MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCE

DATABÁZE TESTOVÝCH OTÁZEK V IS MU: DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

MONIKA PRŠANCOVÁ

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Roman Plch, Ph.D.

BRNO 2009

Prehlasujem, že som svoju diplomovú prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovanej literatúry.

V Brne 14.5.2009 Monika Pršancová

Anotácia: Práca sa venuje tvorbe testových otázok v IS MU, pre podporu výučby diferenciálnych rovníc 1. rádu. Práca je rozdelená na tri časti. Prvá časť je venovaná popisu tvorby testových otázok v IS MU. Druhá časť je venovaná jednotlivým typom diferenciálnych rovníc 1. rádu. Na začiatku každej podkapitoly je stručne zhrnutá teória a následne je vyriešených niekoľko príkladov. Tieto príklady boli vybrané z vytvorených sád testových otázok. Tretia časť obsahuje zdrojové kódy vytvorených testových otázok a je uložená na priloženom CD.

Kľúčové slová: diferenciálne rovnice 1. rádu, homogénna rovnica, lineárna rovnica 1. rádu, Bernoulliova rovnica, exaktná diferenciálna rovnica, Lagrangeova rovnica, Clairautova rovnica, odpovedníky, typy otázok, tvorba sady otázok

Abstract: This thesis focuses on the use of e-learning in IS MU in the field of the first order differential equations. In the first part of my work there is given detailed description of creating the test questions in IS MU e-learning environment. The types of equations are discussed in the second part of the work. At the beginning of each section a brief summary of a given type of equations is produced, solved problems follow afterwards. These problems were chosen from the question sets which were created as an integral part of this thesis. Their source code makes up the third part of the work and is stored on an enclosed CD.

Keywords: first order differential equations, homogeneous differential equations, linear first order differential equation, Bernoulli equation, exact differential equation, Lagrange equation, Clairaut equation, ROPOT, question types, creating the question set

Ďakujem RNDr. Romanovi Plchovi za vedenie práce, venovaný čas a pomoc, e-technikom za pomoc pri riešení vzniknutých problémov, svojej mamine a Milke za jazykové úpravy, podporu a veľa skvelých nápadov.

Obsah

Úvod

Cieľom tejto práce bola tvorba e-learningových testových príkladov pre podporu a obohatenie výučby diferenciálnych rovníc 1. rádu v prostredí Informačného systému Masarykovej univerzity.
Samotná práca je rozdelená na tri časti.

Prvá časť je venovaná tvorbe testových otázok v prostredí IS MU a je zameraná hlavne na tvorbu zložitejších otázok určených užívateľom s predošlými skúsenosťami.

Druhá časť je venovaná jednotlivým typom diferenciálnych rovníc 1. rádu. Na začiatku každej podkapitoly je stručne zhrnutá teória, ktorú študent používa pri riešení diferenciálnych rovníc. Pomocou nej sú následne vyriešené niektoré príklady vybrané z jednotlivých sád.

Treťou, hlavnou časťou sú sady testových príkladov, ktorých zdrojové kódy sú uložené na priloženom CD.

Začiatok tvorby e-learningových testových príkladov bol náročný. Pri tvorbe svojho prvého testu som postupovala krok za krokom, podľa návodu uverejneného v IS MU. Najskôr som sa učila tvoriť klasické otázky vkladané pomocou formulára. Najväčším problémom bolo vymyslieť nesprávne odpovede, preto som sa v príkladoch zamerala na priame zadanie algebraického výrazu.

Celkom bolo vytvorených 6 sád príkladov rozdelených podľa typu diferenciálnych rovníc a jedna sada zameraná na príklady testového charakteru. Každá zo 6 sád obsahuje okolo 20 príkladov. Pretože jednotlivé príklady sú rozdelené na podotázky, tvorba si vyžadovala zložitejšiu syntax a nebolo možné vkladať otázky do sád pomocou formulára. Pri tvorbe bolo potrebné ovládať základy HTML jazyka, syntax programu Maple a základy sadzby systémom LaTeX.

Práca bola napísaná systémom LaTeX a grafy boli nakreslené programom Maple.

Kapitola 1

Základy e-learningu v IS MU

V tejto kapitole sa budeme venovať tvorbe elektronických testových otázok v prostredí Informačného systému Masarykovej univerzity (IS MU). Tvorbou takýchto otázok vyučujúci podporí a obohatí bežné formy vyučovania a umožní študentom aktívne odpovedať aj mimo prezenčnej výučby. Postupne si ukážeme možnosti tvorby rôznych typov otázok. Podrobne sa však zameriame na zložitejšie typy otázok a otázok, ktoré sú v matematike najvyužívanejšie.

1.1 Typy otázok

IS ponúka rôzne typy otázok, ktoré je možné zadávať pomocou formulára alebo textovým editorom. Otázky sú nazvané podľa manipulačného prvku, ktorý sa v nich vyskytuje.
Otázka typu:

- :c Zaškrtnite všetky správne odpovede
- :r Zaškrtnite práve jednu správnu odpoveď
- :a Odpovedzte textom
- :t Doplňte alebo Preložte
- :tt Vpíšte do viacerých polí
- :v Vyberte z ponuky
- :vv Vyberte z viacerých ponúk
- :m Zoraďte alebo vytvorte dvojice

:n Vpíšte číslo

:s Upravte slovosled

:b Kľúč zobrazí odpoveď

:bb Kľúč zobrazí odpovede - viac skrytých polí

:l Priame zadanie algebraického výrazu

:e Vyhodnotenie odpovede externým serverom

medzitext

Pri tvorbe matematických testov je paleta otázok značne obmedzená a redukuje sa iba na niekoľko možností. Vo svojej práci som sa zamerala hlavne na otázky typy :r, :c, :l a ich kombináciu.
Príprava otázok sa skladá z dvoch krokov:

1. **Tvorba sady otázok** – slúži na zadávanie otázok.
2. Nastavenie **Popisu odpovedníka** – kto, kedy, za akých podmienok môže s materiálom pracovať a z akých sád sa majú otázky vyberať.

1.2 Tvorba sady otázok

Sada otázok je textový súbor so zadaním a riešením otázok. Má príponu **.qdef** a v správcovi súborov je označený zeleným štvorčekom.

- Prvým krokom k tvorbe otázok je založenie sady testových otázok. Pre založenie sady otázok musíme prejsť do sekcie **Učitel −> Odpovědníky −> Sady otázek - vytváření, úprava** následne pre založenie novej sady klikneme na **Založit novou sadu otázek**.

Tu treba vyplniť názov a zložku do ktorej sa sada uloží. Štandadne sa používa (je prednastavená) zložka **testbank** daného predmetu, nie je to však povinné. Táto zložka sa používa hlavne preto, že nie je prístupná študentom. Pri ukladaní do tejto zložky nie je teda potrebné nastavovať prístupové práva a aj chybnou manipuláciou s nimi túto zložku nemožno otvoriť pre čítanie. Prístupové práva má iba učiteľ daného predmetu.

Uverejnené návody sú orientované na užívateľa, ktorý má po prihlásení do IS v ponuke zložku **Učitel**. Čo však robiť ak v ponuke túto zložku nemáme? V tomto prípade treba postupovať nasledujúcim spôsobom.

- Pre založenie sady otázok musíme prejsť do sekcie **Elportál −>Vstup do nepředmětových e-l aplikací−>Sady otázek - vytváření, úprava**, kde následne pre založenie novej sady kliknime na **Založit novou sadu otázek**. Tu treba vyplniť povinné atribúty, tie sú:
  - názov sady otázok
  - zložku do ktorej sa má súbor so sadou otázok vložiť

Pre študentov odporúčam namiesto zložky **testbank**[1], založiť si v sekcii **Můj web** podobnú zložku určenú na tento účel, poprípade uložiť sadu otázok do inej zložky, ale nezabudnúť na nastavenie prístupových práv. Nie je totižto žiaduce, aby mal do tejto zložky prístup aj iný užívateľ.
Nakoniec všetko uložíme.

- Druhým krokom je plnenie sady testových otázok. Klikneme na **Plnit sadu testových otázek** a vstúpime na stránku, kde sa vytvárajú jednotlivé otázky. Vkladať otázky môžeme:
  1. formulárom
  2. textovým editorom

1. Formulár sa otvára klikaním na jednotlivé písmená, každé písmeno reprezentuje jeden typ otázky.

Obr. 1.1: Vkladanie otázky formulárom

Formulár je pohodlná cesta ako vytvoriť veľa otázok, ktoré nevyžadujú zvláštne formátovanie tj. nie sú zložité. Zložitejšie typy otázok nemožno zadávať formulárom. Pri tvorbe takýchto otázok je možné obrátiť sa na e-technika[2], alebo postupovať podľa návodu umiestneného na `https://is.muni.cz/auth/dok/el_quest_edit_navod.pl`.

2. Vklanie otázok textovým editorom je určené užívateľom, ktorí chcú vkladať zložitejšie otázky, alebo chcú vkladať niekoľko otázok naraz. Pri písaní

[1] Zložka **testbank** je študentom neprístupná

[2] Technici vám radi poskytnú akékoľvek informácie k tvorbe sady otázok. Stačí ich kontaktovať na adrese isna@fi.muni.cz.

otázok textovým editorom je dôležité dodržiavať nasledujúce pravidlá. Pri vkladaní viacerých otázok naraz sa každé dve otázky oddeľujú od seba dvomi znamienkami mínus na začiatku riadku.
Na oddeľovacom riadku nesmie byť nič iné zadané.
Do súboru je možné vkladať vlastné poznámky, ktoré sa ďalej nespracúvajú a študentom sa nezobrazujú. Riadok s poznámkou sa začína znakom # a končí s koncom riadku.
Napríklad:

```
<p>Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice
<M>2y-x^3y'=0</M>.</p>
 :r1 <M>y= \mathrm{C} \mathrm{e}^{\frac{-1}{x^2}}</M>
 :r2 <M>y= \mathrm{C} \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}</M>
 :r3 <M>y= \mathrm{C}(x+2)\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}</M>
:r1 ok
--
# priklad 299/2.21 táto poznámka sa študentovi nezobrazí.
<p>Nájdite všeobecné riešenie rovnice <M>4xy'-y=1</M>.</p>
 :r1 <M>y= -1+\sqrt[4]{\mathrm{C}x}</M>
 :r2 <M>y= \sqrt[2]{\mathrm{C}x}-\frac{1}{2} </M>
 :r3 <M>y= \sqrt[4]{4x}</M>
:r1 ok
```

Definícia jednej otázky sa skladá z dvoch častí.

1.Zadávacia časť
Ktorá diferncialna rovnica 1. radu má všeobecné riešenie v tvare <M>y(x)=\mathrm{C}\mathrm{e}^x+x^2</M>? :r1 <M>y'=y+2x-x^2</M> :r2 <M>y'=x(x-2)+y</M> :r3 <M>y'=y+4x-2x^2</M> :r4 <M>y'=2x(2-x)+y</M>
2.Hodnotiaca časť
:r1 ok

1. Zadávacia časť

Začína sa so začiatkom definície jednej testovej otázky. Popisuje sa tu v akom tvare sa otázka zobrazí, prípadne všetky ponúkané možnosti.

Pri otázkach typu :r, :c[3] a pri tvorbe zložitejších otázok a vnorovaní niekoľkých typov otázok do seba, dodržiavame nasledujúce pravidlá.
Každú z ponúkaných možností zadávame na samostatný riadok a odsadíme ju

[3]Pri otázkach typu :r, :c vypisujeme do zadávacej časti všetky ponúkané možnosti.

od začiatku riadka jednou medzerou. Nasleduje manipulačný prvok, medzera a možná odpoveď[4]. Napríklad:

```
<p> Ukážková zadávacia časť otázky typu :c. Je dnes pekne? </p>
 :r1 Áno
 :r2 Nie
```

Inú syntax používame pri otázkach, kde študent nevyberá správnu možnosť, ale vpisuje ju do vyhradeného políčka[5]. Miesto pre označnie políčka na odpoveď sa v zdrojovom kóde pri otázkach typu :l značí: `:l___________`[6]. Počet podtržítok určuje veľkosť políčka na odpoveď. Nemusí vždy nutne začínať na začiatku riadku. Môžme ho umiestniť kdekoľvek do textu. Jedinou zásadou je oddeliť `:l___________` od textu ospoň jednou medzerou. Do jednej otázky je možné umiestniť niekoľko políčok na odpoveď. V zdrojovom kóde ich rozlišujeme číslicami pri manipulačnom prvku. Napríklad:

```
 Vypočítajte:
 12+3 = :l1_________.
 12+5 = :l2_________.
```

Ak zadávacia časť začína `<HTML>`, potom systém nič neformátuje a spolieha sa na to, že užívateľ sám doplní vlastné formátovanie v jazyku HTML. Nie je nutné, aby v testovej otázke bola uvedená uzatváracia značka `</HTML>`. Ak zadávacia časť začína `<PRE>`, potom systém celú otázku uzavrie do HTML značiek `<PRE>` ... `</PRE>`, tzv. rovnaké formátovanie ako v zdrojovom texte testovej otázky. Do zadávacej časti je možné vkladať matematické výrazy formulované jazykom LaTeX. Výrazy musia byť uzatvorené v značkách `<M>`... `</M>` napr. :

```
<M> f(x)=5x^{2}+7x </M>.
```

Editovať vzorce alebo popisy prípadných chýb je možné na adrese `https://is.muni.cz/auth/system/tex2img_debug.pl`

Do zadávacej časti taktiež možno vkladať obrázky, zvuky, videá, externé pdf a iné dokumenty. Materiál, na ktorý sa odkazujeme, musíme uložiť buď do zložky **testbank**, alebo do inej zložky. Záleží na tom, či chceme aby materiály boli študentom prístupné, alebo nie.

