Převyprávění Gödelova důkazu nutné existence Boha
Technické podrobnosti

Důkaz: Konečná posloupnost výroků (korektně utvořených formulí nějakého logického kalkulu), z nichž každý je (logickým) axiomem, postulátem (teorie), výrokem již dokázaným nebo vznikl z předchozích členů posloupnosti pomocí definovaných odvozovacích pravidel.

Důkaz výroku Φ: Důkaz, jehož posledním členem je Φ.

Důkaz výroku Φ sporem: Důkaz, jehož prvním členem je výrok $\neg\Phi$ a v němž se vyskytují výroky Θ a $\neg\Theta$.

Komentář: Velká řecká písmena označují libovolný správně utvořený výrok, symbol $\neg\Phi$ označuje negaci výroku Φ.

Axiomy: Výrokové logiky

(v1) $\Phi \to (\Psi \to \Phi)$

(v2) $\big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$

(v3) $(\Phi \to \Psi) \to \big((\Phi \to \neg\Psi) \to \neg\Phi\big)$

(v4) $\neg\neg\Phi \to \Phi$

Modální logiky

(m1) $\Box(\Phi \to \Psi) \to (\Box\Phi \to \Box\Psi)$

(m2) $\Box\Phi \to \Phi$

(m3) $\Diamond\Phi \to \Box\Diamond\Phi$

(m4) $\neg\Box\Phi \equiv \Diamond\neg\Phi, \qquad \neg\Diamond\Phi \equiv \Box\neg\Phi$

Predikátové logiky

(p1) $(\forall\xi)\Phi \to \Phi$

(p2) $\neg(\forall\xi)\Phi \equiv (\exists\xi)\neg\Phi, \qquad \neg(\exists\xi)\Phi \equiv (\forall\xi)\neg\Phi$

Komentář: Symbol $\to$ označuje implikaci. Pomocí implikace a negace jsou definovány další výrokové spojky $\&$ (konjunkce) a $\equiv$ (ekvivalence): $\Phi \ \& \ \Psi$ je definována jako $\neg(\Phi \to \neg\Psi)$; $\Phi \equiv \Psi$ je definována jako $(\Phi \to \Psi) \ \& \ (\Psi \to \Phi)$.

Axiomy **(v1)**–**(v4)** jsou axiomy klasického výrokového počtu. To znamený, že všechny výrokové tautologie lze dokázat a dokazatelný výrok (neobsahující kvantifikátory ani modality) je tautologií.

Modální symboly $\Box$, resp. $\Diamond$, označují nutnost, resp. možnost. Axiomy **(m1)**–**(m3)** jsou axiomy modálního výrokového počtu *S5*. Druhá formule v **(m4)** je důsledkem první a naopak; tyto formule vyjadřují vztah mezi nutností a možností.

Podobně druhá formule **(p2)** je důsledkem první a naopak; vyjadřují vztah mezi obecným a existenčním kvantifikátorem.

Axiom **(p1)** se nazývá axiom specifikace. Pokud se proměnná ξ ve formuli Φ vyskytuje, lze každý její výskyt v konsekventu (na pravé straně implikace) nahradit libovolnou jinou proměnnou nebo konstantou.

Ke klasickému predikátovému počtu patří ještě axiom distribuce (tj. $(\forall\xi)(\Phi \to \Psi) \to \big(\Phi \to (\forall\xi)\Psi\big)$ pokud proměnná ξ není ve formuli Φ podstatně volná) a axiomy rovnosti. Axiom distribuce nebudeme potřebovat, potřebné důsledky axiomů rovnosti jsou shrnuty v odvozovacím pravidle **(op3)**.

Odvozovací pravidla:

(op1) $\Phi \to \Psi, \Phi \mid \Psi$.

(op2) $\Phi \ \& \ \Psi \mid \Phi$. $\quad \Phi \ \& \ \Psi \mid \Psi$. $\quad \Phi, \Psi \mid \Phi \ \& \ \Psi$.

(op3) Je-li $\Phi \equiv \Psi$ dokazatelným výrokem, axiomem, postulátem nebo definicí, pak každý výskyt Φ lze nahradit Ψ.

(op4) $\Phi \mid \Box\Phi$.

(op5) $\Phi \mid \forall(\xi)\Phi$.

