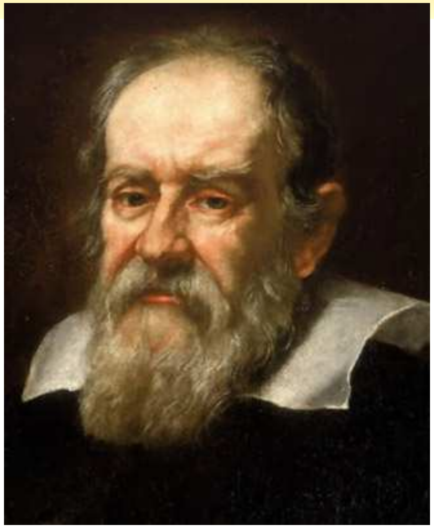
Partnerství ve vzdělávání

Mluví příroda jazykem matematiky?

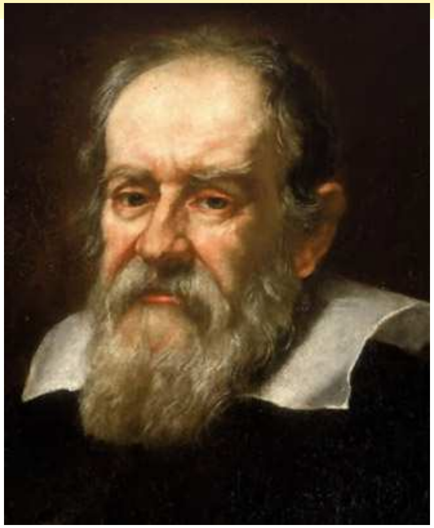
Zdeněk Pospíšil
Masarykova Univerzita Brno, Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Úvod

Galileo Galilei (1564–1642): Matematika je jazyk, kterým Bůh napsal přírodu.



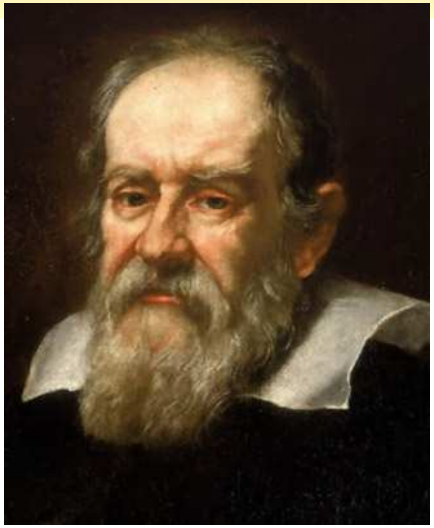
Galileo Galilei (1564–1642): Matematika je jazyk, kterým Bůh napsal přírodu.



John D. Barrow (*1952): Bude-li kdy objevena, obsahem „teorie všeho" bude logicky konzistentní matematika.

Překvapivá účinnost matematiky

Galileo Galilei (1564–1642): Matematika je jazyk, kterým Bůh napsal přírodu.



John D. Barrow (*1952): Bude-li kdy objevena, obsahem „teorie všeho" bude logicky konzistentní matematika.

Proč je matematika tak úspěšným nástrojem porozumění fyzikálnímu světu?

Matematika

Vznik matematiky

Vznik matematiky

Velký zlom: 6. století př.n.l. — krize mythologie

Vznik matematiky

Velký zlom: 6. století př.n.l. — krize mythologie
Řešení:

Velký zlom: 6. století př.n.l. — krize mythologie
Řešení:

- Siddhartha Gótama

Vznik matematiky

Velký zlom: 6. století př.n.l. — krize mythologie
Řešení:

- Siddhartha Gótama: vše je jen představa

Vznik matematiky

Velký zlom: 6. století př.n.l. — krize mythologie
Řešení:

- Siddhartha Gótama: vše je jen představa
- Zarathustra

Vznik matematiky

Velký zlom: 6. století př.n.l. — krize mythologie
Řešení:

- Siddhartha Gótama: vše je jen představa
- Zarathustra: aktuálně probíhá boj dobra a zla

Vznik matematiky

Velký zlom: 6. století př.n.l. — krize mythologie
Řešení:

- Siddhartha Gótama: vše je jen představa
- Zarathustra: aktuálně probíhá boj dobra a zla
- proroci Izraele

Vznik matematiky

Velký zlom: 6. století př.n.l. — krize mythologie
Řešení:

- Siddhartha Gótama: vše je jen představa
- Zarathustra: aktuálně probíhá boj dobra a zla
- proroci Izraele: pravda přichází z budoucnosti

Vznik matematiky

Velký zlom: 6. století př.n.l. — krize mythologie
Řešení:

- Siddhartha Gótama: vše je jen představa
- Zarathustra: aktuálně probíhá boj dobra a zla
- proroci Izraele: pravda přichází z budoucnosti
- Pýthagoras

Vznik matematiky

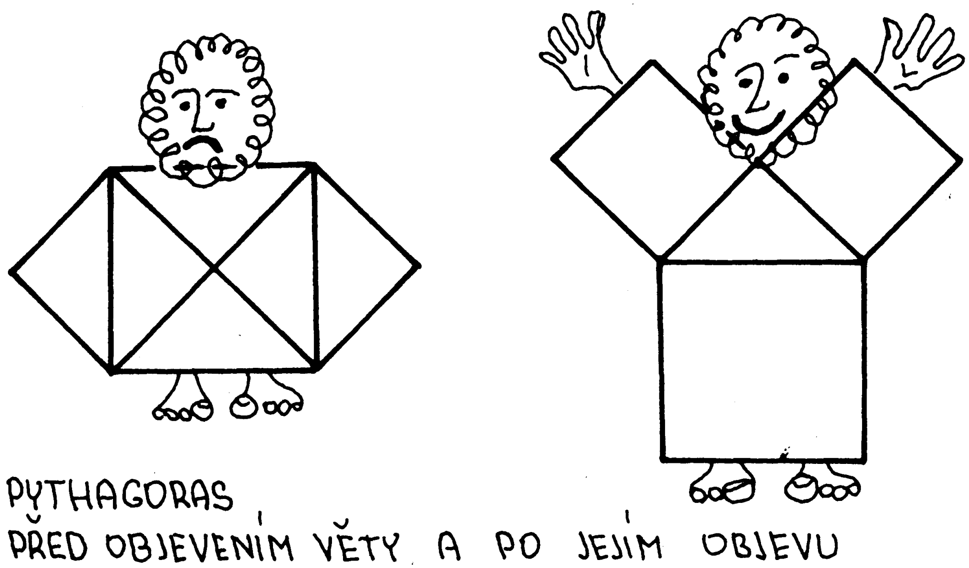
Velký zlom: 6. století př.n.l. — krize mythologie
Řešení:

- Siddhartha Gótama: vše je jen představa
- Zarathustra: aktuálně probíhá boj dobra a zla
- proroci Izraele: pravda přichází z budoucnosti
- Pýthagoras: základem jsoucna je číslo

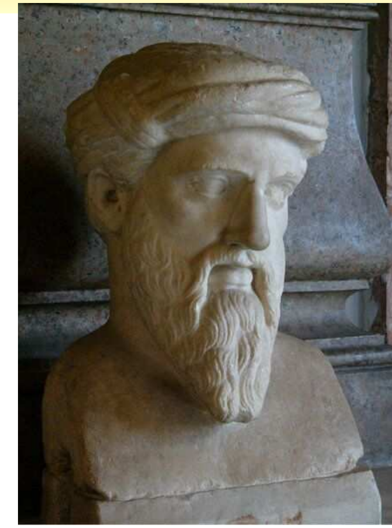
Vznik matematiky

Velký zlom: 6. století př.n.l. — krize mythologie
Řešení:

- Siddhartha Gótama: vše je jen představa
- Zarathustra: aktuálně probíhá boj dobra a zla
- proroci Izraele: pravda přichází z budoucnosti
- Pýthagoras: základem jsoucna je číslo

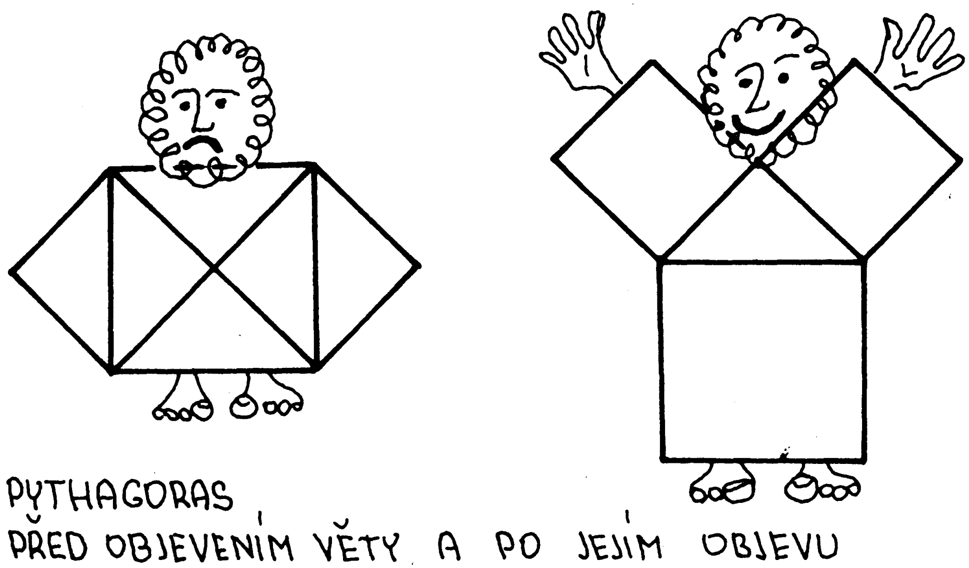


Vznik matematiky



Velký zlom: 6. století př.n.l. — krize mythologie
Řešení:

