Gödelův důkaz nutné existence Boha

Zdeněk Pospíšil

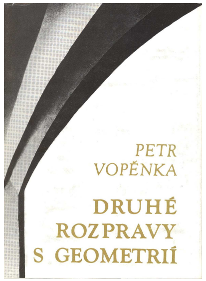
Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Křesťanský sbor Brno

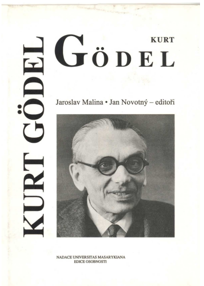
Rozvrh

- Úvod
- Historie ontologického důkazu
- Gödelova formalizace ontologického důkazu
- Převyprávění důkazu
- Co Gödelův důkaz říká
  - o Bohu
  - o novověké přírodovědě
- Co Gödelův důkaz může říci
  - věřícím
  - atheistům
  - agnostikům

Zdroje



Petr Vopěnka, *Druhé rozpravy s geometrií*. Práh-Fokus, Praha 1991, 72–78.



Petr Hájek, Gödelův důkaz existence Boha. In *Kurt Gödel*. Nadace Universitas Masarykiana, Brno, 1996, 117–129.

Pavol Zlatoš, Gödelov ontologický dôkaz existencie Boha. *Organon F*, 1996, 211–238.

Historie ontologického důkazu

Anselm z Canterbury

1033–1109

Proslogion II, III

…i blázen uznává, že alespoň v jeho rozumu je něco, nad co větší si nelze myslet. Neboť slyší-li o tom, rozumí tomu, a vše, čemu rozumí, je v jeho rozumu. Je však jisté, že to, nad co větší si nelze myslit, nemůže být pouze v rozumu: v tom případě by se dalo myslit, že to je i ve skutečnosti, což je něco většího …

To, nad co nic většího nelze myslet, je tak pravdivé, že ani není možno myslet, že to není. A to jsi ty, Pane, náš Pane.

Historie ontologického důkazu

Duns Scotus

1266-1308

De primo principio

…kdybychom připustili více nutných bytí, museli bychom hledat, v čem se od sebe liší. To by však muselo být něco, co je mimo jejich společnou přirozenost, kterou je nutné bytí …

Historie ontologického důkazu

René Descartes

1596–1650

Meditationes III

Jménem „Bůh“ chápu jakousi nekonečnou, nezávislou, nanejvýš chápající, nanejvýš mocnou substanci, která stvořila jak mne, tak cokoliv jiného. . . A tak je z výše řečeného třeba učinit závěr, že Bůh nutně existuje.

. . . už jen to, že existuji a že je ve mně nějaká idea nejdokonalejšího jsoucna (to jest Boha), zcela zřejmě dokazuje, že existuje také Bůh.

[Tuto ideu] . . . jsem nenačerpal smysly . . . ani jsem si ji nevybájil, neboť z ní nemohu vůbec nic ubrat ani k ní přidat; a tedy zbývá, že je mi vrozená . . .

Historie ontologického důkazu

Benedictus de Spinoza

1632–1677

Etika (1676)

Lidé usoudili, že Bůh řídí všechny věci k jejich užitku. Přestože každodenní zkušenost znovu a znovu tento názor vyvracela, bylo pro ně snadnější zůstat ve svém vrozeném stavu nevědomosti, než zbořit celou konstrukci a vymyslet novou. Tak došli k pevnému závěru, že úsudek bohů daleko přesahuje lidské chápání. To by úplně stačilo, aby pravda zůstala lidskému pokolení navždy skryta, kdyby matematika, která se nezabývá účelovými příčinami, neukázala lidstvu jinou normu pravdy.

Historie ontologického důkazu

Benedictus de Spinoza

1632–1677

Etika (1676)

…vysvětlil jsem přirozenost Boha a jeho vlastnosti, totiž že nutně existuje, že je jediný, …, že je a jakým způsobem je svobodnou příčinou všech věcí, …

Definice 1. Příčinou sebe sama rozumím to, čeho esence v sobě zahrnuje existenci.
Definice 6. Bohem rozumím substanci sestávající z nekonečného počtu atributů, z nichž každý vyjadřuje věčnou a nekonečnou esenci.
Axiom 7. Jestliže lze něco chápat jako neexistující, pak esence této věci nezahrnuje existenci.

Tvrzení 11. Bůh existuje nutně.
Tvrzení 18. Bůh je imanentní příčina všech věcí.
Tvrzení 20. Existence Boha a jeho esence jsou jedno a totéž.

Historie ontologického důkazu

Benedictus de Spinoza

1632–1677

Etika (1676)

…vysvětlil jsem přirozenost Boha a jeho vlastnosti, totiž že nutně existuje, že je jediný, …, že je a jakým způsobem je svobodnou příčinou všech věcí, …

Definice 1. Příčinou sebe sama rozumím to, čeho esence v sobě zahrnuje existenci. $C(x) \equiv X \,\mathrm{Ess}\, x \rightarrow (\exists y) X(y)$

Definice 6. Bohem rozumím substanci sestávající z nekonečného počtu atributů, z nichž každý vyjadřuje věčnou a nekonečnou esenci.

Axiom 7. Jestliže lze něco chápat jako neexistující, pak esence této věci nezahrnuje existenci.

$$\big(X \,\mathrm{Ess}\, x \;\;\&\;\; \Diamond\neg(\exists x) X(x)\big) \rightarrow \neg C(x) \sim$$
$$\sim \big(X \,\mathrm{Ess}\, x \;\;\&\;\; (\exists y) X(y)\big) \rightarrow \Box(\exists x) X(x)$$

Tvrzení 11. Bůh existuje nutně.

Tvrzení 18. Bůh je imanentní příčina všech věcí.

Tvrzení 20. Existence Boha a jeho esence jsou jedno a totéž.

Historie ontologického důkazu

G. W. Leibniz

1646–1716

Úvahu o poznání pravdivosti a idejích (1684)

…proslulý scholastický důkaz existence boží, jenž byl opět obnoven Descartem… Vpravdě však je třeba vidět, že tím je dáno pouze to, že boží existence vyplývá sama sebou, jakmile je dokázána možnost Boha. Nemůžeme totiž použít k usuzování definice, aniž bychom se před tím neujistili, že jsou *reálné*…

Avšak je naprosto pravda, že máme ideu Boha a že nejdokonalejší bytnost je možná, ba dokonce nutná. Úsudek však není dostatečně konkluzívní…

Historie ontologického důkazu

J. le R. d'Alembert

1717–1783

Encyklopedie (1750)
heslo Důkaz

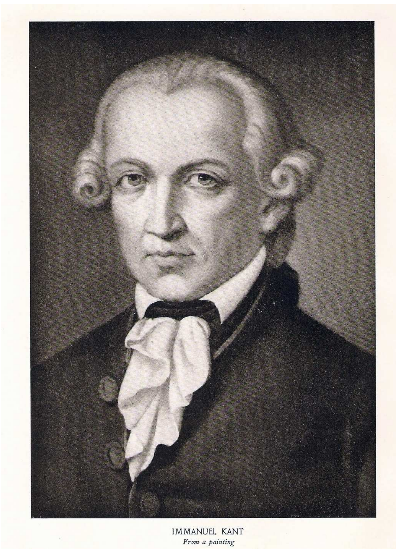
Dokazujeme-li existenci boží odvoláním na povahu nekonečné dokonalé bytosti a jejích atributů, dokazujeme existenci a priori neboli úvahou čerpanou ze samotné povahy předmětu.

…všechny takové důkazy předpokládají ideu nekonečna, a ta není příliš jasná.

Historie ontologického důkazu

Immanuel Kant

1724–1804



Kritika čistého rozumu
4. kap. (1781)

Vezmu-li subjekt (Boha) se všemi jeho predikáty (k nimž patří i všemohoucnost) a řeknu: *Bůh existuje*, nebo *Existuje Bůh*, tak k pojmu Boha nepřidávám nový predikát, pouze ustavuji sám subjekt se všemi jeho predikáty, a to *předmět* ve vztahu k mému *pojmu*.

Historie ontologického důkazu

Bertrand Russell

1872–1970

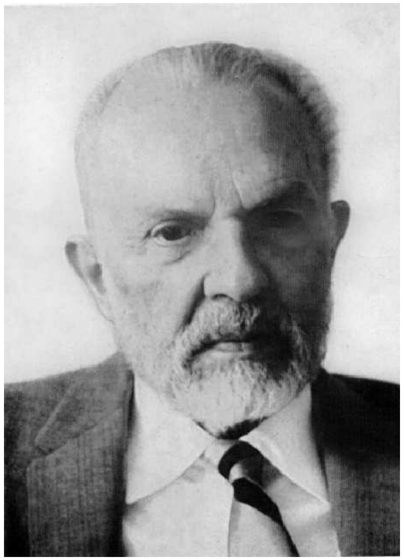
On Denoting (1905)

Úsudek: „Nejdokonalejší bytost má všechny dokonalosti; existence je dokonalost; proto nejdokonalejší bytost existuje“ znamená: „Existuje jedna a pouze jedna entita x, která je nejdokonalejší; tato entita má všechny dokonalosti; proto tato entita existuje.“ Jakožto důkaz je to chybné, protože zde chybí důkaz premisy „existuje jedna a pouze jedna entita x, která je nejdokonalejší“.