(op6) $(\exists\xi)\Phi(\xi) \mid \Phi(\alpha)$; přitom α je symbol, který se v důkazu dosud neobjevil.

(op7) $(\forall\xi)\Phi(\xi) \mid \Phi(\alpha)$; přitom α je symbol, který se v důkazu objevil před výrokem $\forall(\xi)\Phi(\xi)$.

Komentář: Zápis $\Phi_1, \Phi_2 \ldots \mid \Psi_1, \Psi_2, \ldots$ vyjadřuje, že výroky $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ lze odvodit z výroků $\Phi_1, \Phi_2 \ldots$, tj. že výroky $\Phi_1, \Phi_2 \ldots$ jsou v důkazu před výroky $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$.

Pravidlo **(op1)** je klasický *modus ponens.*

Pravidla **(op2)** pro odvození pomocí konjunkce jsou důsledkem **(op1)** a definice konjunkce.

Pravidlo **(op3)** vyjadřuje substituci výroků.

Pravidlo **(op4)** je odvozovacím pravidlem modálního výrokového počtu *S5.*

Pravidlo **(op5)** je pravidlem generalizace klasického predikátového počtu. Proměnná ξ musí samozřejmě být ve výroku Φ volná.

Pravidla **(op6)** a **(op7)** jsou pravidly konkretizace.

Jako cvičení dokážeme tři tvrzení, která budou v dalších úvahách potřebná. Důkazy zapisujeme po řádcích, každý řádek má své číslo a je k němu připojen komentář, který axiom nebo tvrzení bylo použito nebo z kterých řádků a jakého odvozovacího pravidla daný řádek plyne. Při použití pravidla **(op3)** je také uvedena použitá ekvivalence.

Cv1 $\quad \Diamond\Box\Phi \to \Box\Phi$

D.:	1. $\Diamond\neg\Phi \to \Box\Diamond\neg\Phi$	**(m3)**
	2. $\neg\Box\Diamond\neg\Phi \to \neg\Diamond\neg\Phi$	1. **(op3)** $a \to b \equiv \neg b \to \neg a$
	3. $\neg\Box\neg\neg\Box\Phi \to \neg\neg\Box\Phi$	2. **(op3)** **(m4)**
	4. $\neg\neg\Diamond\Box\Phi \to \neg\neg\Box\Phi$	3. **(op3)** **(m4)**
	5. $\Diamond\Box\Phi \to \Box\Phi$	4. **(op3)** $\neg\neg a \equiv a$
		q.e.d.

Cv2 $(\Phi \to \Psi) \to (\Diamond\Phi \to \Diamond\Psi)$

D.: 1. $\neg\big((\Phi \to \Psi) \to (\Diamond\Phi \to \Diamond\Psi)\big)$	pro důkaz sporem
2. $\Box(\neg\Psi \to \neg\Phi) \to (\Box\neg\Phi \to \Box\neg\Phi)$	**(m1)**
3. $(\Phi \to \Psi)\ \ \&\ \ \neg(\Diamond\Phi \to \Diamond\Psi)$	1. **(op3)** $\neg(a \to b) \equiv a\ \ \&\ \ \neg b$
4. $\neg(\Diamond\Phi \to \Diamond\Psi)$	3. **(op2)**
5. $\Diamond\Phi\ \ \&\ \ \neg\Diamond\Psi$	4. **(op3)** $\neg(a \to b) \equiv a\ \ \&\ \ \neg b$
6. $\Diamond\Phi$	5. **(op2)**
7. $\neg\Diamond\Psi$	5. **(op2)**
8. $\Box\neg\Psi$	7. **(m4)**
9. $\Phi \to \Psi$	3. **(op2)**
10. $\neg\Psi \to \neg\Phi$	9. **(op3)** $a \to b \equiv \neg b \to \neg a$
11. $\Box(\neg\Psi \to \neg\Phi)$	10. **(op4)**
12. $\Box\neg\Psi \to \Box\neg\Phi$	2. 11. **(op1)**
13. $\Box\neg\Phi$	8. 12. **(op1)**
14. $\neg\Diamond\Phi$	13. **(m4)**
	6. 14. spor, q.e.d

Cv3 $\big(\Phi(\xi) \to \Psi\big) \to \big((\exists\zeta)\Phi(\zeta) \to \Psi\big)$