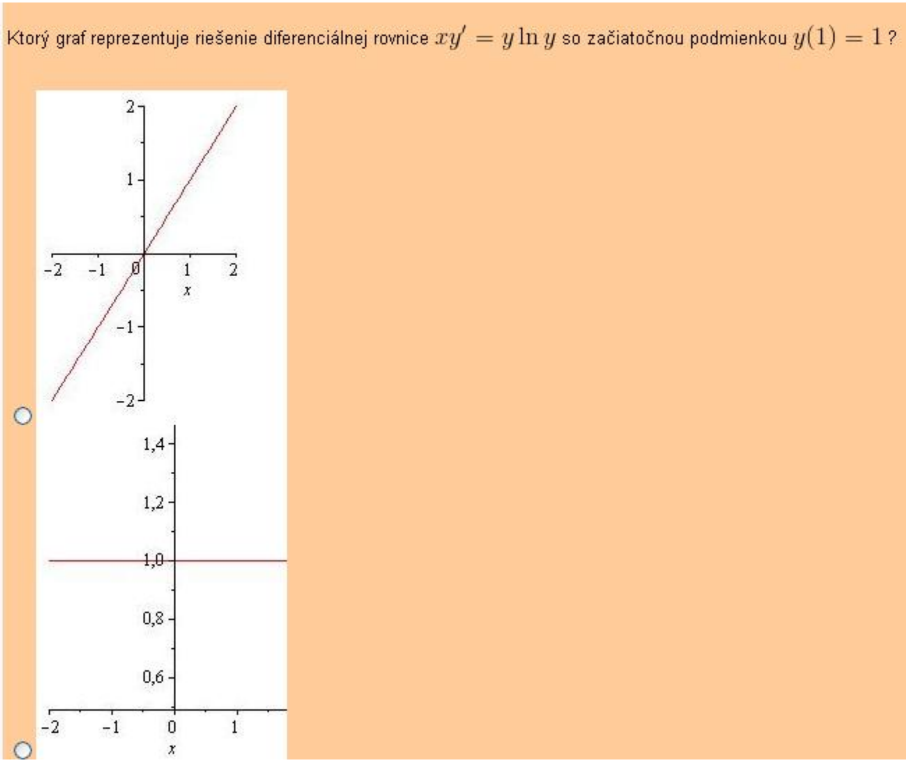
[4]Pre začiatočníkov je odporúčané vkladať otázku formulárom a následne sa pozrieť na zdrojový kód.

[5]Platí pre otázky typu :t, :tt, :n, :l.

[6]Analogicky pri otázkach typu :t, :tt, :n

```
--
<p>Ktorý graf reprezentuje riešenie diferenciálnej rovnice
<M>xy'=y\ln{y}</M> so začiatočnou podmienkou <M>y(1)=2</M>? </p>
 :r1 <IMG SRC="https://is.muni.cz/auth/el/...">
 :r2 <IMG SRC="https://is.muni.cz/auth/el/...">
:r1 ok
```

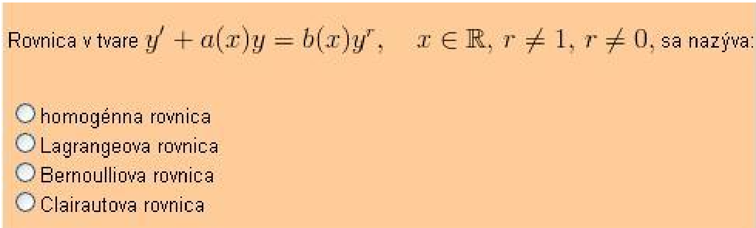
Poznámka. Namiesto možnej odpovede sme zadali adresu obrázku, ktorý sme uložili do zložky **testbank**.



Obr. 1.2: Otázka s obrázkom v zadávacej časti

2. Hodnotiaca časť

Hodnotiaca časť začína dvojbodkou, zanamienkom mínus alebo otáznikom na začiatku riadka. Cieľom je určiť, ktoré z možných odpovedí sú správne, obodovať ich a poprípade určiť spätnú väzbu. Spätná väzba je nepovinná a je určená študentom ako reakcia na zadanú odpoveď. Správnu odpoveď, alebo odpovede, zadávame na začiatok riadka hneď za dvojbodkou. Ak odpovedáme na otázku typu :c alebo :r uvádzame iba tú odpoveď ktorá je správna, tj. označená ok, napr.:



Obr. 1.3: Otázka typu :r

Zdrojový kód tejto otázky má tvar:

```
<p>Rovnica v tvare <M>y' + a(x)y = b(x)y^r,
\quad x\in\mathbb{R},\, r\neq 1,\, r\neq 0,</M> sa nazýva:</p>
 :r1 homogénna rovnica
 :r2 Lagrangeova rovnica
 :r3 Bernoulliova rovnica
 :r4 Clairautova rovnica
:r3 ok
-1
```

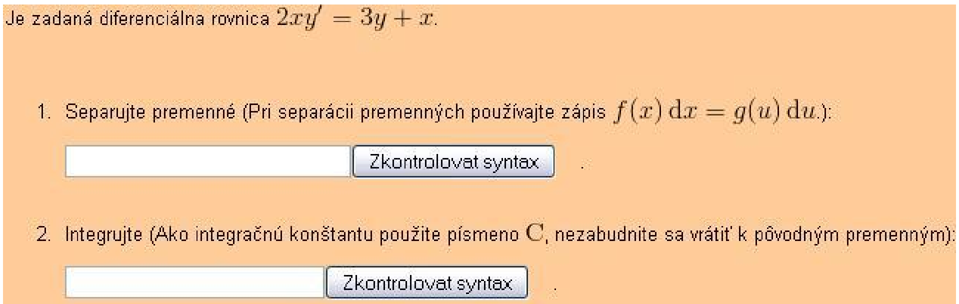
Poznámka. Vidíme, že hodnotiaca časť otázky typu :r viď. obr. 1.3 sa začína dvojbodkou na začiatku riadka. Správna odpoveď je r3 tj. Bernoulliova rovnica a študent za označenie tejto odpovede získava implicitný počet bodov[7]. Druhý riadok hodnotiacej časti nám hovorí, že za každú inú odpoveď študent dostáva -1 bod.

Počet riadkov v hodnotiacej časti smie byť viac a to v prípade, kedy má daná otázka niekoľko správnych odpovedí. Pri priamom zadávaní algebraického výrazu musíme do hodnotiacej časti doplniť požadovanú správnu odpoveď a to za znak rovnosti. Ak do odpovede vkladáme medzeru, alebo niekoľko medzier, celý obsah musíme uzavrieť do úvodzoviek napr.:

[7] Implicitné bodové hodnotenie sa zadáva pri zakladaní popisu odpovedníkov.

```
<div class="question"><div class="task">Je zadaná diferenciálna rovnica
<m>2xy'= 3y+x</m>.
</div><div class="content">
<ol class="abc" >
<li>Separujte premenné (Pri separácii premenných používajte
zápis <M>f(x)\,\mathrm{d}x = g(u)\,\mathrm{d}u </M>.):
<p>:l1____________________________.</p></li>
<li>Integrujte (Ako integračnú konštantu použite písmeno
<M>\mathrm{C}</M>, nezabudnite sa vrátiť k pôvodným premenným):
<p> :l2__________________________. </p></li></ol></div></div>
```

```
:l1="2*du/(u+1)= dx/x" ok 1
:l2="(y+x)^2=C*x^3" ok 1 Výborne!!! [8]
:l2="C*(y/x+1)^2=x" ok 1 Výborne!!!
```



Obr. 1.4: Otázka typu :l

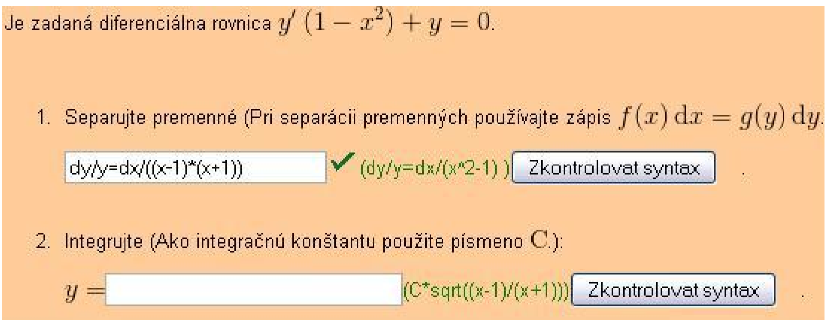
Hodnotiaca časť obsahuje tiež voliteľné bodové hodnotenie. Pri ukladaní testu študentom sa zadáva implicitné bodové hodnotenie za správnu odpoveď. Aspoň jedna odpoveď musí byť učiteľom označená symbolom **ok** ako správna. Ak študent označil túto odpoveď ako správnu, dostáva za ňu implicitný počet bodov, ak nie je uvedené inak. Počet získaných bodov môžeme ďalej upresňovať číslom, alebo percentom vzhľadom k implicitnému počtu bodov. Bodové alebo percentuálne hodnotenie sa oddeľuje od zvyšku riadka aspoň jednou medzerou.

[8] Spätná väzba. Ak študent odpovedal správne, tak pri vyhodnotení testu bude pochválený. Naopak, pri otázkach typu :r, môžeme spätnú väzbu použiť pri nesprávnych odpovediach. Tak môžeme študentovi vysvetliť chybu, ktorej sa dopustil.

Priame zadanie matematického výrazu
Otázka typu :l

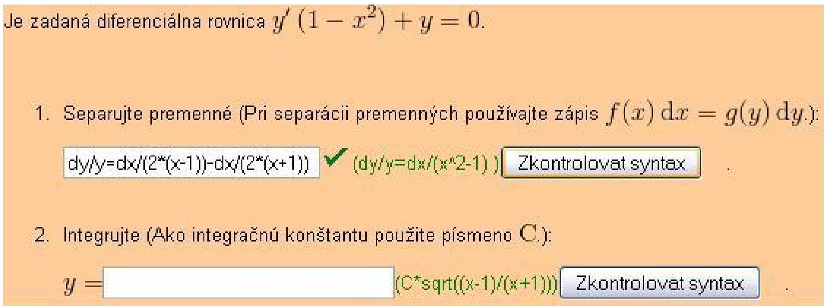
Tento typ je určený pre matematické otázky, na ktoré má študent odpovedať algebraickým výrazom. Správnosť zadaných odpovedí je kontrolovaná programom Maple. Aby bolo možné otázku vyhodnotiť, musí študent odpoveď zadať syntaxou programu Maple. Študent si môže správnosť zápisu sám skontrolovať kliknutím na **Zkontrolovat syntax**. Maple umožňuje vyhodnotiť rôzne zápisy toho istého výrazu.
Napríklad:

```
<div class="question"><div class="task">Je zadaná diferenciálna rovnica
<m>y'\left( 1-x^2\right) +y=0 </m>.
</div><div class="content">
<ol class="abc" >
<li>Separujte premenné (Pri separácii premenných
používajte zápis <M>f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y </M>.):
<p> :l1_________________________.</p></li>
<li>Integrujte (Ako integračnú konštantu použite písmeno
<M>\mathrm{C}</M>.):
<p><M>y=</M> :l2______________________________.</p> </li>
</ol></div></div>
:l1="dy/y=dx/(x^2-1) " ok 1
:l2="C*sqrt((x-1)/(x+1))" ok 1
```



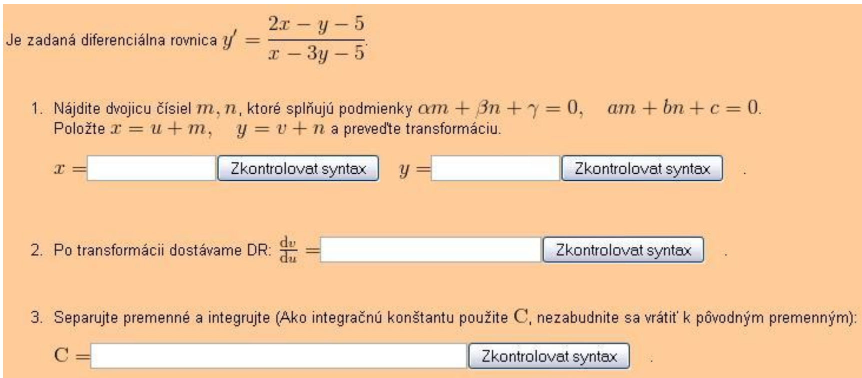
Obr. 1.5: Grafická podoba príkladu vybraného zo sady DR so separovateľnými premennými – možná správna odpoveď

Poznámka. Správna odpoveď, ktorá je uvedená v hodnotiacej časti zdrojového kódu, je tvaru: `dy/y=dx/(x^2-1)`.
Pretože Maple umožňuje rozpoznať a vyhodnotiť rôzne zápisy toho istého výrazu, je odpoveď tvaru `dy/y=dx/((x+1)*(x-1))` uznaná ako správna viď. obr. 1.5.
Rovnako, keď urobíme rozklad na parciálne zlomky, a zadáme odpoveď do tvaru `dy/y=dx/(2*(x-1))-dx/(2*(x+1))`, tá je rozpoznaná a vyhodnotená ako správna viď. obr. 1.6. Preto nie je nutné zadávať všetky správne odpovede.



