Masarykova univerzita
Přírodovědecká fakulta

Analytická geometrie na střední škole s programem Maple

Diplomová práce

Stanislav Močuba

Vedoucí práce: RNDr. Roman Plch, Ph.D.
Studijní program Matematika
Studijní obor Učitelství deskriptivní geometrie pro střední školy

2010

Masarykova univerzita v Brně

Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student : **Stanislav Močuba**
Studijní program : **matematika magisterská;**
Studijní obor : **učitelství matematiky, učitelství Dg ;**

Vedoucí matematické sekce PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu fakulty určuje diplomovou práci s tématem:

Analytická geometrie na střední škole s programem Maple.

Zásady pro vypracování: Seznamte se s již existujícími materiály pro podporu výuky zadaného tématu na Internetu. Následně pomocí programu Maple vytvořte materiály pro počítačovou podporu výuky tématu Analytická geometrie na střední škole (zápisníky, programy, ilustrační grafiku a animace).

Doporučená literatura:
- Kočandrle, M., Boček, L.: *Matematika pro gymnázia, Analytická geometrie*, Prometheus, Praha 1995

Vedoucí diplomové práce : RNDr. Roman Plch, PhD.
Datum zadání diplomové práce : září 2002
Datum odevzdání diplomové práce : duben 2004

V Brně dne

Doc. RNDr. Josef Janyška, CSc.
vedoucí matem. sekce PřF MU

Zadání diplomové práce převzal dne: 24.10.2002

Podpis studenta

Děkuji vedoucímu diplomové práce za trpělivost a cenné rady, které mi poskytoval během přípravy této práce. Také děkuji rodině, přátelům a všem, díky kterým jsem tuto práci mohl dokončit.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Brně, dne 14. 5. 2010 Stanislav Močuba

Název práce: Analytická geometrie na střední škole s programem Maple
Autor: Stanislav Močuba
Ústav matematiky a statistiky Přírodovědecké fakulty MU
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Roman Plch, Ph.D.
Abstrakt: Diplomová práce se zabývá využitím programu Maple ve výuce analytické geometrie na střední škole. Vycházel jsem z učebnice *Matematika pro gymnázia - Analytická geometrie* [2], která je používaná na mnoha středních školách. Z této učebnice jsem podrobněji zpracoval kapitolu 4 - *Geometrie v prostoru.*

Cílem mé práce bylo připravit počítačovou podporu výuky. Za tímto účelem jsem vytvořil zápisník programu Maple Analyticka_geometrie.mw. V něm je uvedena jak základní teorie, tak řešeny jednotlivé příklady pomocí příkazů programu Maple. Řešení některých úloh jsem automatizoval, tzn. naprogramoval procedury. Tyto procedury úlohu samy vyřeší, podle volby uživatele také vypíší postup řešení a/nebo vytvoří obrázek. Pro snazší použití při výuce mají procedury český název a jednoduché zadávání parametrů. Součástí mé práce je i ukázková procedura na vygenerování upraveného zadání úlohy.
Klíčová slova: Analytická geometrie, výuka pomocí počítačů, Maple

Title: Analytic geometry with the Maple program
Author: Stanislav Močuba
Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science, MU
Supervisor: RNDr. Roman Plch, Ph.D.
Abstract: The thesis is treating about application of Maple computer program in teaching analytic geometry on high school. I based it on textbook *Mathematics for high schools - Analytic geometry* [2] which is being used on many high schools. I focused in detail on chapter four - *Geometry in space.*

The aim of my work was to prepare a computer-based support for teaching. For this purpose I created the Maple worksheet Analyticka_geometrie.mw. It includes the main theory and resolution of particular exercises thanks to orders of Maple program. I automated the solution of some exercises which means I created procedures for them. These procedures resolve the exercises by themselves and write out the process that leads to solution and/or create a picture depending on the choice of the user. The procedures have Czech names and simple entry of parameters for easier application in teaching. Part of my thesis is an example procedure that generates modified problem of the exercise.
Keywords: Analytic geometry, teaching with software, Maple

Obsah

Úvod

Cílem této diplomové práce je pomocí programu Maple vytvořit počítačovou podporu výuky analytické geometrie na střední škole.

Učivo se opírá o značné matematické základy ze základní školy a předpokládá dobrou prostorovou představivost. Použití programu Maple vyžaduje alespoň základní dovednosti při práci na počítači. Diplomová práce je příkladem propojení výuky matematiky a výpočetní techniky.

Stěžejní částí mé práce jsou vytvořené procedury jako rozšíření běžné nabídky programu Maple a zápisník k výuce jako ukázka jejich použití.

Při práci jsem vycházel z učebnice *Matematika pro gymnázia - Analytická geometrie* [2], která je hojně rozšířena a používána na mnoha středních školách. Pro lepší použitelnost této práce jako doplňku k výše zmíněné učebnici jsem zachoval její výklad i strukturu kapitol, stejně tak jako číslování jednotlivých obrázků a příkladů (pro jednoznačnost jsem čísla příkladů doplnil o čísla podkapitol). Obsahem mé práce je zpracování kapitol zabývajících se popisem a vzájemnou polohou bodů, přímek a rovin. Jde o kapitoly 3 a 4, přičemž kapitola 3 pojednává pouze o útvarech v rovině, kapitola 4 pak o útvarech v prostoru. Kapitolu 5 zpracovala ve své diplomové práci [3] Jana Kotačková. Moje práce je rozdělena do pěti kapitol. V první kapitole jsou základní informace o programu Maple, o jeho základním ovládání a jeho standardní nabídce. Druhá kapitola je věnována balíku *andy*, který jsem vytvořil a který obsahuje procedury na řešení příkladů. Následující dvě kapitoly jsou věnované geometrii v rovině a v prostoru. V těchto kapitolách je uvedena základní teorie a poté jsou řešeny příklady. Nejprve se úloha řeší krok za krokem pomocí jednotlivých příkazů programu Maple a nakonec je příklad vyřešen procedurou. Poslední kapitola se zabývá generováním zadání, tedy procedurou, která umožňuje obměnu zadání.

Pro zpřehlednění textu jsem použil několik typů písma. Strojopisem jsou psány vstupy programu Maple a názvy jeho interních prvků, tj. procedur, proměnných a příkazů. Vstupy programu jsou odsazeny a uvozeny „promptem" neboli `>`. Výstupy programu jsou potom centrovány a odlišeny kurzívou (pro zvýraznění výsledku a případně zadání příkladu je na ně použito písmo skloněné). Pro názvy souborů jsem využil písma bezpatkového.

V textu jsou vloženy dva typy obrázků. Obrázky, které jsou součástí textu, mají pod sebou číslo a popis. Obrázky, které jsou výstupem procedury, pak číslované nejsou a příp. popis mají nahoře. Tyto obrázky jsou vyexportovány přímo z Maplu a jsou v textu pro ilustraci. Je lépe si je prohlédnout přímo v Maplu, kde se s nimi dá otáčet a získat lepší představu o zobrazených útvarech.

Nedílnou součástí této práce je přiložené CD. Na něm se kromě textu této práce ve formátu PDF nacházejí zápisník programu Maple pro procházení teorie a řešení příkladů Analyticka_geometrie.mw, balík andy.m s procedurami a pro čtenáře bez programu Maple také html náhled výše zmíněného zápisníku.

Pro srovnání uvádím, že soubor andy.m obsahuje cca 330 řádků strojového kódu. Tento soubor, z kterého Maple načítá jednotlivé procedury balíku `andy`, je nutné umístit do adresáře, odkud Maple načítá knihovny automaticky, příp. rozšířit tuto oblast pomocí změny systémové proměnné `libname`. Tato proměnná určuje, z kterých adresářů Maple načítá knihovny.

Kapitola 1

Standardní nabídka programu Maple

Program Maple je počítačový software patřící do skupiny programů CAS, tedy Computer Algebra Systems. Jsou to programy pracující se symbolickými výrazy pro numerické výpočty. Může být používán jako nástroj pro výpočty a také jako programovací jazyk. Podívejme se, jaké nástroje k výpočtům úloh z analytické geometrie nám poskytuje instalace Maple 11. Jedná se zejména o tři balíky - geometry, student a geom3d.

Balík *student*

Z tohoto balíku bych zmínil pouze příkaz `distance`, který umí spočítat vzdálenost dvou bodů. Tuto (Euklidovskou) vzdálenost umí počítat v jedné, dvou i více dimenzích. Tento nástroj má ve výpočtech analytické geometrie velké uplatnění. Abychom ho ale mohli použít, musíme nejprve úlohu převést na vzdálenost dvou bodů. Máme-li např. najít vzdálenost bodu od přímky, je třeba najít patu kolmice a přímku v úloze nahradit tímto bodem. Pak máme určit vzdálenost dvou bodů a příkaz `distance` můžeme použít.

Balík *geometry*

Tento balík umí pracovat s objekty v rovině jako jsou bod, přímka, kružnice, čtverec apod. Nezná ale pojem vektor, který je pro nás stěžejní. Zadání objektu, např. bodu, nijak „nekomentuje“, výstupem je pouze název objektu. Jak uvádím v úvodu kapitoly 3, řešení úloh v rovině je lehčí a proto není taková potřeba výpočetních nástrojů na tyto úlohy.

Balík *geom3d*

Tento balík je prostorovou obdobou balíku geometry. Řeší mimo jiné úlohy, kterými se zabývám v této práci. Jsou v něm procedury na zjištění vzájemné polohy, určení vzdálenosti apod. Jeho rozsáhlý aparát je ale vzhledem k potřebám výuky složitější na obsluhu. Jednotlivé prvky mají pevně přiřazeno, co reprezentují. Proto nelze např. „odečíst“ dva body a získat vektor.

Omezením balíků `geometry` a `geom3d` je to, že při zadání prvků nejsou vypsány jejich hodnoty, ale pouze jejich název. Pro zobrazení souřadnic bodu nebo třeba rovnice přímky musíme volat příkaz `detail`. A to samé je bohužel i u útvarů, které jsou řešením úlohy.

Z didaktického hlediska je překážkou jejich použití také to, že je třeba se soustředit více na dodržení formální správnosti zadání vstupních dat, nutnost dotazovat se po vlastnostech řešení a také absence postupu řešení. Proto jsem přistoupil k vytvoření vlastních procedur, které vyžadují pouze souřadnice a navíc poskytují v češtině postup řešení. Vytvořený balík popisuji v následující kapitole.

Kapitola 2

Vytvořený balík *andy*

Balík `andy` obsahuje procedury, které jsem vytvořil pro lehčí využití programu Maple při výuce analytické geometrie na střední škole. Cílem byl stav, kdy procedury mají český název a při jejich volání se jednoduše zadávají jednotlivé útvary. Body, vektory i rovnice rovin se zadávají jako proměnné typu `list`. Uživatel tedy např. nemusí rozlišovat, zda zadává bod nebo vektor. Skutečnost, že body i vektory jsou stejného typu umožňuje také intuitivní konstrukci vektoru $\vec{u} = A - B$. Vektoru přesně dle matematického zápisu přiřadíme rozdíl proměnných A a B. Odečtením dvou proměnných typu `list` je totiž opět proměnná typu `list`.

Většina procedur v balíku je určena na řešení polohových a metrických úloh. Tyto procedury mají pořadí parametrů stejné jako je pořadí útvarů v zadání úlohy. U všech procedur se může při jejich volání použít ještě další nepovinný parametr `vystup`, kterým musí být přirozené číslo. Výstupem procedury pak je podle tohoto parametru:

1 - pouze hodnota výsledku, tj. číslo, `true` apod.

2 - výsledek úlohy zapsaný celou větou

3 - vypsané zadání úlohy, postup řešení s mezivýsledky a výsledek zapsaný celou větou

4 - jako v bodě 3 a navíc obrázek celé situace v prostoru

5 - pouze obrázek, který ale v popisu obsahuje i výsledek

Proměnná `vystup` je globální a nastaví se při načtení balíku `andy` na hodnotu 3. Při jednotlivém volání procedury se může tento parametr libovolně zvolit. Pouze pokud je procedura volána bez tohoto parametru, použije se globální hodnota parametru `vystup`. Tu je možné v případě potřeby změnit i příkazem. Volání jedné procedury s různým nastavením výstupu je možné vidět např. na stranách 48 až 50.