- Siddhartha Gótama: vše je jen představa
- Zarathustra: aktuálně probíhá boj dobra a zla
- proroci Izraele: pravda přichází z budoucnosti
- Pýthagoras: základem jsoucna je číslo



Co je matematika

Co je matematika

$\mu\alpha\vartheta\eta\sigma\iota\varsigma$	poučení, naučení
$\mu\alpha\vartheta\eta\tau\eta\varsigma$	učedník
$\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha$	nauka, to co je k naučení
	něco mezi $\varepsilon\pi\iota\sigma\tau\eta\mu\eta$ (známost, lat. scientia)
	$\gamma\nu\omega\sigma\iota\varsigma$ (poznání, lat. cognitio)
$\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa o\varsigma$	náležející k nauce (učedník i pojednání)
$\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\alpha$	všechny věci, které jsou této naučné povahy

Co je matematika

$\mu\alpha\vartheta\eta\sigma\iota\varsigma$	poučení, naučení
$\mu\alpha\vartheta\eta\tau\eta\varsigma$	učedník
$\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha$	nauka, to co je k naučení
	něco mezi $\varepsilon\pi\iota\sigma\tau\eta\mu\eta$ (známost, lat. scientia)
	$\gamma\nu\omega\sigma\iota\varsigma$ (poznání, lat. cognitio)
$\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa o\varsigma$	náležející k nauce (učedník i pojednání)
$\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\alpha$	všechny věci, které jsou této naučné povahy (plurál středního rodu)

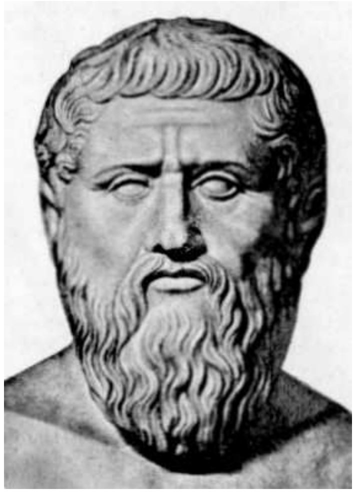
Co je matematika

$\mu\alpha\vartheta\eta\sigma\iota\varsigma$	poučení, naučení
$\mu\alpha\vartheta\eta\tau\eta\varsigma$	učedník
$\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha$	nauka, to co je k naučení
	něco mezi $\varepsilon\pi\iota\sigma\tau\eta\mu\eta$ (známost, lat. scientia)
	$\gamma\nu\omega\sigma\iota\varsigma$ (poznání, lat. cognitio)
$\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa o\varsigma$	náležející k nauce (učedník i pojednání)
$\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\alpha$	všechny věci, které jsou této naučné povahy (plurál středního rodu)

Vlivem pythagorejských učedníků ($\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa o\iota$) se význam slova matematika zúžil na zabývání se čísly a geometrickými objekty.

Užití matematiky

- Platón (428/7–348/7)
  Timaios 28a: „Nejprve jest podle mého mínění stanoviti tuto rozluku: co jest to, co stále jest, ale vzniku nemá, a co jest to, co stále vzniká, ale nikdy není jsoucí."
  Nápis nad branou Akademie: Nevstupuj sem nikdo, kdo nejsi geometrem.

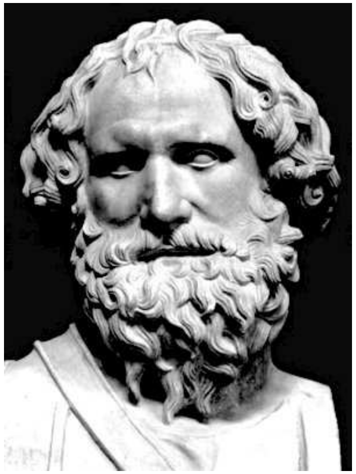


Užití matematiky

- Platón (428/7–348/7)
- Euklides z Alexandrie (365?–280?)
  $\Sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\iota\alpha$, *Elementa:* deduktivní výstavba nauky

Užití matematiky

- Platón (428/7–348/7)
- Euklides z Alexandrie (365?–280?)
- Archimédés (287?–212)
  použití matematiky v mechanice, válečné stroje



Užití matematiky

- Platón (428/7–348/7)
- Euklides z Alexandrie (365?–280?)
- Archimédés (287?–212)
- Galileo Galilei (1564–1642)
  zákony volného pádu

Užití matematiky

- Platón (428/7–348/7)
- Euklides z Alexandrie (365?–280?)
- Archimédés (287?–212)
- Galileo Galilei (1564–1642)
- Isaac Newton (1643–1727)
  Philosophiæ naturalis principia mathematica: „Zajisté přímka a kružnice patří do geometrie, leč i mechaniky se týkají."

Užití matematiky

- Platón (428/7–348/7)
- Euklides z Alexandrie (365?–280?)
- Archimédés (287?–212)
- Galileo Galilei (1564–1642)
- Isaac Newton (1643–1727)
- Fyzika 20. století, teorie relativity a kvantová fyzika

Užití matematiky

- Platón (428/7–348/7)
- Euklides z Alexandrie (365?–280?)
- Archimédés (287?–212)
- Galileo Galilei (1564–1642)
- Isaac Newton (1643–1727)
- Fyzika 20. století, teorie relativity a kvantová fyzika
  „Jakmile vágní a nesystematické užívání řeči vede k obtížím, musí se fyzik vrátit zpět k matematickému schématu."

Povaha matematiky

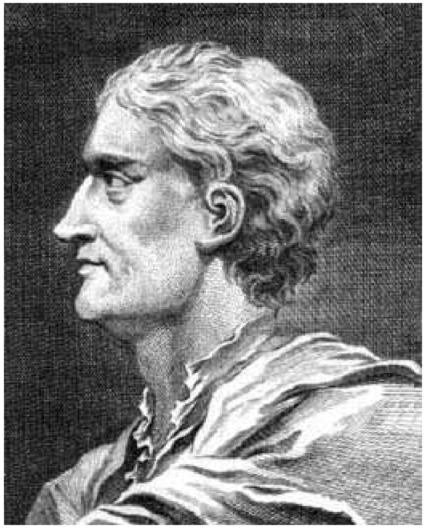
Matematické objekty existují v „jiném světě", skutečnějším než „svět jevů" .
Matematik je objevuje.

Matematické objekty jsou abstrahovány z reálných, jsou to „prázdné formy".
Matematik je vymýšlí.

Matematika ve fyzice

Mechanika

m – hmotnost částice
$x = x(t)$ – poloha částice v čase t



Mechanika

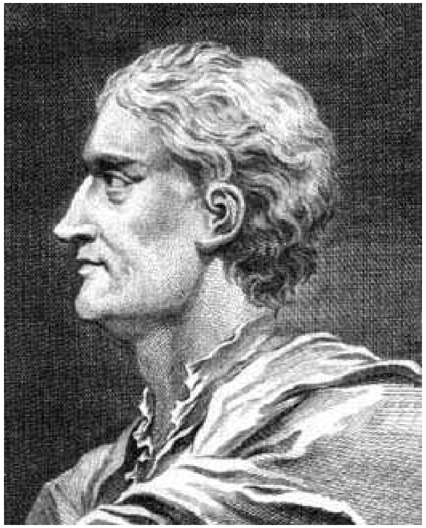
m – hmotnost částice
$x = x(t)$ – poloha částice v čase t

rychlost: $$v = v(t) = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

hybnost: $$p = p(t) = mv, \quad \Delta p = m\Delta v$$

zrychlení: $$a = a(t) = \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

síla: $$F = ma = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$



Mechanika

m – hmotnost částice
$x = x(t)$ – poloha částice v čase t

rychlost: $$v = v(t) = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

hybnost: $$p = p(t) = mv, \quad \Delta p = m\Delta v$$

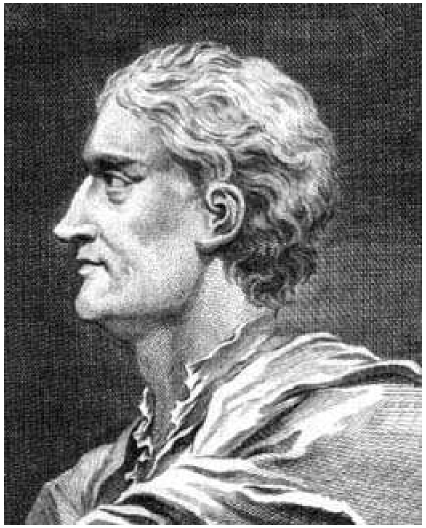
zrychlení: $$a = a(t) = \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

síla: $$F = ma = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

Newtonovy zákony:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{m}p$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = F$$



