou řešením diferenciální rovnice

$$xy''(x)+(1-x)y'(x)+ny(x)=0,$$

nebo v samoadjungovaném tvaru

$$\left(x\mathrm{e}^{-x}y'\right)'+n\mathrm{e}^{-x}y=0.$$

Čebyševovy-Laguerreovy polynomy jsou řešením této rovnice s okrajovými podmínkami

$$y(0)=1, \qquad \lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}y(x)=0.$$

11.4.5 Věta

Pro Čebyševovy-Laguerreovy polynomy platí

$$\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \;=\; \begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}.$$

D.: Pro každé $0<l<n$ platí

$$\frac{\mathrm{d}^{n-l}}{\mathrm{d}x^{n-l}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right) \;=\; \frac{\mathrm{d}^{n-l}}{\mathrm{d}x^{n-l}}\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!}x^{k+n} \;=\; \sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!}(k+n)(k+n-1)\cdots(k+l+1)x^{k+l} \;=$$
$$=\; \sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!}\frac{(k+n)!}{(k+l)!}x^{k+l},$$

takže

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\mathrm{d}^{n-l}}{\mathrm{d}x^{n-l}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right) \;=\; 0\,; \tag{11.24}$$

také platí $\frac{\mathrm{d}^{n-l}}{\mathrm{d}x^{n-l}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)=P(x)\mathrm{e}^{-x}$, kde $P(x)$ je nějaký polynom, takže

$$\lim_{x\to\infty}L_m(x)\frac{\mathrm{d}^{n-l}}{\mathrm{d}x^{n-l}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right) \;=\; 0 \tag{11.25}$$

pro každé $m\in\mathbb{N}$.

Nechť pro určitost je $m\le n$. Uvažujme integrál

$$J \;=\; \int_0^\infty L_m(x)L_n(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{n!}\int_0^\infty L_m(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\mathrm{d}x\,.$$

K jeho výpočtu použijeme m krát metodu per partes a vztahy (11.24), (11.25):

$$J = \frac{1}{n!}\left(\left[L_m(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty L'_m(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\mathrm{d}x\right) =$$

$$= -\frac{1}{n!}\int_0^\infty L'_m(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\mathrm{d}x = \cdots = \frac{(-1)^m}{n!}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}L_m(x)\frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\mathrm{d}x\,.$$

S využitím 11.4.2 dostaneme

$$J = \frac{(-1)^m}{n!}\int_0^\infty \frac{(-1)^m}{m!}\binom{m}{m}m!\frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{n!}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\mathrm{d}x\,.$$

Je-li $m = n$, pak podle 11.1.2 je

$$J = \frac{1}{n!}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{n!}\Gamma(n+1) = \frac{1}{n!}n! = 1\,,$$

Jeli $m < n$, pak podle (11.24) a (11.24) je

$$J = \frac{1}{n!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-m-1}}{\mathrm{d}x^{n-m-1}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\right]_0^\infty = 0\,.$$

□

Z věty plyne, že funkce

$$\psi_n(x) = \mathrm{e}^{-x/2}L_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

tvoří ortonormální posloupnost v prostoru $\mathcal{L}^2(0, \infty)$.

11.4.6 Zobecněné Čebyševovy-Laguerreovy polynomy

Zobecněný Čebyševův-Laguerreův polynom stupně $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je pro všechna reálná $x > 0$ a $s > -1$ definován vztahem

$$Q_n^s(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!}x^{-s}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{-x}x^{n+s}\right).$$

Tyto polynomy jsou řešením diferenciální rovnice

$$xy''(x) + (s + 1 - x)y'(x) + ny(x) = 0,$$

nebo v samoadjungovaném tvaru

$$\left(x^{s+1}\mathrm{e}^{-x}y'\right)' + n\mathrm{e}^{-x}x^s y = 0.$$

Zobecněné Čebyševovy-Laguerreovy polynomy splňují rekurentní formule

$$(n+1)Q_{n+1}^s(x) = (2n + s + 1 - x)Q_n^s(x) - (n+s)Q_{n-1}^s(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q_n^s(x) = \frac{1}{x}\left(nQ_n^s(x) - (n+s)Q_{n-1}^s(x)\right),$$

$$Q_n^{s+1}(x) - Q_{n-1}^{s+1}(x) = Q_n^s(x)\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q_n^s(x) = -Q_{n-1}^{s+1}(x)$$

a rovnici

$$\int_0^\infty Q_m^s(x)Q_n^s(x)\mathrm{e}^{-x}x^s\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(n+s+1)}{n!}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}.$$