Rovina se v procedurách téměř vždy zadává koeficienty obecné rovnice. Pokud máme rovinu zadánu parametricky, pomocí procedury `ORovniceRovinyABC` můžeme získat potřebnou rovnici obecnou. Poté již můžeme její koeficienty využít při volání vybrané procedury.

Přímka se v procedurách stejně jako v příkladech zadává bodem a vektorem. Máme-li dánu přímku body A a B, pak při volání procedury můžeme jako směrový vektor použít např. vektor $B - A$.

Procedury můžeme využít až po načtení celého balíku příkazem `with(andy)` nebo volat jednotlivou proceduru ve tvaru `andy[`*název_procedury*`](`*parametry*`)`.

Procedury byly vytvářeny v programu Maple 11 a také v této verzi Maplu testovány.

Dále uvádím popis jednotlivých procedur z tohoto balíku, jejich funkci a kde v dalším textu je uveden příklad jejich použití.

2.1 Seznam procedur

`BodPrimka`
Procedura zjistí, zda bod leží na přímce zadané bodem a vektorem (příp. parametricky). Tuto proceduru lze použít pro řešení příkladů jak v rovině, tak v prostoru. Je použita na straně 11, resp. 14 až 16.

`BodRovinaABC`
Procedura zjistí, zda bod leží v rovině dané třemi body. Je použita na straně 19 a 19. V této proceduře je výjimečně rovina zadána třemi body a ne obecnou rovnicí. Pokud bychom měli rovinu určenou obecnou rovnicí, spočívalo by celé řešení v dosazení souřadnic bodu do této rovnice - pokud je splněna, bod v rovině leží, pokud ne, bod v rovině neleží. Vytvářet na to proceduru by bylo zbytečné.

`OdchylkaPrimkyRoviny`
Procedura vypočítá odchylku přímky dané bodem a vektorem a roviny dané obecnou rovnicí. Je použita na straně 57.

`OdchylkaRovin`
Procedura vypočítá odchylku dvou rovin zadaných obecnou rovnicí. Její použití je ukázáno na straně 59.

`OdchylkaVektoru`
Procedura vypočítá odchylku dvou vektorů. Součástí vypisovaného postupu řešení je také upozornění na případnou kolmost nebo rovnoběžnost. Lze použít jak na určení odchylky dvou přímek (na straně 54), tak na určení odchylky dvou rovin (na straně 60).

`PrimkaPrimka`
Určí vzájemnou polohu dvou přímek daných bodem a vektorem (nebo parametricky). Pokud jsou přímky různoběžné, vypočítá také souřadnice jejich průsečíku. Její použití je ukázáno na stranách 42 až 44.

`PrimkaRovina`
Určí vzájemnou polohu přímky a roviny. Je použita na straně 27.

`PrusPrimkaRovina`
Procedura vypočítá průsečík přímky a roviny. Pokud je přímka s rovinou rovnoběžná nebo v ní leží, procedura o tom informuje. Její použití je ukázáno na stranách 28 až 31.

`PrusRovinaRovina`
Procedura nalezne průsečnici dvou rovin. Je použita na stranách 38 až 39.

`RovinaRovina`
Procedura určí vzájemnou polohu dvou rovin. Je použita na straně 34.

`RovniceRovinyABC`
Procedura vypočítá obecnou rovnici roviny dané třemi body. Je použita na straně 22. Pokud máme rovinu danou parametricky, lze tuto proceduru také použít. Postup použití je na straně 22.

`VzdalenostOdPrimky`
Procedura vypočítá vzdálenost bodu od přímky zadané bodem a vektorem. Její použití je ukázáno na straně 48.

`VzdalenostOdRoviny`
Procedura vypočítá vzdálenost bodu od roviny dané obecnou rovnicí. Je použita na straně 52.

`GenerujVzdalenostOdPrimky`
Procedura vygeneruje obměněné zadání příkladu 4.5.3 ze strany 47. Jejímu využití se více věnuji v kapitole 5.

Kapitola 3

Geometrie v rovině

V analytické geometrii je při výpočtech i při pochopení úloh problém spíše s úlohami v prostoru. Výhoda Maplu, a počítačové podpory obecně, je také v tom, že si můžeme s prostorovými obrázky otáčet a tím získat lepší představu o geometrických útvarech v prostoru. V rovině je situace jiná. Protože zobrazujeme rovinné útvary do (téže) roviny, máme na obrázku skutečné útvary a žádné „vylepšení“ pohledu už nám nedá ani počítač. Proto nám pro popis a zobrazení útvarů v rovině poslouží stejně i vytištěný obrázek.

Pokud bychom si chtěli usnadnit výpočty v rovině, je nám aparát programu Maple samozřejmě k dispozici. Na druhé straně by se studenti měli ve výuce matematiky také naučit provádět jednoduché výpočty bez použití techniky. A myslím si, že právě analytická geometrie v rovině je k ručním výpočtům vhodné téma. Proto uvádím pro ilustraci pouze jeden řešený typ příkladu a také pouze procedura `BodPrimka` pracuje i v rovině. Je tedy možné ji volat s parametry buď o dvou nebo o třech prvcích (souřadnicích).

3.1 Parametrické vyjádření přímky

Víme, že každé dva různé body A, B určují přímku, kterou označujeme AB.

Definice. Vektor $\vec{u} = B - A$ se nazývá **směrový vektor** přímky AB.

Definice. Rovnice

$$X = A + t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$

se nazývá **parametrická rovnice** nebo také **parametrické vyjádření** přímky určené bodem A a vektorem $\vec{u}$. Proměnná t se nazývá **parametr**.

Body X, A a vektor $\vec{u}$ v parametrickém vyjádření přímky můžeme samozřejmě vyjádřit pomocí souřadnic. Pro body $A[a_1, a_2], X[x, y]$ a vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ pak dostaneme parametrické vyjádření přímky (nebo parametrické rovnice přímky) v souřadnicích:

$$x = a_1 + tu_1,$$
$$y = a_2 + tu_2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Příklad 3.1.1

Zjistěte, zda bod $Q[3, 1]$ leží na přímce p, která má parametrické vyjádření

$$x = 2 - t,$$
$$y = 3 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Postupné řešení

Zadání:

```
> Q:=[3,1]; t:='t': r:=[x=2-t,y=3+2*t]:r[1];r[2];
```

$$Q := [3, 1]$$
$$x = 2 - t$$
$$y = 3 + 2\,t$$

Leží-li bod Q na přímce p, musí existovat takové reálné číslo t, že $Q = A + t\vec{u}$:

```
> r:=subs({x=Q[1],y=Q[2]},r):r[1];r[2];
```

$$3 = 2 - t$$
$$1 = 3 + 2\,t$$

Z první rovnice spočítáme hodnotu parametru t:

```
> t:=solve(r[1]);
```

$$t := -1$$

a tu dosadíme do druhé rovnice:

```
> r[2];testeq(r[2]);
```

$$1 = 1$$
$$\mathit{true}$$

Vidíme, že t splňuje i druhou rovnici. Proto bod Q leží na přímce p.

Řešení pomocí procedury

Pro řešení příkladů tohoto typu můžeme použít proceduru `BodPrimka`. Na jejím vstupu zadáváme přímku jako bod a vektor (ty jsou vidět z parametrického vyjádření přímky p: $X = A + t\vec{u}$).

```
> BodPrimka(Q,[2,3],[-1,2],4);
```

Zadani ulohy:

Zjistete, zda bod Q[3, 1] lezi na primce p urcene bodem A[2, 3] a vektorem u = (-1, 2).

Postup reseni:

1) Lezi-li bod Q na primce p, existuje takove realne cislo t, ze:

$$[3, 1] = [2, 3] + t[-1, 2]$$

2) Z rovnice prvnich souradnic vypocitame t:

$$t = -1$$

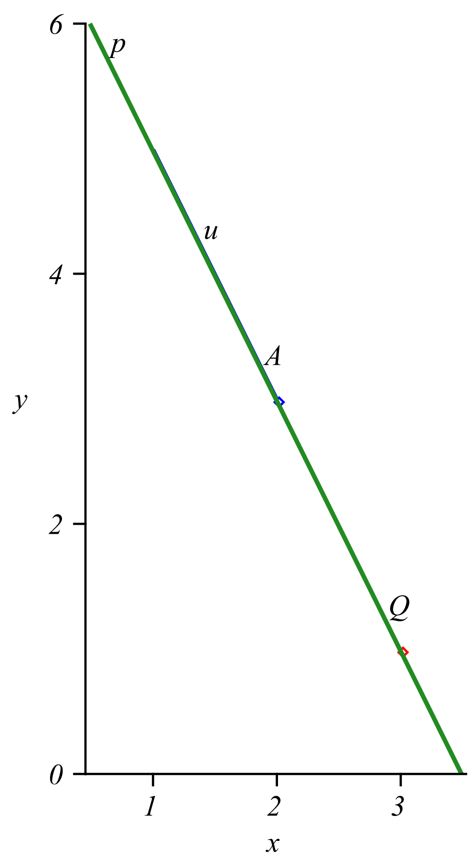
3) Hodnotu t dosadime do rovnice druhych souradnic:

$$1 = 3 + 2\,t$$

$$1 = 1$$

Rovnost je splnena. Z toho plyne vysledek:

Bod [3, 1] LEZI na primce urcene bodem [2, 3] a vektorem (-1, 2).



Jiné zadání:

```
> BodPrimka([14,5],[2,3],[-4,1],4);
```

Zadani ulohy:

Zjistete, zda bod Q[14, 5] lezi na primce p urcene bodem A[2, 3] a vektorem u = (-4, 1).

Postup reseni:

1) Lezi-li bod Q na primce p, existuje takove realne cislo t, ze:

$$[14, 5] = [2, 3] + t[-4, 1]$$

2) Z rovnice prvnich souradnic vypocitame t:

$$t = -3$$

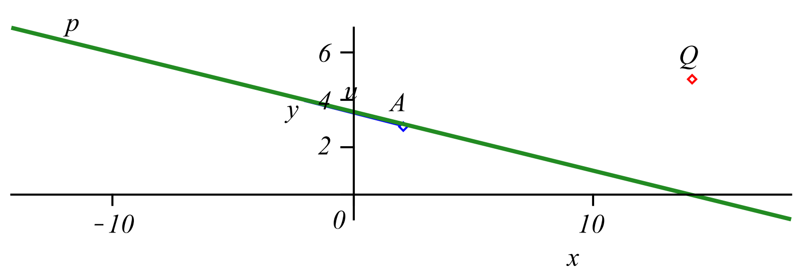
3) Hodnotu t dosadime do rovnice druhych souradnic:

$$5 = 3 + t$$

$$5 = 0$$

Rovnost neni splnena. Z toho plyne vysledek:

Bod [14, 5] NELEZI na primce urcene bodem *[2, 3]* a vektorem *(-4, 1)*.



Kapitola 4

Geometrie v prostoru

Mnoho poznatků z geometrie v rovině můžeme snadno uplatnit v prostoru. To vyplývá z toho, že v rovině i v prostoru se s vektory pracuje v podstatě stejně.

4.1 Parametrické vyjádření přímky

Parametrické vyjádření přímky vychází ze zavedení násobení vektoru číslem.

Definice. Vektor $\vec{u} = B - A$ se nazývá **směrový vektor** přímky AB.

Směrový vektor přímky p je také směrovým vektorem každé přímky q rovnoběžné s přímkou p a obráceně, mají-li přímky p a q stejné směrové vektory, jsou rovnoběžné.

Tak jako v rovině můžeme i v prostoru určit přímku místo body A, B jen jedním z těchto bodů a směrovým vektorem $\vec{u}$. Je-li přímka p určena bodem A a vektorem $\vec{u}$, píšeme $p(A, \vec{u})$.

