Grafové algoritmy

2009/10, 3. termín

1. Bloky souvislého neorientovaného grafu

Je dán souvislý neorientovaný graf $G = (V, E)$. Terminologie a značení :

místo $\{u, v\}$ píšeme stručně uv,

$(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ je *cesta*, je-li $k \geq 0$, $v_0, v_1, \ldots, v_k$ jsou po dvou různé prvky z V a $v_0v_1, \ldots, v_{k-1}v_k \in E$; často též píšeme $(v_0v_1, \ldots, v_{k-1}v_k)$.

$(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ je *kružnice*, je-li $k \geq 3$, $v_0 = v_k$, $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$ jsou po dvou různé prvky z V a $v_0v_1, \ldots, v_{k-1}v_k \in E$,

Hrana e je *most*, když po jejím odstranění graf přestává být souvislý. Nechť M značí množinu všech mostů.

Na množině $E \setminus M$ definujeme relaci $\sim$ vztahem $e \sim f$ právě když hrany e, f leží na nějaké společné kružnici.

a) Doplňte důkaz.

Lemma 1. Relacce $\sim$ na množině $E \setminus M$ relací ekvivalence.

Důkaz.

Bloky v G jsou následující podgrafy grafu G :

- most se svými koncovými vrcholy,
- pro $e \in E \setminus M$, třída $e\sim$ spolu s konci jednotlivých hran.

Neprázdná množina hran B spolu s jejich koncovými vrcholy je *bisouvislá*, leží-li její libovolné dvě hrany na společné kružnici nebo jedná-li se o jedinou hranu.

b) Formulujte vztah mezi bisouvislými podgrafy a faktory (vše netriviální) a vaše tvrzení dokažte.

Lemma 2.

Následující algoritmus hledá bloky grafu G; přitom

C_{uv} je (jediná) kružnice vzniklá přidáním hrany uv ke stromu T – tzv. fundamentální kružnice pro hranu uv,

B_{uv} má být blok obsahucící hranu uv,

Q je fronta vrcholů - je to jako v BFS,

T je BFS-strom.

c) V algoritmu doplňte řádky 12 a 15.

Blocks(G)

1 **for** $uv \in E$
2 $\quad B_{uv} \leftarrow uv$
3 vyber $x \in V$
4 $Q \leftarrow x$
5 **repeat**
6 $\quad u \leftarrow$ *head* Q
7 $\quad$ **for** $v \in$ *Adj* u
8 $\quad\quad$ **if** $v \notin Q$
9 $\quad\quad\quad$ přidej uv do T, přidej v na konec Q
10 $\quad\quad$ **else for** $xy \in C_{uv}$
11 $\quad\quad\quad\quad B_{uv} \leftarrow B_{uv} \cup B_{xy}$
12 $\quad\quad\quad$ **for** xy ....
13 $\quad\quad\quad\quad B_{xy} \leftarrow B_{uv}$
14 $\quad\quad$ odstraň u z *Adj* v
15 $\quad$ odstraň u ....
16 **until** $Q = \emptyset$

d) Doplňte důkaz tvrzení :

Lemma 3. Po každé iteraci cyklu 7-14 je každé B_{uv} bisouvislé.

Důkaz. Indukcí vzhledem k počtu k již provedených cyklů.

$k = 0$. Libovolné $B_{uv} =$ .... a tedy ....

Indukční krok : 1. Nechť $v \notin Q$. Pak ....

2. $v \in Q$. Vytvoří se kružnice $u, v = x_0, x_1, \ldots, x_k = u$, $x_0x_1, \ldots, x_{k-1}x_k \in T$.

Pak $B =$ .... je novou hodnotou pro B_{xy}, $xy \in$ ....

Nechť $i \in \{1, \ldots, k\}$, $ab \in B_{x_{i-1}x_i}$. Pro $ab = x_{i-1}x_i$ máme ab a uv na kružnici v B.

Pro $ab \neq x_{i-1}x_i$ máme ab a $x_{i-1}x_i$ .... podle ....

a podle .... máme ab a uv na kružnici v B.

Tranzitivita $\sim$ dá zbytek.

e) Doplňte důkaz tvrzení :

Věta. Po skončení algoritmu je pro každé $uv \in E$ graf B_{uv} blokem obsahujícím hranu uv.

Důkaz. Připustme, že B_{uv} není blok. Nechť B je blok obsahující hranu uv. Máme $B_{uv} \subsetneq B$. Nechť $xy \in B \setminus B_{uv}$. Existuje C kružnice v B obsahující

....

Ukážeme, že $xy \in B_{uv}$ a to bude spor.

....

....

....

Můžete použít : Nechť hrany z $E \setminus T$ na C jsou $e_1, \ldots, e_k$. Nechť příslušné fundamentální kružnice jsou $C_1, \ldots, C_k$. Kružnice považujeme za sousední, mají-li společnou hranu. Lze ukázat, že takovýto graf (s vrcholy $C_1, \ldots, C_k$) je souvislý.

f) Uveďte tabulku, v níž řádky odpovídají změnám Q. Do prvního sloupce píšeme aktuální Q, pokud se něco přidávalo do T, uveďte to do 2. sloupce. Do 3. sloupce píšeme změněné C_{uv} a B_{uv}. Máme $x = 1$ a seznamy sousedů jsou uspořádány podle velikosti označení sousedů od nejmenšího po největší. Ve druhém diagramu znázorněte bloky.