Historie ontologického důkazu

Rudolf Carnap

1891–1970



Překonání metafyziky logickou analýzou jazyka (1931)

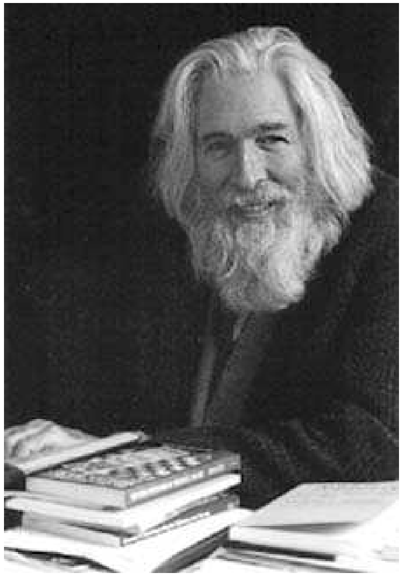
Užití výrazu „Bůh“ je trojí – empirický (mytologický), metafyzický a theologický pojem Boha.

Výrazy „Bůh“ nebo „Bůh existuje“ nelze vysledovat k observačním protokolárním větám. Proto to jsou výrazy bez významu.

Historie ontologického důkazu

Raymond M. Smullyan

1919–



What Is the Name of This Book (1978)

Dokážeme, že existuje jednorožec. K tomu postačí dokázat silnější tvrzení, že existuje existující jednorožec. . . . Možnost, že existující jednorožec neexistuje je zřejmě rozporná. Jak by existující jednorožec mohl neexistovat?

Podobně je tomu s Descartesovým důkazem: vyplývá z něho jen to, že cokoliv, co vyhovuje Descartesově definici Boha, musí mít i vlastnost existence. Jenomže to neznamená, že musí vůbec nějaký Bůh existovat.

Historie ontologického důkazu

Charles Hartshorne

1897–2000

The Necessarily Existent (1941)

Bůh je ten, který je hoden uctívání.

Dokonalost nespočívá ve vyloučení jakékoliv potencionality, ale naopak v maximu potencionalit. V Bohu je prvek kontingence vyplývající z jeho potencionalit a připouštějící stálé dovršování a naplňování jeho přirozenosti.

Gödelův důkaz existence Boha

Gödelův důkaz existence Boha

1941 první verse striktně logického důkazu existence Boha.

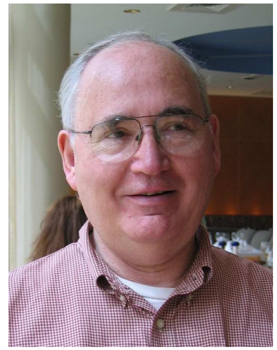
Začátkem 70. let se o důkazu začalo mluvit

Gödelův důkaz existence Boha

1941 první verse striktně logického důkazu existence Boha.

Začátkem 70. let se o důkazu začalo mluvit

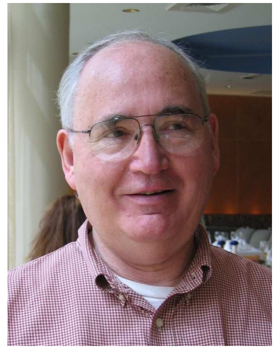
1970 tento důkaz diskutoval Dana Scott na semináři v Princetonu.



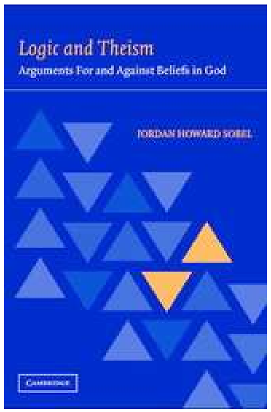
Gödelův důkaz existence Boha

1941 první verse striktně logického důkazu existence Boha.

Začátkem 70. let se o důkazu začalo mluvit



1970 tento důkaz diskutoval Dana Scott na semináři v Princetonu.

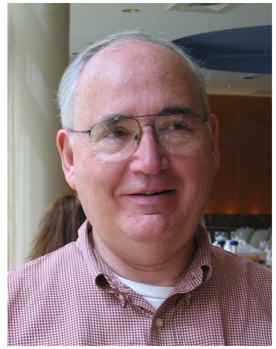


1987 Jordan Howard Sobel důkaz analyzoval (sborník On being and saying, MIT).

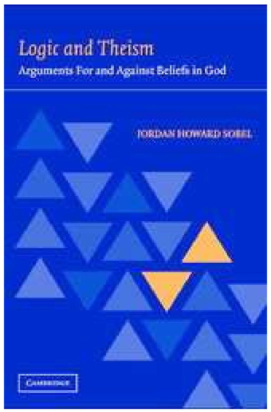
Gödelův důkaz existence Boha

1941 první verse striktně logického důkazu existence Boha.

Začátkem 70. let se o důkazu začalo mluvit



1970 tento důkaz diskutoval Dana Scott na semináři v Princetonu.



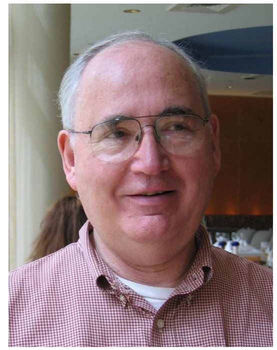
1987 Jordan Howard Sobel důkaz analyzoval (sborník On being and saying, MIT).

1990 Gödelův důkaz publikován (Collected works III, včetně textů souvisejících a první varianty důkazu).

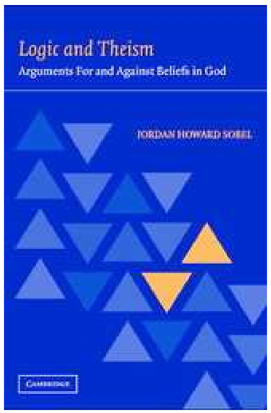
Gödelův důkaz existence Boha

1941 první verse striktně logického důkazu existence Boha.

Začátkem 70. let se o důkazu začalo mluvit

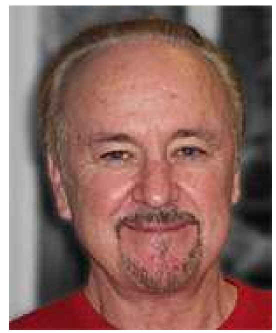


1970 tento důkaz diskutoval Dana Scott na semináři v Princetonu.



1987 Jordan Howard Sobel důkaz analyzoval (sborník On being and saying, MIT).

1990 Gödelův důkaz publikován (Collected works III, včetně textů souvisejících a první varianty důkazu).



1990 C. Anthony Anderson důkaz modifikoval.

Gödelův důkaz existence Boha

Oskaru Morgensternovi Gödel řekl, že nechce svůj důkaz publikovat, aby si snad někdo nemyslel, že skutečně věří v Boha, zatímco se jen zabýval logickým zkoumáním.

Gödelův důkaz existence Boha

Oskaru Morgensternovi Gödel řekl, že nechce svůj důkaz publikovat, aby si snad někdo nemyslel, že skutečně věří v Boha, zatímco se jen zabýval logickým zkoumáním.

Své stanovisko charakterizoval jako spíše theistické než deistické, bližší Leibnizovi než Spinozovi.

Gödelův důkaz existence Boha

Oskaru Morgensternovi Gödel řekl, že nechce svůj důkaz publikovat, aby si snad někdo nemyslel, že skutečně věří v Boha, zatímco se jen zabýval logickým zkoumáním.

Své stanovisko charakterizoval jako spíše theistické než deistické, bližší Leibnizovi než Spinozovi.

„Samozřejmě zdaleka nejsme schopni vědecky potvrdit theologický obraz světa. Ale bylo by možné, věřím, pochopit čistým rozumem (bez odvolávání se na víru v jakékoliv náboženství), že theologický pohled na svět je zcela slučitelný se všemi dostupnými daty. To se již před 250 lety pokusil udělat proslulý filosof a matematik Lebniz a o totéž jsem se pokoušel já.“

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Feb 10, 1970

Ontologischer Bewis

P(ϕ)	ϕ is positive (e ϕ ϵ P)	
Ax 1	$P(\Phi) \cdot P(\psi) \supset P(\Phi \cdot \psi)$[a]	Ax 2 $P(\Phi) v$[b] $P(\sim\Phi)$
Df 1	$G(x) \equiv (\Phi)[P(\Phi \supset \Phi(x)]$	(God)
Df 2	$\Phi Ess.x \equiv (\psi)[\psi(x) \supset N(y)[\Phi(y) \supset \psi(y)]]$	(Essence of x)[c]
	$p \supset_N q = N(p \supset q)$	Necessity
Ax 2	$P(\Phi) \supset NP(\Phi)$ $\sim P(\Phi) \supset N\sim P(\Phi)$	because it follows from the nature of the property
Th.	$G(x) \supset G\ Ess.\ x$	
Df	$E(x) \equiv (\Phi)[\Phi Ess.x \supset N(\exists x)\Phi(x)$	Necessary Existence
Ax3	$P(E)$	
Th	$G(x) \supset N(\exists y)G(y)$	
	hence $(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y)$	
	"$M(\exists x)G(x) \supset MN(\exists y)G(y)$	M = possibility
	"$\supset N(\exists y)G(y)$	

[a] and for any number of summand

[b] exclusive or

[c] any two essences of x are nec. equivalent

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Důkaz: Konečná posloupnost výroků, z nichž každý je (logickým) axiomem, postulátem (teorie), výrokem již dokázaným nebo vznikl z předchozích členů posloupnosti pomocí definovaných odvozovacích pravidel.

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Důkaz: Konečná posloupnost výroků, z nichž každý je (logickým) axiomem, postulátem (teorie), výrokem již dokázaným nebo vznikl z předchozích členů posloupnosti pomocí definovaných odvozovacích pravidel.