Definice. Rovnice

$$X = A + t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R},$$

se nazývá **parametrické vyjádření** přímky $p(A, \vec{u})$. Proměnná t se nazývá **parametr**.

Probíhá-li t v parametrickém vyjádření přímky množinu všech reálných čísel, probíhá bod X celou přímku p.

Ve zvolené kartézské soustavě souřadnic O_{xyz} můžeme body a vektory zapsat pomocí souřadnic: $X[x, y, z]$, $A[a_1, a_2, a_3]$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Parametrické vyjádření přímky p pak můžeme zapsat v souřadnicích:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1, \\ y &= a_2 + tu_2, \\ z &= a_3 + tu_3, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Příklad 4.1.1

Zjistěte, zda bod $Q[-3,8,-3]$ leží na přímce $p(A,u)$, kde $A[1,2,-1]$, $\vec{u}=(2,3,1)$.

Postupné řešení

Zadání:

```
> Q:=[-3,8,-3]; A:=[1,2,-1]; u:=[2,3,1];
```

$$Q := [-3,8,-3]$$
$$A := [1,2,-1]$$
$$u := [2,3,1]$$

Leží-li bod Q na přímce p, musí existovat takové reálné číslo t, že $Q = A + t\vec{u}$:

```
> t:='t': r1:=Q[1]=A[1]+t*u[1]: r2:=Q[2]=A[2]+t*u[2]:
> r3:=Q[3]=A[3]+t*u[3]: r1;r2;r3;
```

$$-3 = 1 + 2\,t$$
$$8 = 2 + 3\,t$$
$$-3 = -1 + t$$

Z první rovnice spočítáme hodnotu parametru t:

```
> t:=solve(r1);
```

$$t := -2$$

a tu dosadíme do druhé a třetí rovnice:

```
> r2;testeq(r2); r3;testeq(r3);
```

$$8 = -4$$
$$\mathit{false}$$
$$-3 = -3$$
$$\mathit{true}$$

Vidíme, že t nevyhovuje druhé rovnici. Proto bod Q neleží na přímce p.

Řešení pomocí procedury

Pro řešení příkladů tohoto typu můžeme použít proceduru `BodPrimka`:

```
> BodPrimka(Q,A,u,4);
```

Zadani ulohy:

Zjistete, zda bod Q[-3, 8, -3] lezi na primce p
urcene bodem A[1, 2, -1] a vektorem u = (2, 3, 1).

Postup reseni:

1) Lezi-li bod Q na primce p, existuje takove realne cislo t, ze:

$$[-3,8,-3] = [1,2,-1] + t[2,3,1]$$

2) Z rovnice prvnich souradnic vypocitame t:

$$t = -2$$

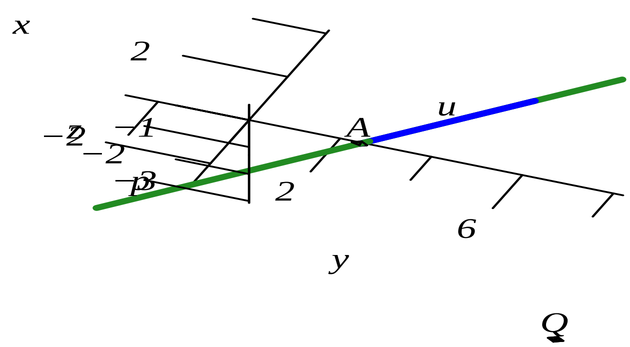
3) Hodnotu t dosadime do rovnice druhych a tretich souradnic:

$$8 = 2 + 3\,t,\ -3 = -1 + t$$

$$8 = -4,\ -3 = -3$$

Rovnosti nejsou splneny. Z toho plyne vysledek:

Bod [-3, 8, -3] NELEZI na primce urcene bodem [1, 2, -1] a vektorem (2, 3, 1).



Upravme nyní v zadání druhou souřadnici vektoru $\vec{u}$ tak, aby byla splněna i druhá rovnice. Dostáváme nové zadání a novou polohu:

```
> BodPrimka(Q,A,[2,-3,1],2);
```

Bod [-3, 8, -3] LEZI na primce urcene bodem [1, 2, -1] a vektorem (2, -3, 1).

Jiné zadání:

```
> BodPrimka([2,6,8],[6,2,6],[2,-3,6]);
```

Zadani ulohy:

Zjistete, zda bod Q[2, 6, 8] lezi na primce p
urcene bodem A[6, 2, 6] a vektorem u = (2, -3, 6).

Postup reseni:

1) Lezi-li bod Q na primce p, existuje takove realne cislo t, ze:

$$[2, 6, 8] = [6, 2, 6] + t[2, -3, 6]$$

2) Z rovnice prvnich souradnic vypocitame t:

$$t = -2$$

3) Hodnotu t dosadime do rovnice druhych a tretich souradnic:

$$6 = 2 - 3\,t,\ 8 = 6 + 6\,t$$

$$6 = 8,\ 8 = -6$$

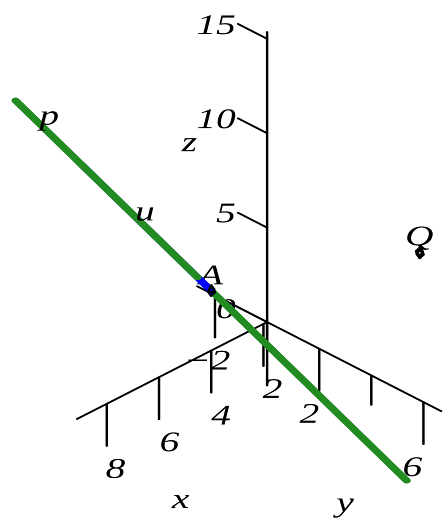
Rovnosti nejsou splneny. Z toho plyne vysledek:

Bod [2, 6, 8] NELEZI na primce urcene bodem [6, 2, 6] a vektorem (2, -3, 6).

A nyní zkusme zadat proceduře stejný příklad s výstupem pouze do obrázku:

```
> BodPrimka([2,6,8],[6,2,6],[2,-3,6],5);
```

Bod Q NELEZI na primce p(A,u).



Vidíme, že řešení úlohy máme v popisku obrázku.

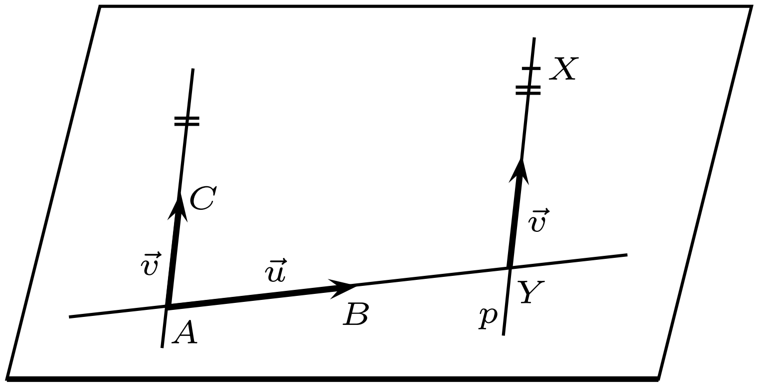
4.2 Parametrické vyjádření roviny

Umíme už pracovat s přímkou v prostoru. Mimo jiné umíme:
a) vyjádřit skutečnost, že nějaký bod leží na dané přímce,
b) daným bodem vést přímku rovnoběžnou s danou přímkou.

Jak pomocí těchto dvou dovedností popíšeme body roviny ABC?

Odpověď na otázku je zřejmá z obrázku 4.1.

Každým bodem Y přímky AB vedeme přímku p rovnoběžnou s přímkou AC. Všechny přímky p vyplní rovinu ABC.
Jak zapíšeme tyto skutečnosti pomocí parametrického vyjádření přímky?



Obrázek 4.1: Parametrické vyjádření roviny

Označme $\vec{u} = B - A, \vec{v} = C - A$. Každý bod X přímky p můžeme psát ve tvaru

$$X = Y + s\vec{v}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Každý bod Y přímky AB můžeme psát ve tvaru

$$Y = A + t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li z druhé rovnice do první, dostaneme tvrzení:

Věta. Každý bod X roviny ABC můžeme psát ve tvaru

$$X = A + t\vec{u} + s\vec{v}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

kde $\vec{u} = B - A, \vec{v} = C - A$, a obráceně každý bod X zapsaný v tomto tvaru je bod roviny ABC.

Definice. Rovnice

$$X = A + t\vec{u} + s\vec{v}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

se nazývá **parametrická rovnice** (nebo též **parametrické vyjádření**) roviny ABC, kde $B = A + \vec{u}$, $C = A + \vec{v}$.

Příklad 4.2.1

Zjistěte, zda bod $X[-1, -1, 3]$ leží v rovině určené body $A[1, 2, -1]$, $B[3, 1, 1]$, $C[-1, 1, 0]$.

Postupné řešení

Zadání:

```
> X:=[-1,-1,3]; A:=[1,2,-1]; B:=[3,1,1]; C:=[-1,1,0];
```

$$X := [-1, -1, 3]$$
$$A := [1, 2, -1]$$
$$B := [3, 1, 1]$$
$$C := [-1, 1, 0]$$

Určíme dva vektory, které leží v rovině ABC:

```
> u:='B-A'; v:='C-A'; 'u'=u; 'v'=v;
```

$$u := B - A$$
$$v := C - A$$
$$u = [2, -1, 2]$$
$$v = [-2, -1, 1]$$

Parametrické rovnice roviny tedy jsou:

```
> t:='t': s:='s': r1:=x=A[1]+t*u[1]+s*v[1]:
> r2:=y=A[2]+t*u[2]+s*v[2]: r3:=z=A[3]+t*u[3]+s*v[3]: r1;r2;r3;
```

$$x = 1 + 2\,t - 2\,s$$
$$y = 2 - t - s$$
$$z = -1 + 2\,t + s$$

Aby bod X ležel v rovině ABC, musí existovat reálná čísla t, s tak, že:

```
> e1:=subs(x=X[1],r1): e2:=subs(y=X[2],r2): e3:=subs(z=X[3],r3):
> e1;e2;e3;
```

$$-1 = 1 + 2\,t - 2\,s$$
$$-1 = 2 - t - s$$
$$3 = -1 + 2\,t + s$$

Čísla t, s vypočítáme z prvních dvou rovnic:

```
> e1-2*e2;
```

$$1 = -3 + 4\,t$$

```
> t:=solve(%);
```

$$t := 1$$

```
> e1;
```

$$-1 = 3 - 2\,s$$

```
> s:=solve(%);
```

$$s := 2$$

Dosazením do třetí rovnice dostáváme:

```
> subs(z=X[3],r3);testeq(%);
```

$$3 = 3$$
$$\mathit{true}$$

Vypočítaná čísla t, s tedy vyhovují i třetí rovnici. Proto bod X leží v rovině ABC.

Řešení pomocí procedury

Pro řešení příkladů tohoto typu můžeme použít proceduru `BodRovinaABC`:

```
> BodRovinaABC(X,A,B,C);
```

Zadani ulohy:

Zjistete, zda bod X[-1, -1, 3] lezi v rovine
urcene body A[1, 2, -1], B[3, 1, 1], C[-1, 1, 0].

Postup reseni:

1) Urcime dva vektory v rovine ABC, napr. vektory u=B-A a v=C-A:

$$u = [2, -1, 2],\ v = [-2, -1, 1]$$

2) Parametricke rovnice roviny tedy jsou:

$$x = 1 + 2\,t - 2\,s,\ y = 2 - t - s,\ z = -1 + 2\,t + s$$

3) Lezi-li bod X v rovine ABC, existuji realna cisla t, s tak, ze:

$$-1 = 1 + 2\,t - 2\,s,\ -1 = 2 - t - s,\ 3 = -1 + 2\,t + s$$

4) Z prvni a druhe rovnice vypocitame t, s:

$$t = 1,\ s = 2$$

5) Hodnotu t, s dosadime do treti rovnice:

$$3 = -1 + 2\,t + s$$
$$3 = 3$$

6) Z toho vidime, ze:

Bod [-1, -1, 3] LEZI v rovine urcene body [1, 2, -1], [3, 1, 1], [-1, 1, 0].