D.: 1. $\neg\Big(\big(\Phi(\xi) \to \Psi\big) \to \big((\exists\zeta)\Phi(\zeta) \to \Psi\big)\Big)$	pro důkaz sporem
2. $\big(\Phi(\xi) \to \Psi\big)\ \ \&\ \ \neg\big((\exists\zeta)\Phi(\zeta) \to \Psi\big)$	1. **(op3)** $\neg(a \to b) \equiv a\ \ \&\ \ \neg b$
3. $\neg\big((\exists\zeta)\Phi(\zeta) \to \Psi\big)$	2. **(op2)**
4. $(\exists\zeta)\Phi(\zeta)\ \ \&\ \ \neg\Psi$	3. **(op3)** $\neg(a \to b) \equiv a\ \ \&\ \ \neg b$
5. $(\exists\zeta)\Phi(\zeta)$	4. **(op2)**
6. $\Phi(\alpha)$	5. **(op6)**
7. $\neg\Psi$	4. **(op2)**
8. $\Phi(\xi) \to \Psi$	2. **(op2)**
9. $\neg\Psi \to \neg\Phi(\xi)$	8. **(op3)** $a \to b \equiv \neg b \to \neg a$
10. $\neg\Phi(\xi)$	7. 9. **(op1)**
11. $(\forall\xi)\neg\Phi(\xi)$	10. **(op5)**
12. $\neg\Phi(\alpha)$	11. **(op7)**
	6. 12. spor, q.e.d.

Gödelův systém:

Abeceda: Objekty: $a, b, c, \ldots, x, y, z$
Vlastnosti objektů (unární predikáty): $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$
Vztahy mezi vlastnostmi a objekty (binární predikát): $X \operatorname{Rel} y$ ap.
Vlastnosti vlastností (predikáty druhého řádu): $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$

Primitivní predikát druhého řádu: $\mathcal{P}$

Definice: $G(x) \equiv (\forall X)\big(\mathcal{P}(X) \to X(x)\big)$
$X \operatorname{Ess} a \equiv X(a) \quad \& \quad (\forall Y)\Big(Y(a) \to \Box(\forall z)\big(X(z) \to Y(z)\big)\Big)$
$N(a) \equiv (\forall X)\big(X \operatorname{Ess} a \to \Box(\exists x)X(x)\big)$

Postuláty: **(A1)** $\mathcal{P}(X) \equiv \neg\mathcal{P}(\neg X)$
(A2) $\Big(\mathcal{P}(X) \quad \& \quad \Box(\forall x)\big(X(x) \to Y(x)\big)\Big) \to \mathcal{P}(Y)$
(A3) $\mathcal{P}(X) \to \Box\mathcal{P}(X)$
(A4) $\mathcal{P}(G)$
(A5) $\mathcal{P}(N)$

Komentář: Symboly z konce abecedy budou označovat proměnné, symboly ze začátku abecedy konstanty.

Mlčky se předpokládá, že pokud X je vlastnost, pak také $\neg X$ je vlastnost; lze ji chápat jako nepřítomnost vlastnosti X.

Interpretace jediného predikátu druhého řádu $\mathcal{P}$: $\mathcal{P}(X)$ „vlastnost X je dobrá“ (positive). [Alternativně: „vlastnost X je perfekce (dokonalost)“, „vlastnost X je potencionalita (schopnost)“.]

Vlastnost G je božskost, vlastnost „býti Bohem“. Bůh je ten, který má všechny dobré vlastnosti (dokonalosti, potencionality).

Vztah $X \operatorname{Ess} x$ vyjadřuje, že vlastnost X je essencí objektu x. Essence je taková vlastnost, kterou objekt má, a každá jeho vlastnost je nutným důsledkem této essence.

Vlastnost N lze interpretovat jako nutnou existenci, příčinu sebe sama (*causa sui*). Objekt má tuto vlastnost, pokud má essenci a jeho bytí je nutným důsledkem této essence.

Postuláty **(A1)**–**(A3)** zavádějí používání primitivního predikátu $\mathcal{P}$. Nepřítomnost dobré vlastnosti není dobrá, nutný důsledek dobré vlastnosti je dobrá vlastnost, dobrá vlastnost je nutně (v každém možném světě) dobrá. Analogicky lze postuláty číst, pokud $\mathcal{P}$ interpretujeme jako perfekce nebo potencionality.