Důkaz výroku Φ: Důkaz, jehož posledním členem je Φ.

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Důkaz: Konečná posloupnost výroků, z nichž každý je (logickým) axiomem, postulátem (teorie), výrokem již dokázaným nebo vznikl z předchozích členů posloupnosti pomocí definovaných odvozovacích pravidel.

Důkaz výroku Φ: Důkaz, jehož posledním členem je Φ.

Důkaz výroku Φ sporem: Důkaz, jehož prvním členem je výrok $\neg\Phi$ a v němž se vyskytují výroky Θ a $\neg\Theta$.

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Axiomy:

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Axiomy:

Výrokové logiky

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Axiomy:

Výrokové logiky

(v1) $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Axiomy:

Výrokové logiky

(v1) $\Phi \longrightarrow \big(\Psi \longrightarrow \Phi\big)$

(v2) $\Big(\Phi \longrightarrow \big(\Psi \longrightarrow \Theta\big)\Big) \longrightarrow \Big(\big(\Phi \longrightarrow \Psi\big) \longrightarrow \big(\Phi \longrightarrow \Theta\big)\Big)$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Axiomy:

Výrokové logiky

(v1) $\Phi \rightarrow \big(\Psi \rightarrow \Phi\big)$

(v2) $\Big(\Phi \rightarrow \big(\Psi \rightarrow \Theta\big)\Big) \rightarrow \Big(\big(\Phi \rightarrow \Psi\big) \rightarrow \big(\Phi \rightarrow \Theta\big)\Big)$

(v3) $\big(\Phi \rightarrow \Psi\big) \rightarrow \Big(\big(\Phi \rightarrow \neg\Psi\big) \rightarrow \neg\Phi\Big)$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Axiomy:

Výrokové logiky

(v1) $\Phi \to (\Psi \to \Phi)$
(v2) $\big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$
(v3) $(\Phi \to \Psi) \to \big((\Phi \to \neg\Psi) \to \neg\Phi\big)$
(v4) $\neg\neg\Phi \to \Phi$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Axiomy:

Výrokové logiky

(v1) $\Phi \to (\Psi \to \Phi)$

(v2) $\big(\Phi \to (\Psi \to \Theta)\big) \to \big((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)\big)$

(v3) $(\Phi \to \Psi) \to \big((\Phi \to \neg\Psi) \to \neg\Phi\big)$

(v4) $\neg\neg\Phi \to \Phi$

Modální logiky

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Axiomy:

Výrokové logiky

(v1) $\Phi \longrightarrow (\Psi \longrightarrow \Phi)$
(v2) $\big(\Phi \longrightarrow (\Psi \longrightarrow \Theta)\big) \longrightarrow \big((\Phi \longrightarrow \Psi) \longrightarrow (\Phi \longrightarrow \Theta)\big)$
(v3) $(\Phi \longrightarrow \Psi) \longrightarrow \big((\Phi \longrightarrow \neg\Psi) \longrightarrow \neg\Phi\big)$
(v4) $\neg\neg\Phi \longrightarrow \Phi$

Modální logiky

(m1) $\Box(\Phi \longrightarrow \Psi) \longrightarrow (\Box\Phi \longrightarrow \Box\Psi)$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Axiomy:

Výrokové logiky

(v1) $\Phi \longrightarrow (\Psi \longrightarrow \Phi)$

(v2) $\big(\Phi \longrightarrow (\Psi \longrightarrow \Theta)\big) \longrightarrow \big((\Phi \longrightarrow \Psi) \longrightarrow (\Phi \longrightarrow \Theta)\big)$

(v3) $(\Phi \longrightarrow \Psi) \longrightarrow \big((\Phi \longrightarrow \neg\Psi) \longrightarrow \neg\Phi\big)$

(v4) $\neg\neg\Phi \longrightarrow \Phi$

Modální logiky

(m1) $\Box(\Phi \longrightarrow \Psi) \longrightarrow (\Box\Phi \longrightarrow \Box\Psi)$

(m2) $\Box\Phi \longrightarrow \Phi$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Axiomy:

Výrokové logiky

(v1) $\Phi \longrightarrow \big(\Psi \longrightarrow \Phi\big)$
(v2) $\Big(\Phi \longrightarrow \big(\Psi \longrightarrow \Theta\big)\Big) \longrightarrow \Big(\big(\Phi \longrightarrow \Psi\big) \longrightarrow \big(\Phi \longrightarrow \Theta\big)\Big)$
(v3) $\big(\Phi \longrightarrow \Psi\big) \longrightarrow \Big(\big(\Phi \longrightarrow \neg\Psi\big) \longrightarrow \neg\Phi\Big)$
(v4) $\neg\neg\Phi \longrightarrow \Phi$

Modální logiky

(m1) $\Box\big(\Phi \longrightarrow \Psi\big) \longrightarrow \big(\Box\Phi \longrightarrow \Box\Psi\big)$
(m2) $\Box\Phi \longrightarrow \Phi$
(m3) $\Diamond\Phi \longrightarrow \Box\Diamond\Phi$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Axiomy:

Výrokové logiky

(v1) $\Phi \longrightarrow (\Psi \longrightarrow \Phi)$

(v2) $\big(\Phi \longrightarrow (\Psi \longrightarrow \Theta)\big) \longrightarrow \big((\Phi \longrightarrow \Psi) \longrightarrow (\Phi \longrightarrow \Theta)\big)$

(v3) $(\Phi \longrightarrow \Psi) \longrightarrow \big((\Phi \longrightarrow \neg\Psi) \longrightarrow \neg\Phi\big)$

(v4) $\neg\neg\Phi \longrightarrow \Phi$

Modální logiky

(m1) $\Box(\Phi \longrightarrow \Psi) \longrightarrow (\Box\Phi \longrightarrow \Box\Psi)$

(m2) $\Box\Phi \longrightarrow \Phi$

(m3) $\Diamond\Phi \longrightarrow \Box\Diamond\Phi$

(m4) $\neg\Box\Phi \equiv \Diamond\neg\Phi, \qquad \neg\Diamond\Phi \equiv \Box\neg\Phi$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Axiomy:

Výrokové logiky

(v1) $\Phi \longrightarrow (\Psi \longrightarrow \Phi)$
(v2) $\big(\Phi \longrightarrow (\Psi \longrightarrow \Theta)\big) \longrightarrow \big((\Phi \longrightarrow \Psi) \longrightarrow (\Phi \longrightarrow \Theta)\big)$
(v3) $(\Phi \longrightarrow \Psi) \longrightarrow \big((\Phi \longrightarrow \neg\Psi) \longrightarrow \neg\Phi\big)$
(v4) $\neg\neg\Phi \longrightarrow \Phi$

Modální logiky

(m1) $\Box(\Phi \longrightarrow \Psi) \longrightarrow (\Box\Phi \longrightarrow \Box\Psi)$
(m2) $\Box\Phi \longrightarrow \Phi$
(m3) $\Diamond\Phi \longrightarrow \Box\Diamond\Phi$
(m4) $\neg\Box\Phi \equiv \Diamond\neg\Phi, \qquad \neg\Diamond\Phi \equiv \Box\neg\Phi$

Predikátové logiky

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Axiomy:

Výrokové logiky

(v1) $\Phi \longrightarrow (\Psi \longrightarrow \Phi)$

(v2) $\big(\Phi \longrightarrow (\Psi \longrightarrow \Theta)\big) \longrightarrow \big((\Phi \longrightarrow \Psi) \longrightarrow (\Phi \longrightarrow \Theta)\big)$

(v3) $(\Phi \longrightarrow \Psi) \longrightarrow \big((\Phi \longrightarrow \neg\Psi) \longrightarrow \neg\Phi\big)$

(v4) $\neg\neg\Phi \longrightarrow \Phi$

Modální logiky

(m1) $\Box(\Phi \longrightarrow \Psi) \longrightarrow (\Box\Phi \longrightarrow \Box\Psi)$

(m2) $\Box\Phi \longrightarrow \Phi$

(m3) $\Diamond\Phi \longrightarrow \Box\Diamond\Phi$

(m4) $\neg\Box\Phi \equiv \Diamond\neg\Phi, \qquad \neg\Diamond\Phi \equiv \Box\neg\Phi$

Predikátové logiky

(p1) $(\forall\xi)\Phi \longrightarrow \Phi$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Axiomy:

Výrokové logiky

(v1) $\Phi \longrightarrow (\Psi \longrightarrow \Phi)$

(v2) $\big(\Phi \longrightarrow (\Psi \longrightarrow \Theta)\big) \longrightarrow \big((\Phi \longrightarrow \Psi) \longrightarrow (\Phi \longrightarrow \Theta)\big)$

(v3) $(\Phi \longrightarrow \Psi) \longrightarrow \big((\Phi \longrightarrow \neg\Psi) \longrightarrow \neg\Phi\big)$

(v4) $\neg\neg\Phi \longrightarrow \Phi$

Modální logiky

(m1) $\Box(\Phi \longrightarrow \Psi) \longrightarrow (\Box\Phi \longrightarrow \Box\Psi)$

(m2) $\Box\Phi \longrightarrow \Phi$

(m3) $\Diamond\Phi \longrightarrow \Box\Diamond\Phi$

(m4) $\neg\Box\Phi \equiv \Diamond\neg\Phi, \qquad \neg\Diamond\Phi \equiv \Box\neg\Phi$

Predikátové logiky

(p1) $(\forall\xi)\Phi \longrightarrow \Phi$

(p2) $\neg(\forall\xi)\Phi \equiv (\exists\xi)\neg\Phi, \qquad \neg(\exists\xi)\Phi \equiv (\forall\xi)\neg\Phi$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Odvozovací pravidla:

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Odvozovací pravidla:

1. $\Phi \rightarrow \Psi, \Phi \mid \Psi.$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Odvozovací pravidla:

1. $\Phi \rightarrow \Psi, \Phi \mid \Psi.$
2. $\Phi \ \& \ \Psi \mid \Phi. \qquad \Phi \ \& \ \Psi \mid \Psi. \qquad \Phi, \Psi \mid \Phi \ \& \ \Psi.$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Odvozovací pravidla:

1. $\Phi \rightarrow \Psi, \Phi \mid \Psi$.
2. $\Phi \ \& \ \Psi \mid \Phi$. $\quad \Phi \ \& \ \Psi \mid \Psi$. $\quad \Phi, \Psi \mid \Phi \ \& \ \Psi$.
3. Je-li $\Phi \equiv \Psi$ dokazatelným výrokem (tautologií), axiomem, postulátem nebo definicí, pak každý výskyt Φ lze nahradit Ψ.