Jiné zadání:

```
> BodRovinaABC([5,1,2],[1,2,-1],[1,2,2],[2,9,7],2);
```

Bod [5, 1, 2] NELEZI v rovine urcene body [1, 2, -1], [1, 2, 2], [2, 9, 7].

Pozn.: tuto úlohu řeší i procedura `AreCoplanar` z balíku `geom3d`:

```
> with(geom3d):A:='A':B:='B':C:='C':X:='X':point(A,1,2,-1),
  point(B,3,1,1), point(C,-1,1,0), point(X,-1,-1,3):
  geom3d[AreCoplanar](A,B,C,X);
```

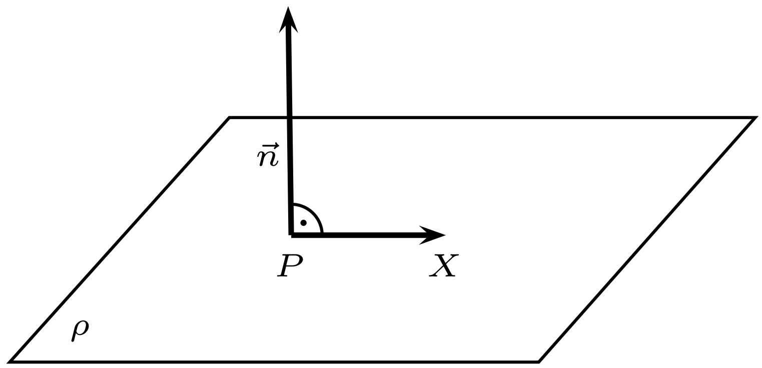
true

4.3 Obecná rovnice roviny

Častěji než parametricky vyjadřujeme rovinu obecnou rovnicí. Rovinu ρ určíme bodem P a vektorem $\vec{n}$, který je k ní kolmý (obr. 4.2), tzn. je kolmý ke všem vektorům ležícím v rovině ρ . Tento vektor se nazývá **normálový vektor** roviny.

Bod X leží v rovině ρ právě tehdy, když vektor $X - P$ je kolmý k vektoru $\vec{n}$, tj. když

$$\vec{n} \cdot (X - P) = 0.$$



Obrázek 4.2: Normálový vektor roviny

Body P, X a vektor $\vec{n}$ můžeme v dané kartézské soustavě souřadnic určit souřadnicemi: $X[x, y, z]$, $P[p_1, p_2, p_3]$, $\vec{n} = (a, b, c)$. Rovnici $\vec{n} \cdot (X - P) = 0$ můžeme rozepsat v souřadnicích:

$$a(x - p_1) + b(y - p_2) + c(z - p_3) = 0.$$

Jestliže závorky roznásobíme a označíme

$$d = -ap_1 - bp_2 - cp_3,$$

dostaneme rovnici

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Definice. Rovnice

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

se nazývá **obecná rovnice** roviny.

Snadno se dá ověřit, že obráceně platí:

Věta. Každá rovnice

$$ax + by + cz + d = 0,$$

kde alespoň jedno z čísel a, b, c je nenulové, je rovnice nějaké roviny.

Základní úlohou bude najít obecnou rovnici roviny, známe-li její tři body, které neleží na jedné přímce, nebo, což je skoro totéž, bod a dva vektory, které leží v této rovině a neleží na jedné přímce. Řešení této úlohy si ukážeme na příkladě na následující straně.

Příklad 4.3.1

Napište obecnou rovnici roviny ABC. Přitom $A[1, 0, 2], B[-1, 1, -2], C[3, 2, 0]$.

Postupné řešení

Zadání:

```
> A:=[1,0,2];B:=[-1,1,-2];C:=[3,2,0];
```

$$A := [1, 0, 2]$$
$$B := [-1, 1, -2]$$
$$C := [3, 2, 0]$$

Určíme dva vektory, které leží v rovině ABC:

```
> u:='B-A';v:='C-A'; 'u'=u;'v'=v;
```

$$u := B - A$$
$$v := C - A$$
$$u = [-2, 1, -4]$$
$$v = [2, 2, -2]$$

Určíme vektor kolmý k oběma vektorům $\vec{u}$, $\vec{v}$ (vektorový součin):

```
> n:=[u[2]*v[3]-u[3]*v[2],u[3]*v[1]-u[1]*v[3],u[1]*v[2]-u[2]*v[1]];
```

$$n := [6, -12, -6]$$

Protože je pro nás důležitý pouze směr normálového vektoru, můžeme vzít jeho libovolný násobek. Vydělme tedy souřadnice jejich největším společným dělitelem:

```
> n:=n/igcd(n[1],n[2],n[3]);
```

$$n := [1, -2, -1]$$

Obecná rovnice roviny bude tvaru:

```
> d:='d': r:=n[1]*x+n[2]*y+n[3]*z+d=0:r;
```

$$x - 2\,y - z + d = 0$$

Číslo d určíme z podmínky, že bod A leží v rovině (do rovnice dosadíme za x, y, z souřadnice bodu A):

```
> subs(x=A[1],y=A[2],z=A[3],r);d:=solve(%);
```

$$-1 + d = 0$$
$$d := 1$$

Hledaná obecná rovnice roviny ABC je tedy:

```
> r;
```

$$x - 2\,y - z + 1 = 0$$

Řešení pomocí procedury

Pro řešení příkladů tohoto typu můžeme použít proceduru `RovniceRovinyABC`. Tuto proceduru je možné použít i pro získání obecné rovnice roviny zadané parametricky, neboli bodem a dvěma vektory, příp. i pro rovinu zadanou dvěma body a vektorem. Příklad použití v tomto případě je ukázán na druhém volání procedury:

```
> RovniceRovinyABC(A,B,C);
```

Zadani ulohy:

Napiste obecnou rovnici roviny ABC. Pritom A[1, 0, 2], B[-1, 1, -2], C[3, 2, 0].

Postup reseni:

1) Urcime dva vektory v rovine ABC, napr. vektory u=B-A a v=C-A:

$$u = [-2, 1, -4],\ v = [2, 2, -2]$$

2) Urcime vektor kolmy k obema vektorum u, v (vektorovy soucin):

$$[6, -12, -6]$$

3) Obecna rovnice roviny bude tedy tvaru:

$$x - 2\,y - z + d = 0$$

4) Cislo d urcime dosazenim souradnic bodu A:

$$-1 + d = 0$$

$$d = 1$$

Obecna rovnice roviny je

$$x - 2\,y - z + 1 = 0$$

Jiné zadání:

```
> RovniceRovinyABC([1,6,3],[1,6,2],[1,5,2],1);
```

$$x - 1 = 0$$

Postup pro převod parametrické rovnice roviny na obecnou

Máme-li rovinu zadánu parametrickými rovnicemi nebo bodem A a vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$, pak pro získání obecné rovnice voláme proceduru takto:

```
> RovniceRovinyABC(A,A+u,A+v,2);
```

Obecna rovnice roviny je

$$x - 2\,y - z + 1 = 0$$

4.4 Polohové úlohy v prostoru

V této části se budeme zabývat vzájemnou polohou přímek a rovin, budeme určovat jejich průsečíky a budeme hledat útvary v určených polohách. Jedná se o úlohy typu „daným bodem veďte rovinu rovnoběžnou s danou rovinou“, „určete průsečík daných útvarů“ apod.

Při řešení těchto úloh budeme přímky zadávat bodem a vektorem nebo, což je vlastně totéž, parametrickými rovnicemi. Rovinu je nejvýhodnější zadávat obecnou rovnicí. Proto se při řešení úloh omezíme na tento případ. Známe-li parametrické vyjádření roviny, můžeme snadno najít její obecnou rovnici (např. pomocí procedury `RovniceRovinyABC` dle postupu na straně 22).

Příklad 4.4.1

Daným bodem $Q[1,2,-3]$ veďte přímku q rovnoběžnou s danou přímkou p, která je dána parametrickými rovnicemi:

$$\begin{aligned} x &= 2+3t,\\ y &= -1+2t,\\ z &= 1-t, \quad t\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Postupné řešení

Zadání:

```
> Q:=[1,2,-3]; t:='t':p:= [2,-1,1] + [3,2,-1]*t:
  print(`p: x`=op([1,1],p)+op([2,1,1],p)*t);
  print(y=op([1,2],p)+op([2,1,2],p)*t);
  print(z=op([1,3],p)+op([2,1,3],p)*t);
```

$$Q := [1,2,-3]$$
$$\begin{aligned} p: x &= 2+3\,t\\ y &= -1+2\,t\\ z &= 1-t \end{aligned}$$

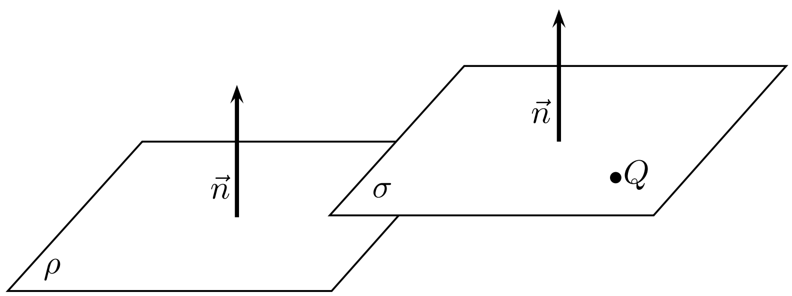
Hledaná přímka q má být rovnoběžná, tudíž má stejný směrový vektor. Koeficienty u parametru t tedy budou stejné. Prochází však bodem Q, takže jeho souřadnice dosadíme do rovnice přímky q. Tím dostáváme parametrické vyjádření přímky q:

```
> q:= subsop(1=Q,p); print(`q: x`=Q[1]+op([2,1,1],q)*t);
  print(y=Q[2]+op([2,1,2],q)*t);
  print(z=Q[3]+op([2,1,3],q)*t);
```

$$q := [1,2,-3]+[3,2,-1]t$$
$$\begin{aligned} q: x &= 1+3\,t\\ y &= 2+2\,t\\ z &= -3-t \end{aligned}$$

Než přistoupíme k řešení druhého příkladu, zamysleme se nad otázkou:
Jak spolu souvisejí normálové vektory dvou rovnoběžných rovin?

Návodem nám může být obrázek 4.4.



Obrázek 4.4: Dvě rovnoběžné roviny

Příklad 4.4.2

Daným bodem $Q[1,-2,3]$ veďte rovinu σ rovnoběžnou s danou rovinou ρ, která má obecnou rovnici $3x-y+2z-1=0$.