Obr. 1.6: Grafická podoba príkladu vybraného zo sady DR so separovateľnými premennými – iná možná správna odpoveď

Naproti tomu v nasledujúcom príklade viď. obr. 1.7 (3. krok) je nutné do hodnotiacej časti zadávať viac správnych odpovedí.



Obr. 1.7: Grafická podoba príkladu vybraného zo sady HDR

Poznámka. To, že Maple nie je schopný v tomto prípade rozpoznať rôzne zápisy toho istého výrazu, je spôsobené integračnou konštantou C. Odpoveď na tretí bod môže byť zadaná v tvare:

- `3*(y+1)^2-2*(x-2)*(y+1)+2*(x-2)^2`

- `3*y^2+2*x^2-2*x*y+10*y-10*x`
- `2*(x-2)*(y+1)-2*(x-2)^2-3*(y+1)^2`
- `2*x*y-10*y+10*x-3*y^2-2*x^2`

Kontrolu správnosti odpovedí možno ovplyvniť pomocou povolených (whitelist), resp. zakázaných (blacklist) funkcií, alebo procedúr. To sú funkcie, ktoré sa v odpovedi môžu, resp. nemôžu objaviť. Tak môžeme študentom sprístupniť iba niektoré funkcie, alebo zamedziť výpočet odpovede pomocou nejakej funkcie Maplom.

- Príklad použitia zakázaných (backlist) funkcií. Študent nemôže pri zadaní odpovede použiť funkciu pre zderivovanie.

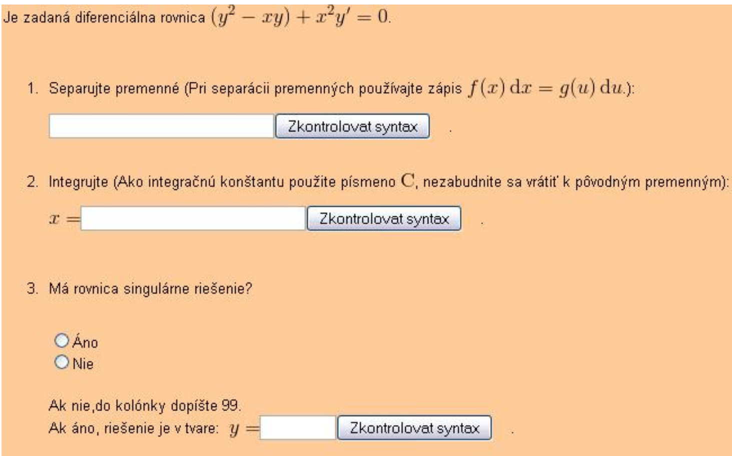
```
Zderivujte výraz <M>y=5x^5</M>.
<M>y\prime = </M> :l_____________
:l="25*x^4 b[diff, Diff, D]" ok 1
```

- Príklad použitia povolenách (whitelist) funkcií. Študent v odpovedi môže použiť iba exponenciálnu funkciu.

```
<div class="question"><div class="task">Je zadaná diferenciálna
rovnica <m> \left( x^2-xy\right) y'+y^2=0 </m>.
</div><div class="content">
<ol class="abc" >
<li>Separujte premenné (Pri separácii premenných
používajte zápis <M>f(x)\,\mathrm{d}x = g(u)\,\mathrm{d}u </M>.):
 <p> :l1___________________________.</p></li>
<li>Integrujte (Ako integračnú konštantu použite písmeno
<M>\mathrm{C}</M>,
nezabudnite sa vrátiť k pôvodným premenným):
<p> <M>y=</M> :l2__________________________. </p></li>
</ol></div></div>
:l1="(u-1)/u*du=dx/x " ok 1
:l2="C*exp(y/x) w[exp]" ok 1
```

Ak nie je v odpovedi použitý whitelist alebo blacklist, automaticky sa použije whitelist funkcií vyskytujúcich sa v správnom riešení.

V otázke môžeme použiť aj ľubovoľnú kombináciu manipulačných prvkov. Je dôležité dodržiavať vyššie uvedené pravidlá. Uvedieme si príklad jednej zložitejšej otázky, ktorú nemožno vkladať formulárom. Otázka obsahuje

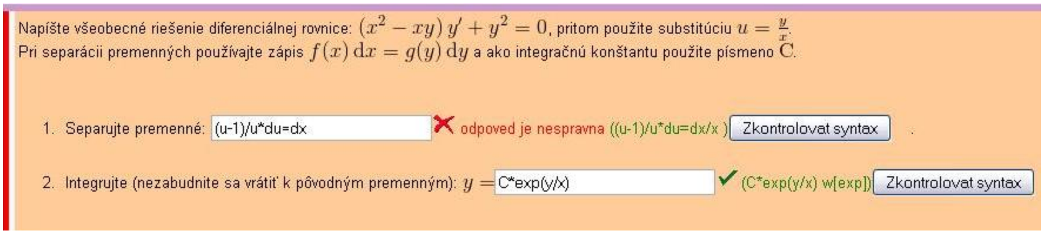


Obr. 1.8: Kombinovaná otázka typu :r, :l

podotázky typu :l a podotázku typu :r. Pretože otázka nie je štandardným typom, uvedieme si jej grafickú podobu a následne aj zdrojový kód.

```
<div class="question"><div class="task">
Je zadaná diferenciálna rovnica <m> \left( y^2-xy\right)+x^2y'=0 </m>.
</div><div class="content">
<ol class="123" >
<li>Separujte premenné (Pri separácii premenných používajte
zápis <M>f(x)\,\mathrm{d}x = g(u)\,\mathrm{d}u </M>.):
<p> :l1______________________________.</p></li>
<li>Integrujte (Ako integračnú konštantu použite písmeno
<M>\mathrm{C}</M>, nezabudnite sa vrátiť k pôvodným premenným):
<p> <M>x=</M> :l2______________________________.</p> </li>
<li><p>Má rovnica singulárne riešenie?</p>
 :r1 Áno
 :r2 Nie </li>
Ak nie,do kolónky dopíšte 99.
Ak áno, riešenie je v tvare:  <M>y=</M> :l3_______.
</ol></div></div>
:l1="-du/u^2=dx/x" ok 1
:l2="C*exp(x/y) w[exp]" ok 1
:r1 ok 1
:l3="0" ok 1
```

Otázky možno neskôr meniť a upravovať, či už pomocou formulára kliknutím na **upravit formulářem**, alebo úpravou v textovom editore. Táto voľba je však odporúčaná iba pokročilejším užívateľom, ktorí ovládajú značky pre vytváranie otázok v textovom editore. Tiež je možné upravovať otázky pomocou **upravit sadu otázek ve Správci souborů**. Pomocou tohto odkazu môžu pokročilí užívatelia upravovať, alebo vkladať viac otázok naraz a to priamo textovým editorom v ISe. Otázky možno skontrolovať kliknutím na **Zkontrolovat odpovědi**. Následne sa zobrazia zeleno, resp. červeno vyznačené správne, resp. nesprávne odpovede.



Obr. 1.9: Ukážka správnej, resp. nesprávnej odpovede

1.3 Založenie a popis odpovedníkov

Odpovedníky sú webové formuláre obsahujúce otázky, ku ktorým študent vpisuje, alebo zaškrtáva správne odpovede. Uvedieme si stručný postup založenia odpovedníka.
Ak sa nenachádzame na stránkach pre prácu so sadami otázok, vstúpime cez zložku **Učitel** do záznamníka učiteľa. V sekcii **Odpovědníky** klikneme na **Správa odpovědníku** −> **Založit nový popis odpovědníku**. Následne budeme vyzvaní na zadanie adresy, kam sa má popis odpovedníkov umiestniť. Funkciou **Vyhledat** určíme zložku **testbank**. Pretože v popise odpovedníka sú uvedené technické parametre nastavujúce jeho fungovanie, popis odpovedníka ukladáme vždy do zložky **testbank**. Odkaz pre študentov pre prácu s odpovedníkom zadávame na iné miesto. Následne vyplníme názov odpovedníka a výber sád otázok [9]. Je možné kombinovať otázky aj z viacerých sád. Stačí vyhľadať sady ako v prvom prípade a pri každej zaškrtnúť políčko **použít** a zadať počet otázok, ktoré sa majú z danej sady vybrať.
V nastavení odpovedníka sa ďalej uvádza:

- Implicitný počet bodov za správnu odpoveď (ok), za nesprávnu odpoveď (nok) a za nezodpovedanú odpoveď (null).[10]

[9] Sada otázok má koncovku **.qdef**.
[10] Body, ktoré sú zadané v konkrétnych príkladoch, majú väčšiu váhu ako body nastavené v odpovedníku.

- Nastavenie ukladania bodov do poznámkového bloku.
- Nastavenie náhodného výberu poradia otázok, poprípade náhodný výber poradia možností v otázkach typu :r,:c.
- Zobrazenie správnych odpovedí študentom (ihneď, po skončení obdobia, nikdy).
- Študent sa smie k odpovedníkom vracať a pracovať s nimi opakovane (áno, nie).
- Zadanie obdobia, kedy sa smie s odpovedníkom pracovať.[11]
- Kto môže s odpovedníkom pracovať.
- Vytvorenie odkazu na odpovedník.

Teraz už máme všetko pripravené na prácu s odpovedníkom. Nastavené parametre môžeme meniť a upravovať v sekcii **Odpovědníky** −>**Správa odpvědníku**−>**upravovat**. Podrobný návod založenia odpovedníka nájdeme na `http://is.muni.cz/do/1499/el/zkzk/3.htm`.

[11] Pre reálne skúšanie je dôležité venonať veľkú pozornosť bezpečnostným opatreniam. Poraďte sa radšej s e-technikom.

Kapitola 2

Sady testových príkladov

Sady testových príkladov sú uložené v zložke **testbank** predmetu M5521 podzim 2007. Tiež boli uložené do zložky **testbank** predmetu F2712, kde bol vytvorený odpovedník prístupný študentom tohto predmetu. Študenti študovaného predmetu sú v prvom ročníku štúdia, a pretože vyplňovanie príkladov si vyžaduje syntax programu Maple, robilo im skladanie testu problémy. Tento problém sa krátkym kurzom a dostatkom času dá odstrániť.
Zatiaľ nie je možné testy tlačiť priamo z IS, preto sú zdrojové kódy sád otázok uložené v priloženom CD. Celkom bolo vytvorených 6 sád príkladov a jedna sada zameraná na príklady testového charakteru. Sady sú rozdelené na:

1. Rovnice so separovateľnými premennými (12 otázok)
2. Homogénne diferenciálne rovnice (27 otázok)
3. Lineárna rovnica 1. radu (22 otázok)
4. Bernoulliova rovnica (17 otázok)
5. Exaktné diferenciálne rovnice (26 otázok)
6. Diferenciálne rovnice nerozriešené vzhľadom k derivácii (25 otázok)
7. Sada testových otázok (40 otázok)

Keďže nie je možné do písomnej práce priamo vložiť jednotlivé sady, v tejto časti si aspoň priblížime príklady, ktoré sú v sadách obsiahnuté. Na začiatku každej podkapitoly je uvedený stručný prehľad teórie, ktorú študent používa pri riešení príkladov. Následne sú zadané príklady aj s riešením, ktoré má študent so znalosťami danej látky dosiahnuť. Príklady sú vyberané z jednotlivých sád a formulované rovnako ako v sadách, tj. pomocou vhodne zvolených podotázok. Aj keď podotázky môžu byť pri riešení akýmsi vodítkom, voľba takto zvolených podotázok bola nutná pre kontrolu správnosti riešenia. Nejednoznačnosť vznikla voľbou integračnej konštanty. Snažila som sa ju preto eliminovať vhodnou podotázkou, aj za cenu nápovedy pri riešení diferenciálnych rovníc.