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Odvozovací pravidla:

1. $\Phi \rightarrow \Psi, \Phi \mid \Psi$.
2. $\Phi \ \& \ \Psi \mid \Phi$. $\quad \Phi \ \& \ \Psi \mid \Psi$. $\quad \Phi, \Psi \mid \Phi \ \& \ \Psi$.
3. Je-li $\Phi \equiv \Psi$ dokazatelným výrokem (tautologií), axiomem, postulátem nebo definicí, pak každý výskyt Φ lze nahradit Ψ.
4. $\Phi \mid \Box\Phi$.

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Odvozovací pravidla:

1. $\Phi \rightarrow \Psi, \Phi \mid \Psi.$
2. $\Phi \ \& \ \Psi \mid \Phi.$ $\quad \Phi \ \& \ \Psi \mid \Psi.$ $\quad \Phi, \Psi \mid \Phi \ \& \ \Psi.$
3. Je-li $\Phi \equiv \Psi$ dokazatelným výrokem (tautologií), axiomem, postulátem nebo definicí, pak každý výskyt Φ lze nahradit Ψ.
4. $\Phi \mid \Box\Phi.$
5. $\Phi \mid \forall(\xi)\Phi.$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Odvozovací pravidla:

1. $\Phi \rightarrow \Psi, \Phi \mid \Psi$.
2. $\Phi \ \& \ \Psi \mid \Phi$. $\quad \Phi \ \& \ \Psi \mid \Psi$. $\quad \Phi, \Psi \mid \Phi \ \& \ \Psi$.
3. Je-li $\Phi \equiv \Psi$ dokazatelným výrokem (tautologií), axiomem, postulátem nebo definicí, pak každý výskyt Φ lze nahradit Ψ.
4. $\Phi \mid \Box\Phi$.
5. $\Phi \mid \forall(\xi)\Phi$.
6. $(\exists\xi)\Phi(\xi) \mid \Phi(\alpha)$; přitom α je symbol, který se v důkazu dosud neobjevil.

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Odvozovací pravidla:

1. $\Phi \rightarrow \Psi, \Phi \mid \Psi.$
2. $\Phi \;\&\; \Psi \mid \Phi.$ $\qquad \Phi \;\&\; \Psi \mid \Psi.$ $\qquad \Phi, \Psi \mid \Phi \;\&\; \Psi.$
3. Je-li $\Phi \equiv \Psi$ dokazatelným výrokem (tautologií), axiomem, postulátem nebo definicí, pak každý výskyt Φ lze nahradit Ψ.
4. $\Phi \mid \Box\Phi.$
5. $\Phi \mid \forall(\xi)\Phi.$
6. $(\exists\xi)\Phi(\xi) \mid \Phi(\alpha)$; přitom α je symbol, který se v důkazu dosud neobjevil.
7. $(\forall\xi)\Phi(\xi) \mid \Phi(\alpha)$; přitom α je symbol, který se v důkazu objevil před výrokem $\forall(\xi)\Phi(\xi)$.

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Gödelův systém:

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Gödelův systém:

Abeceda:

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Gödelův systém:

Abeceda: Objekty: $a, b, c, \ldots, x, y, z$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Gödelův systém:

Abeceda: Objekty: $a, b, c, \ldots, x, y, z$

Vlastnosti objektů: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Gödelův systém:

Abeceda: Objekty: $a, b, c, \ldots, x, y, z$

Vlastnosti objektů: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$

Vztahy mezi vlastnostmi a objekty: $X \operatorname{Rel} y$ ap.

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Gödelův systém:

Abeceda: Objekty: $a, b, c, \ldots, x, y, z$

Vlastnosti objektů: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$

Vztahy mezi vlastnostmi a objekty: $X \,\mathrm{Rel}\, y$ ap.

Vlastnosti vlastností: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Gödelův systém:

Abeceda: Objekty: $a, b, c, \ldots, x, y, z$

Vlastnosti objektů: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$

Vztahy mezi vlastnostmi a objekty: $X \text{ Rel } y$ ap.

Vlastnosti vlastností: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$

Primitivní predikát:

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Gödelův systém:

Abeceda: Objekty: $a, b, c, \ldots, x, y, z$

Vlastnosti objektů: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$

Vztahy mezi vlastnostmi a objekty: X Rel y ap.

Vlastnosti vlastností: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$

Primitivní predikát: $\mathcal{P}$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Gödelův systém:

Abeceda: Objekty: $a, b, c, \ldots, x, y, z$

Vlastnosti objektů: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$

Vztahy mezi vlastnostmi a objekty: $X \operatorname{Rel} y$ ap.

Vlastnosti vlastností: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$

Primitivní predikát: $\mathcal{P}$

Definice:

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Gödelův systém:

Abeceda: Objekty: $a, b, c, \ldots, x, y, z$

Vlastnosti objektů: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$

Vztahy mezi vlastnostmi a objekty: $X \operatorname{Rel} y$ ap.

Vlastnosti vlastností: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$

Primitivní predikát: $\mathcal{P}$

Definice: $G(x) \equiv (\forall X)\big(\mathcal{P}(X) \rightarrow X(x)\big)$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Gödelův systém:

Abeceda: Objekty: $a, b, c, \ldots, x, y, z$

Vlastnosti objektů: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$

Vztahy mezi vlastnostmi a objekty: $X \,\mathrm{Rel}\, y$ ap.

Vlastnosti vlastností: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$

Primitivní predikát: $\mathcal{P}$

Definice: $G(x) \equiv (\forall X)\big(\mathcal{P}(X) \to X(x)\big)$

$$X \,\mathrm{Ess}\, a \equiv X(a) \quad \& \quad (\forall Y)\Big(Y(a) \to \Box(\forall z)\big(X(z) \to Y(z)\big)\Big)$$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Gödelův systém:

Abeceda: Objekty: $a, b, c, \ldots, x, y, z$

Vlastnosti objektů: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$

Vztahy mezi vlastnostmi a objekty: $X \operatorname{Rel} y$ ap.

Vlastnosti vlastností: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$

Primitivní predikát: $\mathcal{P}$

Definice: $G(x) \equiv (\forall X)\big(\mathcal{P}(X) \rightarrow X(x)\big)$

$$X \operatorname{Ess} a \equiv X(a) \quad \& \quad (\forall Y)\Big(Y(a) \rightarrow \Box(\forall z)\big(X(z) \rightarrow Y(z)\big)\Big)$$

$$N(a) \equiv (\forall X)\big(X \operatorname{Ess} a \rightarrow \Box(\exists x)X(x)\big)$$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Gödelův systém:

Abeceda: Objekty: $a, b, c, \ldots, x, y, z$

Vlastnosti objektů: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$

Vztahy mezi vlastnostmi a objekty: $X \operatorname{Rel} y$ ap.

Vlastnosti vlastností: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$

Primitivní predikát: $\mathcal{P}$

Definice: $G(x) \equiv (\forall X)\big(\mathcal{P}(X) \rightarrow X(x)\big)$

$$X \operatorname{Ess} a \equiv X(a) \quad \& \quad (\forall Y)\Big(Y(a) \rightarrow \Box(\forall z)\big(X(z) \rightarrow Y(z)\big)\Big)$$

$$N(a) \equiv (\forall X)\big(X \operatorname{Ess} a \rightarrow \Box(\exists x)X(x)\big)$$

Postuláty:

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Gödelův systém:

Abeceda: Objekty: $a, b, c, \ldots, x, y, z$

Vlastnosti objektů: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$

Vztahy mezi vlastnostmi a objekty: $X \,\mathrm{Rel}\, y$ ap.

Vlastnosti vlastností: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$

Primitivní predikát: $\mathcal{P}$

Definice: $G(x) \equiv (\forall X)\big(\mathcal{P}(X) \to X(x)\big)$

$$X \,\mathrm{Ess}\, a \equiv X(a) \quad \& \quad (\forall Y)\Big(Y(a) \to \Box(\forall z)\big(X(z) \to Y(z)\big)\Big)$$

$$N(a) \equiv (\forall X)\big(X \,\mathrm{Ess}\, a \to \Box(\exists x)X(x)\big)$$

Postuláty: (A1) $\mathcal{P}(X) \equiv \neg\mathcal{P}(\neg X)$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Gödelův systém:

Abeceda: Objekty: $a, b, c, \ldots, x, y, z$

Vlastnosti objektů: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$

Vztahy mezi vlastnostmi a objekty: $X \,\mathrm{Rel}\, y$ ap.