Postupné řešení

Zadání:

```
> Q:=[1,-2,3]; rho:=[3,-1,2,-1]:
  sort(rho[1]*'x'+rho[2]*'y'+rho[3]*'z'+rho[4]=0,[x,y,z]);
```

$$Q := [1,-2,3]$$

$$3\,x-y+2\,z-1=0$$

Rovnice rovnoběžných rovin se liší pouze posledním koeficientem d, takže rovnice bude tvaru:

```
> d:='d':rho[1]*x+rho[2]*y+rho[3]*z+d=0;
```

$$3\,x-y+2\,z+d=0$$

Číslo d vypočítáme dosazením souřadnic bodu Q do této rovnice:

```
> d:=solve(subs([x=Q[1],y=Q[2],z=Q[3]],%));
```

$$d := -11$$

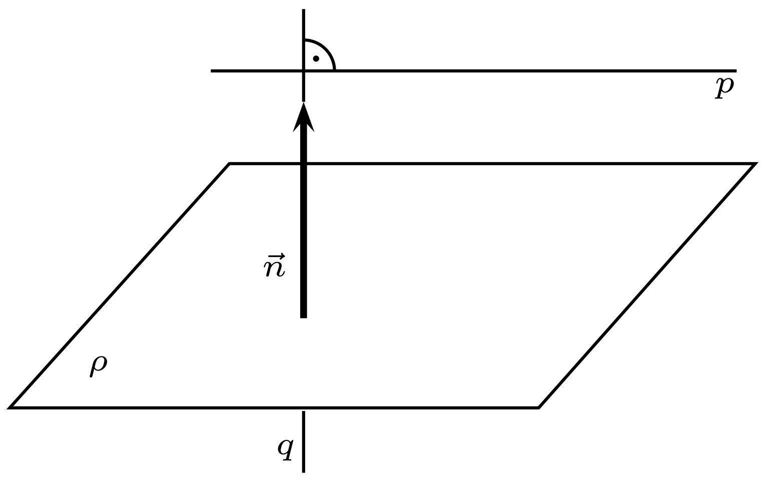
Rovnice hledané roviny tedy je:

```
> rho[1]*x+rho[2]*y+rho[3]*z+d=0;
```

$$3\,x-y+2\,z-11=0$$

V následujících příkladech budeme vyšetřovat vzájemnou polohu přímek a rovin. Jestliže q je přímka kolmá k rovině, můžeme určit vzájemnou polohu přímky p a roviny pomocí vzájemné polohy přímek p a q?

Návodem nám může být obrázek 4.5.



Obrázek 4.5: Přímka rovnoběžná s rovinou

Příklad 4.4.3

Určete vzájemnou polohu roviny ρ a přímky p dané bodem $P[1, 2, 3]$ a vektorem $\vec{u} = (1, -2, 4)$.

Postupné řešení

a) ρ: $2x + 3y + z - 3 = 0$

Zadání:

```
> P:=[1,2,3]; u:=[1,-2,4]; rho:=[2,3,1,-3]:
  sort(rho[1]*'x'+rho[2]*'y'+rho[3]*'z'+rho[4]=0,[x,y,z]);
```

$$P := [1, 2, 3]$$

$$u := [1, -2, 4]$$

$$2\,x + 3\,y + z - 3 = 0$$

Jestliže $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$, pak přímka je kolmá k normálovému vektoru $\vec{n}$ a tudíž přímka je s rovinou rovnoběžná:

```
> n:=[rho[1],rho[2],rho[3]]: n[1]*u[1]+n[2]*u[2]+n[3]*u[3];
```

$$0$$

Směr přímky je tedy rovnoběžný s rovinou. Zjistíme ještě, zda přímka v rovině neleží. K tomu stačí zjistit, zda v rovině leží bod P:

```
> testeq(rho[1]*P[1]+rho[2]*P[2]+rho[3]*P[3]+rho[4]=0);
```

$$\mathit{false}$$

Bod P nesplňuje rovnici roviny a tudíž v rovině neleží. Proto ani přímka v rovině neleží.
Dostáváme výsledek: přímka je s rovinou rovnoběžná.

b) ρ: $x + 3z + 2 = 0$

Zadání:

```
> P:=[1,2,3]; u:=[1,-2,4]; rho:=[1,0,3,2]:
  sort(rho[1]*'x'+rho[2]*'y'+rho[3]*'z'+rho[4]=0,[x,y,z]);
```

$$P := [1, 2, 3]$$

$$u := [1, -2, 4]$$

$$x + 3\,z + 2 = 0$$

Jestliže $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$, pak přímka je kolmá k normálovému vektoru $\vec{n}$ a tudíž přímka je s rovinou rovnoběžná:

```
> n:=[rho[1],rho[2],rho[3]]: n[1]*u[1]+n[2]*u[2]+n[3]*u[3];
```

$$13$$

Normálový vektor není kolmý k přímce, takže přímka je s rovinou různoběžná.

c) ρ: $2y + z - 7 = 0$

Zadání:

```
> P:=[1,2,3]; u:=[1,-2,4]; rho:=[0,2,1,-7]:
  sort(rho[1]*'x'+rho[2]*'y'+rho[3]*'z'+rho[4]=0,[x,y,z]);
```

$$P := [1, 2, 3]$$

$$u := [1, -2, 4]$$

$$2\,y + z - 7 = 0$$

Jestliže $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$, pak přímka je kolmá k normálovému vektoru $\vec{n}$ a tudíž přímka je s rovinou rovnoběžná:

```
> n:=[rho[1],rho[2],rho[3]]: n[1]*u[1]+n[2]*u[2]+n[3]*u[3];
```

$$0$$

Směr přímky je rovnoběžný s rovinou. Zjistíme ještě, zda přímka v rovině neleží.
K tomu stačí zjistit, zda v rovině leží bod P:

```
> testeq(rho[1]*P[1]+rho[2]*P[2]+rho[3]*P[3]+rho[4]=0);
```

$$\mathit{true}$$

Bod P splňuje rovnici roviny a tudíž v rovině leží. Proto i celá přímka leží v rovině.

Řešení pomocí procedury

Pro vyřešení příkladů tohoto typu můžeme použít proceduru `PrimkaRovina`:
a) ρ: $2x + 3y + z - 3 = 0$

```
> PrimkaRovina(P,u,[2,3,1,-3]);
```

Primka a rovina jsou rovnobezne.

b) ρ: $x + 3z + 2 = 0$

```
> PrimkaRovina(P,u,[1,0,3,2]);
```

Primka a rovina jsou ruznobezne.

Při různoběžné poloze můžeme pro nalezení jejich průsečíku použít proceduru `PrusPrimkaRovina` (více k této proceduře v následujícím příkladě 4.4.4):

```
> PrusPrimkaRovina(P,u,[1,0,3,2],2);
```

Prusecikem primky a roviny je bod [1/13, 50/13, -9/13].

c) ρ: $2y + z - 7 = 0$

```
> PrimkaRovina([1,2,3],[1,-2,4],[0,2,1,-7]);
```

Primka a rovina jsou incidentni, tzn. primka lezi v rovine.

Příklad 4.4.4

Určete průsečík roviny ρ: $2x + 4y - 3z + 1 = 0$ a přímky p dané bodem $P[0, 3, -1]$ a vektorem $\vec{u} = (1, -1, 2)$.

Postupné řešení

Zadání:

```
> P:=[0,3,-1]; u:=[1,-1,2]; rho:=[2,4,-3,1]:
sort(rho[1]*'x'+rho[2]*'y'+rho[3]*'z'+rho[4]=0,[x,y,z]);
```

$$P := [0, 3, -1]$$
$$u := [1, -1, 2]$$
$$2\,x + 4\,y - 3\,z + 1 = 0$$

Zjišťujeme, pro jaký parametr t je bod X přímky p také bodem roviny ρ. Parametrické rovnice bodů X přímky p jsou:

```
> t:='t': X:=[P[1]+t*u[1],P[2]+t*u[2],P[3]+t*u[3]];
```

$$X := [t, 3 - t, -1 + 2\,t]$$

Z parametrického vyjádření přímky p dosadíme do rovnice roviny ρ souřadnice bodu X:

```
> print(cat(rho[1],`*(`,convert(X[1],string),`)+`,rho[2],`*
(`,convert(X[2],string),`)+`,rho[3],`*(`,convert(X[3],string),`)+`,
rho[4],`=0, po sečtení:`));
rho[1]*X[1]+rho[2]*X[2]+rho[3]*X[3]+rho[4]=0;
```

`2*(t)+4*(3-t)+-3*(-1+2*t)+1=0, po sečtení:`

$$-8\,t + 16 = 0$$

Rovnici vyřešíme:

```
> t1:=solve(%);
```

$$t1 := 2$$

Po dosazení t do parametrického vyjádření přímky p dostáváme průsečík R:

```
> R:=subs(t=t1,X);
```

$$R := [2, 1, 3]$$

Řešení pomocí procedury

Pro řešení příkladů tohoto typu můžeme použít proceduru `PrusPrimkaRovina`:

```
> PrusPrimkaRovina(P,u,rho,4);
```

Zadani ulohy:

*Urcete prusecik primky p urcene bodem P[0, 3, -1] a vektorem u = (1,-1,2) a roviny rho: 2*x+4*y-3*z+1 = 0.*

Postup reseni:

Parametricke vyjadreni primky p je:

$$x = t,\ y = 3 - t,\ z = -1 + 2\,t$$

1) Vyjadreni bodu primky p dosadime do rovnice roviny rho:

$$2\,x + 4\,y - 3\,z + 1 = 0$$

2(t)+4*(3-t)+-3*(-1+2*t)+1=0*

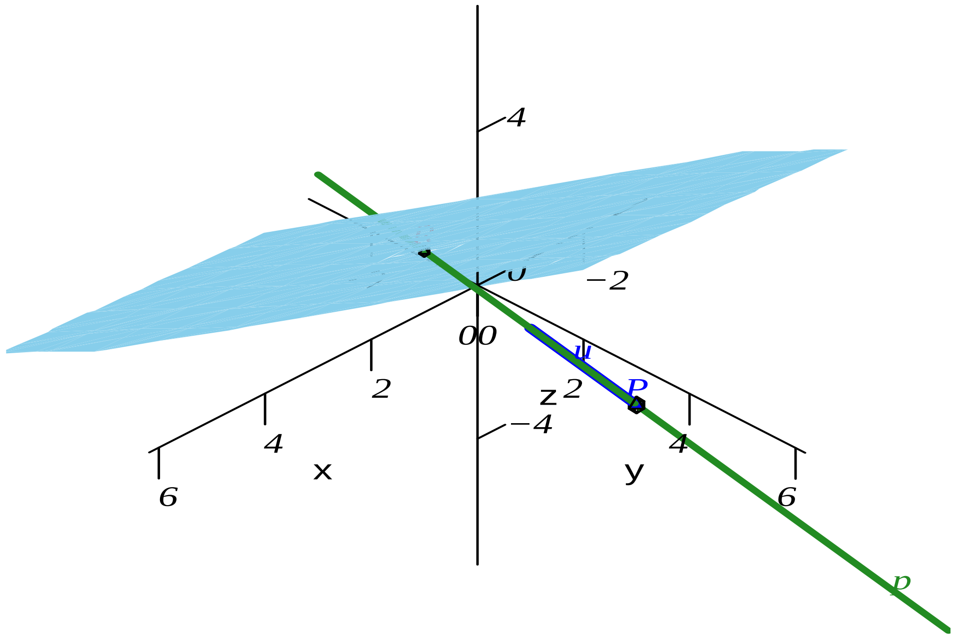
2) Rovnici vyresime

$$-8\,t + 16 = 0$$

$$t = 2$$

3) Reseni dosadime do rovnic primky a dostavame:

Prusecikem primky a roviny je bod [2, 1, 3].



V závislosti na počtu řešení můžeme určit vzájemnou polohu zadané přímky a roviny.

Jaká je vzájemná poloha, pokud bude řešením *t1*:= *t*? A jaká bude poloha při řešení *t1*:=   (tj. prázdná množina, v Maplu `NULL`)?

Odpovědi na tyto otázky nám dají následující aplikace procedury.