2.1 Rovnice so separovateľnými premennými

Definícia 2.1. Diferenciálna rovnica tvaru

$$y' = f(x)g(y), \tag{2.1}$$

kde f a g sú funkcie spojité na (niektorých) otvorených intervaloch sa nazýva *rovnica so separovateľnými premennými.*

Rovnicu riešime nasledujúcim spôsobom:
Ak vynecháme konštantné riešenie, ktoré dostaneme ako riešenie rovnice $g(y) = 0$, môžeme rovnicu (2.1) prepísať do tvaru

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

a po nahradení y' členom $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a následným vynásobením $\mathrm{d}x$ dostávame:

$$\frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

Následným itnegrovaním dostávame:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ak si označíme $G(y)$ ako primitívnu funkciu k funkcii $\frac{1}{g(y)}$ a $F(x)$ primitívnu funkciu k $f(x)$, na ľavej, resp. pravej strane rovnice, dostaneme tzv. *všeobecné riešenie* v implicitnom tvare

$$G(y) = F(x) + \mathrm{C}, \quad \mathrm{C} \in \mathbb{R}.$$

Poznámka. Pri vypĺňovaní tohto kroku v testoch je potrebné, aby sa študent nepomýlil a ako integračnú konštantu používal predpísané veľké písmeno

C, ak nie je uvedené inak. Program Maple nevie rozpoznať, že C je integračná konštanta. Berie ju ako premennú, a preto je treba dávať veľký pozor. Ak miesto integračnej konštanty zadáme iné písmeno ako dané C a všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice bude správne, tak aj napriek tomu bude celá otázka vyhodnotená ako nesprávna.

Ak má rovnica $g(y) = 0$ riešenia, tak takéto riešenia môžu byť *singulárnymi riešeniami* rovnice (2.1).
Úloha nájsť riešenie $y(x)$ diferenciálnej rovnice, ktoré spĺňajú začiatočnú podmienku $y(x_0) = y_0$ sa nazýva *Cauchyova začiatočná úloha.*

Tj. ak nie je pre riešenie rovnice zadaná žiadna podmienka, určujeme všeobecné riešenie rovnice, ktoré závisí na integračnej konštante C ako na parametri. Voľbou konkrétnej hodnoty pre konštantu C dostávame tzv. *partikulárne riešenie.*

Krivku, ktorá je grafom riešenia, nazývame tiež *integrálnou krivkou.* Geometrická interpretácia všeobecného riešenia je jednoparametrický systém integrálnych kriviek. Krivka, ktorá odpovedá konkrétnej voľbe integračnej konštanty C, je *geometrickou interpretáciou partikulárneho riešenia.* Krivka, ktorá spĺňa začiatočnú podmienku $y(x_0) = y_0$ prechádza bodom $[x_0, y_0]$.

Môžeme sa tiež častokrát stretnúť s tzv. *separovateľným tvarom* ktorý je tvaru:

$$f(x)g(y) + h(x)e(y)\, y' = 0$$

Túto rovnicu možno za predpokladu $h(x) \neq 0,\ g(y) \neq 0$ upraviť na tvar

$$\frac{f(x)}{h(x)} + \frac{e(y)}{g(y)} y' = 0,$$

čo je diferenciálna rovnica so separovanými premennými a jej všeobecné riešenie môžme zapísať do tvaru

$$\int \frac{f(x)}{h(x)} \mathrm{d}x + \int \frac{e(y)}{g(y)} \mathrm{d}y = \mathrm{C}, \quad \mathrm{C} \in \mathbb{R}.$$

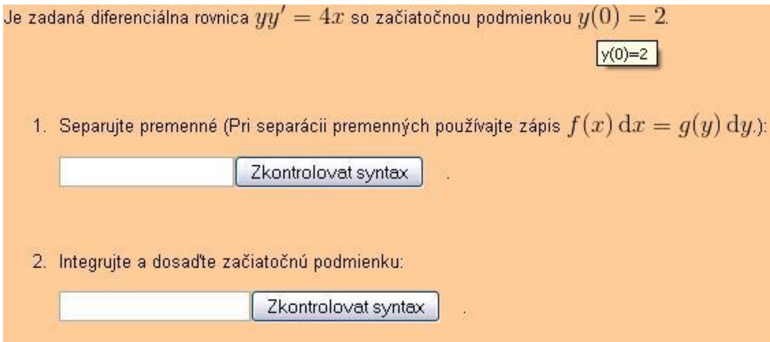
Príklady

Príklad 2.1.1. Je zadaná diferenciálna rovnica

$$yy' = 4x$$

so začiatočnou podmienkou $y(0) = 2$. V prvom kroku separujte premenné, v druhom kroku integrujte a napíšte partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice. Pri separácii premenných používajte zápis $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$.

Poznámka. Separáciou premenných v otázkach rozumieme prepísanie rovnice (2.1) do tvaru (2.2).Pretože program Maple berie $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ ako premenné, nie je nutné zapisovať separáciu premenných v tvare `diff(y(x),x)`. Vyplnenie tohto kroku v otázkach si nevyžaduje syntax programu Maple.



Obr. 2.1: Grafická podoba príkladu 2.1.1.

Zdrojový kód otázky.

```
<div class="question"><div class="task">Je zadaná diferenciálna rovnica
<M>yy'=4x</M> so začiatočnou podmienkou <M>y(0)=2 </M>.
</div><div class="content">
<ol class="abc" >
<li>Separujte premenné (Pri separácii premenných používajte zápis
<M>f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y </M>.):
<p>:l1_________________ .</p></li>
<li> Integrujte a dosaďte začiatočnú podmienku: <p> :l2______ .</p></li>
</ol></div></div>
:l1="y*dy=4*x*dx" ok 1
:l2="y^2/2=2*x^2+2" ok 1
```

Riešenie. 1. Ide o diferenciálnu rovnicu so separovateľnými premennými. Dosadením a nahradením y' členom $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a úpravou dostávame požadovaný tvar separácie premenných

$$y\,\mathrm{d}y = 4x\,\mathrm{d}x.$$

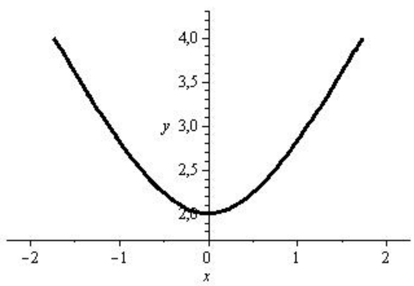
Integrovaním dostávame :

$$\int y \,\mathrm{d}y = 4 \int x \,\mathrm{d}x$$
$$\frac{y^2}{2} = 2x^2 + \mathrm{C}.$$

Dosadením $x = 0$, $y = 2$:

$$\frac{4}{2} = 2 \cdot 0 + \mathrm{C}$$
$$\mathrm{C} = 2.$$

2. Partikulárnym riešením je v tvare $\dfrac{y^2}{2} = 2(x^2 + 1)$.



Obr. 2.2: Partikulárne riešenie rovnice $yy' = 4x$ so začiatočnou podmienkou $y(0) = 2$.

Príklad 2.1.2. Je zadaná diferenciálna rovnica

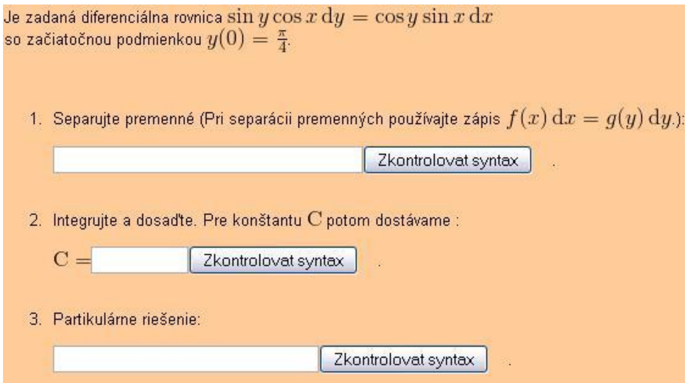
$$\sin y \cos x \,\mathrm{d}y = \cos y \sin x \,\mathrm{d}x$$

so začiatočnou podmienkou $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

1. Separujte premenné. Pri separácii premenných používajte zápis $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$.

2. Integrujte a dosaďte. Určte konštantu C.

3. Určte partikulárne riešenie.



Obr. 2.3: Grafická podoba príkladu 2.1.2.

Riešenie. 1. Ide o tzv. separovateľný tvar rovnice, ktorý za predpokladu $\cos y \neq 0$ a $\cos x \neq 0$ prevedieme na rovnicu so separovateľnými premennými

$$\frac{\sin y}{\cos y}\mathrm{d}y = \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x.$$

2. Integrujeme. Pri integrácii použijeme vhodnú substitúciu.

$$\int \frac{\sin y}{\cos y}\mathrm{d}y \left| \begin{array}{rl} \cos y & = t \\ -\sin y\,\mathrm{d}y & = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x \left| \begin{array}{rl} \cos x & = a \\ -\sin x\,\mathrm{d}x & = \mathrm{d}a \end{array} \right|$$

$$-\int \frac{1}{t}\mathrm{d}t = -\int \frac{1}{a}\mathrm{d}a$$

$$\ln|t| = \ln|a| + \mathrm{K}$$

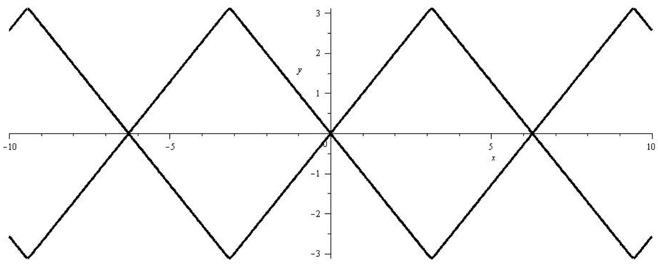
$$\cos y = \mathrm{C}\cos x.$$

Dosadením $x = 0$, $y = \frac{\pi}{4}$:

$$\cos\frac{\pi}{4} = \mathrm{C}\cos 0$$

$$\mathrm{C} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Partikulárne riešenie je v tvare $\cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x$.



Obr. 2.4: Partikulárne riešenie rovnice $\sin y \cos x \, \mathrm{d}y = \cos y \sin x \, \mathrm{d}x$ so začiatočnou podmienkou $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

2.2 Homogénne diferenciálne rovnice

Definícia 2.2. Funkciu $f(x, y)$ dvoch premenných nazývame *homogénna funkcia (stupňa k)*, ak platí

$$f(\mathrm{w}x, \mathrm{w}y) = \mathrm{w}^{\mathrm{k}} f(x, y) \tag{2.3}$$

pre každé číslo $\mathrm{w} \neq 0$ a každý bod $[x, y]$ z definičného oboru funkcie f.

Tak napríklad funkcia $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ je homogénna funkcia druhého stupňa, pretože platí:

$$f(\mathrm{w}x, \mathrm{w}y) = (\mathrm{w}x)^2 + (\mathrm{w}y)^2 - (\mathrm{w}x)(\mathrm{w}y) = \mathrm{w}^2(x^2 + y^2 - xy) = \mathrm{w}^2 f(x, y).$$

Funkcia $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ je homogénna funkcia nultého stupňa, pretože platí:

$$f(\mathrm{w}x, \mathrm{w}y) = \frac{(\mathrm{w}x)^2 - (\mathrm{w}y)^2}{(\mathrm{w}x)^2 + (\mathrm{w}y)^2} = \frac{\mathrm{w}^2(x^2 - y^2)}{\mathrm{w}^2(x^2 + y^2)} = f(x, y).$$

Definícia 2.3. Diferenciálna rovnica $y' = f(x, y)$ sa nazýva *homogénna diferenciálna rovnica 1. radu*, ak je funkcia $f(x, y)$ homogénna funkcia nultého stupňa.

Ak je funkcia $f(x, y)$ homogénna funkcia nultého stupňa, potom voľbou $t = \frac{1}{x}$ dostaneme $f(x, y) = f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$. Ak si označíme $g(z) = f(1, z)$ vidíme, že každú homogénnu funkciu možno napísať v tvare $f\left(\frac{y}{x}\right)$, kde f je vhodne zvolená funkcia.

Homogénnu diferenciálnu rovnicu potom možno zapísať v tvare

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.4}$$

Táto rovnica sa rieši zavedením substitúcie $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, kde

$$\begin{aligned} y(x) &= x\,u(x) \\ y'(x) &= u(x) + xu'(x). \end{aligned}$$

Uvedená substitúcia prevedie homogénnu diferenciálnu rovnicu na rovnicu so separovateľnými premennými, ktorú už vieme riešiť. Po vyriešení sa nesmieme zabudnúť vrátiť k pôvodným premenným.