Z poslední rovnice plyne, že funkce

$$\Phi_n^s(x) \;=\; x^{s/2}\mathrm{e}^{-x/2}\sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n+s+1)}}\,Q_n^s(x), \quad n=0,1,2,\dots$$

tvoří ortonormální posloupnost v prostoru $\mathcal{L}^2(0,\infty)$.

11.5 Čebyševovy-Hermiteovy polynomy

11.5.1 Definice

Čebyševův-Hermiteův polynom stupně $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ je pro každé $x\in\mathbb{R}$ definován vztahem

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Zejména

$$\begin{array}{lll} H_0(x)=1 & H_2(x)=4x^2-2 & H_4(x)=16x^4-48x^2+12 \\ H_1(x)=2x & H_3(x)=8x^3-12x & H_5(x)=32x^5-160x^3+120x \end{array}$$

11.5.2 Rekurentní vztahy pro Čebyševovy-Hermiteovy polynomy

S využitím Leibnizovy formule pro výpočet vyšší derivace součinu funkcí dostaneme pro každé $n\geq 1$

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\mathrm{e}^{-x^2} = (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(-2x\mathrm{e}^{-x^2}\right) = 2(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x\mathrm{e}^{-x^2}\right) = \\ &= 2(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}x\,\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}\mathrm{e}^{-x^2} = 2(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\left[\binom{n}{0}x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}+\binom{n}{1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\mathrm{e}^{-x^2}\right] = \\ &= 2x(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2} - 2n(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\mathrm{e}^{-x^2} = 2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)\,, \end{aligned}$$

tedy

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0\,. \tag{11.26}$$

Této rovnice lze využít k postupnému výpočtu Čebyševových-Hermiteových polynomů pomocí prvních dvou.

Dále platí

$$\begin{aligned} H_n'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}\right] = 2x(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2} - (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\mathrm{e}^{-x^2} = \\ &= 2xH_n(x) - H_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Odtud s využitím (11.26) dostaneme

$$H_n'(x) \;=\; 2nH_{n-1}(x)\,, \tag{11.27}$$

tj. vyjádření derivace polynomu H_n pomocí polynomu nižšího stupně.

11.5.3 Diferenciální rovnice pro Čebyševovy-Hermiteovy polynomy

S využitím vztahů (11.27) a (11.26) dostaneme

$$\begin{aligned} H_n''(x) &= (2nH_{n-1}(x))' = (2xH_n(x)-H_{n+1}(x))' = 2H_n(x)+2xH_n'(x)-H_{n+1}'(x) = \\ &= 2H_n(x)+2xH_n'(x)-2(n+1)H_n(x) = 2xH_n'(x)-2nH_n(x)\,. \end{aligned}$$

Pro každé $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ je tedy Čebyševův-Hermiteův polynom $H_n(x)$ řešením diferenciální rovnice

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) \;=\; 0\,, \tag{11.28}$$

nebo v samoadjungovaném tvaru

$$\left(\mathrm{e}^{-x^2} y'\right)' + 2n\mathrm{e}^{-x^2} y \;=\; 0\,.$$

Poznamenejme ještě, že Čebyševův-Hermiteův polynom je řešením rovnice (11.28) s okrajovými podmínkami

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x^2} y(x) \;=\; \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x^2} y(x) \;=\; 0\,.$$

11.5.4 Věta

Pro Čebyševovy-Hermiteovy polynomy platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \begin{cases} 2^n n! \sqrt{\pi}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}.$$

D.: Pro určitost budeme předpokládat, že $m \le n$. Označme

$$J \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Pro výpočet tohoto integrálu použijeme m krát metodu per partes; přitom využijeme (11.27) a skutečnost, že pro libovolný polynom P platí