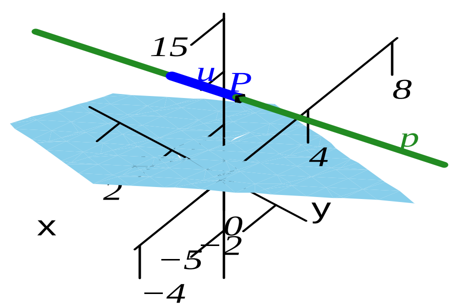
Aplikace procedury na zadání z příkladu 4.4.3

Zkusme do procedury použít přímky a roviny z předchozího příkladu. Tam jsme určovali vzájemnou polohu. Tato procedura obecně hledá průsečík, ale na základě počtu průsečíků můžeme odvodit vzájemnou polohu. Pokud přímka a rovina nejsou různoběžné, je výstupem procedury proto i poznámka o vzájemné poloze. Jednotlivá volání procedury jsou na následujících dvou stranách.

a)

```
> PrusPrimkaRovina([1,2,3],[1,-2,4],[2,3,1,-3],5);
```

Prusecik neexistuje
(primka a rovina jsou rovnobezne).



b)

```
> PrusPrimkaRovina([1,2,3],[1,-2,4],[1,0,3,2],4);
```

Zadani ulohy:

Urcete prusecik primky p urcene bodem P[1, 2, 3] a vektorem u = (1,-2,4)
*a roviny rho: x+3*z+2 = 0.*

Postup reseni:

Parametricke vyjadreni primky p je:

$x = 1 + t,\ y = 2 - 2\,t,\ z = 3 + 4\,t$

1) Vyjadreni bodu primky p dosadime do rovnice roviny rho:

$x + 3\,z + 2 = 0$

1(1+t)+0*(2-2*t)+3*(3+4*t)+2=0*

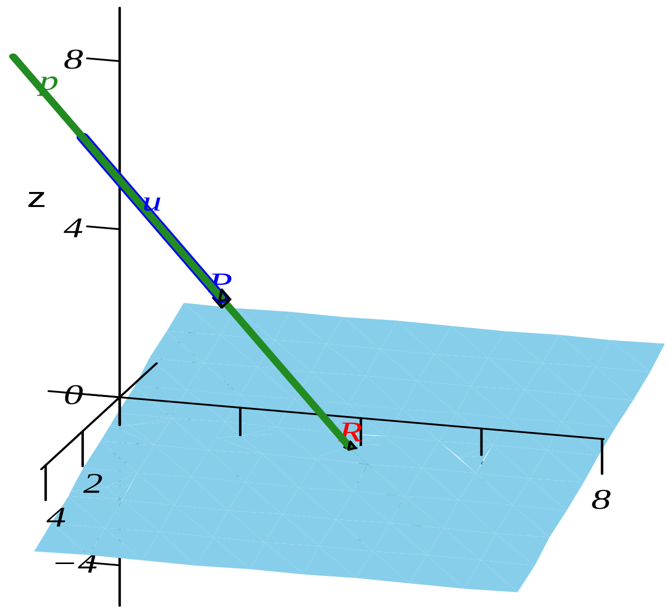
2) Rovnici vyresime

$12 + 13\,t = 0$

$t = -\frac{12}{13}$

3) Reseni dosadime do rovnic primky a dostavame:

Prusecikem primky a roviny je bod [1/13, 50/13, -9/13].



c)

```
> PrusPrimkaRovina([1,2,3],[1,-2,4],[0,2,1,-7],4);
```

Zadani ulohy:

Urcete prusecik primky p urcene bodem P[1, 2, 3] a vektorem u = (1,-2,4)
*a roviny rho: 2*y+z-7 = 0.*

Postup reseni:

Parametricke vyjadreni primky p je:

$x = 1 + t,\ y = 2 - 2\,t,\ z = 3 + 4\,t$

1) Vyjadreni bodu primky p dosadime do rovnice roviny rho:

$2\,y + z - 7 = 0$

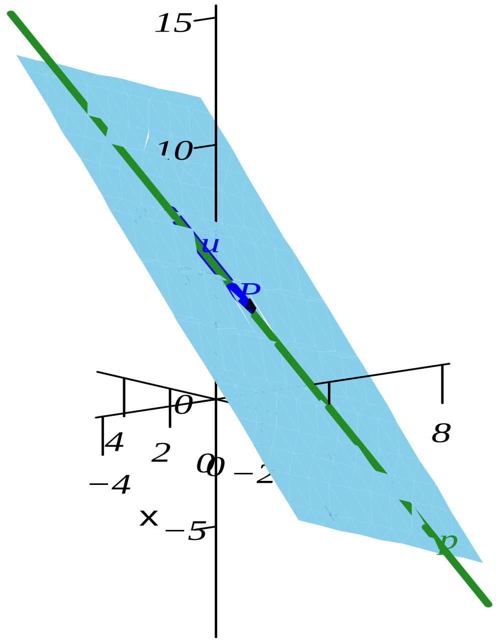
0(1+t)+2*(2-2*t)+1*(3+4*t)+-7=0*

2) Rovnici vyresime

$0 = 0$

2) Resenim rovnice jsou vsechna t. Z toho plyne reseni ulohy:

Prusecikem je kazdy bod primky (primka lezi v rovine).



Příklad 4.4.5

Určete vzájemnou polohu rovin ρ: $2x - y + 3y + 2 = 0$ a σ, kde
a) σ: $4x - 2y + 6z - 1 = 0$,
b) σ: $-2x + y + z = 0$,
c) σ: $-x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z - 1 = 0$.

Postup řešení je analogický určování vzájemné polohy dvou přímek daných obecnými rovnicemi v rovině:

1. Roviny jsou totožné, jestliže rovnice jedné z nich je násobkem rovnice druhé z nich.

2. Roviny jsou rovnoběžné, jestliže normálový vektor jedné z nich je násobkem normálového vektoru druhé roviny. V opačném případě jsou různoběžné.

Postupné řešení

a) σ: $4x - 2y + 6z - 1 = 0$

Zadání:

```
> rho:=[2,-1,3,2]: sort(rho[1]*'x'+rho[2]*'y'+rho[3]*'z'+rho[4]=0,
[x,y,z]); sigma:=[4,-2,6,-1]:
sort(sigma[1]*'x'+sigma[2]*'y'+sigma[3]*'z'+sigma[4]=0,[x,y,z]);
```

$$2\,x - y + 3\,z + 2 = 0$$
$$4\,x - 2\,y + 6\,z - 1 = 0$$

Řešení:
Zjistíme, zda roviny nejsou totožné (zda rovnice roviny σ není k-násobkem rovnice roviny ρ):

```
> k:=sigma[1]/rho[1]: totozne:=evalb(sigma=k*rho);
```

$$totozne := false$$

Roviny nejsou totožné. Určíme tedy normálové vektory:

```
> n:=rho[1..3];m:=sigma[1..3];
```

$$n := [2, -1, 3]$$
$$m := [4, -2, 6]$$

Zjistíme, zda vektor $\vec{m}$ není k-násobkem vektoru $\vec{n}$:

```
> rovnobezne:=evalb(m=k*n);
```

$$rovnobezne := true$$

Roviny jsou tedy rovnoběžné různé.

b) $\sigma\colon\; -2x + y + z = 0$

Zadání:

```
> rho:=[2,-1,3,2]: sort(rho[1]*'x'+rho[2]*'y'+rho[3]*'z'+rho[4]=0,
[x,y,z]); sigma:=[-2,1,1,0]:
sort(sigma[1]*'x'+sigma[2]*'y'+sigma[3]*'z'+sigma[4]=0,[x,y,z]);
```

$$2\,x - y + 3\,z + 2 = 0$$
$$-2\,x + y + z = 0$$

Řešení:
Zjistíme, zda roviny nejsou totožné (zda rovnice roviny σ není k-násobkem rovnice roviny ρ):

```
> k:=sigma[1]/rho[1]: totozne:=evalb(sigma=k*rho);
```

$$totozne := false$$

Roviny nejsou totožné. Určíme tedy normálové vektory:

```
> n:=rho[1..3];m:=sigma[1..3];
```

$$n := [2, -1, 3]$$
$$m := [-2, 1, 1]$$

Zjistíme, zda vektor $\vec{m}$ není k-násobkem vektoru $\vec{n}$:

```
> rovnobezne:=evalb(m=k*n);
```

$$rovnobezne := false$$

Roviny jsou tedy různoběžné.

c) $\sigma\colon\ -x+\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}z-1=0$

Zadání:

```
> rho:=[2,-1,3,2]: sort(rho[1]*'x'+rho[2]*'y'+rho[3]*'z'+rho[4]=0,
[x,y,z]); sigma:=[-1,1/2,-3/2,-1]:
sort(sigma[1]*'x'+sigma[2]*'y'+sigma[3]*'z'+sigma[4]=0,[x,y,z]);
```

$$2\,x-y+3\,z+2=0$$

$$-x+1/2\,y-3/2\,z-1=0$$

Řešení:
Zjistíme, zda roviny nejsou totožné (zda rovnice roviny σ není k-násobkem rovnice roviny ρ):

```
> k:=sigma[1]/rho[1]: totozne:=evalb(sigma=k*rho);
```

$$totozne\ :=\ true$$

Roviny jsou totožné.

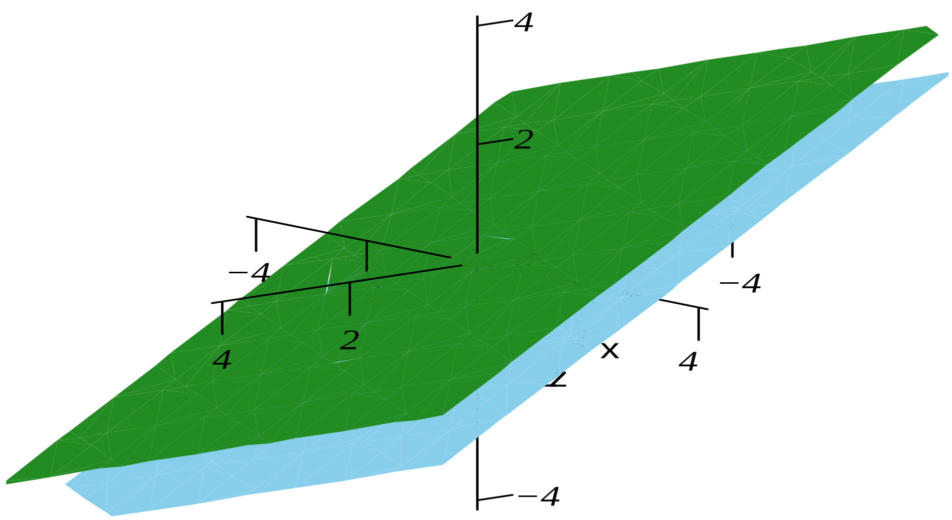
Řešení pomocí procedury

Pro řešení příkladů tohoto typu můžeme použít proceduru `RovinaRovina`:

a)

```
> RovinaRovina(rho,[4,-2,6,-1],4);
```

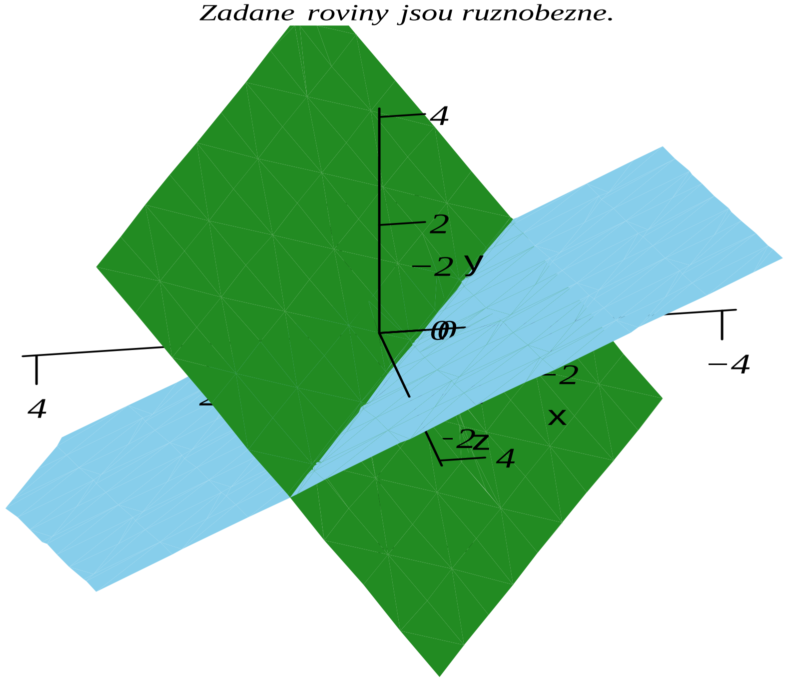
Zadane roviny jsou rovnobezne.



b)

```
> RovinaRovina(rho,[-2,1,1,0],5);
```

Zadane roviny jsou ruznobezne.



c)

```
> RovinaRovina([2,-1,3,2],[-1,1/2,-3/2,-1]);
```

Zadane roviny jsou totozne.