Na homogénnu rovnicu, prípadne na rovnicu so separovateľnými premennými, možno previesť aj rovnicu

$$y' = f\left(\frac{am + bn + c}{\alpha m + \beta n + \gamma}\right), \tag{2.5}$$

a to nasledujúcim spôsobom. Riešime sústavu

$$\begin{aligned} am + bn + c &= 0 \\ \alpha m + \beta n + \gamma &= 0. \end{aligned}$$

a) Sústava má jediné riešenie $[m, n]$. Potom substitúciou

$$\begin{aligned} x &= u + m \\ y &= v + n \end{aligned}$$

prevedieme rovnicu (2.5) na homogénnu rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = F\left(\frac{v}{u}\right), \tag{2.6}$$

čo je rovnica typu (2.4) a túto riešiť vieme.

b) Sústava nemá riešenie a platí $am + bn = \mathrm{K}(\alpha m + \beta n)$ a $c \neq \mathrm{K}\gamma$. Potom substitúcia $z = ax + by$ prevedie rovnicu (2.5) na rovnicu (2.4) so separovanými premennými.

Príklady

Príklad 2.2.1. Je zadaná diferenciálna rovnica

$$(y^2 - xy) + x^2y' = 0.$$

1. Separujte premenné. (Pri separácii premenných používajte zápis $f(x)\,\mathrm{d}x = g(u)\,\mathrm{d}u$.)

2. Integrujte. (Ako integračnú konštantu použite písmeno C, nezabudnite sa vrátiť k pôvodným premenným.)

3. Určte singulárne riešenie.

Riešenie. 1. Separujeme premenné

$$(y^2 - xy) + x^2y' = 0 / : x^2$$
$$\left(\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}\right) + y' = 0.$$

Použijeme substitúciu $u = \frac{y}{x} \Longrightarrow y' = u + xu'$.

$$(u^2 - u) + u + xu' = 0$$
$$u^2 + u'x = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\frac{\mathrm{d}x}{x} \Longrightarrow u^2 \neq 0.$$

2. Integrujeme

$$\frac{1}{u} = \ln|x| + \mathrm{K}$$
$$\frac{x}{y} = \ln|x| + \mathrm{K}$$
$$x = \mathrm{C}e^{\frac{x}{y}}.$$

3. Singulárne riešenie:
Vylúčili sme prípad, kedy $u^2 \neq 0$. Rovnica má konštantné riešenie $u^2 = 0$ a teda pôvodná rovnica má riešenie $y = 0$, čo nie je zahrnuté v predchádzajúcom výsledku.
Singulárnym riešením je priamka zadaná rovnicou $y = 0$.

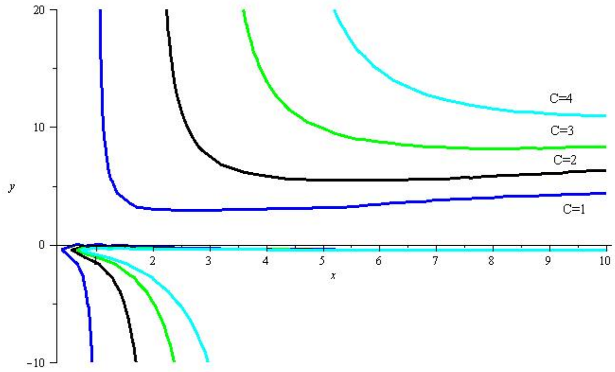
Príklad 2.2.2. Je zadaná diferenciálna rovnica

$$(x + 2y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0,$$

so začiatočnou podmienkou podmienkou $y(1) = 2$.

1. Separujte premenné. (Pri separácii premenných používajte zápis $f(x)\,\mathrm{d}x = g(u)\,\mathrm{d}u$.)

2. Integrujte. (Ako integračnú konštantu použite písmeno C, nezabudnite sa vrátiť k pôvodným premenným.) Určte singulárne riešenie.



Obr. 2.5: Všeobecné riešenie rovnice $(y^2 - xy) + x^2y' = 0$.

3. Zo začiatočnej podmienky určte konštantu C.
4. Napíšte partikulárne riešenie.

Riešenie. 1. Separujeme premenné

$$(x + 2y)\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y$$
$$\left(1 + 2\frac{y}{x}\right) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Použijeme substitúciu $u = \frac{y}{x} \Longrightarrow y' = u + xu'$.

$$1 + 2u = u + xu'$$
$$1 + u = x\frac{\mathrm{d}u}{dx}$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}u}{1+u} \Longrightarrow 1 + u \neq 0.$$

2. Integrujeme

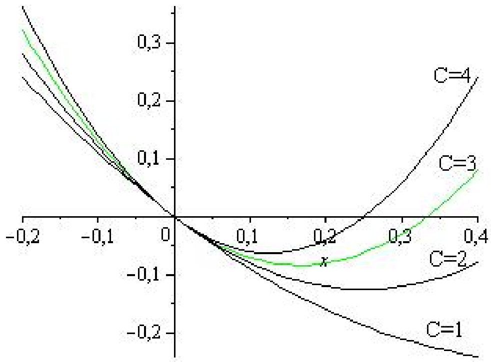
$$\ln|x| = \ln|1 + u| + \mathrm{K}$$
$$\mathrm{C}x = \frac{x + y}{x}$$
$$y = \mathrm{C}x^2 - x.$$

Singulárne riešenie:
Vylúčili sme prípad, kedy $1 + u \neq 0$. Rovnica má konštantné riešenie $u = -1$ a teda pôvodná rovnica má riešenie $y = -x$, čo je zahrnuté v predchádzajúcom výsledku pre voľbu konštanty $\mathrm{C} = 0$.

3. Pre $y = 2$, $x = 1$ dostávame:

$$\begin{aligned} \mathrm{C} \cdot 1 &= 1 + 2 \\ \mathrm{C} &= 3. \end{aligned}$$

4. Partikulárne riešenie je v tvare $y = x(3x - 1)$.



Obr. 2.6: Všeobecné riešenie rovnice $(x + 2y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$

Príklad 2.2.3. Je zadaná diferenciálna rovnica

$$y' = \frac{2x - y - 5}{x - 3y - 5}.$$

Nájdite dvojicu čísiel m, n, ktoré spĺňajú podmienky

$$\begin{aligned} \alpha m + \beta n + \gamma &= 0 \\ am + bn + c &= 0. \end{aligned}$$

1. Položte $x = u + m$, $y = v + n$ a transformujte.

2. Po transformácii upravte rovnicu na homogénnu rovnicu (2.6).

3. Separujte premenné a integrujte. Nezabudnite sa vrátiť k pôvodným premenným.

Riešenie. 1. Riešime sústavu rovníc

$$\begin{aligned}
2m - n - 5 &= 0\\
m - 3n - 5 &= 0/(-2)\\
2m - n - 5 &= 0\\
-2m + 6n + 10 &= 0\\
5n + 5 &= 0\\
n &= -1\\
m &= 2.
\end{aligned}$$

Položíme $x = u + m$, $y = v + n$.

$$\begin{aligned}
x = u + 2 &\Longrightarrow u = x - 2\\
y = v - 1 &\Longrightarrow v = y + 1.
\end{aligned}$$

2. Po dosadení do pôvodnej rovnice dostávame:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} &= \frac{2u + 4 - v + 1 - 5}{u + 2 - 3v + 3 - 5}\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} &= \frac{2u - v}{u - 3v}.
\end{aligned}$$

Výsledkom je homogénna diferenciálna rovnica (2.6). Použijeme substitúciu $z = \frac{u}{v} \Longrightarrow v' = z + uz'$.

$$\begin{aligned}
z + uz' &= \frac{2 - z}{1 - 3z} / - z\\
uz' &= \frac{3z^2 - 2z + 2}{1 - 3z}.
\end{aligned}$$

3. Separujeme premenné

$$\frac{1 - 3z}{3z^2 - 2z + 2}\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

Integrujeme

$$\begin{aligned}
\frac{-\frac{1}{2}(6z - 2)}{3z^2 - 2z + 2}\mathrm{d}z &= \frac{\mathrm{d}u}{u}\\
\int \frac{6z - 2}{3z^2 - 2z + 2}\mathrm{d}z &= -2\int \frac{\mathrm{d}u}{u} \Longrightarrow u \neq 0,\ 3z^2 - 2z + 2 \neq 0\\
\ln|3z^2 - 2z + 2| &= -2\ln|u| + \mathrm{K}\\
\ln|3z^2 - 2z + 2| + 2\ln|u| &= \mathrm{K}.
\end{aligned}$$

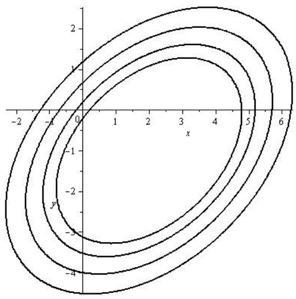
Po odlogaritmovaní

$$u^2(z^2 - 2z + 2) = \mathrm{C}.$$

Vrátime sa k pôvodným premenným

$$\begin{aligned} u^2\left(3\frac{v^2}{u^2} - 2\frac{v}{u} + 2\right) &= \mathrm{C} \\ (3v^2 - 2uv + 2u^2) &= \mathrm{C} \\ 3(y+1)^2 - 2(x-2)(y+1) + 2(x-2)^2 &= \mathrm{C} \\ 3y^2 + 2x^2 - 2xy + 10y - 10x + 15 &= \mathrm{C} \\ 3y^2 + 2x^2 - 2xy + 10y - 10x &= \mathrm{C}. \end{aligned}$$

Toto je všeobecné riešenie danej rovnice v implicitnom tvare. Vrátime sa k podmienke $3z^2 - 2z + 2 \neq 0$, či nám neumožní určiť singulárne riešenie. Daná rovnica nemá v $\mathbb{R}$ riešenie tj., pre žiadne reálne číslo z nebude výraz rovný nule.



Obr. 2.7: Všeobecné riešenie rovnice $y' = \dfrac{2x - y - 5}{x - 3y - 5}$.

Príklad 2.2.4. Je zadaná diferenciálna rovnica

$$y' = \frac{x - 2y + 3}{2x - 4y + 5}.$$

1. Nájdite substitúciu, ktorou rovnicu prevedieme na rovnicu (2.4) so separovateľnými premennými. Substitúciu označte písmenom z.
2. Separujte premenné. (Pri separácii použite zápis $f(x)\,\mathrm{d}x = g(z)\,\mathrm{d}z$.)
3. Integrujte. (Ako integračnú konštantu použite C, nezabudnite sa vrátiť k pôvodným premenným.)

Riešenie. 1. Pre sústavu rovníc platí:

$$x - 2y = 2(x - 2y)$$
$$3 \neq 2 \cdot 5.$$

Potom $z = x - 2y$, $z' = 1 - 2y' \Longrightarrow y' = \dfrac{1 - z'}{2}$.

2. Separujeme premenné

$$\begin{aligned} \frac{1 - z'}{2} &= \frac{z + 3}{2z + 5} \\ 1 - z' &= \frac{2z + 6}{2z + 5} \\ -z' &= \frac{2z + 6 - 2z - 5}{2z + 5} = \frac{1}{2z + 5}. \end{aligned}$$

Dostávame požadovaný tvar separácie premenných

$$(2z + 5)\,\mathrm{d}z = -\,\mathrm{d}x.$$

3. Integrujeme

$$\begin{aligned} \int (2z + 5)\,\mathrm{d}z &= -\int \mathrm{d}x \\ z^2 + 5z &= -x + \mathrm{C} \\ (x - 2y)^2 + 5(x - 2y) + x &= \mathrm{C} \\ (x - 2y)^2 + 6x - 10y &= \mathrm{C}. \end{aligned}$$

2.3 Lineárna rovnica 1. rádu

Rovnicu

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{2.7}$$

nazývame *lineárna diferenciálna rovnica.* Ak je funkcia $b(x)$ identicky rovná nule, rovnicu prepíšeme do tvaru:

$$y' + a(x)y = 0 \tag{2.8}$$

a hovoríme o nej ako o rovnici bez pravej strany, prípadne ako o príslušnej homogénnej lineárnej rovnici.

Poznámka. Nesmieme zamieňať homogénnu lineárnu rovnicu s homogénnou rovnicou (2.4).