Postulát **(A4)** říká, že mít všechny dobré vlastnosti je dobré, postulát **(A5)** vyjadřuje, že „být nutně v důsledku toho, čím je“, stručně „být tím, čím je“ je dobrá vlastnost.

Při důkazech budeme používat nejen definice a postuláty, ale také jejich bezprostřední důsledky. Např. $(\forall X)\big(\mathcal{P}(X) \to X(a)\big) \to G(a)$ je bezprostředním důsledkem definice vlastnosti G, $\mathcal{P}(\neg X) \to \neg\mathcal{P}(\neg\neg X)$ je bezprostředním důsledkem postulátu **(A1)** a podobně.

Gödelův systém je teorie v predikátovém počtu druhého řádu, tj. kvantifikujeme proměnné a vlastnosti (predikáty prvního řádu), k němuž jsou přidány modální operace. Modality nutnosti a možnosti však budeme přiřazovat pouze formulím prvního řádu; odvozovací pravidlo **(op4)** budeme aplikovat pouze v případě, že formule Φ je prvního řádu. (Jinak řečeno, s modalitou nutnosti počítáme jen na „bezpečné půdě“ logiky prvního řádu.) Jedinou výjimkou je vyjádření nutné platnosti predikátu druhého řádu $\mathcal{P}$ explicitně vyjádřené v postulátu **(A3)**. Pokud bychom připustili neomezené používání modálních operátorů $\Box$ a $\Diamond$, **(A3)** by nebyl nezávislým postulátem, ale důsledkem pravidla **(op4)**. (Přesněji, negace postulátu **(A3)** by vedla ke sporu.)

T1 Věta $\mathcal{P}(X) \to \Diamond(\exists x)X(x)$
(Je-li nějaká vlastnost dobrá, může existovat objekt, který ji má.)

D.:	1. $\neg\big(\mathcal{P}(X) \to \Diamond(\exists x)X(x)\big)$	pro důkaz sporem
	2. $\neg X(x) \to \big(X(x) \to \neg X(x)\big)$	**(v1)**
	3. $\Box\big((\forall x)\neg X(x)\big) \to (\forall x)\neg X(x)$	**(m2)**
	4. $(\forall x)\neg X(x) \to \neg X(x)$	**(p1)**
	5. $\mathcal{P}(X) \to \neg\mathcal{P}(\neg X)$	**(A1)**
	6. $\Big(\mathcal{P}(X)\ \&\ \Box(\forall x)\big(X(x) \to \neg X(x)\big)\Big) \to \mathcal{P}(\neg X)$	**(A2)**
	7. $\mathcal{P}(X)\ \&\ \neg\Diamond(\exists x)X(x)$	1. **(op3)** $\neg(\Phi \to \Psi) \equiv \Phi\ \&\ \neg\Psi$
	8. $\neg\Diamond(\exists x)X(x)$	7. **(op2)**
	9. $\Box\neg(\exists x)X(x)$	8. **(m4)**
	10. $\Box(\forall x)\neg X(x)$	9. **(p2)**
	11. $(\forall x)\neg X(x)$	3. 10. **(op1)**
	12. $\neg X(x)$	4. 11. **(op1)**
	13. $X(x) \to \neg X(x)$	2. 12. **(op1)**
	14. $(\forall x)\big(X(x) \to \neg X(x)\big)$	13. **(op5)**
	15. $\Box(\forall x)\big(X(x) \to \neg X(x)\big)$	14. **(op4)**
	16. $\mathcal{P}(X)$	7. **(op2)**
	17. $\mathcal{P}(X)\ \&\ \Big(\Box(\forall x)\big(X(x) \to \neg X(x)\big)\Big)$	15. 16. **(op2)**
	18. $\mathcal{P}(\neg X)$	6. 17. **(op1)**
	19. $\neg\mathcal{P}(\neg X)$	5. 16. **(op1)**
		18. 19. spor, q.e.d.

C1 Důsledek $\Diamond(\exists x)G(x)$
(Je možné, že Bůh existuje.)

D.:	1. $\mathcal{P}(G)$	**(A4)**
	2. $\mathcal{P}(G) \to \Diamond(\exists x)G(x)$	**T1**
	3. $\Diamond(\exists x)G(x)$	1. 2. **(op1)**
		q.e.d.