Příklad 4.4.6

Určete průsečnici různoběžných rovin $\rho\colon x + 2y + z - 1 = 0$ a $\sigma\colon 2x + 3y - 2z + 2 = 0$.

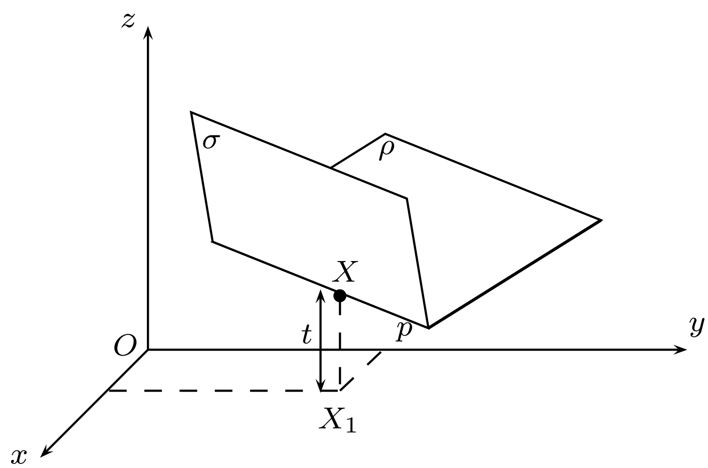
Zformulujeme-li příklad 4.4.6 algebraicky, dostaneme: Nalezněte množinu všech řešení soustavy dvou rovnic o třech neznámých.

Množinu všech řešení nalezneme tak, že jednu neznámou zvolíme za parametr a zbývající dvě neznámé vypočítáme (viz. učebnice *Rovnice a nerovnice* [1]). Po provedeném výpočtu zjistíme, že jsme nalezli parametrické vyjádření průsečnice obou rovin.

Názorný význam právě uvedeného postupu je zřejmý z obr. 4.6 na následující straně - za parametr t volíme souřadnici z.

Můžeme za parametr zvolit libovolnou neznámou?

Ne. Musíme ho volit tak, abychom zbylé souřadnice mohli dopočítat.



Obrázek 4.6: Průsečnice dvou rovin

Postupné řešení

Rovnice rovin jsou:

```
> rho:=[1,2,1,-1]: sigma:=[2,3,-2,2]: x:='x': y:='y':z:='z':
r:=rho[1]*x+rho[2]*y+rho[3]*z+rho[4]=0;
s:=sigma[1]*x+sigma[2]*y+sigma[3]*z+sigma[4]=0;
```

$$r := x + 2\,y + z - 1 = 0$$
$$s := 2\,x + 3\,y - 2\,z + 2 = 0$$

Položíme $z = t$ a od trojnásobku první rovnice odečteme dvojnásobek druhé:

```
> z:=t; r;s;
```

$$z := t$$
$$x + 2\,y + t - 1 = 0$$
$$2\,x + 3\,y - 2\,t + 2 = 0$$

```
> 3*r-2*s;
```

$$-x + 7\,t - 7 = 0$$

Dostáváme x:

```
> x:=solve(%,x);
```

$$x := 7\,t - 7$$

Dosazením x do první (nebo druhé) rovnice dostaneme y:

```
> y:=solve(s,y);
```

$$y := -4\,t + 4$$

Parametrické vyjádření průsečnice obou rovin je:

```
> 'x'=x;'y'=y;'z'=z; x:='x':y:='y':z:='z':
```

$$x = 7\,t - 7$$
$$y = -4\,t + 4$$
$$z = t$$

Průsečnice je tedy určena např. bodem $P[-7,4,0]$ a vektorem $\vec{u}=(7,-4,1)$.

Jiný způsob řešení

Rovnice rovin jsou:

```
> rho:=[1,2,1,-1]: sigma:=[2,3,-2,2]: x:='x': y:='y':z:='z':
r:=rho[1]*x+rho[2]*y+rho[3]*z+rho[4]=0;
s:=sigma[1]*x+sigma[2]*y+sigma[3]*z+sigma[4]=0;
```

$$r := x+2\,y+z-1=0$$
$$s := 2\,x+3\,y-2\,z+2=0$$

Zvolíme-li $z=1$, dostaneme soustavu rovnic:

```
> z:=1; r;s;
```

$$z := 1$$
$$x+2\,y=0$$
$$2\,x+3\,y=0$$

Vyřešíme-li ji, dostaneme:

```
> solve({r,s},[x,y]);x:=op([1,2],%[1]);y:=op([2,2],%%[1]);
```

$$[[x=0,y=0]]$$
$$x := 0$$
$$y := 0$$

Nalezli jsme bod průsečnice:

```
> Q:=[x,y,z];x:='x':y:='y':z:='z':
```

$$Q := [0,0,1]$$

Směrový vektor hledané průsečnice je kolmý na normálové vektory obou rovin (hledáme vektorový součin):

```
> u:=[rho[2]*sigma[3]-rho[3]*sigma[2],
rho[3]*sigma[1]-rho[1]*sigma[3],
rho[1]*sigma[2]-rho[2]*sigma[1]];
```

$$u := [-7,4,-1]$$

Dostáváme parametrické vyjádření průsečnice:

```
> t:='t':p:=Q+t*u;
```

$$p := [0,0,1]+t[-7,4,-1]$$

Jinak zapsáno:

```
> t:='t':print(`p: x`=Q[1]+u[1]*t); print(y=Q[2]+u[2]*t);
print(z=Q[3]+u[3]*t);
```

$$p: x=-7\,t$$
$$y=4\,t$$
$$z=1-t$$

Také jsme mohli získat další bod průsečnice stejným způsobem, jakým jsme získali bod Q, a napsat parametrické rovnice přímky určené dvěma body.

Řešení pomocí procedury

Pro řešení příkladů tohoto typu můžeme použít proceduru `PrusRovinaRovina`:

```
> PrusRovinaRovina([1,2,1,-1],[2,3,-2,2],4);
```

Zadani ulohy:

*Urcete prusecnici roviny rho: x+2*y+z-1 = 0 a roviny sigma: 2*x+3*y-2*z+2 = 0.*

Postup reseni:

1) Resime soustavu 2 rovnic o 3 neznamych:

$$x + 2\,y + z - 1 = 0$$
$$2\,x + 3\,y - 2\,z + 2 = 0$$

2) Zvolime z=1 a dostavame:

$$x + 2\,y = 0,\ 2\,x + 3\,y = 0$$

3) Po vyreseni dostavame bod prusecnice:

$$P = [0, 0, 1]$$

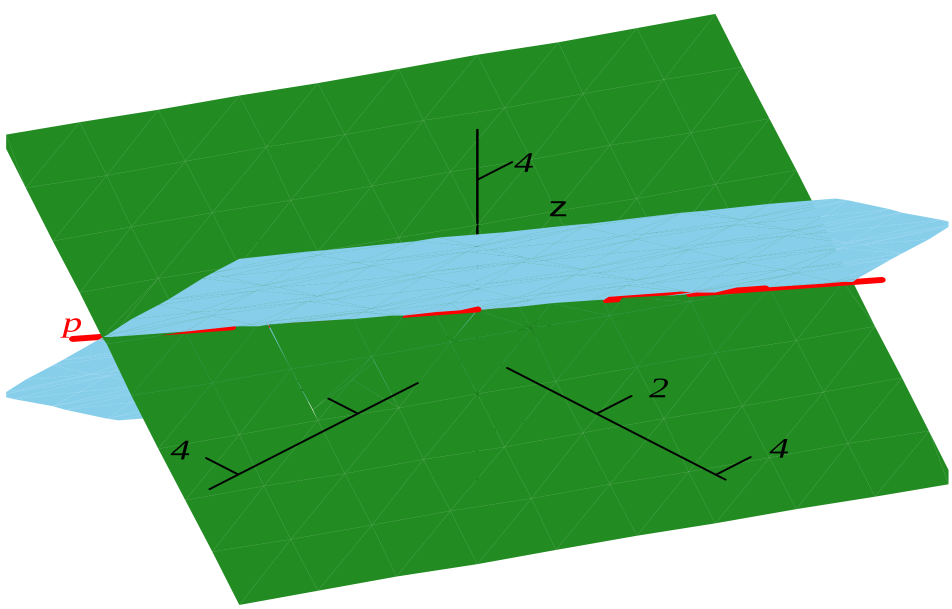
4) Urcime vektorovy soucin normalovych vektoru:

$$u = [-7, 4, -1]$$

Reseni tedy je:

Prusecnice zadanych rovin je primka p:

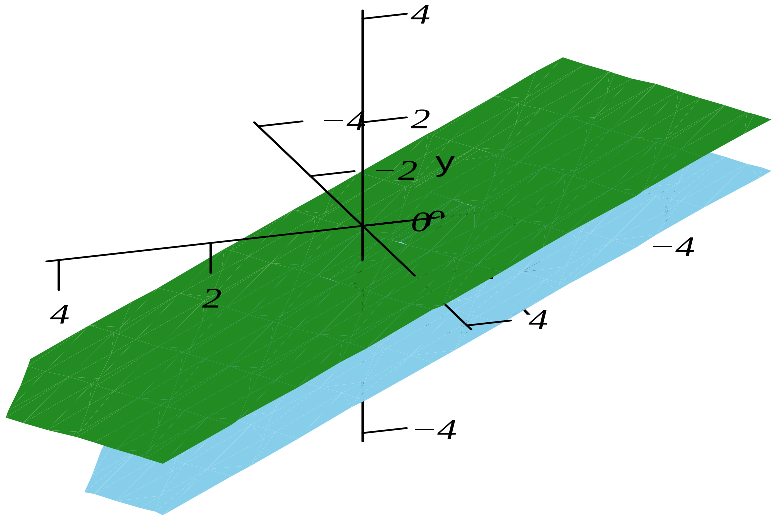
$$x = -7\,t,\ y = 4\,t,\ z = 1 - t$$



Průsečnice také nemusí existovat:

```
> PrusRovinaRovina([2,-1,3,2],[4,-2,6,10],5);
```

Zadane roviny nemaji prusecnici.
(Jsou rovnobezne.)



Příklad 4.4.7

Zjistěte vzájemnou polohu přímek $p(P, \vec{u})$ a $q(Q, \vec{v})$, kde $P[1, 1, 3]$, $\vec{u} = (2, 3, -1)$, $Q[2, 1, -2]$ a

a) $\vec{v} = (1, 1, -2)$,
b) $\vec{v} = (-\frac{2}{3}, -1, \frac{1}{3})$,
c) $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

Postup řešení:

1. Zjistíme, zda vektor $\vec{u}$ je násobkem vektoru $\vec{v}$. Jestliže ano, jsou přímky p, q rovnoběžné a pokračujeme bodem 2. Jestliže ne, nejsou přímky p, q rovnoběžné a pokračujeme postupem v bodě 2′.

2. Je-li $p \parallel q$, zjistíme, zda $P \in q$ (viz. příklad 4.1.1). Jestliže ano, jsou přímky p, q totožné. Jestliže ne, jsou přímky p, q rovnoběžné různé.

2′. Jestliže $p \nparallel q$, budeme hledat jejich společný bod - průsečík. Jestliže přímky mají průsečík, jsou různoběžné. Jestliže ho nemají, jsou mimoběžky.