Termodynamika

N – počet částic plynu

Termodynamika

N – počet částic plynu

V – objem plynu
p – tlak plynu
T – (termodynamická) teplota

Termodynamika

N – počet částic plynu

V – objem plynu
p – tlak plynu
T – (termodynamická) teplota

Stavová rovnice plynu:

$$\frac{pV}{N} = kT$$

Matematika v biologii

Růst homogenní populace

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených" jednotkách

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených" jednotkách

$$x(t+1) = x(t) - \text{uhynulí} + \text{narození}$$

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených" jednotkách

$$x(t+1) = x(t) - \text{uhynulí} + \text{narození}$$
$$x(t+1) = x(t) - dx(t) + bx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in \langle 0, 1 \rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených" jednotkách

$$x(t+1) = x(t) - \text{uhynulí} + \text{narození}$$
$$x(t+1) = x(t) - dx(t) + bx(t) = (1 - d + b)x(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in \langle 0, 1 \rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených" jednotkách

$$x(t+1) = x(t) - \text{uhynulí} + \text{narození}$$
$$x(t+1) = x(t) - dx(t) + bx(t) = (1-d+b)x(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in \langle 0, 1 \rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 - d + b$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených" jednotkách

$$x(t+1) = x(t) - \text{uhynulí} + \text{narození}$$
$$x(t+1) = x(t) - dx(t) + bx(t) = (1-d+b)x(t) = rx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in \langle 0, 1 \rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 - d + b$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených" jednotkách

$$x(t+1) = x(t) - \text{uhynulí} + \text{narození}$$
$$x(t+1) = x(t) - dx(t) + bx(t) = (1-d+b)x(t) = rx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in \langle 0, 1 \rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 - d + b$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

$$x(t+1) = rx(t)$$

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených" jednotkách

$$x(t+1) = x(t) - \text{uhynulí} + \text{narození}$$
$$x(t+1) = x(t) - dx(t) + bx(t) = (1-d+b)x(t) = rx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in \langle 0, 1 \rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 - d + b$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

$$x(t+1) = rx(t)$$

Rekurentní formule pro geometrickou posloupnost

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených" jednotkách

$$x(t+1) = x(t) - \text{uhynulí} + \text{narození}$$
$$x(t+1) = x(t) - dx(t) + bx(t) = (1-d+b)x(t) = rx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in \langle 0, 1 \rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 - d + b$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

$$x(t+1) = rx(t)$$

$x(0) = x_0$ – počáteční velikost populace

$$x(t) = x_0 r^t$$

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených" jednotkách

$$x(t+1) = x(t) - \text{uhynulí} + \text{narození}$$
$$x(t+1) = x(t) - dx(t) + bx(t) = (1-d+b)x(t) = rx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in \langle 0, 1 \rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 - d + b$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

$$x(t+1) = rx(t)$$

$x(0) = x_0$ – počáteční velikost populace

$$x(t) = x_0 r^t$$

$$\begin{cases} r > 1, \text{ tj. } b > d, & \text{populace roste} \\ r = 1, \text{ tj. } b = d, & \text{populace má konstatntní velikost} \\ r < 1, \text{ tj. } b < d, & \text{populace vymírá} \end{cases}$$

Růst homogenní populace

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

Růst homogenní populace

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

růstový koeficient

$$r = \frac{x(t+1)}{x(t)}$$

Růst homogenní populace

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

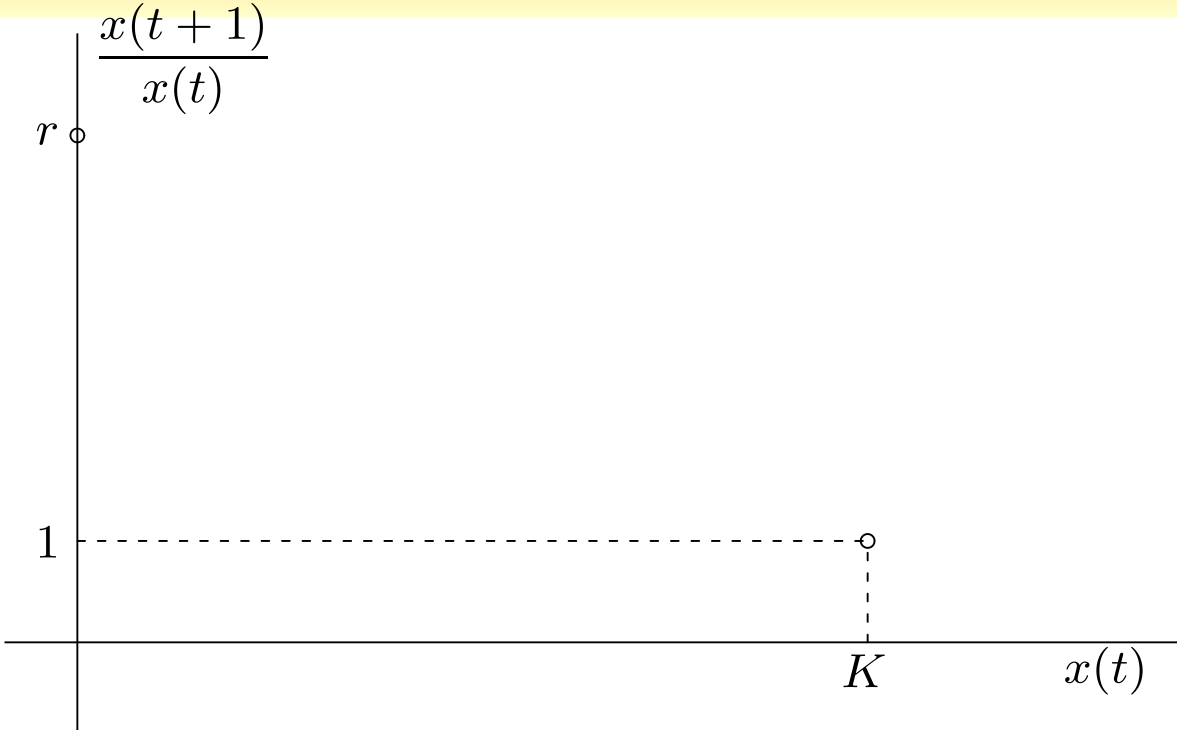
růstový koeficient

$$r = \frac{x(t+1)}{x(t)}$$

závisí na velikosti populace

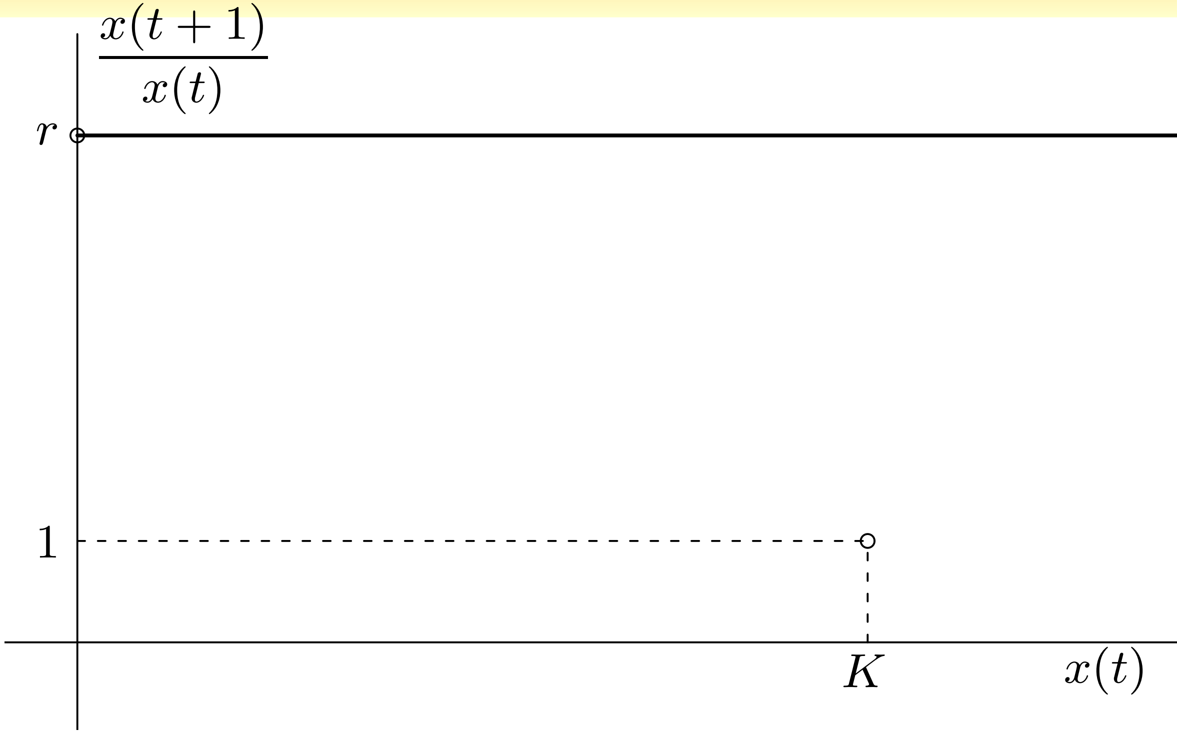
$$r = r\big(x(t)\big)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