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x^2} P(x) \;=\; \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x^2} P(x) \;=\; 0\,.$$

$$J \;=\; (-1)^n \left(\left[H_m(x) \mathrm{e}^{-x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} H_m'(x) \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \right) \;=$$

$$=\; (-1)^{n-1} 2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(x) \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; (-1)^{n-2} 2m 2(m-1) \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-2}(x) \frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \;=$$

$$=\; \cdots \;=\; (-1)^{n-m} 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Je-li $m < n$, pak

$$J \;=\; (-1)^{n-m} 2^m m! \left[\frac{\mathrm{d}^{n-m-1}}{\mathrm{d}x^{n-m-1}} \mathrm{e}^{-x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} \;=\; 0\,;$$

je-li $m = n$, pak podle (11.3) je

$$J \;=\; 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; 2^n n! \sqrt{\pi}\,.$$

□

Z věty plyne, že funkce

$$\psi_n \;=\; \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x)\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

tvoří ortonormální posloupnost v prostoru $\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$.

11.5.5 Rekurentní vztahy pro koeficienty Čebyševových-Hermiteových polynomů

Hledáme řešení rovnice (11.28) ve tvaru mocninné řady $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x^k$.
Platí

$$
\begin{aligned}
2ny(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} 2na_{nk}x^k\,, \\
2xy'(x) &= 2x\sum_{k=0}^{\infty} ka_{nk}x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} 2ka_{nk}x^k\,, \\
y''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_{nk}x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_{nk}x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{n(k+2)}x^k\,.
\end{aligned}
$$

Po dosazení do rovnice (11.28) dostaneme

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)a_{n(k+2)} - 2ka_{nk} + 2na_{nk}\right]x^k = 0\,,$$

a tedy

$$a_{n(k+2)} = \frac{2(n-k)}{(k+2)(k+1)}\,a_{nk}\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, n-2.$$

11.6 Distribuce

11.6.1 Základní pojmy

Nechť $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce n proměnných definovaná na celém prostoru $\mathbb{R}^n$. *Nosič funkce* φ definujeme jako uzávěr množiny $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \varphi(\mathbf{x}) \neq 0\}$ a značíme ho $\operatorname{Supp}\varphi$.

Symbolem $\mathcal{D}$ označíme množinu funkcí definovaných na $\mathbb{R}^n$, které zde jsou třídy C^∞ (sr. 5.3.6) a jejichž nosič je kompaktní množina.

Na množině $\mathcal{D}$ definujeme metriku ρ vztahem

$$\rho(\varphi,\psi) = \sup\left\{\left|\frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots+i_n}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\varphi(\mathbf{x})-\psi(\mathbf{x}))\right| : \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ (i_1,i_2,\ldots,i_n)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n\right\}.$$

Množinu $\mathcal{D}$ s touto metrikou nazýváme *prostor testovacích funkcí*, jeho prvky nazýváme *testovací funkce*.

Zobrazení $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, pro které platí

$$T(\varphi+\psi) = T(\varphi) + T(\psi), \quad T(c\varphi) = cT(\varphi)\,,\ c \in \mathbb{R}$$

nazýváme *lineární funkcionál na prostoru testovacích funkcí.* Obraz funkce φ při zobrazení T budeme značit

$$T(\varphi),\ T\cdot\varphi,\ T\varphi.$$

Množinu všech lineárních funkcionálů $\mathcal{D} \to \mathbb{R}$ nazýváme *prostor duální k* $\mathcal{D}$ a značíme ji $\mathcal{D}'$.

11.6.2 Definice

Spojitý lineární funkcionál na prostoru testovacích funkcí se nazývá *distribuce*.