L1 Lemma $\quad G(x) \to (\forall X)\big(X(x) \to \mathcal{P}(X)\big)$
(Každá vlastnost, kterou Bůh má, je dobrá.)

D.:	1. $\neg\Big(G(x) \to (\forall X)\big(X(x) \to \mathcal{P}(X)\big)\Big)$	pro důkaz sporem
	2. $G(X) \to (\forall X)\big(\mathcal{P}(X) \to X(x)\big)$	definice G
	3. $G(x)\ \ \&\ \ \neg(\forall X)\big(X(x) \to \mathcal{P}(X)\big)$	1. **(op3)** $\neg(\Phi \to \Psi) \equiv \Phi\ \ \&\ \ \neg\Psi$
	4. $G(x)$	3. **(op2)**
	5. $\neg(\forall X)\big(X(x) \to \mathcal{P}(X)\big)$	3. **(op2)**
	6. $(\exists X)\neg\big(X(x) \to \mathcal{P}(X)\big)$	5. **(p2)**
	7. $(\exists X)\big(X(x)\ \ \&\ \ \neg\mathcal{P}(X)\big)$	6. **(op3)** $\neg(\Phi \to \Psi) \equiv \Phi\ \ \&\ \ \neg\Psi$
	8. $A(x)\ \ \&\ \ \neg\mathcal{P}(A)$	7. **(op6)**
	9. $A(x)$	8. **(op2)**
	10. $\neg\mathcal{P}(A)$	8. **(op2)**
	11. $\neg\mathcal{P}(\neg\neg A) \to \mathcal{P}(\neg A)$	**(A1)**
	12. $\neg\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(\neg A)$	11. **(op3)** $\neg\neg\Phi \equiv \Phi$
	13. $\mathcal{P}(\neg A)$	10. 12. **(op1)**
	14. $(\forall X)\big(\mathcal{P}(X) \to X(x)\big)$	2. 4. **(op1)**
	15. $\mathcal{P}(\neg A) \to \neg A(x)$	14. **(op7)**
	16. $\neg A(x)$	13. 15. **(op1)**
		9. 16. spor, q.e.d.

L2 Lemma $\quad G(x)\ \ \&\ \ Y(x) \to \Box\mathcal{P}(Y)$

D.:	1. $\neg\big(G(x)\ \ \&\ \ Y(x) \to \Box\mathcal{P}(Y)\big)$	pro důkaz sporem
	2. $\mathcal{P}(Y) \to \Box\mathcal{P}(Y)$	**(A3)**
	3. $G(x) \to (\forall X)\big(X(x) \to \mathcal{P}(X)$	**L1**
	4. $\big(G(x)\ \ \&\ \ Y(x)\big)\ \ \&\ \ \neg\Box\mathcal{P}(Y)$	1. **(op3)** $\neg(\Phi \to \Psi) \equiv \Phi\ \ \&\ \ \neg\Psi$
	5. $G(x)\ \ \&\ \ Y(x)$	4. **(op2)**
	6. $G(x)$	5. **(op2)**
	7. $(\forall X)\big(X(x) \to \mathcal{P}(X)$	3. 6. **(op1)**
	8. $Y(x) \to \mathcal{P}(Y)$	7. **(op7)**
	9. $Y(x)$	5. **(op2)**
	10. $\mathcal{P}(Y)$	8. 9. **(op1)**
	11. $\Box\mathcal{P}(Y)$	2. 10. **(op1)**
	12. $\neg\Box\mathcal{P}(Y)$	4. **(op2)**
		11. 12. spor, q.e.d.