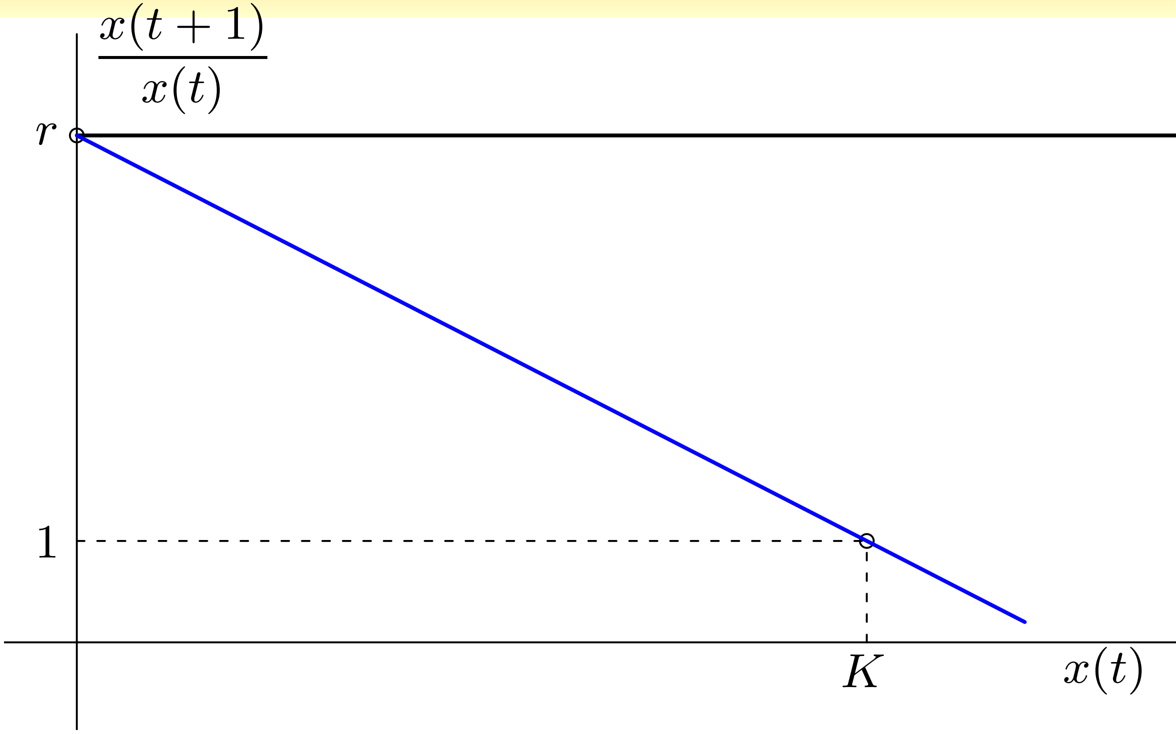
Malthus:
$x(t+1) = rx(t)$



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:
$x(t+1) = rx(t)$

Verhulst:
$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$

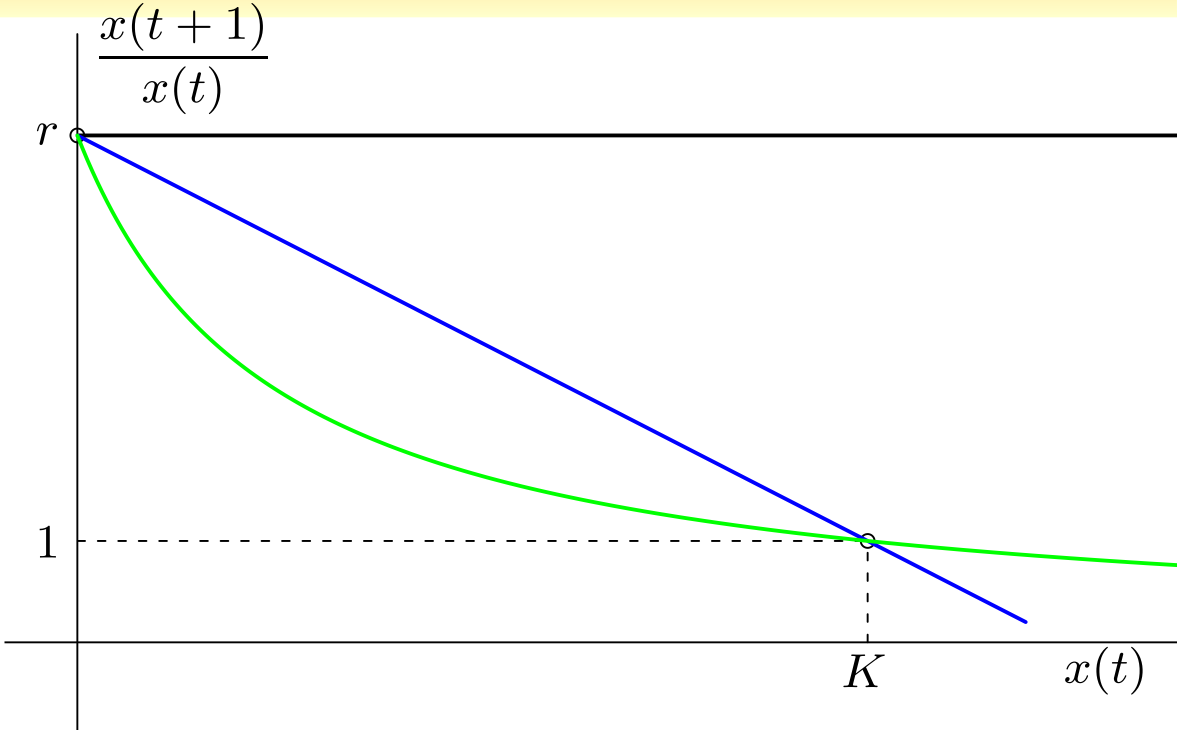


Růst homogenní populace s omezenými zdroji

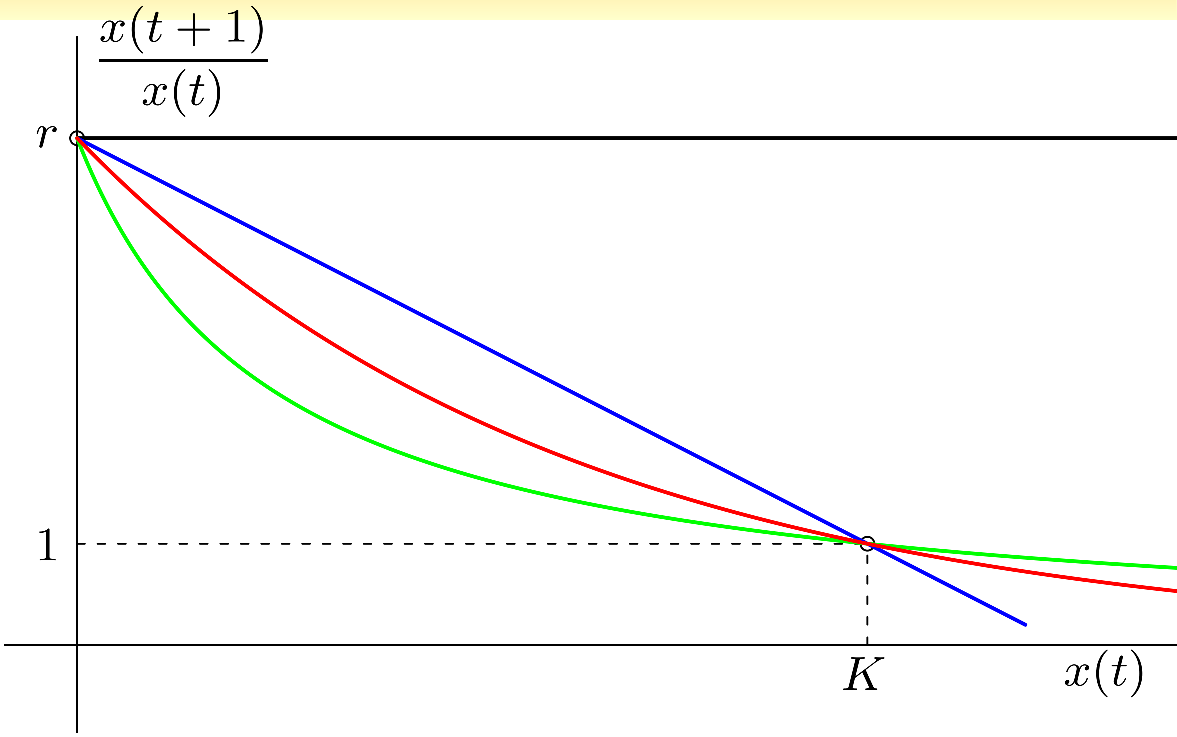
Malthus:
$x(t+1) = rx(t)$

Verhulst:
$x(t+1) = \left(r - (r-1)\dfrac{x(t)}{K} \right) x(t)$

Pielou:
$x(t+1) = \dfrac{r}{1 + (r-1)\dfrac{x(t)}{K}} x(t)$



Malthus:
$x(t+1) = rx(t)$



Verhulst:
$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$

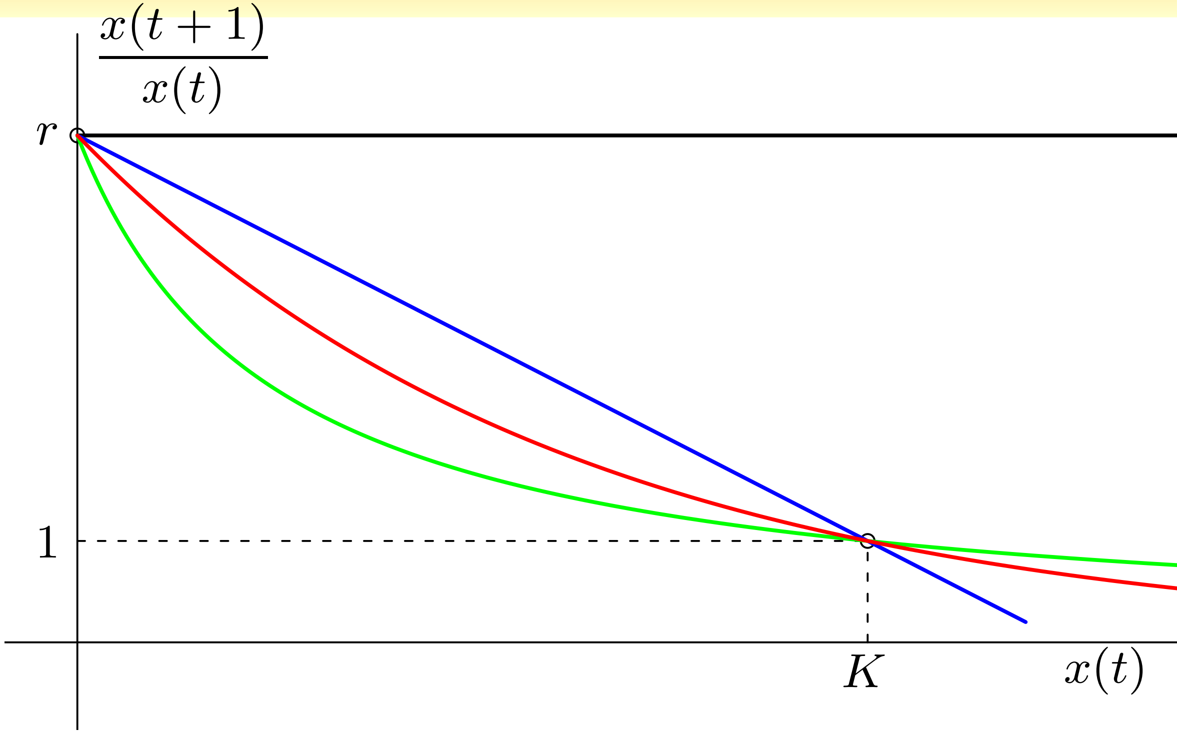
Pielou:
$x(t+1) = \dfrac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$