Podrobněji: Zobrazení $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ nazveme distribuce, jestliže

$$
\begin{aligned}
&(\forall\varphi,\psi\in\mathcal{D}) \qquad T(\varphi+\psi) = T\varphi + T\psi\,, \\
&(\forall\varphi\in\mathcal{D})\,(\forall c\in\mathbb{R}) \qquad T(c\varphi) = cT\varphi\,, \\
&(\forall\{\varphi_n\}\subseteq\mathcal{D})\,(\forall\varphi\in\mathcal{D}) \qquad \varphi_n\to\varphi \text{ v prostoru } (\mathcal{D},\rho) \ \Rightarrow\ T\varphi_n \to T\varphi \text{ v } \mathbb{R} \text{ s přirozenou metrikou.}
\end{aligned}
$$

11.6.3 Příklady distribucí

1. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že pro každou kompaktní množinu $K \subseteq \mathbb{R}^n$ existuje konečný integrál $\int\limits_K f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$ (tzv. *lokálně integrabilní funkce*). Definujme $T_f \in \mathcal{D}'$ vztahem
$$T_f\varphi \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\,.$$
$T_f\varphi$ budeme také značit $\left\langle\; f \;\middle|\; \varphi \;\right\rangle$, nebo podrobněji $\left\langle\; f(\mathbf{x}) \;\middle|\; \varphi(\mathbf{x}) \;\right\rangle$.
Distribuce $T \in \mathcal{D}'$ taková, že existuje lokálně integrabilní funkce f pro niž $T\varphi = \left\langle\; f \;\middle|\; \varphi \;\right\rangle$ pro všechny $\varphi \in \mathcal{D}$, se nazývá *regulární distribuce*. Distribuce, která není regulární, se někdy nazývá *singulární*.
Každou funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ lze považovat za regulární distribuci. Tedy $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$. Proto se distribuce někdy nazývají *zobecněné funkce*.

2. *Diracova distribuce* δ přiřadí každé testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ hodnotu $\varphi(0)$. Diracova distribuce není regulární. Přesto se používá zápis
$$\left\langle\; \delta \;\middle|\; \varphi \;\right\rangle \;=\; \left\langle\; \delta(\mathbf{x}) \;\middle|\; \varphi(\mathbf{x}) \;\right\rangle \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} \;=\; \varphi(0)\,.$$

11.6.4 Nosič distribuce

Řekneme, že distribuce $T \in \mathcal{D}'$ je na množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *nulová*, jestliže $T\varphi = 0$ pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ takovou, že $\operatorname{Supp}\varphi \subseteq \Omega$.
Nosič distribuce T je nejmenší (vzhledem k množinové inklusi) uzavřená množina taková, že na jejím komplementu je T nulová.

11.6.5 Základní operace v prostoru distribucí

- Součet distribucí $T, S \in \mathcal{D}'$:
$T + S \in \mathcal{D}'$ je distribuce, pro niž platí
$$(T+S)\varphi \;=\; T\varphi + S\varphi$$
pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$.

- Násobení distribuce $T \in \mathcal{D}'$ funkcí $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ třídy C^∞:
Je-li $\varphi \in \mathcal{D}$ testovací funkce, pak φ má kompaktní nosič. To znamená, že také funkce $a\varphi$ má kompaktní nosič, tedy $a\varphi \in \mathcal{D}$.
$aT \in \mathcal{D}'$ je distribuce, pro niž platí
$$(aT)\varphi \;=\; T(a\varphi)$$
pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$.

- Translace (posunutí) distribuce $T \in \mathcal{D}$ o vektor $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$:
Je-li $\varphi \in \mathcal{D}$, pak funkce $\varphi_{\vec{h}}$ definovaná vztahem $\varphi_{\vec{h}}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x} + \vec{h})$ má kompaktní nosič, je tedy také testovací funkcí.
Translace distribuce $T \in \mathcal{D}'$ o $\vec{h}$ je distribuce $\tau_{\vec{h}}T \in \mathcal{D}'$, pro niž platí
$$\left(\tau_{\vec{h}}T\right)\varphi \;=\; T\varphi_{\vec{h}}$$
pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$.
Pro regulární distribuci určenou funkcí f platí
$$\left(\tau_{\vec{h}}T_f\right)\varphi \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}+\vec{h})\mathrm{d}\mathbf{x} \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}-\vec{h})\varphi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\,.$$

Nechť $\mathbf{x}_0 = 0 + \vec{h}$. Translace Diracovy distribuce o vektor $\vec{h}$, je distribuce $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, pro niž platí
$$\left\langle\; \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \;\middle|\; \varphi(\mathbf{x}) \;\right\rangle \;=\; \left\langle\; \delta(\mathbf{x}) \;\middle|\; \varphi(\mathbf{x}+\vec{h}) \;\right\rangle \;=\; \varphi(\mathbf{x}_0)$$
pro každou $\varphi \in \mathcal{D}$. Tato distribuce se nazývá *Diracova distribuce soustředěná v bodě* $\mathbf{x}_0$.