L3 Lemma $G(x) \ \& \ Y(x) \to (\forall z)\big(G(z) \to Y(z)\big)$

D.:	1. $\neg\Big(G(x) \ \& \ Y(x) \to (\forall z)\big(G(z) \to Y(z)\big)\Big)$	pro důkaz sporem
	2. $\Box\mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(Y)$	**(m2)**
	3. $\mathcal{P}(\neg Y) \to \neg\mathcal{P}(\neg\neg Y)$	**(A1)**
	4. $G(x) \ \& \ Y(x) \to \Box\mathcal{P}(Y)$	**L2**
	5. $\big(G(x) \ \& \ Y(x)\big) \ \& \ \neg(\forall z)\big(G(z) \to Y(z)\big)$	1. **(op3)** $\neg(\Phi \to \Psi) \equiv \Phi \ \& \ \neg\Psi$
	6. $G(x) \ \& \ Y(x)$	5. **(op2)**
	7. $\neg(\forall z)\big(G(z) \to Y(z)\big)$	5. **(op2)**
	8. $(\exists z)\neg\big(G(z) \to Y(z)\big)$	7. **(p2)**
	9. $(\exists z)\big(G(z) \ \& \ \neg Y(z)\big)$	8. **(op3)** $\neg(\Phi \to \Psi) \equiv \Phi \ \& \ \neg\Psi$
	10. $G(a) \ \& \ \neg Y(a)$	9. **(op6)**
	11. $G(a)$	10. **(op2)**
	12. $G(a) \to (\forall X)\big(X(a) \to \mathcal{P}(X)\big)$	**L1**
	13. $(\forall X)\big(X(a) \to \mathcal{P}(X)\big)$	11. 12. **(op1)**
	14. $\neg Y(a) \to \mathcal{P}(\neg Y)$	13. **(op7)**
	15. $\neg Y(a)$	10. **(op2)**
	16. $\mathcal{P}(\neg Y)$	14. 15. **(op1)**
	17. $\neg\mathcal{P}(\neg\neg Y)$	3. 16. **(op1)**
	18. $\Box\mathcal{P}(Y)$	4. 6. **(op1)**
	19. $\mathcal{P}(Y)$	2. 18. **(op1)**
	20. $\neg\mathcal{P}(y)$	19. **(op3)** $\neg\neg\Phi \equiv \Phi$
		17. 20. spor, q.e.d.

L4 Lemma $G(x) \ \& \ Y(x) \to \Box(\forall z)\big(G(z) \to Y(z)\big)$

D.:	1. $\neg\Big(G(x) \ \& \ Y(x) \to \Box((\forall z))\big(G(z) \to Y(z)\big)\Big)$	pro důkaz sporem
	2. $G(x) \ \& \ Y(x) \to (\forall z)\big(G(z) \to Y(z)\big)$	**L3**
	3. $\big(G(x) \ \& \ Y(x)\big) \ \& \ \neg\Box((\forall z))\big(G(z) \to Y(z)\big)$	1. **(op3)** $\neg(\Phi \to \Psi) \equiv \Phi \ \& \ \neg\Psi$
	4. $G(x) \ \& \ Y(x)$	3. **(op2)**
	5. $\neg\Box((\forall z))\big(G(z) \to Y(z)\big)$	3. **(op2)**
	6. $(\forall z)\big(G(z) \to Y(z)\big)$	2. 4. **(op1)**
	7. $\Box((\forall z))\big(G(z) \to Y(z)\big)$	6. **(op4)**
		5. 7. spor, q.e.d.

L5 Lemma $G(x) \to (\forall Y)\Big(Y(x) \to \Box(\forall z)\big(G(z) \to Y(z)\big)\Big)$

D.:

1. $\neg\Big(G(x) \to (\forall Y)\Big(Y(x) \to \Box(\forall z)\big(G(z) \to Y(z)\big)\Big)\Big)$	pro důkaz sporem
2. $G(x)\ \ \&\ \ \neg(\forall Y)\Big(Y(x) \to \Box(\forall z)\big(G(z) \to Y(z)\big)$	1. **(op3)** $\neg(\Phi \to \Psi) \equiv \Phi\ \ \&\ \ \neg\Psi$
3. $\neg(\forall Y)\Big(Y(x) \to \Box(\forall z)\big(G(z) \to Y(z)\big)$	2. **(op2)**
4. $(\exists Y)\neg\Big(Y(x) \to \Box(\forall z)\big(G(z) \to Y(z)\big)$	3. **(p2)**
5. $\neg\Big(A(x) \to \Box(\forall z)\big(G(z) \to A(z)\big)$	4. **(op6)**
6. $A(x)\ \ \&\ \ \neg\Box(\forall z)\big(G(z) \to A(z)\big)$	5. **(op3)** $\neg(\Phi \to \Psi) \equiv \Phi\ \ \&\ \ \neg\Psi$
7. $\neg\Box(\forall z)\big(G(z) \to A(z)\big)$	6. **(op2)**
8. $G(x)\ \ \&\ \ A(x) \to \Box(\forall z)\big(G(z) \to A(z)\big)$	**L4**
9. $\neg\Box(\forall z)\big(G(z) \to A(z)\big) \to \neg\big(G(x)\ \ \&\ \ A(x)\big)$	8. **(op3)** $\Phi \to \Psi \equiv \neg\Psi \to \neg\Phi$
10. $\neg\big(G(x)\ \ \&\ \ A(x)\big)$	7. 9. **(op1)**
11. $G(x)$	2. **(op2)**
12. $A(x)$	6. **(op2)**
13. $G(x)\ \ \&\ \ A(x)$	11. 12. **(op2)**
	10. 13. spor, q.e.d.