Ricker:
$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:
$$x(t+1) = rx(t)$$
$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Verhulst:
$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$



Pielou:
$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

Ricker:
$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:

$x(t+1) = rx(t)$

$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$

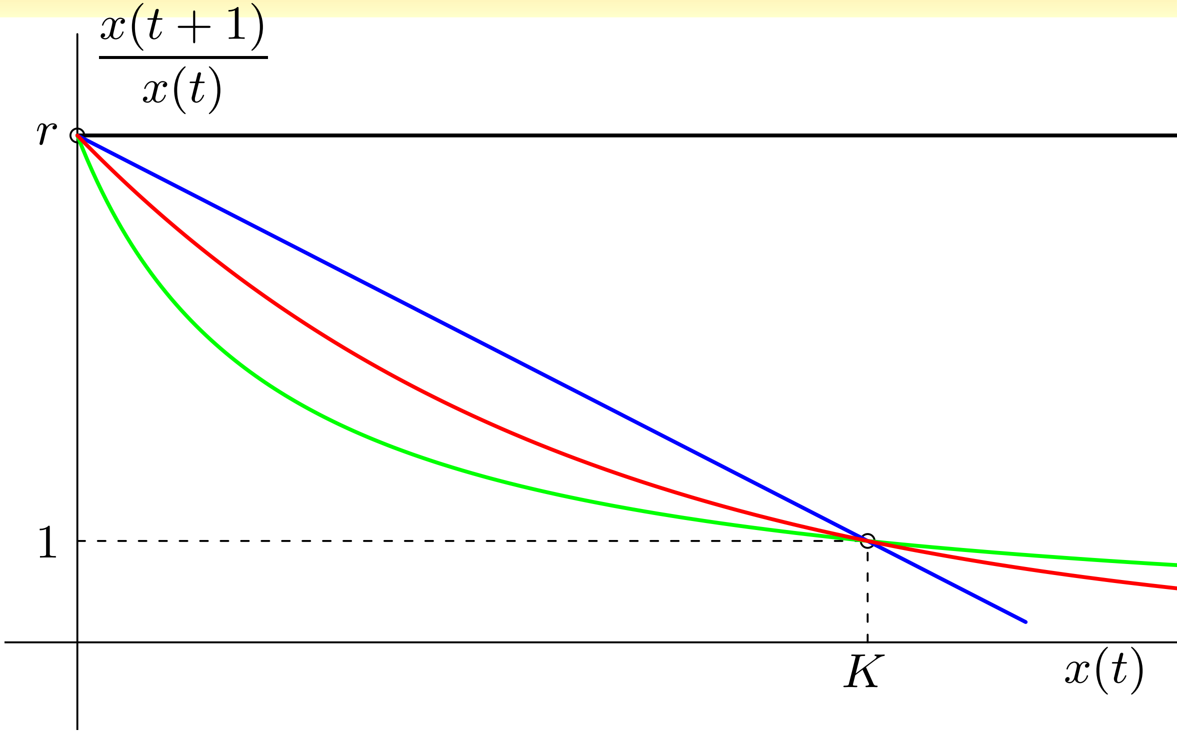
Verhulst:

$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$

Pielou:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$



Ricker:

$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:

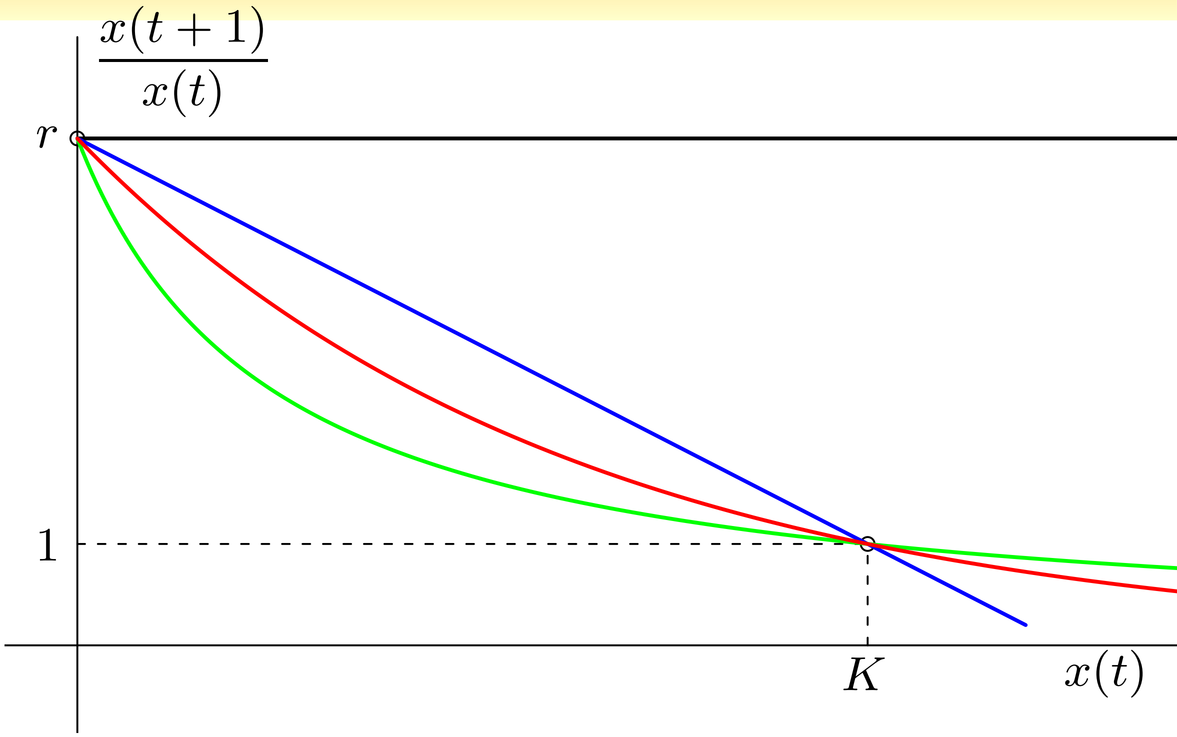
$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Verhulst:

$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$



Pielou:

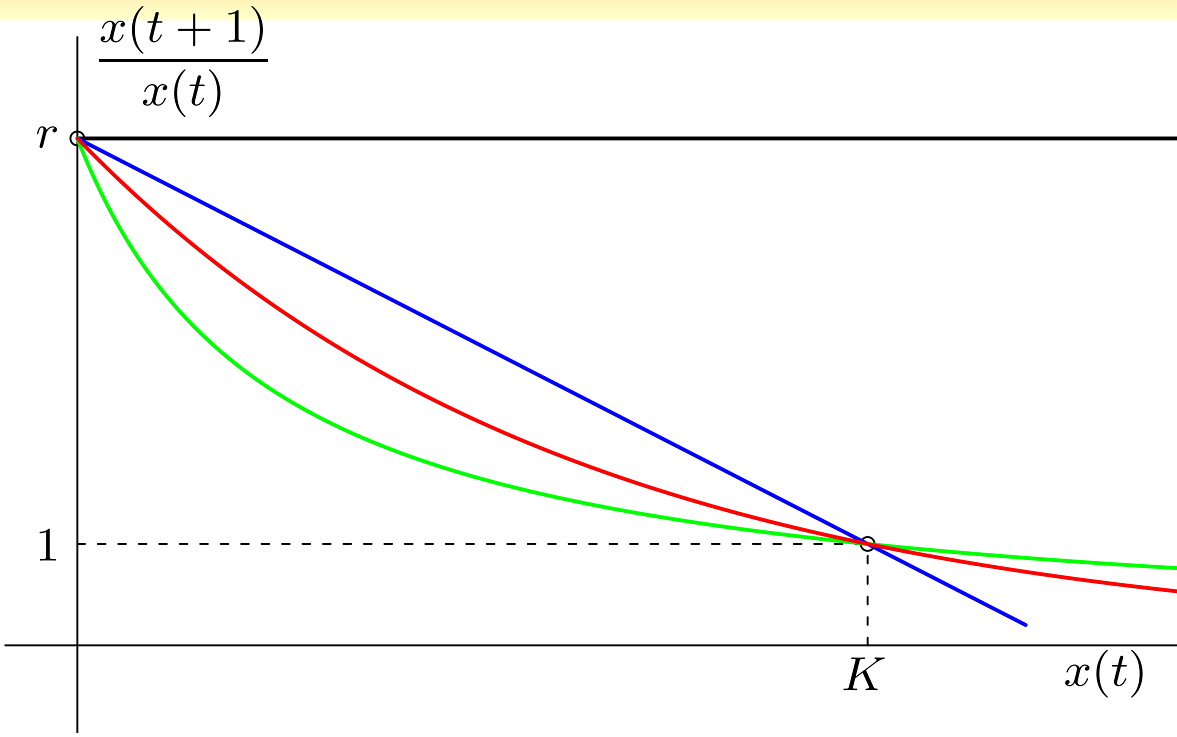
$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{(r-1)}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$

Ricker:

$$x(t+1) = r^{1 - \frac{x(t)}{K}} x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Malthus:

$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Verhulst:

$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$

Pielou:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{r}\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t+1)$$

Ricker:

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:

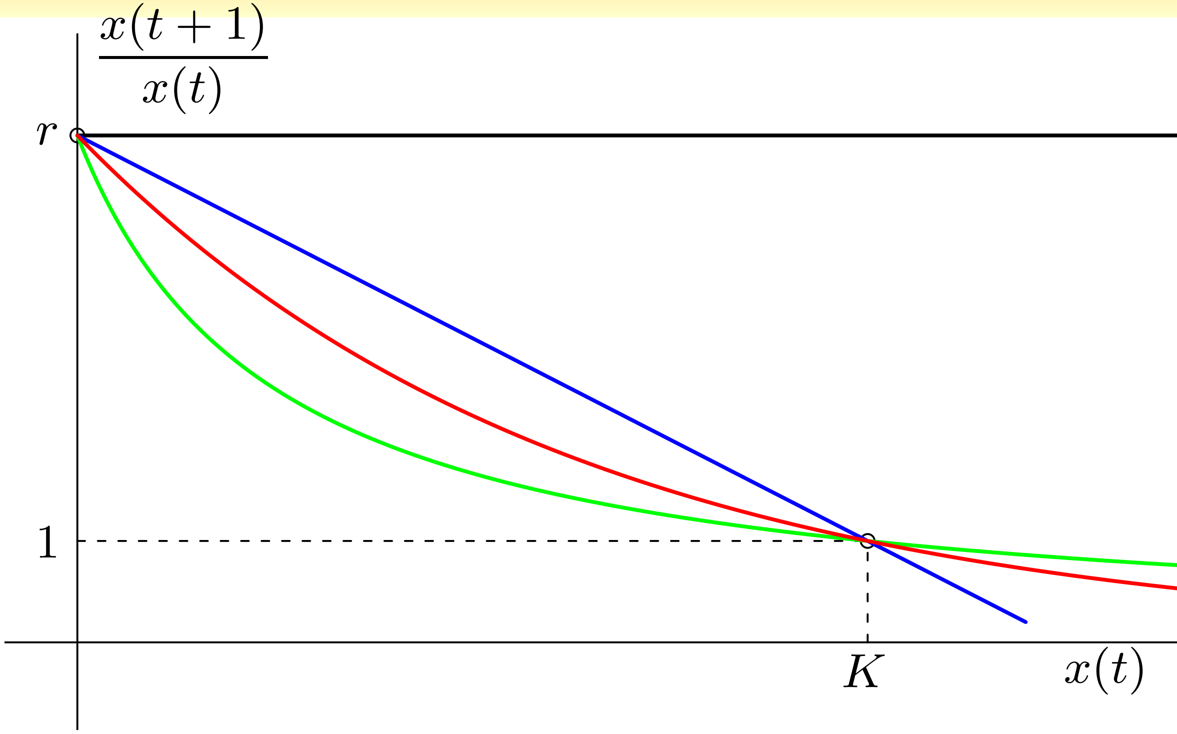
$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Verhulst:

$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$



Pielou:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{r}\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t+1)$$

Ricker:

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \left(r^{1-\frac{x(t)}{K}} - 1 \right) x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:

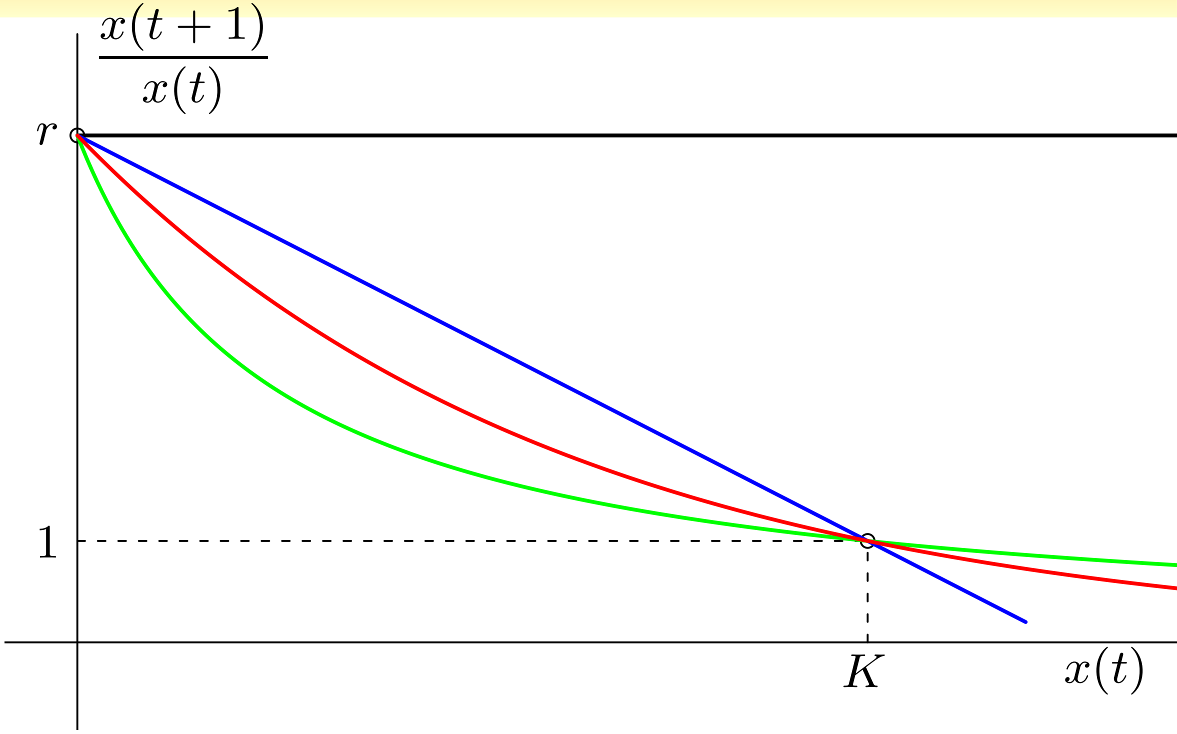
$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Verhulst:

$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K}\right)x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)x(t)$$



Pielou:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}}\,x(t)$$

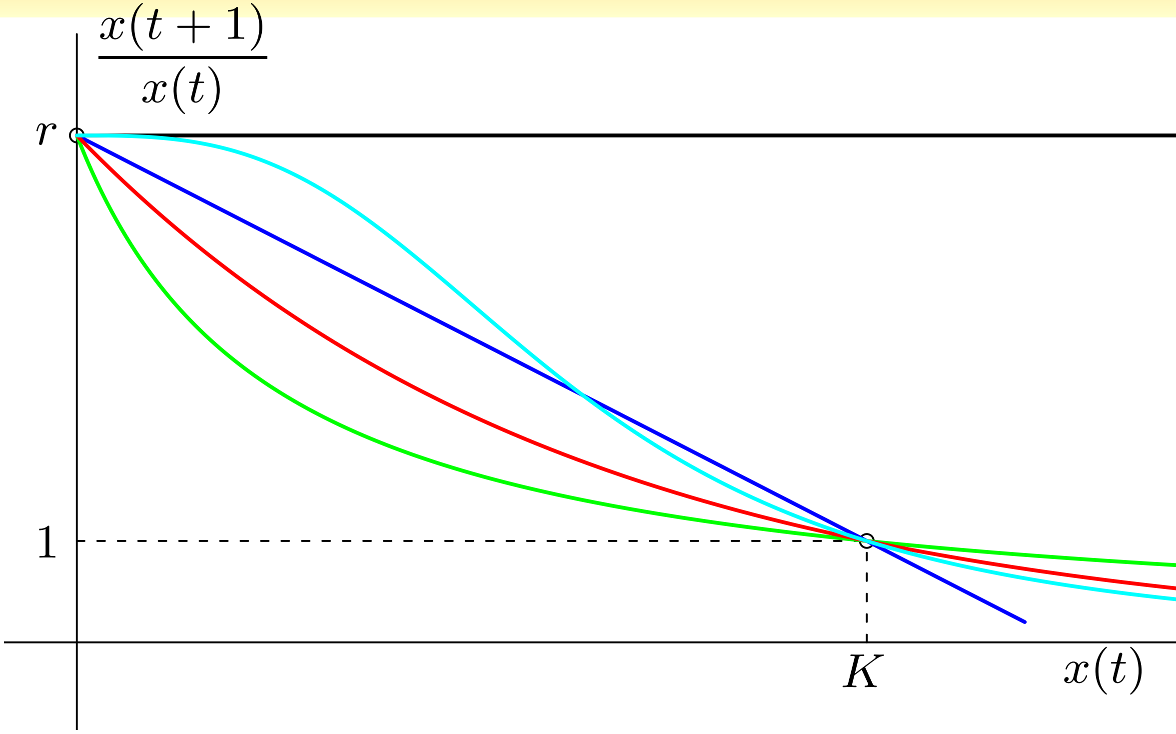
$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{r}\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)x(t+1)$$

Ricker:

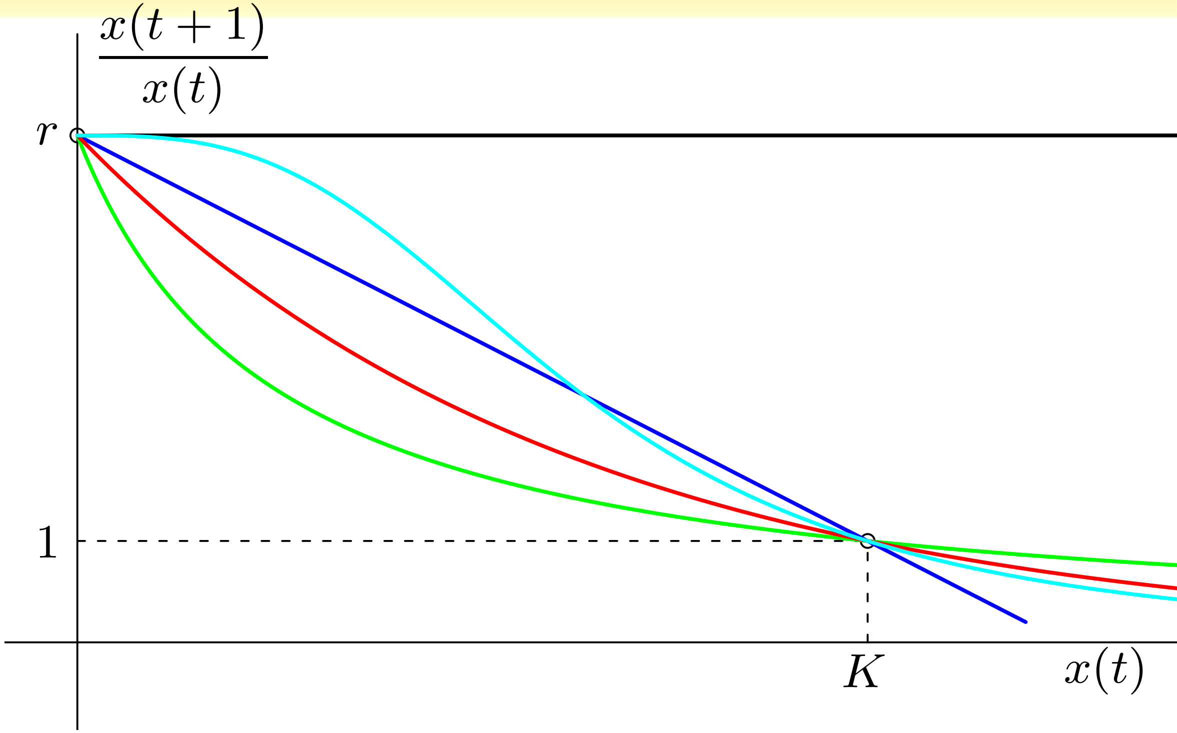
$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}}x(t)$$

$$\Delta x(t) = \left(r^{1-\frac{x(t)}{K}} - 1\right)x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