Postup riešenia:
Najskôr vyriešime príslušnú lineárnu homogénnu rovnicu $y' + a(x)y = 0$. Riešenie nájdeme ľahko, ide totiž o rovnicu so separovanými premennými.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a(x)y \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int a(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = \int a(x)\,\mathrm{d}x + \ln \mathrm{K}. \tag{2.9}$$

Po odlogaritmovaní dostávame všeobecné riešenie homogénnej lineárnej rovnice

$$y_0 = \mathrm{K}\mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}, \quad \mathrm{K} \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Nehomogénnu rovnicu riešime tzv. metódou variácie konštánt. Podstata metódy je v nahradení integračnej konštanty K vhodnou funkciou $\mathrm{K}(x)$[1] tak, aby riešenie (2.10) rovnice (2.9) vyhovovalo lineárnej rovnici (2.7). Predpokladáme riešenie rovnice (2.7) v tvare

$$y = \mathrm{K}(x)y_0(x). \tag{2.11}$$

Vypočítame $y' = \mathrm{K}'(x)y_0(x) + \mathrm{K}(x)y_0'(x)$ a dosadíme do lineárnej diferenciálnej rovnice (2.7). Ak sme počítali správne, členy obsahujúce $\mathrm{K}(x)$ vymiznú. Z takto vzniknutej rovnice osamostatníme $\mathrm{K}'(x)$ a integráciou získame hľadanú funkciu $\mathrm{K}(x)$. Dosadením do predpokladaného riešenia (2.11) získavame všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice (2.7). Postup nájdenia všeobecného riešenia si ukážeme na nasledujúcom príklade.

Pri diferenciálnych rovniciach 1. rádu, v ktorých sa premenná x vyskytuje iba v prvej mocnine a hľadaná funkcia y sa vyskytuje v argumentoch elementárnych funkcií, je možné použiť zámenu premenných. Premennú x pokladáme za funkciu a y za nezávisle premennú. Rovnicu potom upravíme na lineárnu diferenciálnu rovnicu 1. radu vzhľadom k funkcii x. Všeobecné riešenie bude tiež všeobecným riešením pôvodnej rovnice.

Príklady

Príklad 2.3.1. Je zadaná diferenciálna rovnica

$$y' + 4x^3y = x^2\mathrm{e}^{-x^4}.$$

[1]Preto názov variácia konštánt.

1. Napíšte všeobecné riešenie homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice. Ako integračnú konštantu použite písmeno K.

2. Dosaďte do pôvodnej rovnice.

3. Integrujte. Ako integračnú konštantu použite C.

4. Napíšte všeobecné riešenie lineárnej rovnice.

Riešenie. 1. Vyriešime homogénnu lineárnu rovnicu $y' = -4x^3y$.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -4x^3 \,\mathrm{d}x \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int 4x^3 \,\mathrm{d}x \\ \ln|y| &= -x^4 + \mathrm{L} \quad \mathrm{L} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Všeobecné riešenie homogénnej lineárnej rovnice je $y_0 = \mathrm{K}\mathrm{e}^{-x^4}$.

2. Nahradíme integračnú konštantu K vhodnou funkciou $\mathrm{K}(x)$ a riešenie predpokladáme v tvare

$$y = \mathrm{K}(x)\mathrm{e}^{-x^4}.$$

Zderivujeme $y' = \mathrm{K}'(x)\mathrm{e}^{-x^4} - 4x^3\mathrm{K}(x)$ a dosadíme do pôvodnej lineárnej rovnice.

$$\begin{aligned} \mathrm{K}'(x)\mathrm{e}^{-x^4} - 4x^3\mathrm{K}(x)\mathrm{e}^{-x^4} + 4x^3\mathrm{K}(x)\mathrm{e}^{-x^4} &= x^2\mathrm{e}^{-x^4} \\ \mathrm{K}'(x) &= x^2. \end{aligned}$$

3. Integrujeme

$$\begin{aligned} \mathrm{K}(x) &= \int x^2 \,\mathrm{d}x \\ \mathrm{K}(x) &= \frac{x^3}{3} + \mathrm{C}. \end{aligned}$$

4. Všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice je v tvare

$$y = \frac{x^3}{3}\mathrm{e}^{-x^4} + \mathrm{C}\mathrm{e}^{-x^4}.$$

Príklad 2.3.2. Je zadaná diferenciálna rovnica

$$2xy' + x^2 - 6y = 0.$$

1. Napíšte všeobecné riešenie homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice. Ako integračnú konštantu použite písmeno K.

2. Dosaďte do pôvodnej rovnice.

3. Integrujte. Ako integračnú konštantu použite C.

4. Napíšte všeobecné riešenie lineárnej rovnice.

Riešenie. 1. Vyriešime homogénnu lineárnu rovnicu $2xy' = 6y$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{y} &= 2\frac{\mathrm{d}x}{x}\\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x}\\ \ln|y| &= 3\ln x + \ln \mathrm{K} \quad \mathrm{K} \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Všeobecné riešenie homogénnej lineárnej rovnice je $y_0 = \mathrm{K}x^3$.

2. Nahradíme integračnú konštantu K vhodnou funkciou $\mathrm{K}(x)$ a riešenie predpokladáme v tvare

$$y = \mathrm{K}(x)x^3.$$

Zderivujeme $y' = \mathrm{K}'(x)x^3 + 3x^2\mathrm{K}(x)$ a dosadíme do pôvodnej lineárnej rovnice.

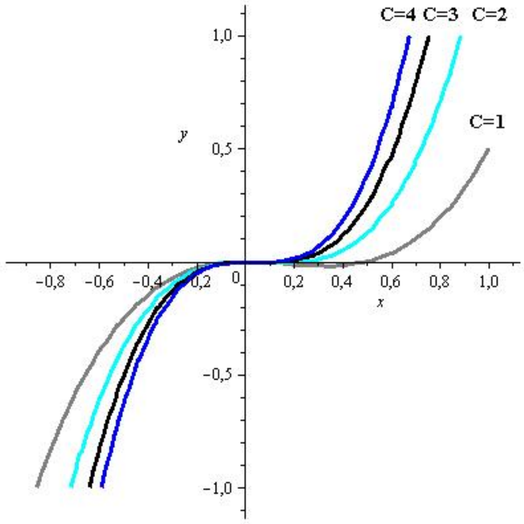
$$\begin{aligned}2x^4\mathrm{K}'(x) + 6x^2\mathrm{K}(x) + x^2 - 6x^3\mathrm{K}(x) &= 0\\ \mathrm{K}'(x) &= -\frac{1}{2x^2}.\end{aligned}$$

3. Integrujeme

$$\begin{aligned}\mathrm{K}(x) &= -\int \frac{1}{2x^2}\\ \mathrm{K}(x) &= \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{C}.\end{aligned}$$

Všeobecné riešenie difenciálnej rovnice je v tvare

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \mathrm{C}x^3.$$



Obr. 2.8: Všeobecné riešenie rovnice $2xy' + x^2 - 6y = 0$.

2.4 Bernoulliova rovnica

Ide o rovnicu tvaru

$$y' + a(x) = b(x)y^{\mathrm{r}}, \tag{2.12}$$

kde $\mathrm{r} \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$, $\mathrm{r} \neq 0$. Pre prípad, kedy $\mathrm{r} = 1$ a $\mathrm{r} = 0$ ide o lineárne diferenciálne rovnice. Pri riešení prevedieme Bernoulliovu rovnicu vhodnou úpravou a substitúciou na lineárnu diferenciálnu rovnicu 1. rádu. Rovnicu riešime nasledovne.

Rovnicu delíme výrazom y^{r}

$$\frac{y'}{y^{\mathrm{r}}} + \frac{1}{y^{\mathrm{r}-1}}a(x) = b(x)$$

a zavedieme novú premennú substitúciou

$$z = \frac{1}{y^{\mathrm{r}-1}}.$$

$$z' = (1-\mathrm{r})\frac{1}{y^{\mathrm{r}}}y'.$$

Po dosadení a úprave prejde Bernoulliova rovnica na lineárnu diferenciálnu rovnicu 1. rádu pre neznámu funkciu $z(x)$.

Príklady

Príklad 2.4.1. Je zadaná diferenciálna rovnica

$$y' + y + y^2 \mathrm{e}^x = 0.$$

1. Navrhnite vhodnú substitúciu.
2. Separujte premenné. (Pri separácii premenných používajte zápis $f(x)\,\mathrm{d}x = g(z)\,\mathrm{d}z$.)
3. Integrujte. (Nezabudnite sa vrátiť k pôvodným premenným.)
4. Má rovnica singulárne riešenie?

Riešenie. 1. Zadaná rovnica je Bernoulliova, kde r = 2. Volíme preto substitúciu $z = \frac{1}{y}$.

2. Rovnicu vydelíme y^2

$$y' + y + y^2 \mathrm{e}^x = 0$$

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} + \mathrm{e}^x = 0.$$

Použijeme substitúciu $z = \frac{1}{y} \implies z' = -\frac{1}{y^2}\,y'$.
Vyriešime homogénnu lineárnu rovnicu $-z' + z = 0$.
Separujeme premenné $\dfrac{\mathrm{d}z}{z} = \mathrm{d}x$.

3. Integrujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int \mathrm{d}x$$

$$\ln|z| = x + \mathrm{K}$$

$$z = \mathrm{K}\mathrm{e}^x.$$

Nahradíme integračnú konštantu K vhodnou funkciou $\mathrm{K}(x)$ a riešenie predpokladáme v tvare

$$z = \mathrm{K}(x)\mathrm{e}^x.$$

Zderivujeme $y' = \mathrm{K}'(x)\mathrm{e}^x + \mathrm{K}(x)\mathrm{e}^x$ a dosadíme do pôvodnej lineárnej rovnice.

$$-\mathrm{K}'\mathrm{e}^x - \mathrm{K}\mathrm{e}^x + \mathrm{K}\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = 0$$

$$\mathrm{K}' = 1$$

$$\mathrm{K} = \int 1\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{K} = x + \mathrm{C}.$$

Dosadíme a vrátime substitúciu. Všeobecné riešenie je v tvare

$$y = \frac{1}{xe^x + Ce^x}.$$

4. Singulárnym riešením je funkcia $y = 0$.

Príklad 2.4.2. Je zadaná diferenciálna rovnica

$$y' - xy = -y^3 e^{-x^2}.$$

1. Navrhnite vhodnú substitúciu.
2. Separujte premenné. (Pri separácii premenných používajte zápis $f(x)\,dx = g(z)\,dz$.)
3. Integrujte. (Nezabudnite sa vrátiť k pôvodným premenným.)
4. Má rovnica singulárne riešenie?

Riešenie. 1. Zadaná rovnica je Bernoulliova, kde r = 3. Volíme preto substitúciu $z = \frac{1}{y^2}$.

2. Rovnicu vydelíme y^3

$$\begin{aligned} y' - xy &= y^3 e^{-x^2} \\ \frac{y'}{y} - \frac{x}{y^2} &= e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Použijeme substitúciu $z = \frac{1}{y^2} \implies z' = -\frac{2}{y^3}\,y'$.

Vyriešime homogénnu lineárnu rovnicu $-\dfrac{z'}{2} - xz = 0$.

Separujeme premenné $\dfrac{dz}{z} = -2x\,dx$.

3. Integrujeme

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{z} &= -2 \int x\,dx \\ \ln|z| &= -x^2 + K \\ z &= Ke^{-x^2}. \end{aligned}$$

Nahradíme integračnú konštantu K vhodnou funkciou K(x) a riešenie predpokladáme v tvare

$$z = K(x)e^{-x^2}.$$

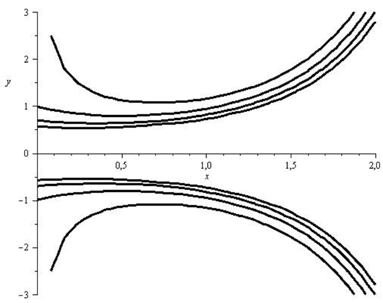
Zderivujeme $y' = \mathrm{K}'(x)\mathrm{e}^{-x^2} - 2x\mathrm{K}(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ a dosadíme do pôvodnej lineárnej rovnice.

$$
\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{K}'\mathrm{e}^{-x^2}}{2} + x\mathrm{K}\mathrm{e}^{-x^2} - x\mathrm{K}\mathrm{e}^{-x^2} &= -\mathrm{e}^{-x^2} \\
\mathrm{K}' &= 2 \\
\mathrm{K} &= \int 2\,\mathrm{d}x \\
\mathrm{K} &= 2x + \mathrm{C}.
\end{aligned}
$$

Dosadíme a vrátime substitúciu. Všeobecné riešenie je v tvare

$$y^2 = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x + \mathrm{C}}.$$

4. Singulárnym riešením je rovnica zadaná priamkou $y = 0$.



Obr. 2.9: Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y' - xy = -y^3\mathrm{e}^{-x^2}$.

2.5 Diferenciálne rovnice exaktné

Niekedy sa diferenciálne rovnice zadávajú v tvare

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0, \tag{2.13}$$

kde $M(x,y)$ a $N(x,y)$ sú funkcie.