11.6.6 Derivování distribucí

Nechť f je diferencovatelná (a tedy lokálně integrabilní) funkce, $\varphi \in \mathcal{D}$. Pak platí

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} &= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_{n-1}\mathrm{d}x_n = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left([f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})]_{x_1=-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x})\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_{n-1}\mathrm{d}x_n = \\ &= -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_{n-1}\mathrm{d}x_n = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\,,\end{aligned}$$

poněvadž $\mathrm{Supp}(f\varphi)$ je kompaktní.
Jako zobecnění této úvahy definujeme:

Parciální derivace podle první proměnné distribuce $T \in \mathcal{D}'$ je distribuce $\frac{\partial}{\partial x_1}T$, pro niž platí

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}T\right)\varphi = -T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}$.

Obecně

$$\left(\frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots i_n}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}T\right)\varphi = (-1)^{i_1+i_2+\cdots i_n}T\left(\frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots i_n}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}\varphi\right).$$

Každá distribuce má derivace libovolného řádu.

Každá lokálně integrabilní funkce f určuje regulární distribuci. Tato distribuce má derivaci libovolného řádu. V tomto smyslu lze říci, že každá lokálně integrabilní funkce f má derivaci libovolného řádu. Tato distribuce však obecně není funkcí ale distribucí. Nazýváme ji *distributivní derivací funkce f*.

11.6.7 Heavisidova skoková funkce (distribuce)

Funkce $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

je lokálně integrabilní. Určuje tedy regulární distribuci, pro niž platí

$$\langle\ H \mid \varphi\ \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x\,.$$

Dále platí

$$\langle\ H' \mid \varphi\ \rangle = -\langle\ H \mid \varphi'\ \rangle = -\int\limits_{0}^{\infty}\varphi'(x)\mathrm{d}x = -[\varphi(x)]_0^{\infty} = \varphi(0) = \langle\ \delta \mid \varphi\ \rangle\,,$$

tedy distributivní derivací funkce H je Diracova distribuce (soustředěná v bodě 0).

Obecně: Funkce $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots x_n \geq 0 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

určuje regulární distribuci:

$$\begin{aligned}
\left\langle\, H \;\middle|\; \varphi \,\right\rangle &= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(x_1,x_2,\dots,x_n)\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \;=\\
&= \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\cdots\int\limits_{0}^{\infty} \varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\,.
\end{aligned}$$

Poněvadž

$$\begin{aligned}
\left\langle\, \tfrac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}H \;\middle|\; \varphi \,\right\rangle &= (-1)^n\left\langle\, H \;\middle|\; \tfrac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}\varphi \,\right\rangle \;=\\
&= (-1)^n\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\cdots\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \;=\\
&= (-1)^n\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\cdots\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial x_2\partial x_3\cdots\partial x_n}\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)\right]_{x_1=0}^{\infty}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n \;=\\
&= -(-1)^n\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\cdots\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x_2\partial x_3\cdots\partial x_n}\varphi(0,x_2,x_3,\dots,x_n)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n \;=\;\cdots\;=\\
&= (-1)^{2n}\varphi(0,0,\dots,0) \;=\; \varphi(0,0,\dots,0)\,,
\end{aligned}$$

je $\;\tfrac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}H \;=\; \delta\,.$

11.6.8 Distributivní derivace funkcí jedné proměnné

Nechť funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je třídy C^∞ na každém z intervalů $(-\infty,0)$, $(0,\infty)$ a nechť každá její derivace je lokálně integrabilní. Tato funkce určuje regulární distribuci T_f.