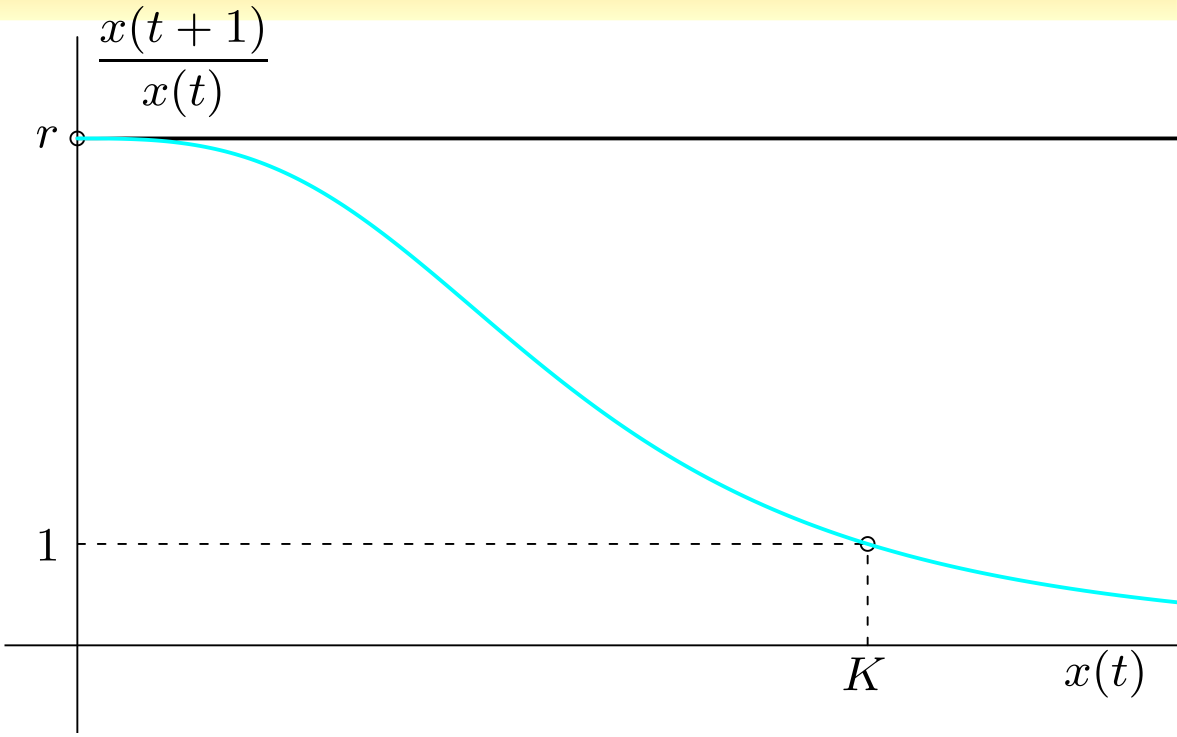


Základní rovnice:

$$x(t+1) = \frac{r}{1+(r-1)\left(\dfrac{x(t)}{K}\right)^{\beta}}x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{1+(r-1)\left(\dfrac{x(t)}{K}\right)^{\beta}}\left(1-\left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}\right)x(t) = \frac{r-1}{r}\left(1-\left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}\right)x(t+1)$$

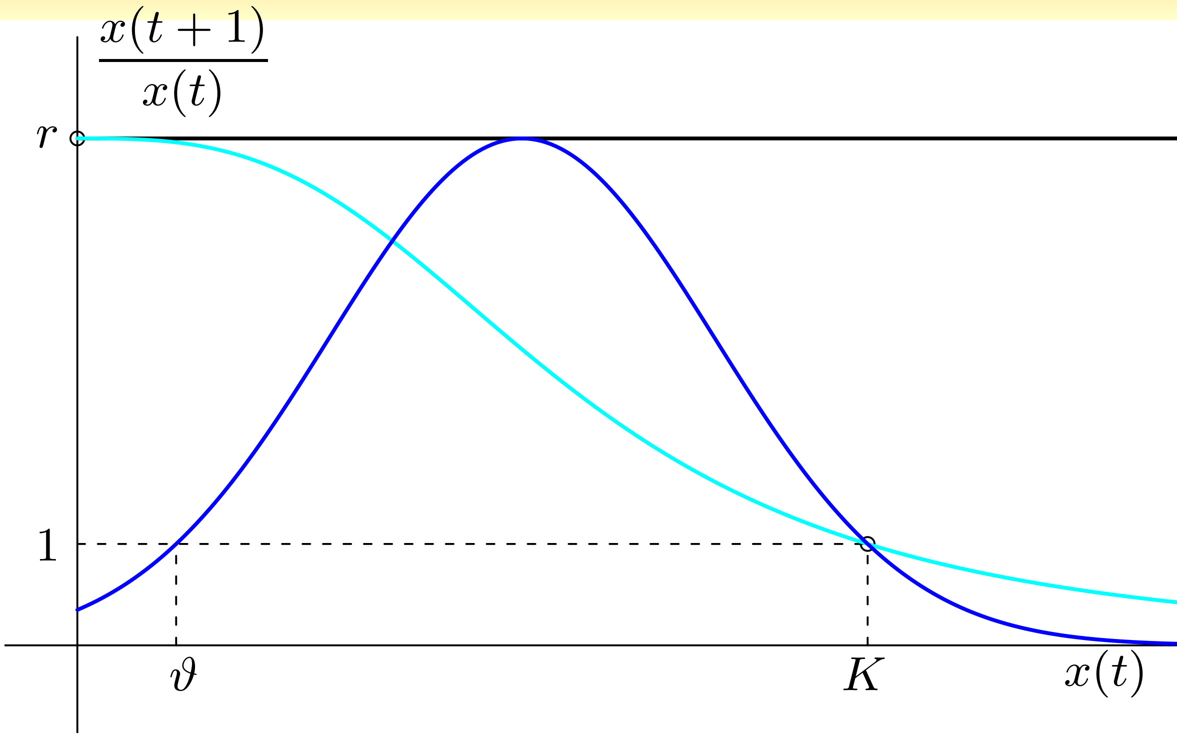
Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Rovnice se zpožděním:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\left(\frac{x(t-1)}{K}\right)^{\beta}} x(t)$$

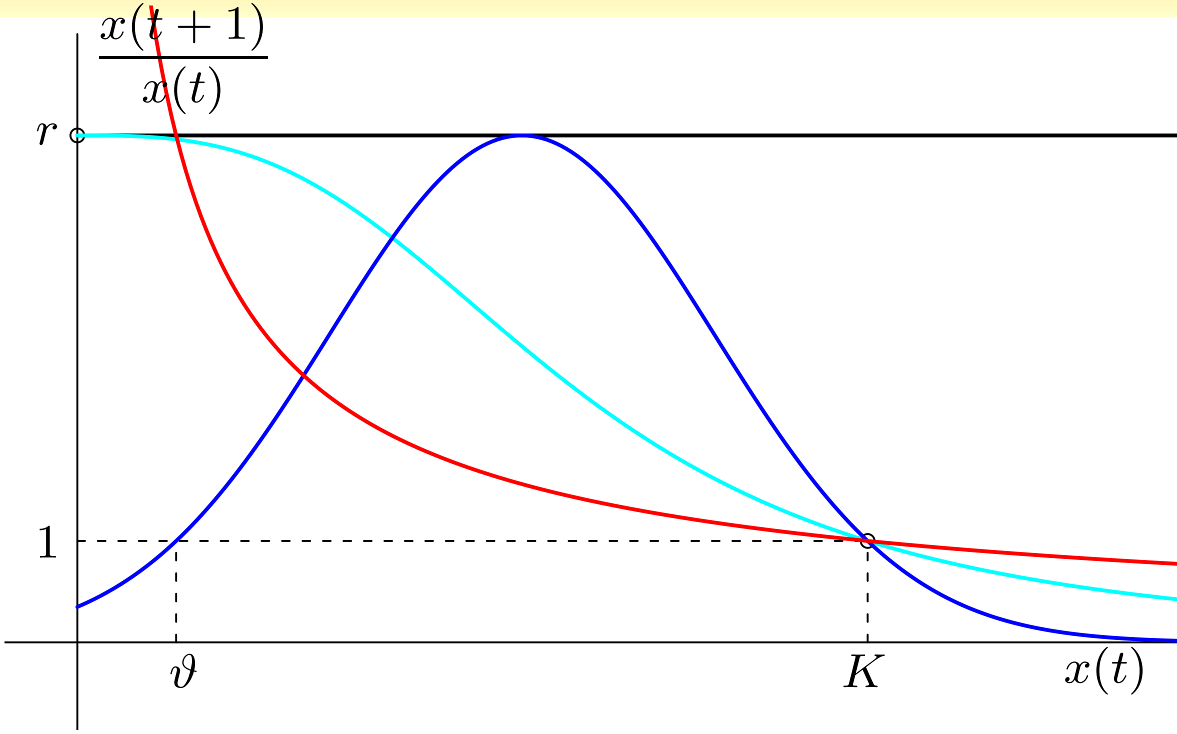
Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Allee:

$$x(t+1) = r^{\frac{4K}{(K-\vartheta)^2}\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)(x-\vartheta)}x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Gompertz:

$$x(t+1) = \left({\color{red} r x(t)^{-\frac{\ln r}{\ln K}}} \right) x(t)$$

Interagující populace

Interagující populace

Růst jedné populace (Rickerův model)