Definícia 2.4. Rovnica (2.13) sa nazýva *exaktná*, ak výraz na ľavej strane je totálnym diferenciálom, tj. existuje funkcia $F(x,y)$ tak, že

$$\mathrm{d}F(x,y) = M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y.$$

Funkcia $F(x,y)$ sa potom nazýva *kmeňová funkcia.*

Rovnicu (2.13) možno písať v tvare $\mathrm{d}F(x,y) = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y$. Vzhľadom k tomu je

$$M(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}, \quad N(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$$

a podľa Schwartzovej vety o rovnosti zmiešaných derivácii musí pre funkcie $M(x,y)$ a $N(x,y)$ za predpokladu spojitosti M_y a N_x platiť

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Práve keď platí táto podmienka je rovnica (2.13) exaktná. K vyriešeniu rovnice (2.13) stačí teda nájsť kmeňovú funkciu $F(x,y)$, všeobecné riešenie rovnice môžeme potom písať v implicitnom tvare

$$F(x,y) = \mathrm{C}, \quad \mathrm{C} \in \mathbb{R}.$$

Pri riešení rovnice $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$ postupujeme nasledovne: Vieme, že musí platiť

$$M(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}, \quad N(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$$

v skrátenej forme

$$M(x,y) = F_x, \quad N(x,y) = F_y.$$

Integráciou týchto rovníc môžeme kmeňovú funkciu nájsť. Vybereme si ľubovolnú funkciu a dostávame:

$$M(x,y) = F_x \Longrightarrow F(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x + C(y).$$

Pritom tento integrál chápeme ako závislý na parametri y. Musíme si ešte uvedomiť, že integračná konštanta nemusí byť číslo, ale funkcia nejakej premennej. V našom prípade funkcia premennej y. Zostáva určiť funkciu $C(y)$. Dosadením do druhej rovnice a úpravou určíme $C(y)$. Vo vzniknutej rovnici sa nám musí vyrušit neznáma, ktorá nie je premennou funkcie C. Ak sa tak nestalo, znamená to, že sme urobili matematickú chybu pri dosadzovaní, alebo sme neoverili, či daná rovnica je naozaj exaktná.

Ak rovnica (2.13) nie je exaktná a ak existuje funkcia $R = R(x,y)$ taká, že po vynásobení oboch strán rovnice touto funkciou $R(M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y) = 0$ dostaneme rovnicu exaktnú, túto funkciu R nazývame potom *integračným faktorom* rovnice (2.13).

Ak funkcie $M(x,y)$ a $N(x,y)$ majú spojité parciálne derivácie, potom integračný faktor existuje. Nájdením a vynásobením pôvodnej rovnice týmto faktorom prechádza diferenciálna rovnica na rovnicu exaktnú.

Príklady

Príklad 2.5.1. Je zadaná diferenciálna rovnica

$$(2x-1)\,\mathrm{d}x + (3y+7)\,\mathrm{d}y.$$

1. Je diferenciálna rovnica exaktná?
2. Ak áno, určte kmeňovú funkciu $F(x,y)$ a všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice zapíšte v tvare $\mathrm{C} = F(x,y)$.

Riešenie. 1. Ak je rovnica exaktná musí platiť $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

$$M(x,y) = 2x-1 \quad N(x,y) = 3y+7$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Jedná sa o exaktnú diferenciálnu rovnicu.

2. Nájdeme kmeňovú funkciu. Ukážeme si dva spôsoby pri výpočte.
Prvý spôsob. Vypočítame dva integrály.

$$\int M(x,y)\,\mathrm{d}x = \int (2x-1)\,\mathrm{d}x = x^2 - x$$
$$\int N(x,y)\,\mathrm{d}y = \int (3y+7)\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}y^2 + 7y.$$

Do kmeňovej funkcie zapíšeme každý člen, ktorý nám vyšiel, ak sa opakuje v oboch výsledkoch napíšeme ho iba raz.

Kmeňová fukcia je tvaru : $F(x,y) : \mathrm{C} = \dfrac{3}{2}y^2 + 7y + x^2 - x.$
Druhý spôsob výpočtu. Využijeme to, že vieme $M(x,y) = F_x \Longrightarrow F(x,y) = = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x + K(y)$. Vypočítame integrál

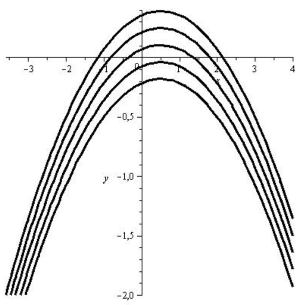
$$\int M(x,y)\,\mathrm{d}x = \int (2x-1)\,\mathrm{d}x = x^2 - x + K(y).$$

Tiež platí $N(x,y) = \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$.

$$N(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$$
$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0 + K'(y) = 3y+7$$
$$K(y) = \int 3y+7 = \frac{3}{2}y^2 + 7y + \mathrm{C}.$$

Dosadíme a dostávame

$$\mathrm{C} = \frac{3}{2}y^2 + 7y + x^2 - x.$$



Obr. 2.10: Všeobecné riešenie exaktnej diferenciálnej rovnice $(2x - 1)\,\mathrm{d}x +$ $+(3y + 7)\,\mathrm{d}y$.

Príklad 2.5.2. Je zadaná diferenciálna rovnica

$$(x + y)(x + y)\,\mathrm{d}x + x(x - 2y)\,\mathrm{d}y.$$

1. Je diferenciálna rovnica exaktná?
2. Ak áno, určte kmeňovú funkciu $F(x, y)$ a všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice zapíšte v tvare $\mathrm{C} = F(x, y)$.

Riešenie. 1. Ak je rovnica exaktná musí platiť $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

$$M(x, y) = x^2 - y^2 \quad N(x, y) = x^2 - 2xy$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x - 2y$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Diferenciálna rovnica nie je exaktná.

Príklad 2.5.3. Je zadaná diferenciálna rovnica

$$\cos y\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x + \sin y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

1. Je diferenciálna rovnica exaktná?

2. Ak áno, určte kmeňovú funkciu $F(x, y)$ a všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice zapíšte v tvare $\mathrm{C} = F(x, y)$. Ak nie, najskôr nájdite integračný faktor $\alpha = \alpha(x, y)$ ním potom vynásobte zadanú diferenciálnu rovnicu a ďalej postupujte ako pri exaktnej diferenciálnej rovnici.

Riešenie. 1. Ak je rovnica exaktná musí platiť $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

$$M(x, y) = \cos y \quad N(x, y) = \mathrm{e}^x + \sin y$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\sin y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \mathrm{e}^x$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Diferenciálna rovnica nie je exaktná.

2. Nájdeme integračný faktor μ

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \frac{M'_y - N'_x}{N}\,\mathrm{d}x = \frac{-\sin y - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \sin y} = -\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = -\mathrm{d}x$$
$$\ln \mu = -x$$
$$\mu = \mathrm{e}^{-x}.$$

Vynásobíme zadanú rovnicu integračným faktorom a dostávame :

$$\mathrm{e}^{-x} \cos y\,\mathrm{d}x + (1 + \mathrm{e}^{-x} \sin y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

$$M(x, y) = \mathrm{e}^{-x} \cos y \quad N(x, y) = 1 + \mathrm{e}^{-x} \sin y$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\mathrm{e}^{-x} \sin y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\mathrm{e}^{-x} \sin y$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Rovnica je exaktná. Nájdeme kmeňovú funkciu. Vypočítame dva integrály.

$$\int M(x,y)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{-x}\cos y\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\cos y$$
$$\int N(x,y)\,\mathrm{d}y = \int (1+\mathrm{e}^{-x}\sin y)\,\mathrm{d}y = y - \mathrm{e}^{-x}\cos y.$$

Do kmeňovej funkcie zapíšeme každý člen, ktorý nám vyšiel, ak sa opakuje v oboch výsledkoch napíšeme ho iba raz.
Kmeňová fukcia je tvaru : $F(x,y)$: $\mathrm{C} = y - \mathrm{e}^{-x}\cos y$.

2.6 Rovnice nerozriešené vzhľadom k derivácii

Diferenciálne rovnice tvaru $F(x,y,y')=0$ často nevieme rozriešiť vzhľadom k derivácii a písať ich v tvare $y'=f(x,y)$. Niekedy je však možné rovnicu riešiť vzhľadom k x prípadne k y. Dostávame tak rovnice tvaru

$$x = f(y,y'),\ \text{alebo}\, y = g(x,y').$$

Zvláštne prípady týchto rovníc sú tiež rovnice tvaru

$$x = f(y'),\ \text{alebo}\, y = g(y').$$

Riešenie týchto rovníc hľadáme v parametrickom tvare, z ktorého v niektorých prípadoch môžeme po eliminácii parametra získať všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice.

Príklady

Príklad 2.6.1. Riešte diferenciálnu rovnicu

$$2y' + \sin y' - x = 0.$$

Ako integračnú konštantu použite písmeno C a pri zápise použite $y'=p$

Riešenie. Túto rovnicu nemožno rozriešiť vzhľadom k y', ale jednoduchou úpravou dostávame $x = 2y' + \sin y'$, čo je diferenciálna rovnica typu $x = f(y')$. Riešenie preto budeme hľadať v parametrickom vyjadrení. Položíme $y'=p$ (uvedomíme si že $p=p(x)$). Dosadíme do rovnice a dostávame

$$x = 2p + \sin p,$$

čo je parametrické vyjadrenie premennej x. Diferencujeme rovnicu a dostávame

$$\mathrm{d}x = (2 + \cos p)\,\mathrm{d}p.$$

Parametricky vyjadríme premennú y.

$$\begin{aligned}
y' &= p \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= p \\
\mathrm{d}y &= p\,\mathrm{d}x \\
p\,\mathrm{d}x &= (2p + p\cos p)\,\mathrm{d}p \\
\mathrm{d}y &= (2p + p\cos p)\,\mathrm{d}p.
\end{aligned}$$

Integrujeme

$$\begin{aligned}
\int y\,\mathrm{d}y = \int 2p\,\mathrm{d}p + \int p\cos p\,\mathrm{d}p \quad & \left| \begin{array}{ll} u = p & u' = 1 \\ v' = \cos p & v = \sin p \end{array} \right| \\
y = p^2 + p\sin p - \int \sin p\,\mathrm{d}p & \\
y = p^2 + p\sin p + \cos p + \mathrm{C}. &
\end{aligned}$$

Tak dostávame pre všeobecné riešenie dve parametrické rovnice.

$$\begin{aligned}
x &= 2p + \sin p \\
y &= p^2 + p\sin p + \cos p + \mathrm{C}.
\end{aligned}$$

Eliminácia parametru nie je možná.

Príklad 2.6.2. Riešte diferenciálnu rovnicu

$$x = \sin y' + \cos y'.$$

Ako integračnú konštantu použite písmeno C a pri zápise použite $y' = p$.

Riešenie. Rovnica je upravená do typu $x = f(y')$. Riešenie budeme hľadať v parametrickom vyjadrení. Položíme $y' = p$ (uvedomíme si že $p = p(x)$). Dosadíme do rovnice a dostávame

$$x = \sin p + \cos p,$$

čo je parametrické vyjadrenie premennej x. Diferencujeme rovnicu a dostávame

$$\mathrm{d}x = (\cos p - \sin p)\,\mathrm{d}p.$$

Parametricky vyjadríme premennú y

$$\begin{aligned}
y' &= p \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= p \\
\mathrm{d}y &= p\,\mathrm{d}x \\
p\,\mathrm{d}x &= (p\cos p - p\sin p)\,\mathrm{d}p \\
\mathrm{d}y &= (p\cos p - p\sin p)\,\mathrm{d}p.
\end{aligned}$$

Integrujeme

$$\begin{aligned}
\int y\,\mathrm{d}y = \int p\cos p\,\mathrm{d}p \quad &\left| \begin{array}{ll} u = p & u' = 1 \\ v' = \cos p & v = \sin p \end{array} \right| - \\
- \int p\sin p\,\mathrm{d}p \quad &\left| \begin{array}{ll} u = p & u' = 1 \\ v' = \sin p & v = -\cos p \end{array} \right| \\
y &= p\sin p - \int \sin p\,\mathrm{d}p + p\cos p - \int \cos p\,\mathrm{d}p \\
y &= p\sin p + \cos p + p\cos p - \sin p + \mathrm{C} \\
y &= p(\sin p + \cos p) + \cos p - \sin p + \mathrm{C}.
\end{aligned}$$

Tak dostávame pre všeobecné riešenie dve parametrické rovnice.

$$\begin{aligned}
x &= \sin p + \cos p \\
y &= p(\sin p + \cos p) + \cos p - \sin p + \mathrm{C}.
\end{aligned}$$

Eliminácia parametra nie je možná.

