

Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných cvičná písemka

I. část

1. Najděte vzdálenost počátku souřadnic a množiny $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2 - x\}$ v součtové (taxikářské) metrice $\rho_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.
2. Buď (\mathbb{R}, ρ) prostor reálných čísel s přirozenou metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$. Udejte příklad množin $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ takových, že $A \neq \partial A$, $A \subseteq \partial A$; $B \neq \partial B$, $\partial B \subseteq B$; $C = \partial C$.
3. Zjistěte, zda funkce $z(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ je spojitá v bodě $(0, 0)$.
4. Určete jednotkový vektor, v jehož směru je derivace funkce $f(x, y) = x^{2y}$ v bodě $(1, 1)$ největší.
5. Určete hodnotu parametru a tak, aby výraz $\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{ax}{x^2 + y^2} dy$ byl totálním diferenciálem nějaké funkce dvou proměnných.
6. Napište rovnici tečny ke křivce $x^3 + y^3 = 3xy$ v bodě $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$.
7. Ve dvojnásobném integrálu $\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$ zaměňte pořadí integrace.
8. Integrál $\iint_A \frac{dx dy}{1 + x^2 + y^2}$, kde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - x^2 \leq y^2 \leq 4x - x^2\}$ transformujte do polárních souřadnic. Výsledný integrál již nepočítejte.

II. část

1. Najděte všechny roviny rovnoběžné s rovinou o rovnici $x + 4y + 6z = 0$, které jsou současně tečnými rovinami k elipsoidu o rovnici $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$.
2. Najděte lokální extrémů funkce $z = z(x, y)$ zadané implicitně rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z = 2.$$

3. Vypočítejte $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$, je-li $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq ax\}$, $r > 0$.
4. Vypočítejte $\iiint_W z dx dy dz$, je-li $W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1, z \geq 0 \right\}$.

Čas na vypracování: I. část 90 minut, II. část 45 minut.

Bodování: I. část 8×1 bod, II. část 4×2 body.

Hodnocení: I. část: dosáhnout více než 4 body.

II. část: [7,8]=A, [5.5,7]=B, [4,5.5]=C, [2.5,4]=D, [1,2.5]=E, [0,1]=F

Výsledky: I. 1) 2, 2) např. $A = (0, 1) \cap \mathbb{Q}$, $B = [0, 1]$, $C = \{0\}$, 3) není, 4) $(1, 0)$, 5) -1 , 6) $y = \sqrt[3]{4}$,

7) $\int_0^1 \left(\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \right) dy$, 8) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} \frac{r dr}{1+r^2} \right) d\varphi$.

II. 1) $x+4y+6z = 21$, $x+4y+6z = -21$, 2) $z_{max} = z(-3+\sqrt{6}, -3-\sqrt{6}) = 2\sqrt{6}-4$, $z_{min} = z(-3-\sqrt{6}, -3-\sqrt{6}) = -2\sqrt{6}-4$,

3) $\frac{\pi a^3}{3}$, 4) $\frac{3}{2}\pi$