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t), \quad x(0) = x_0$$

Interagující populace

Růst jedné populace (Rickerův model)

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t), \quad x(0) = x_0$$

růstový koeficient: $r^{1-\frac{x(t)}{K}}$ klesá s rostoucí velikostí populace

Interagující populace

Růst jedné populace (Rickerův model)

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t), \quad x(0) = x_0$$

růstový koeficient: $r^{1-\frac{x(t)}{K}}$ klesá s rostoucí velikostí populace

$x(t)$, $y(t)$ – velikosti dvou interagujících populací v čase t

Růst jedné populace (Rickerův model)

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}}x(t), \quad x(0) = x_0$$

růstový koeficient: $r^{1-\frac{x(t)}{K}}$ klesá s rostoucí velikostí populace

$x(t)$, $y(t)$ – velikosti dvou interagujících populací v čase t

Lotka-Volterra:

$$x(t+1) = r_1^{1-\frac{x(t)}{K_1}-\alpha_{12}y(t)}x(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t+1) = r_2^{1-\frac{y(t)}{K_2}-\alpha_{21}x(t)}y(t), \quad y(0) = y_0$$

Interagující populace

Růst jedné populace (Rickerův model)

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t), \quad x(0) = x_0$$

růstový koeficient: $r^{1-\frac{x(t)}{K}}$ klesá s rostoucí velikostí populace

$x(t)$, $y(t)$ – velikosti dvou interagujících populací v čase t

Lotka-Volterra:

$$x(t+1) = r_1^{1-\frac{x(t)}{K_1}-\alpha_{12}y(t)} x(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t+1) = r_2^{1-\frac{y(t)}{K_2}-\alpha_{21}x(t)} y(t), \quad y(0) = y_0$$

$\alpha_{12} > 0$, $\alpha_{21} > 0$ – konkurence, kompetice

Interagující populace

Růst jedné populace (Rickerův model)

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t), \quad x(0) = x_0$$

růstový koeficient: $r^{1-\frac{x(t)}{K}}$ klesá s rostoucí velikostí populace

$x(t)$, $y(t)$ – velikosti dvou interagujících populací v čase t

Lotka-Volterra:

$$x(t+1) = r_1^{1-\frac{x(t)}{K_1}-\alpha_{12}y(t)} x(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t+1) = r_2^{1-\frac{y(t)}{K_2}-\alpha_{21}x(t)} y(t), \quad y(0) = y_0$$

$\alpha_{12} > 0$, $\alpha_{21} > 0$ – konkurence, kompetice
$\alpha_{12} < 0$, $\alpha_{21} < 0$ – mutualismus, symbióza

Interagující populace

Růst jedné populace (Rickerův model)

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t), \quad x(0) = x_0$$

růstový koeficient: $r^{1-\frac{x(t)}{K}}$ klesá s rostoucí velikostí populace

$x(t)$, $y(t)$ – velikosti dvou interagujících populací v čase t

Lotka-Volterra:

$$x(t+1) = r_1^{1-\frac{x(t)}{K_1}-\alpha_{12}y(t)} x(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t+1) = r_2^{1-\frac{y(t)}{K_2}-\alpha_{21}x(t)} y(t), \quad y(0) = y_0$$

$\alpha_{12} > 0$, $\alpha_{21} > 0$ – konkurence, kompetice
$\alpha_{12} < 0$, $\alpha_{21} < 0$ – mutualismus, symbióza
$\alpha_{12} > 0$, $\alpha_{21} < 0$ – predace (populace s velikostí x je kořist, s velikostí y je dravec)

Strukturovaná populace

Strukturovaná populace

Leonardo Pisánský, Fibonacci (1170–1250):

> *Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.*

Strukturovaná populace

Leonardo Pisánský, Fibonacci (1170–1250):

> *Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.*

$x(t)$ – počet párů králíků v t-tém měsíci

Leonardo Pisánský, Fibonacci (1170–1250):

> *Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.*

$x(t)$ – počet párů králíků v t-tém měsíci

$$x(t) = x(t-1) + x(t-2)$$

Strukturovaná populace

Leonardo Pisánský, Fibonacci (1170–1250):

> *Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.*

$x(t)$ – počet párů králíků v t-tém měsíci

$$x(t) = x(t-1) + x(t-2)$$

$$x(t+2) = x(t+1) + x(t), \quad x(0) = 1, \; x(1) = 2$$

Strukturovaná populace

Leonardo Pisánský, Fibonacci (1170–1250):

> *Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.*

$x(t)$ – počet párů králíků v t-tém měsíci

$$x(t) = x(t-1) + x(t-2)$$

$$x(t+2) = x(t+1) + x(t), \quad x(0) = 1,\ x(1) = 2$$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x(t)$	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Strukturovaná populace

$x(t)$ – množství juvenilních „jedinců" v čase t
$y(t)$ – množství plodných „jedinců" v čase t

Strukturovaná populace

$x(t)$ – množství juvenilních „jedinců" v čase t
$y(t)$ – množství plodných „jedinců" v čase t

σ_1 – pravděpodobnost, že juvenilní „jedinec" přežije jedno období
σ_2 – pravděpodobnost, že plodný „jedinec" přežije jedno období
γ – pravděpodobnost, že juvenilní „jedinec" během období dospěje
b – plodnost, tj. průměrný počet potomků plodného „jedince" za jedno období

Strukturovaná populace

$x(t)$ – množství juvenilních „jedinců" v čase t
$y(t)$ – množství plodných „jedinců" v čase t

σ_1 – pravděpodobnost, že juvenilní „jedinec" přežije jedno období
σ_2 – pravděpodobnost, že plodný „jedinec" přežije jedno období
γ – pravděpodobnost, že juvenilní „jedinec" během období dospěje
b – plodnost, tj. průměrný počet potomků plodného „jedince" za jedno období

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \sigma_1(1-\gamma)\,x(t) + b\,y(t) \\ y(t+1) &= \sigma_1\gamma\,x(t) + \sigma_2\,y(t) \end{aligned}$$

Strukturovaná populace

$x(t)$ – množství juvenilních „jedinců" v čase t
$y(t)$ – množství plodných „jedinců" v čase t

σ_1 – pravděpodobnost, že juvenilní „jedinec" přežije jedno období
σ_2 – pravděpodobnost, že plodný „jedinec" přežije jedno období
γ – pravděpodobnost, že juvenilní „jedinec" během období dospěje
b – plodnost, tj. průměrný počet potomků plodného „jedince" za jedno období

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \sigma_1(1-\gamma)\,x(t) + b\,y(t) \\ y(t+1) &= \sigma_1\gamma\,x(t) + \sigma_2\,y(t) \end{aligned}$$

$$x(t+2) = \big(\sigma_1(1-\gamma)+\sigma_2\big)x(t+1) + \sigma_1\big(b\gamma - \sigma_2(1-\gamma)\big)x(t)$$

Strukturovaná populace

$x(t)$ – množství juvenilních „jedinců" v čase t
$y(t)$ – množství plodných „jedinců" v čase t

σ_1 – pravděpodobnost, že juvenilní „jedinec" přežije jedno období
σ_2 – pravděpodobnost, že plodný „jedinec" přežije jedno období
γ – pravděpodobnost, že juvenilní „jedinec" během období dospěje
b – plodnost, tj. průměrný počet potomků plodného „jedince" za jedno období

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \sigma_1(1-\gamma)\,x(t) + b\,y(t) \\ y(t+1) &= \sigma_1\gamma\,x(t) + \sigma_2\,y(t) \end{aligned}$$

$$x(t+2) = \big(\sigma_1(1-\gamma)+\sigma_2\big)x(t+1) + \sigma_1\big(b\gamma - \sigma_2(1-\gamma)\big)x(t)$$

Parametry přežití, dospívání a plodnosti mohou záviset na velikosti populace, např.

$$\sigma_1 = \Sigma_1 \mathrm{e}^{-s_1\left(x(t)+y(t)\right)},\ \sigma_2 = \Sigma_2 \mathrm{e}^{-s_2\left(x(t)+y(t)\right)},\ \gamma = \Gamma \mathrm{e}^{-g\left(x(t)+y(t)\right)},$$

$$b = B\mathrm{e}^{-c\left(x(t)+y(t)\right)}$$

K dalšímu čtení

- JOHN D. BARROW. *Pí na nebesích. O počítání, myšlení a bytí.* Mladá fronta: Praha, 2000.
- MARIO LIVIO. *Je Bůh matematik?* Argo/Dokořán: Praha, 2010.
- IAN STEWART. *Čísla přírody. Neskutečná skutečnost matematické představivosti.* Archa: Bratislava, 1996.
- IAN STEWART. *Hraje Bůh kostky? Nová matematika chaosu.* Argo/Dokořán: Praha, 2009.
- MILAN MAREŠ. *Příběhy matematiky. Stručná historie královny věd.* Pistorius&Olšanská: Příbram, 2008.
- VOJTĚCH JAROŠÍK. *Růst a regulace populací.* Academia: Praha, 2005
- JOHN A. ADAM. *Mathematics in Nature. Modeling Patterns in the Natural World.* Princeton University Press: Princeton&Oxford, 2003.