Vlastnosti vlastností: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$

Primitivní predikát: $\mathcal{P}$

Definice: $G(x) \equiv (\forall X)\big(\mathcal{P}(X) \to X(x)\big)$

$$X \,\mathrm{Ess}\, a \equiv X(a) \quad \& \quad (\forall Y)\Big(Y(a) \to \Box(\forall z)\big(X(z) \to Y(z)\big)\Big)$$

$$N(a) \equiv (\forall X)\big(X \,\mathrm{Ess}\, a \to \Box(\exists x)X(x)\big)$$

Postuláty: **(A1)** $\mathcal{P}(X) \equiv \neg\mathcal{P}(\neg X)$

(A2) $\Big(\mathcal{P}(X) \quad \& \quad \Box(\forall x)\big(X(x) \to Y(x)\big)\Big) \to \mathcal{P}(Y)$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Gödelův systém:

Abeceda: Objekty: $a, b, c, \ldots, x, y, z$

Vlastnosti objektů: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$

Vztahy mezi vlastnostmi a objekty: $X \,\mathrm{Rel}\, y$ ap.

Vlastnosti vlastností: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$

Primitivní predikát: $\mathcal{P}$

Definice: $G(x) \equiv (\forall X)\big(\mathcal{P}(X) \rightarrow X(x)\big)$

$$X \,\mathrm{Ess}\, a \equiv X(a) \quad \& \quad (\forall Y)\Big(Y(a) \rightarrow \Box(\forall z)\big(X(z) \rightarrow Y(z)\big)\Big)$$

$$N(a) \equiv (\forall X)\big(X \,\mathrm{Ess}\, a \rightarrow \Box(\exists x)X(x)\big)$$

Postuláty: **(A1)** $\mathcal{P}(X) \equiv \neg\mathcal{P}(\neg X)$

(A2) $\Big(\mathcal{P}(X) \quad \& \quad \Box(\forall x)\big(X(x) \rightarrow Y(x)\big)\Big) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$

(A3) $\mathcal{P}(X) \rightarrow \Box\mathcal{P}(X)$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Gödelův systém:

Abeceda: Objekty: $a, b, c, \ldots, x, y, z$

Vlastnosti objektů: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$

Vztahy mezi vlastnostmi a objekty: $X \,\mathrm{Rel}\, y$ ap.

Vlastnosti vlastností: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$

Primitivní predikát: $\mathcal{P}$

Definice: $G(x) \equiv (\forall X)\big(\mathcal{P}(X) \rightarrow X(x)\big)$

$$X \,\mathrm{Ess}\, a \equiv X(a) \quad \& \quad (\forall Y)\Big(Y(a) \rightarrow \Box(\forall z)\big(X(z) \rightarrow Y(z)\big)\Big)$$

$$N(a) \equiv (\forall X)\big(X \,\mathrm{Ess}\, a \rightarrow \Box(\exists x)X(x)\big)$$

Postuláty: **(A1)** $\mathcal{P}(X) \equiv \neg\mathcal{P}(\neg X)$

(A2) $\Big(\mathcal{P}(X) \quad \& \quad \Box(\forall x)\big(X(x) \rightarrow Y(x)\big)\Big) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$

(A3) $\mathcal{P}(X) \rightarrow \Box\mathcal{P}(X)$

(A4) $\mathcal{P}(G)$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Gödelův systém:

Abeceda: Objekty: $a, b, c, \ldots, x, y, z$

Vlastnosti objektů: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$

Vztahy mezi vlastnostmi a objekty: $X \,\mathrm{Rel}\, y$ ap.

Vlastnosti vlastností: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$

Primitivní predikát: $\mathcal{P}$

Definice: $G(x) \equiv (\forall X)\big(\mathcal{P}(X) \to X(x)\big)$

$$X \,\mathrm{Ess}\, a \equiv X(a) \quad \& \quad (\forall Y)\Big(Y(a) \to \Box(\forall z)\big(X(z) \to Y(z)\big)\Big)$$

$$N(a) \equiv (\forall X)\big(X \,\mathrm{Ess}\, a \to \Box(\exists x)X(x)\big)$$

Postuláty: **(A1)** $\mathcal{P}(X) \equiv \neg\mathcal{P}(\neg X)$

(A2) $\Big(\mathcal{P}(X) \quad \& \quad \Box(\forall x)\big(X(x) \to Y(x)\big)\Big) \to \mathcal{P}(Y)$

(A3) $\mathcal{P}(X) \to \Box\mathcal{P}(X)$

(A4) $\mathcal{P}(G)$

(A5) $\mathcal{P}(N)$

Důkaz $\Box(\exists x)G(x)$

Kroky důkazu

T1 (Věta)	$\mathcal{P}(X) \rightarrow \Diamond(\exists x)X(x)$
C1 (Důsledek)	$\Diamond(\exists x)G(x)$
L1 (Lemma)	$G(x) \rightarrow (\forall X)\big(X(x) \rightarrow \mathcal{P}(X)\big)$
T2 (Věta)	$G(x) \ \rightarrow \ G \,\mathrm{Ess}\, x$
L6 (Lemma)	$G(x) \rightarrow \Box(\exists x)G(x)$
C2 (Důsledek)	$\Box(\exists x)G(x)$

$\Box(\exists x)G(x)$ a Bůh

Petr Vopěnka: …nemá právo nazývat se Bohem takové jsoucno, které je podřízeno rozumu. Rozum nestojí nad Bohem, ale Bůh stojí nad rozumem.

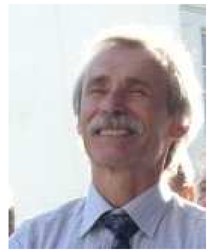
Pavol Zlatoš: …aká ubohá by bola naša viera, keby pre nás Gödelove axiómy a definície, ako aj logické axiómy a pravidlá modálnej logiky druhého rádu boly ľahšie prijateľné a uveriteľné než samotné tvrdenie o nevyhnutnosti Božej existencie.

Petr Hájek: Náboženská víra nespočívá v přijetí nějakých axiomů, ale v přijetí způsobu života (které přichází za pozváním).

$\Box(\exists x)G(x)$ a Bůh

Petr Vopěnka: ... nemá právo nazývat se Bohem takové jsoucno, které je podřízeno rozumu. Rozum nestojí nad Bohem, ale Bůh stojí nad rozumem.

Pavol Zlatoš: ... aká ubohá by bola naša viera, keby pre nás Gödelove axiómy a definície, ako aj logické axiómy a pravidlá modálnej logiky druhého rádu boly ľahšie prijateľné a uveriteľné než samotné tvrdenie o nevyhnutnosti Božej existencie.



Petr Hájek: Věřím, že Gödelův důkaz by si zasloužil podobný rozbor, jaký představil slavný protestantský theolog K. Barth pro důkaz Anselmův.

$\Box(\exists x)G(x)$ a Bůh

- $\mathcal{P}(X) \to \Box\mathcal{P}(X)$

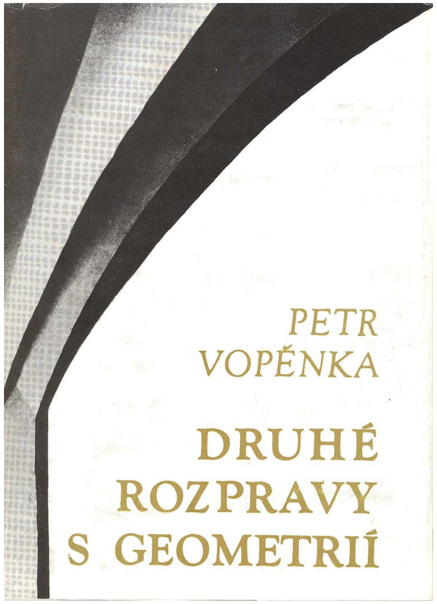
$\Box(\exists x)G(x)$ a Bůh

- $\mathcal{P}(X) \to \Box\mathcal{P}(X)$
- $\Big(\mathcal{P}(X)\ \ \&\ \ \Box(\forall x)\big(X(x) \to Y(x)\big)\Big) \to \mathcal{P}(Y)$

$\Box(\exists x)G(x)$ a Bůh

- $\mathcal{P}(X) \to \Box\mathcal{P}(X)$
- $\Big(\mathcal{P}(X) \;\;\&\;\; \Box(\forall x)\big(X(x) \to Y(x)\big)\Big) \to \mathcal{P}(Y)$
- Gödelův systém má i triviální model.

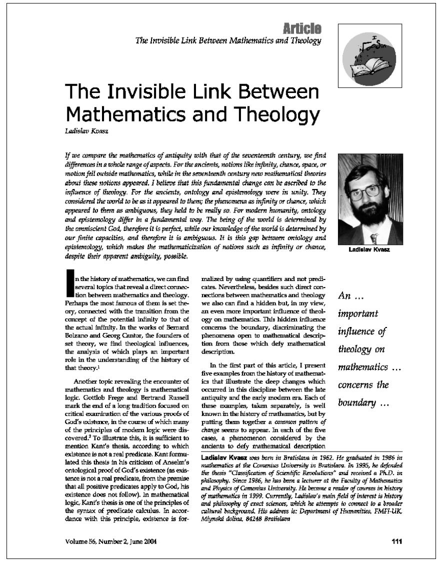
$\Box(\exists x)G(x)$ a novověká přírodověda



Petr Vopěnka: Novověká věda čerpá z tolika předpojatostí zděděných ze scholastiky, že je schopna zpětně dokázat, že je nutné, aby byl Bůh. Nejde pochopitelně o nějakého novodobě vykládaného Boha, ale o takového, jenž odpovídá poměrně jednoduchým středověkým představám. Avšak právě vědecký důkaz nutnosti takového Boha – úvahami sice nepřesvědčivými, avšak obvyklými v novověké matematice a logice – dosvědčuje, o jaké předpojatosti se novověká věda opírá, i když si toho není vědoma.