2.7 Lagrangeova rovnica

Diferenciálnu rovnicu tvaru

$$y = xf(y') + g(y'), \tag{2.14}$$

kde f a g sú dané funkcie sa nazýva *Lagrangeova* diferenciálna rovnica. Rovnicu riešime nasledujúcim spôsobom.
Položíme $y' = p$, dostaneme

$$y = xf(p) + g(p).$$

Rovnicu derivujeme podľa x a dostaneme

$$p = f(p) + xf'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + g'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

Rovnicu upravíme a budeme predpokladať, že $p - f(p) \neq 0$.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = \frac{f'(p)}{p - f(p)} x + \frac{g'(p)}{p - f(p)}.$$

Táto rovnica je lineárne diferenciálna rovnica pre neznámu x. Jej riešenie dostaneme vyjadrením x pomocou parametru p a konštanty C. Riešenie je určené parametrickými rovnicami

$$x = \varphi(p), \quad y = f(p)\varphi(p) + g(p).$$

Vrátime sa k podmienke $p - f(p) \neq 0$. Ak spĺňa funkcia f v nejakom bode podmienku $f(c) = c$, je funkcia

$$y = xf(c) + g(c)$$

singulárnym riešením rovnice (2.14).

Príklady

Príklad 2.7.1. Riešte diferenciálnu rovnicu

$$y = 2xy' - (y')^2.$$

Ako integračnú konštantu použite písmeno C a pri zápise použite $y' = p$. Zistite, či rovnica má singulárne riešenie.

Riešenie. Ide o Lagrangeovu rovnicu. Položíme $y' = p$ a dosadíme

$$y = 2xp - p^2.$$

Rovnicu derivujeme

$$\begin{aligned} p = y' &= 2p + 2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - 2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \\ -p &= 2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - 2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \\ p &= 2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(p - x). \end{aligned}$$

Za predpokladu $p \neq 0$ môžeme rovnicu prepísať do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = \frac{2(p - x)}{p}.$$

Rovnica je lineárna diferenciálna rovnica pre neznámu x, ktorú už vieme riešiť. Riešime najprv rovnicu

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} &= -\frac{2x}{p}\\ \frac{\mathrm{d}x}{x} &= -\frac{2}{p}\mathrm{d}p\\ \ln|x| &= -2\ln|p| + \ln \mathrm{K}\\ x &= \mathrm{K}p^{-2}.\end{aligned}$$

Nahradíme integračnú konštantu K vhodnou funkciou $\mathrm{K}(x)$ a riešenie predpokladáme v tvare

$$y = \mathrm{K}(x)p^{-2}.$$

Zderivujeme $y' = \mathrm{K}'(x)p^{-2} - 2\mathrm{K}(x)p^{-3}$ a dosadíme do pôvodnej lineárnej rovnice, po úprave dostávame.

$$\begin{aligned}\mathrm{K}'(x) &= \int 2p^2\mathrm{d}p\\ \mathrm{K}(x) &= \frac{2}{3}p^3 + \mathrm{C}\\ x &= \frac{2p^3+\mathrm{C}}{3p^2}.\end{aligned}$$

Po dosadení do rovnice dostaneme všeobecné riešenie rovnice v parametrickom tvare.

$$\begin{aligned}x &= \frac{2p^3+\mathrm{C}}{3p^2}\\ y &= \frac{p^3+\mathrm{C}}{3p}.\end{aligned}$$

Vrátime sa k podmienke $p \neq 0$. Pre $p = 0$ dostávame z rovnice riešenie $y = 0$. Ako sa presvedčíme riešenie $y = 0$ je singulárnym riešením zadanej diferenciálnej rovnice.

Príklad 2.7.2. Riešte diferenciálnu rovnicu

$$xy'(y'+2) = y.$$

Ako integračnú konštantu použite písmeno C a pri zápise použite $y' = p$. Zistite, či rovnica má singulárne riešenie.

Riešenie. Ide o Lagrangeovu rovnicu. Položíme $y' = p$ a dosadíme

$$xp(p+2) = y.$$

Rovnicu derivujeme

$$\begin{aligned} p = y' &= p^2 + 2xp\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + 2p + 2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \\ -p - p^2 &= 2xp\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + 2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \\ -p(p+1) &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(2xp + 2x). \end{aligned}$$

Za predpokladu $p \neq 0, p \neq -1$ môžeme rovnicu prepísať do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = \frac{2x(p+1)}{-p(p+1)}.$$

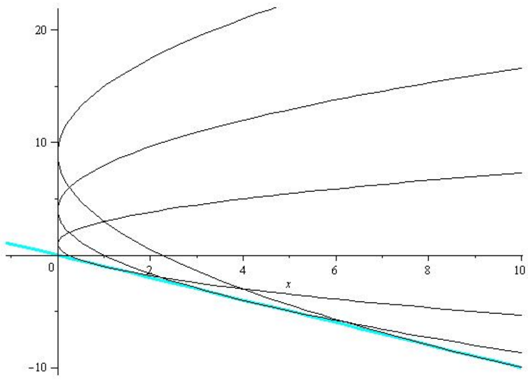
To je separovateľná rovnica pre neznámu x, ktorú už vieme riešiť.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} &= -\frac{2x}{p} \\ \frac{\mathrm{d}x}{x} &= -\frac{2}{p}\,\mathrm{d}p \\ \ln|x| &= -2\ln|p| + \ln \mathrm{C} \\ x &= \mathrm{C}p^{-2}. \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice $xp(p+2) = y$ a po vylúčení parametra dostávame

$$\begin{aligned} y &= \frac{\mathrm{C}}{p^2}p^2 + 2\,\frac{\mathrm{C}}{p^2}p \\ y &= \mathrm{C} + \frac{2\mathrm{C}}{p} \\ y &= \mathrm{C} + 2\sqrt{\mathrm{C}x} \\ y &= \mathrm{C}^2 + 2\mathrm{C}\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Toto je všeobecné riešenie v explicitnom tvare.
Vrátime sa k podmienke $p \neq 0$ a $p \neq -1$. Pre $p = 0$ dostávame z rovnice riešenie $y = 0$. Ako sa presvedčíme riešenie $y = 0$ dostaneme voľbou konštanty $\mathrm{C} = 0$. Pre $p = -1$ dostávame z rovnice riešenie $y = -x$. Ľahko sa presvedčíme, že $y = -x$ je singulárnym riešením rovnice.



Obr. 2.11: Všeobecné ($y = \mathrm{C}^2 + 2\mathrm{C}\sqrt{x}$) a singulárne ($y = -x$) riešenie Lagrangeovej rovnice $xy'(y'+2) = y$.

2.8 Clairautova rovnica

$$y = y'x + g(y')$$

je špeciálnym prípadom Lagrangeovej rovnice, pre $f(y') \equiv y'$. Táto rovnica má vždy riešenie, ak je funkcia g definovaná aspoň v jednom bode. Tak napríklad, ak je g definovaná v čísle p_0, je riešením rovnice funkcia $y = p_0 x + g(p_0)$ definovaná pre všetky reálne čísla.

Pri hľadaní všeobecného riešenia Clairautovej rovnice zavedieme parameter $p = y'$ a po derivácii podľa premennej x dostaneme

$$\begin{aligned} y' &= p + x\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \\ p &= p + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left(x + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p}\right) \\ 0 &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left(x + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p}\right). \end{aligned}$$

1. Ak je $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$, je $p = \mathrm{C}, \mathrm{C} \in \mathbb{R}$ a všeobecným riešením sú lineárne funkcie
$$y = \mathrm{C}x + g(\mathrm{C}).$$

2. Ak je $x + \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p} = 0$. Táto rovnica určuje singulárne riešenie Clairautovej rovnice. Toto singulárne riešenie je určené parametricky zadaným

rovnicami

$$x = -g'(p), \quad y = -pg'(p) + g(p).$$

Často sa z oboch rovníc dá vylúčiť parameter p a získame tak singulárne riešenie v implicitnom tvare.
Zaujímavá je geometrická interpretácia riešenia Clairautovej rovnice. Každá priamka všeobecného riešenia je dotyčnicou ku krivke singulárneho riešenia. Inak povedané, krivka predstavujúca singulárne riešenie je obálkou jednoparametrickej sústavy priamok popísaných rovnicami

$$y = \mathrm{C} + g(\mathrm{C}).$$

Príklady

Príklad 2.8.1. Riešte diferenciálnu rovnicu

$$y = xy' + y' + y'^2.$$

Ako integračnú konštantu použite písmeno C.

1. Nájdite všeobecné riešenie rovnice.

2. Nájdite partikulárne riešenie rovnice.

Riešenie. Daná rovnica je Clairautova. Položíme $y' = p$, potom

$$y = xp + p + p^2 = p(x+1)p^2.$$

Rovnicu derivujeme podľa premennej x a upravíme

$$\begin{aligned} y' &= (x+1)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + p + 2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \\ 0 &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x+1+2p)\,. \end{aligned}$$

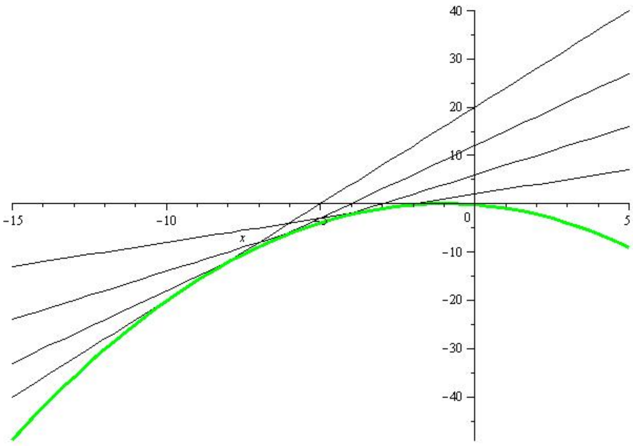
1. Pre $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$ je $\mathrm{C} = p$ a teda všeobecné riešenie danej rovnice je

$$y = \mathrm{C}x + \mathrm{C} + \mathrm{C}^2.$$

2. Pre $x+1+2p$ dostávame parametrické vyjadrenie singulárneho riešenia

$$x = x = -2p - 1 \implies p = \frac{-x-1}{2}$$
$$y = xp + \frac{1}{2p^2}$$
$$y = \frac{-x^2-2x-1}{4}$$
$$y = -\frac{(x+1)^2}{4}.$$

Elimináciou parametra sme dostali singulárne riešenie v tvare $y = -\dfrac{(x+1)^2}{4}$.



Obr. 2.12: Všeobecné $(y = \mathrm{C}x + \mathrm{C} + \mathrm{C}^2)$ a singulárne $\left(y = -\frac{(x+1)^2}{4}\right)$ riešenie Clairautovej rovnice $y = xy' + y' + y'^2$.

Záver

Úlohou práce bola tvorba e-learningových testových príkladov, ktorá má podporiť a obohatiť klasickú výučbu diferenciálnych rovníc. Celkom bolo vytvorených 170 príkladov rozdelených do sád podľa typov diferenciálnych rovníc. Pre veľký rozsah problematiky diferenciálnych rovníc, som sa vo svojej práci zamerala na diferenciálne rovnice 1. rádu.

Tvorba e-learningových testov bola náročná, pretože som sa zamerala na zložitejšie typy otázok, ktoré nemožno vkladať do systému formulárom. Tvorba takýchto otázok si vyžaduje znalosti:

1. základov HTML jazyka
2. syntaxi programu Maple
3. základov sadzby systémom LaTeX

Príklady som čerpala zo zbierok uvedených v zozname použitej literatúry. Nie však každý príkladríklad uvedený v týchto zbierkach je vhodný pre testovanie pomocou IS. Príklad musí mať vhodné riešenie, aby kontrola správnosti riešenia nespôsobovala problémy. Pri výbere príkladov treba brať do úvahy nejednoznačnosť prameniacu z voľby integračnej konštanty.

Dúfam, že táto práca bude nápomocná učiteľom pri tvorbe ďalších testových príkladov a študentom pomôže úspešne zvládnuť danú problematiku.

Literatúra

[1] Hájek, J.–Dula, J. *Cvičení z matematické analýzy Obyčejné diferenciální rovnice*. Brno: Paed MU 1990

[2] Plch, R.–Lomtatidze, L. *Sázíme v LaTeXu diplomovou práci z matematiky*. Brno: PřF MU 2003

[3] Plch, R. *Příklady z matematické analýzy Diferenciální rovnice*. Brno: PřF MU 2002

[4] Ráb, M. *Diferenciální rovnice 1. vydání*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství 1980

[5] Rybička, J. *LaTeX pro začátečníky*. Brno: Konvoj 1995

[6] Zill, D.G.–Cullen, M.R. *Diferential equations with Boundary-Value Problems 4th ed.*. USA: International Thomson Publishing Inc. 1997

[7] Mařík, R. *Interactive Mathematics*. Website, 2008 `http://old.mendelu.cz/~MARIK/index.php?item=32`.

[8] Informační systém Masarykovy univerzity. *Oživený text trochu jinak...* Website, 2008 `https://is.muni.cz/auth/el/1433/test/s_zakazky/nastroje/testutils/oziv_text/oziveny_text2.html`.

[9] Informační systém Masarykovy univerzity. *Krok za krokem* Website, 2007 `http://is.muni.cz/do/1499/el/zkzk/index.htm`.

[10] Informační systém Masarykovy univerzity. *Nápovědy* Website, 2009 `https://is.muni.cz/auth/help/`.