Označme $\sigma_m = \lim\limits_{x\to 0+} f^{(m)}(x) - \lim\limits_{x\to 0-} f^{(m)}(x)$ a $T'_f = \dfrac{\partial}{\partial x}T,\ T''_f = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}T\ \ \dots,\ T^{(k)}_f = \dfrac{\partial^k}{\partial x^k}T.$

Pro každou $\varphi\in\mathcal{D}$ platí

$$\begin{aligned}
T'_f\varphi &= -\left\langle\, f(x) \;\middle|\; \varphi'(x) \,\right\rangle = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x \;=\; -\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x \;=\\
&= -\left[f(x)\varphi(x)\right]_{-\infty}^{0} + \int\limits_{-\infty}^{0} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x - \left[f(x)\varphi(x)\right]_{0}^{\infty} + \int\limits_{0}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \;=\\
&= \lim_{x\to 0+} f(x)\varphi(x) - \lim_{x\to 0-} f(x)\varphi(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \;=\\
&= \varphi(0)\left(\lim_{x\to 0+} f(x) - \lim_{x\to 0-} f(x)\right) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \;=\\
&= \sigma_0\varphi(0) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \;=\; \sigma_0\left\langle\, \delta \;\middle|\; \varphi \,\right\rangle + \left\langle\, f' \;\middle|\; \varphi \,\right\rangle \;=\; \sigma_0\left\langle\, \delta \;\middle|\; \varphi \,\right\rangle + T_{f'}\varphi\,,
\end{aligned}$$

symbolicky

$$T'_f = \sigma_0\delta + T_{f'}\,.$$

Obecně

$$T^{(k)}_f\varphi \;=\; \sum_{m=0}^{k-1}(-1)^{k-m-1}\sigma_m\varphi^{(k-m-1)}(0) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\,,$$

Symbolicky

$$T_f^{(k)} \;=\; \sum_{m=0}^{k-1} \sigma_m \delta^{(k-m-1)} + T_{f^{(k)}}\,.$$

11.6.9 Konvergence distribucí

Řekneme, že posloupnost distribucí $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}'$ *konverguje pro* $k \to \infty$ *k distribuci* $T \in \mathcal{D}'$ a píšeme

$$\lim_{k\to\infty} T_k = T\,,$$

jestliže pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ je $\lim\limits_{k\to\infty} T_k\varphi = T\varphi$ (v tomto případě jde o konvergenci číselných posloupností).

Nechť $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}'$ je posloupnost distribucí taková, že pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ existuje limita posloupnosti čísel $\{T_k\varphi\}_{k=1}^{\infty}$. Definujme zobrazení $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$T(\varphi) \;=\; \lim_{k\to\infty} T_k\varphi\,.$$

Pak T je lineární (to plyne z linearity každé z distribucí T_k a z vlastností limity 1.3.6) a spojité (důkaz např. v: Laurent Schwartz: Théorie des distributions, Paris 1973). To znamená, že T je distribuce.

11.6.10 δ-vytvořující posloupnosti

Nechť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost lokálně integrabilních funkcí na $\mathbb{R}^n$ takových, že $\lim\limits_{k\to\infty} T_{f_k} = \delta$, tj.

$$\lim_{k\to\infty} \left\langle\; f_k \;\middle|\; \varphi \;\right\rangle = \varphi(0)$$

pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$. Pak $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá *δ-vytvořující posloupnost*, funkce f_k se nazývají *impulsní funkce.*

Příklady δ-vytvořujících posloupností:

$$f_k(x) \;=\; \begin{cases} k, & |x| \le \dfrac{1}{2k} \\ 0, & |x| > \dfrac{1}{2k} \end{cases}, \qquad f_k(x) \;=\; \begin{cases} k - k^2|x|, & |x| \le \dfrac{1}{k} \\ 0, & |x| > \dfrac{1}{k} \end{cases},$$

$$f_k(x) \;=\; \sqrt{\frac{k}{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-kx^2/2}\,, \qquad f_k(x) \;=\; \frac{\sin kx}{\pi x}\,,$$

$$f_k(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\frac{\alpha_k}{x^2+\alpha_k^2}, \text{ kde } \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ je libovolná posloupnost kladných čísel taková, že } \lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0\,,$$

$$f_k(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{2\ell} + \dfrac{1}{\ell}\sum_{m=1}^{k} \cos\dfrac{\pi m}{\ell}x, & |x| \le \ell \\ 0, & |x| > \ell \end{cases}.$$