$\Box(\exists x)G(x)$ a novověká přírodověda

Ladislav Kvasz: Matematika 16. a 17. století nebyla pouhým obnovením antické tradice. Lišila se od ní v celé řadě aspektů, které mohou – podle mého názoru – být připsány vlivu monotheistické theologie na matematiku.



Article
The Invisible Link Between Mathematics and Theology

The Invisible Link Between Mathematics and Theology

Ladislav Kvasz

If we compare the mathematics of antiquity with that of the seventeenth century, we find differences in a whole range of aspects. For the ancients, notions like infinity, chance, space, or motion fell outside mathematics, while in the seventeenth century new mathematical theories about these notions appeared. I believe that this fundamental change can be ascribed to the influence of theology. For the ancients, ontology and epistemology were in unity. They considered the world to be as it appeared to them; the phenomena as infinity or chance, which appeared to them as ambiguous, they held to be really so. For modern humanity, ontology and epistemology differ in a fundamental way. The being of the world is determined by the omniscient God, therefore it is perfect, while our knowledge of the world is determined by our finite capacities, and therefore it is ambiguous. It is this gap between ontology and epistemology, which makes the mathematicization of notions such as infinity or chance, despite their apparent ambiguity, possible.

Ladislav Kvasz

In the history of mathematics, we can find several topics that reveal a direct connection between mathematics and theology. Perhaps the most famous of them is set theory, connected with the transition from the concept of the potential infinity to that of the actual infinity. In the works of Bernard Bolzano and Georg Cantor, the founders of set theory, we find theological influences, the analysis of which plays an important role in the understanding of the history of that theory.[1]

Another topic revealing the encounter of mathematics and theology is mathematical logic. Gottlob Frege and Bertrand Russell mark the end of a long tradition focused on critical examination of the various proofs of God's existence, in the course of which many of the principles of modern logic were discovered.[2] To illustrate this, it is sufficient to mention Kant's thesis, according to which existence is not a real predicate. Kant formulated this thesis in his criticism of Anselm's ontological proof of God's existence (as existence is not a real predicate, from the premise that all positive predicates apply to God, his existence does not follow). In mathematical logic, Kant's thesis is one of the principles of the syntax of predicate calculus. In accordance with this principle, existence is formalized by using quantifiers and not predicates. Nevertheless, besides such direct connections between mathematics and theology we also can find a hidden but, in my view, an even more important influence of theology on mathematics. This hidden influence concerns the boundary, discriminating the phenomena open to mathematical description from those which defy mathematical description.

In the first part of this article, I present five examples from the history of mathematics that illustrate the deep changes which occurred in this discipline between the late antiquity and the early modern era. Each of these examples, taken separately, is well known in the history of mathematics, but by putting them together a *common pattern of change* seems to appear. In each of the five cases, a phenomenon considered by the ancients to defy mathematical description

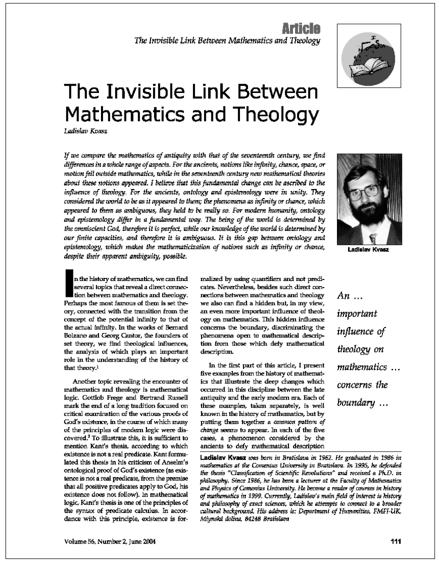
An … important influence of theology on mathematics … concerns the boundary …

Ladislav Kvasz *was born in Bratislava in 1962. He graduated in 1986 in mathematics at the Comenius University in Bratislava. In 1995, he defended the thesis "Classification of Scientific Revolutions" and received a Ph.D. in philosophy. Since 1986, he has been a lecturer at the Faculty of Mathematics and Physics of Comenius University. He became a reader of courses in history of mathematics in 1999. Currently, Ladislav's main field of interest is history and philosophy of exact sciences, which he attempts to connect to a broader cultural background. His address is: Department of Humanities, FMFI-UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava*

Volume 56, Number 2, June 2004 111

$\Box(\exists x)G(x)$ a novověká přírodověda

Ladislav Kvasz: …Staří chápali ontologii v jednotě s epistemologii. Svět je takový, jak se jeví; proto například nekonečno nebo náhoda, které se jim jevily jako nejasné, za nejasné považovali. Pro moderního člověka se však ontologie a epistemologie podstatně liší. Bytí světa je určeno všemocným Bohem, proto je svět dokonalý. Naproti tomu naše vnímání je určeno našimi omezenými schopnostmi, a proto je nejasné. A právě toto rozštěpení ontologie a epistemologie umožnilo matematizaci takových pojmů jako nekonečno, pohyb, proměnná, náhoda; navzdory tomu, že se jeví jako nejasné.


Article

The Invisible Link Between Mathematics and Theology

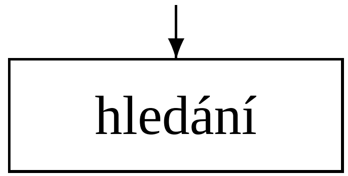
The Invisible Link Between Mathematics and Theology