T2 Věta $G(x) \to G\,\mathrm{Ess}\,x$
(Všechny vlastnosti Boha nutně plynou z jeho božství.)

D.:

1. $G(x) \to (\forall Y)\Big(Y(x) \to \Box(\forall z)\big(G(z) \to Y(z)\big)\Big)$	**L5**
2. $G(x) \to G(x)\ \ \&\ \ (\forall Y)\Big(Y(x) \to \Box(\forall z)\big(G(z) \to Y(z)\big)\Big)$	1. **(op3)** $\Phi \to \Psi \equiv \Phi \to (\Phi\ \ \&\ \ \Psi)$
3. $G(x) \to G\,\mathrm{Ess}\,x$	2. **(op3)** definice relace Ess
	q.e.d.

L6 Lemma $G(x) \to \Box(\exists y)G(y)$
(Je-li Bůh myslitelný, pak nutně existuje.)

D.:	1. $\neg\big(G(x) \to \Box(\exists y)G(y)\big)$	pro důkaz sporem
	2. $\mathcal{P}(N)$	**(A5)**
	3. $G(x) \to (\forall X)\big(\mathcal{P}(X) \to X(x)\big)$	definice G
	4. $N(x) \to (\forall X)\big(X \operatorname{Ess} x \to \Box(\exists y)X(y)\big)$	definice N
	5. $G(x) \to G \operatorname{Ess} x$	**T2**
	6. $G(x)\ \ \&\ \ \neg\Box(\exists y)G(y)$	1. **(op3)** $\neg(\Phi \to \Psi) \equiv \Phi\ \ \&\ \ \neg\Psi$
	7. $G(x)$	6. **(op2)**
	8. $(\forall X)\big(\mathcal{P}(X) \to X(x)\big)$	3. 7. **(op1)**
	9. $\mathcal{P}(N) \to N(x)$	8. **(op7)**
	10. $N(x)$	2. 9. **(op1)**
	11. $(\forall X)\big(X \operatorname{Ess} x \to \Box(\exists y)X(y)\big)$	4. 10. **(op1)**
	12. $G \operatorname{Ess} x \to \Box(\exists y)G(y)$	11. **(op7)**
	13. $G \operatorname{Ess} x$	5. 7. **(op1)**
	14. $\Box(\exists y)G(y)$	12. 13. **(op1)**
	15. $\neg\Box(\exists y)G(y)$	6. **(op2)**
		14. 15. spor, q.e.d.

T3 Věta $\Box(\exists y)G(y)$
(Bůh existuje nutně.)

D.:	1. $\Diamond(\exists z)G(z)$	**C1**
	2. $G(x) \to \Box(\exists y)G(y)$	**L6**
	3. $\Diamond\Box(\exists y)G(y) \to \Box(\exists y)G(y)$	**Cv1**
	4. $\big((\exists z)G(z) \to \Box(\exists y)G(y)\big) \to \big(\Diamond(\exists z)G(z) \to \Diamond\Box(\exists y)G(y)\big)$	**Cv2**
	5. $\big(G(x) \to \Box(\exists y)G(y)\big) \to \big((\exists z)G(z) \to \Box(\exists y)G(y)\big)$	**Cv3**
	6. $(\exists z)G(z) \to \Box(\exists y)G(y)$	2. 5. **(op1)**
	7. $\Diamond(\exists z)G(z) \to \Diamond\Box(\exists y)G(y)$	4. 6. **(op1)**
	8. $\Diamond\Box(\exists y)G(y)$	1. 7. **(op1)**
	9. $\Box(\exists y)G(y)$	3. 8. **(op1)**
		q.e.d.