Ladislav Kvasz

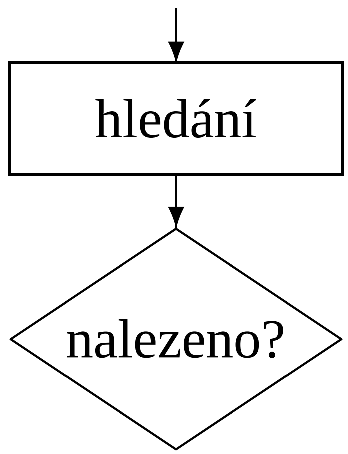
Volume 56, Number 2, June 2004 111

$\Box(\exists x)G(x)$ a postoj člověka

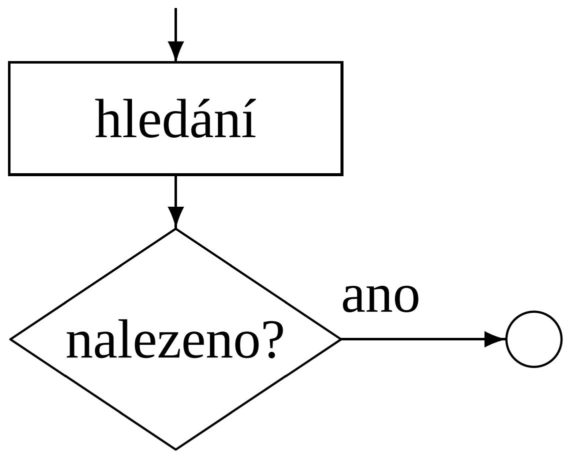
$\Box(\exists x)G(x)$ a postoj člověka



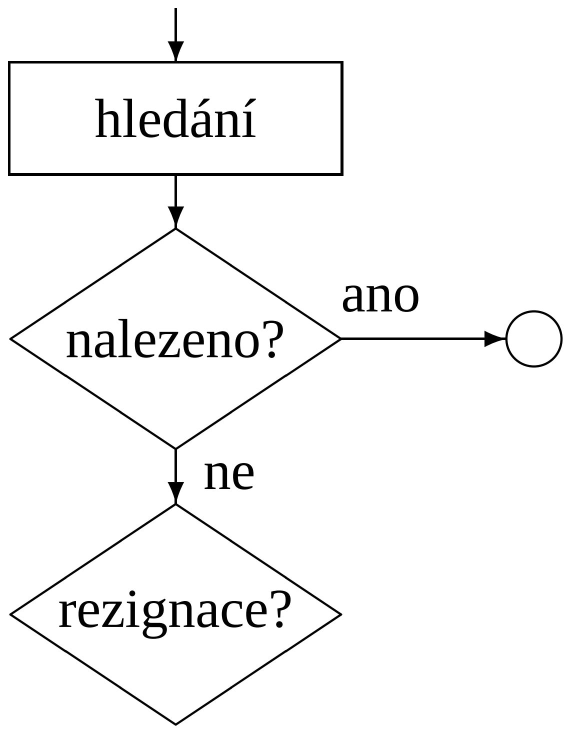
$\Box(\exists x)G(x)$ a postoj člověka



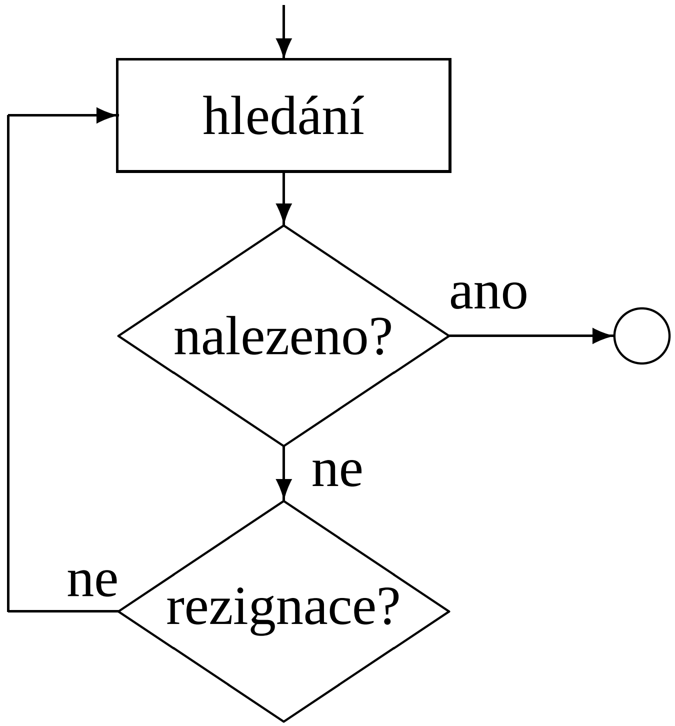
$\Box(\exists x)G(x)$ a postoj člověka



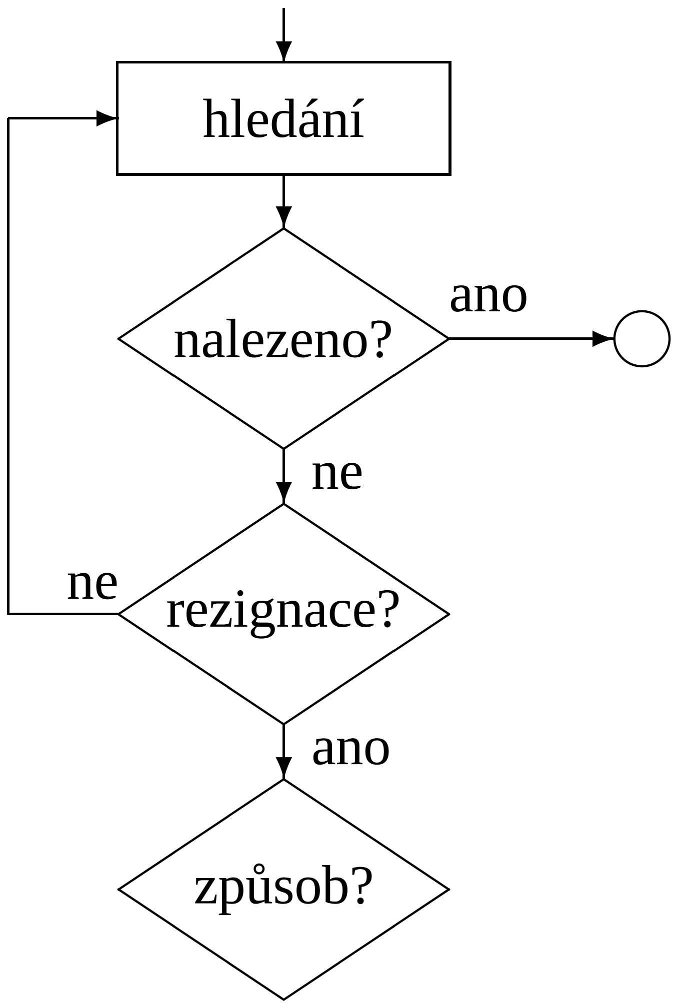
$\Box(\exists x)G(x)$ a postoj člověka



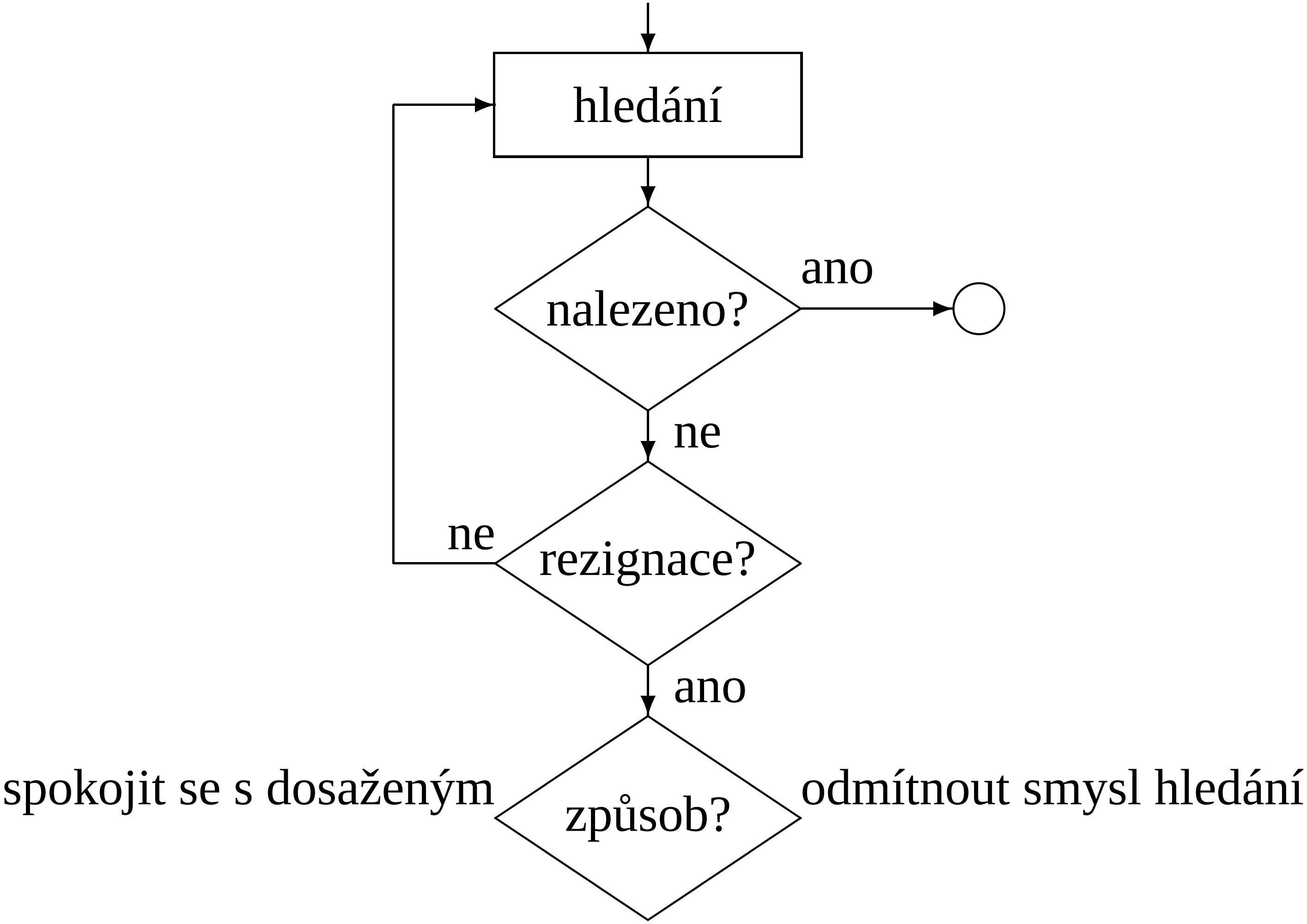
$\Box(\exists x)G(x)$ a postoj člověka



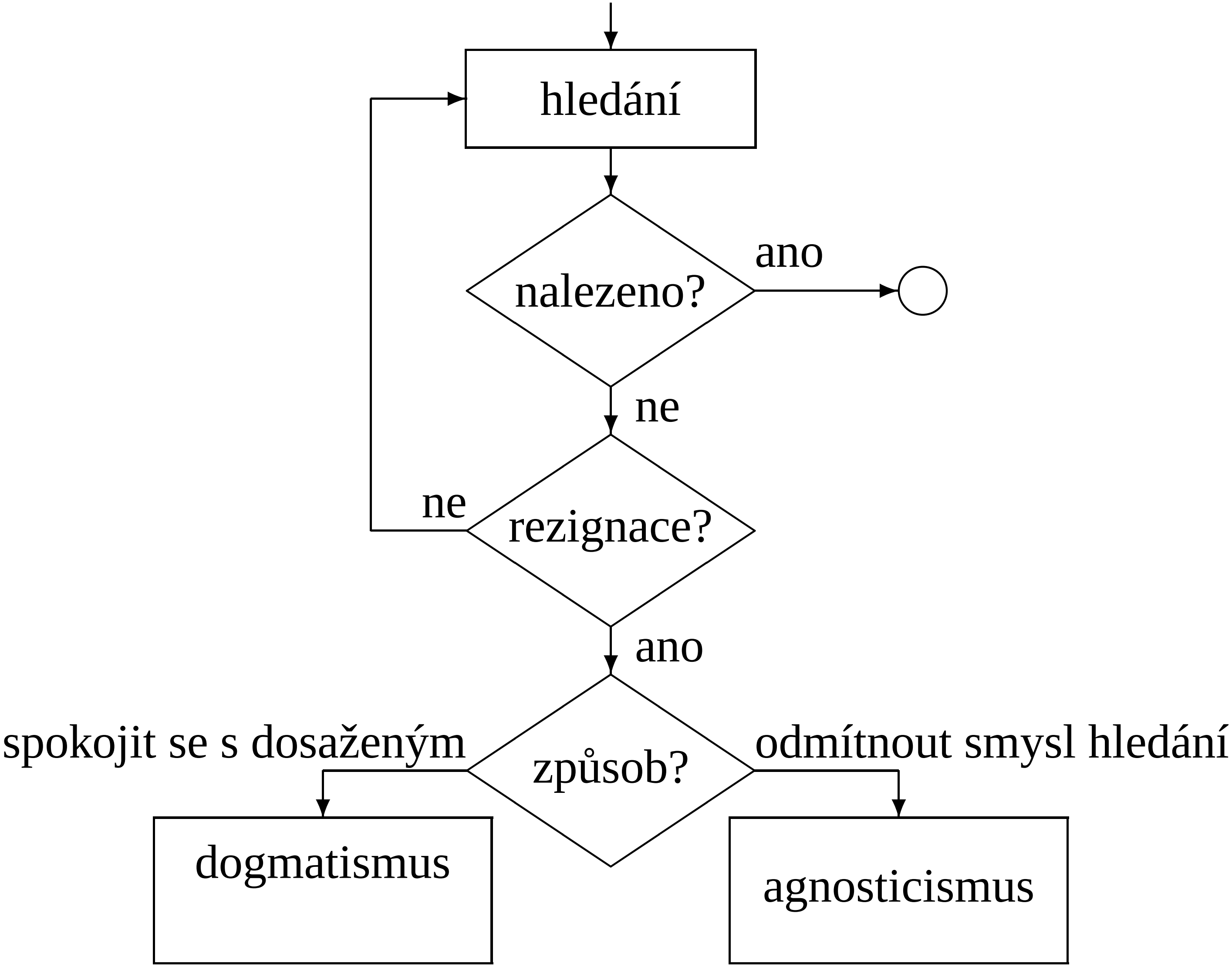
$\Box(\exists x)G(x)$ a postoj člověka



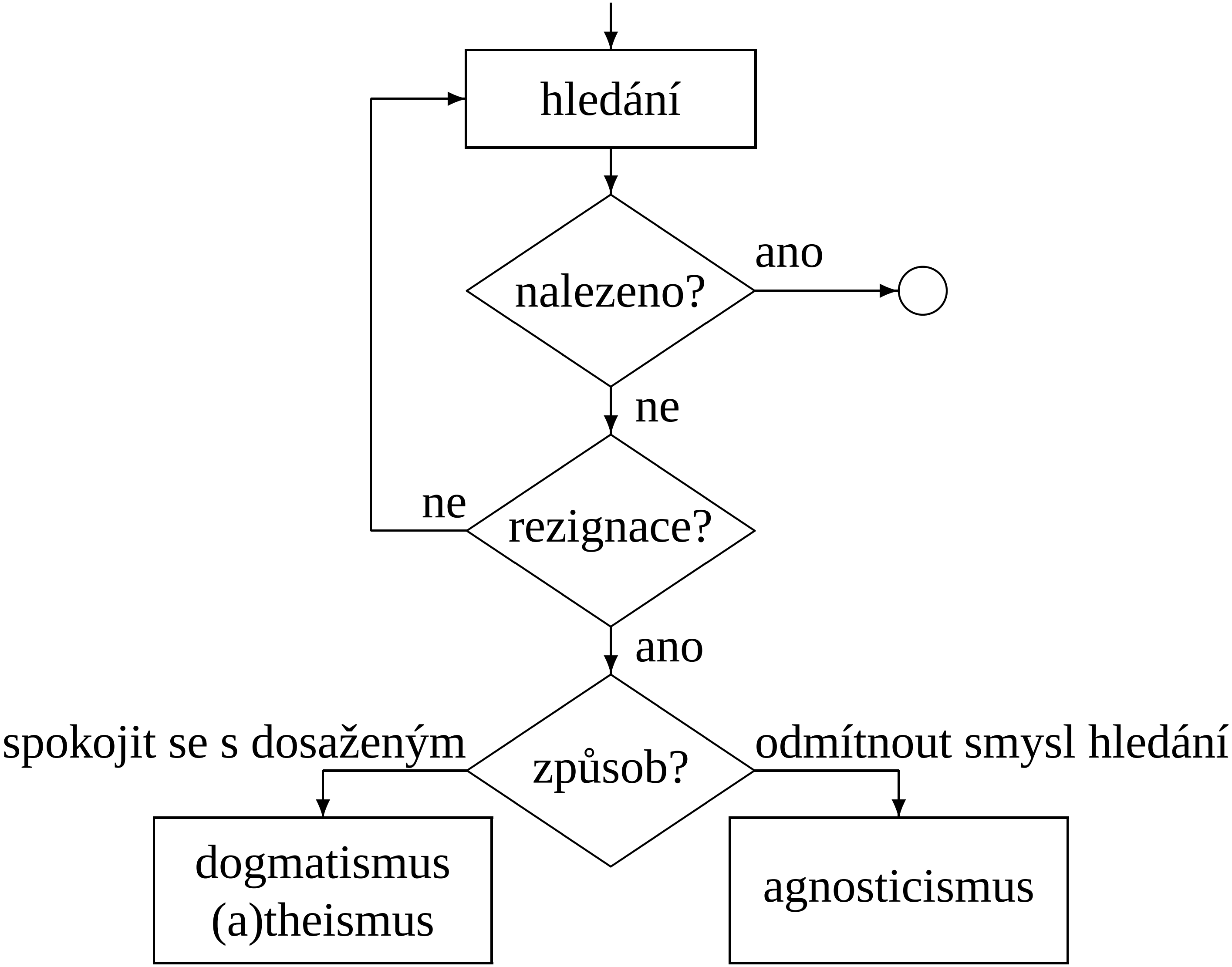
$\Box(\exists x)G(x)$ a postoj člověka



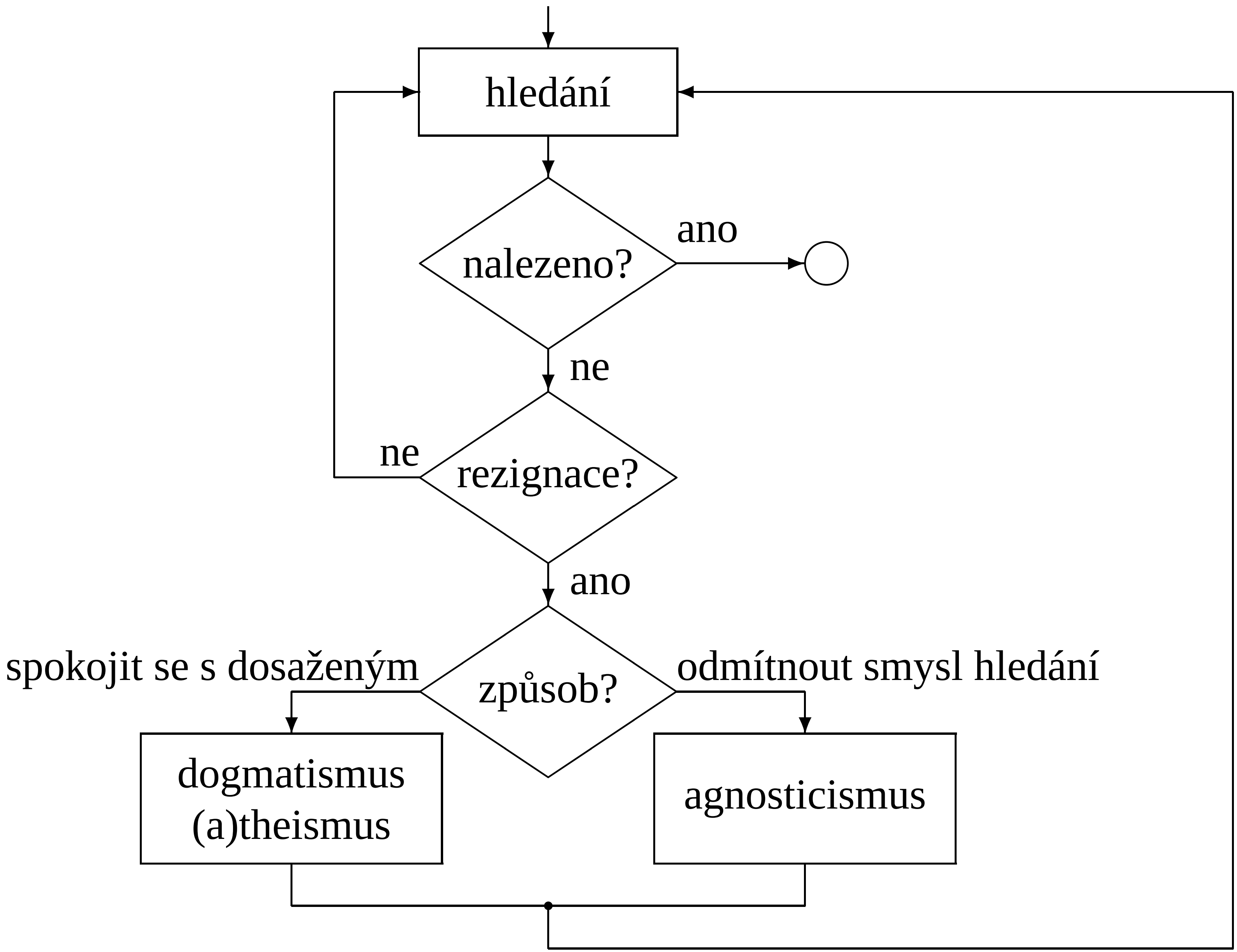
$\Box(\exists x)G(x)$ a postoj člověka



$\Box(\exists x)G(x)$ a postoj člověka



$\Box(\exists x)G(x)$ a postoj člověka



$$\Box(\exists x)G(x)$$