Postupné řešení

a) $\vec{v} = (1, 1, -2)$

Zadání:

```
> P:=[1,1,3]: u:=[2,3,-1]: Q:=[2,1,-2]: v:=[1,1,-2]: t:='t':s:='s':
X[1]:=P[1]+t*u[1]: Y[1]:=Q[1]+s*v[1]: X[2]:=P[2]+t*u[2]:
Y[2]:=Q[2]+s*v[2]: X[3]:=P[3]+t*u[3]: Y[3]:=Q[3]+s*v[3]:
print(`p: x`=X[1],y=X[2],z=X[3]);print(`q: x`=Y[1],y=Y[2],z=Y[3]);
```

$$p : x = 1 + 2\,t,\ y = 1 + 3\,t,\ z = 3 - t$$

$$q : x = 2 + s,\ y = 1 + s,\ z = -2 - 2\,s$$

Řešení:
1. Zjistíme, zda jsou rovnoběžné (zda vektor $\vec{u}$ není k-násobkem vektoru $\vec{v}$):

```
> k:=v[1]/u[1]; rovnobezne:=evalb(v=k*u);
```

$$k := 1/2$$

$$rovnobezne := false$$

2′. Přímky nejsou rovnoběžné. Hledáme tedy jejich společný bod $X[x, y, z]$. Musí splňovat rovnice obou přímek:

```
> X[1]=Y[1]; X[2]=Y[2]; X[3]=Y[3];
```

$$1 + 2\,t = 2 + s$$

$$1 + 3\,t = 1 + s$$

$$3 - t = -2 - 2\,s$$

Rovnice vyřešíme:

```
> solve({%,%%,%%%}); assign(%);
```

$$\{t = -1, s = -3\}$$

Soustava má řešení, tedy přímky jsou různoběžné.
Průsečík dostaneme po dosazení do rovnic pro bod přímky p. Stejný výsledek dostaneme i po dosazení do rovnic pro bod přímky q.

```
> X:=[X[1],X[2],X[3]]:X;
```

$$[-1, -2, 4]$$

b) $\vec{v} = (-\frac{2}{3}, -1, \frac{1}{3})$

Zadání:

```
> P:=[1,1,3]: u:=[2,3,-1]: Q:=[2,1,-2]: v:=[-2/3,-1,1/3]: t:='t':
s:='s': X[1]:=P[1]+t*u[1]: Y[1]:=Q[1]+s*v[1]: X[2]:=P[2]+t*u[2]:
Y[2]:=Q[2]+s*v[2]: X[3]:=P[3]+t*u[3]: Y[3]:=Q[3]+s*v[3]:
print(`p: x`=X[1],y=X[2],z=X[3]); print(`q: x`=Y[1],y=Y[2],z=Y[3]);
```

$$p : x = 1 + 2\,t,\ y = 1 + 3\,t,\ z = 3 - t$$

$$q : x = 2 - 2/3\,s,\ y = 1 - s,\ z = -2 + 1/3\,s$$

Řešení:
1. Zjistíme, zda jsou rovnoběžné (zda vektor $\vec{u}$ není k-násobkem vektoru $\vec{v}$):

```
> k:=v[1]/u[1]; rovnobezne:=evalb(v=k*u);
```

$$k := -1/3$$

$$rovnobezne := true$$

2. Přímky jsou rovnoběžné. Zjistíme, zda bod P leží na přímce q (zda splňuje její rovnice).

```
> P[1]=Y[1]; P[2]=Y[2]; P[3]=Y[3];
```

$$1 = 2 - 2/3\,s$$

$$1 = 1 - s$$

$$3 = -2 + 1/3\,s$$

Z druhé rovnice vidíme, že $s = 0$. Zkusíme dosadit do dalších rovnic:

```
> solve({%%});assign(%); P[1]=Y[1]; testeq(P[1]=Y[1]); P[3]=Y[3];
testeq(P[3]=Y[3]);
```

$$\{s = 0\}$$

$$1 = 2$$

$$false$$

$$3 = -2$$

$$false$$

Vidíme, že po dosazení není rovnice splněna. Bod P proto neleží na přímce q a přímky jsou tedy rovnoběžné různé.

c) $\vec{v} = (2, 1, 0)$

Zadání:

```
> P:=[1,1,3]: u:=[2,3,-1]: Q:=[2,1,-2]: v:=[2,1,0]: t:='t':s:='s':
X[1]:=P[1]+t*u[1]: Y[1]:=Q[1]+s*v[1]: X[2]:=P[2]+t*u[2]:
Y[2]:=Q[2]+s*v[2]: X[3]:=P[3]+t*u[3]: Y[3]:=Q[3]+s*v[3]:
print(`p: x`=X[1],y=X[2],z=X[3]); print(`q: x`=Y[1],y=Y[2],z=Y[3]);
```

$$p : x = 1 + 2\,t,\ y = 1 + 3\,t,\ z = 3 - t$$

$$q : x = 2 + 2\,s,\ y = 1 + s,\ z = -2$$

Řešení:
1. Zjistíme, zda jsou rovnoběžné (zda vektor $\vec{u}$ není k-násobkem vektoru $\vec{v}$):

```
> k:=v[1]/u[1]; rovnobezne:=evalb(v=k*u);
```

$$k := 1$$

$$rovnobezne := false$$

2'. Přímky nejsou rovnoběžné. Hledáme tedy jejich společný bod $X[x, y, z]$. Musí splňovat rovnice obou přímek:

```
> X[1]=Y[1]; X[2]=Y[2]; X[3]=Y[3];
```

$$1 + 2\,t = 2 + 2\,s$$

$$1 + 3\,t = 1 + s$$
$$3 - t = -2$$

Rovnice vyřešíme:

```
> res:=solve({%,%%,%%%});
```

$$res :=$$

To vypadá, že se nic nepřiřadilo. Ale ona to asi bude ona prázdná množina - `NULL`. Tak to ověříme:

```
> evalb(res=NULL);
```

$$true$$

Soustava nemá řešení, tedy přímky jsou mimoběžné.

Poznámka: Postup v bodě $2'$ můžeme obměnit. Je-li $p \nparallel q$, zjistíme, zda leží v jedné rovině - např. určíme rovinu bodem P a vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ a zjistíme, zda v této rovině leží i bod Q. Leží-li přímky p a q v jedné rovině, pak jsou různoběžné (jejich rovnoběžnost jsme vyloučili), neleží-li v jedné rovině, pak jsou mimoběžné.

Řešení pomocí procedury

Pro řešení příkladů tohoto typu můžeme použít proceduru `PrimkaPrimka`:
a)

```
> PrimkaPrimka([1,1,3],[2,3,-1],[2,1,-2],[1,1,-2],4);
```

Zadani ulohy:

Zjistete vzajemnou polohu primek p(P,u) a q(Q,v), kde
P[1, 1, 3], u = (2,3,-1), Q[2, 1, -2] a v = (1,1,-2).

Postup reseni:

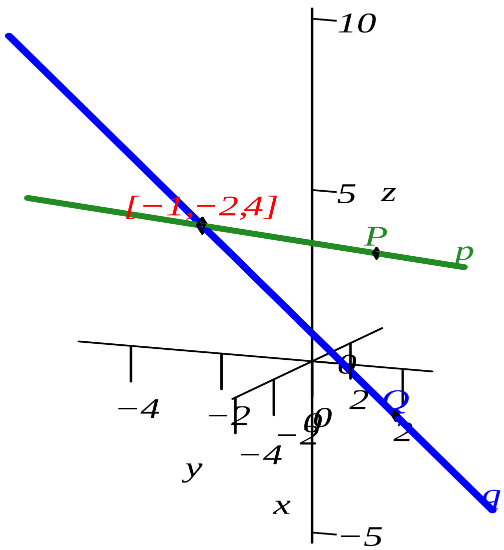
1) Zjistime, zda primky nejsou rovnobezne:

Vektor v neni nasobkem vektoru u. Takze primky nejsou rovnobezne.

2) Zjistime, zda primky maji prusecik:

Primky maji spolecny bod [-1, -2, 4]. Z toho plyne:

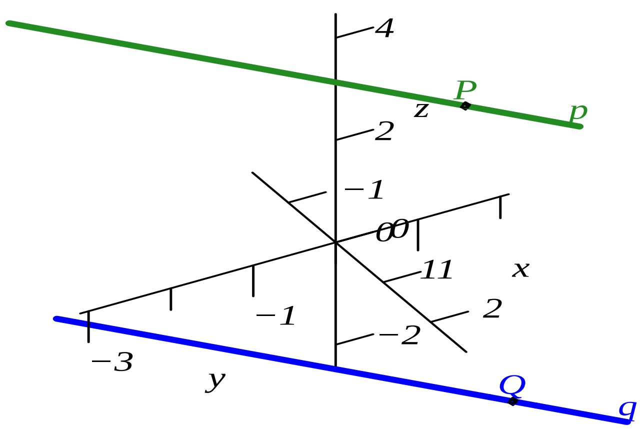
Primky jsou ruznobezne.



b)

```
>   PrimkaPrimka([1,1,3],[2,3,-1],[2,1,-2],[-2/3,-1,1/3],5);
```

Primky jsou rovnobezne ruzne.



c)

```
> PrimkaPrimka([1,1,3],[2,3,-1],[2,1,-2],[2,1,0],4);
```

Zadani ulohy:

Zjistete vzajemnou polohu primek p(P,u) a q(Q,v), kde P[1, 1, 3], u = (2,3,-1), Q[2, 1, -2] a v = (2,1,0).

Postup reseni:

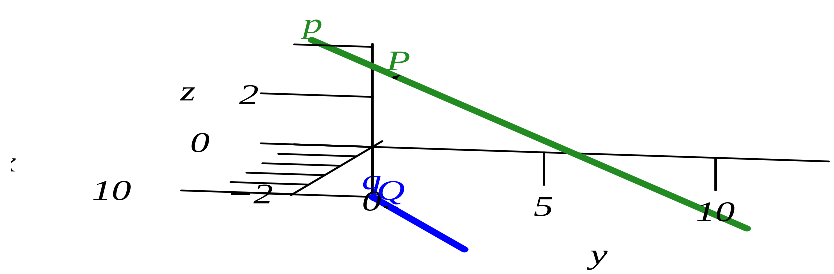
1) Zjistime, zda primky nejsou rovnobezne:

Vektor v neni nasobkem vektoru u. Takze primky nejsou rovnobezne.

2) Zjistime, zda primky maji prusecik:

Primky nemaji spolecny bod. Z toho plyne:

Primky jsou mimobezne.

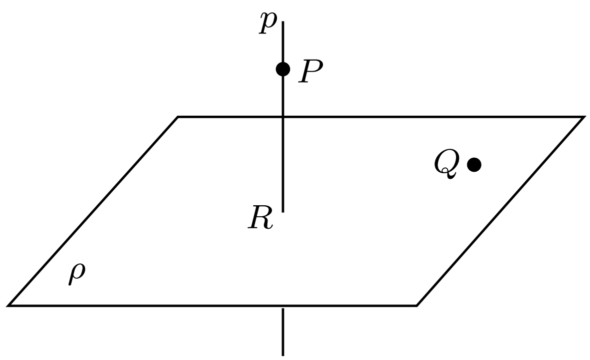


4.5 Metrické úlohy

V této podkapitole budeme určovat vzdálenost bodu od přímky, odchylku dvou přímek, odchylku přímky a roviny, odchylku dvou rovin apod.

Příklad 4.5.1

Bodem $P[1, 3, -2]$ veďte kolmici p k dané rovině ρ: $3x + 5y - z + 1 = 0$.



Obrázek 4.7: Přímka kolmá k rovině

Postupné řešení

Zadání:

```
> P:=[1,3,-2]; rho:=[3,5,-1,1]:rho[1]*x+rho[2]*y+rho[3]*z+rho[4]=0;
```

$$P := [1, 3, -2]$$
$$3\,x + 5\,y - z + 1 = 0$$

Jedná se o přímku určenou bodem P a normálovým vektorem roviny ρ. Máme tedy hned rovnice:

```
> t:='t': X[1]:=P[1]+t*rho[1]: X[2]:=P[2]+t*rho[2]:
X[3]:=P[3]+t*rho[3]: print(`p: x`=X[1]); print(y=X[2]); print(z=X[3]);
```

$$p : x = 1 + 3\,t$$
$$y = 3 + 5\,t$$
$$z = -2 - t$$

Příklad 4.5.2

Bodem $Q[1, 3, 2]$ veďte rovinu ρ, která je kolmá k přímce p:

$$x = 3 - t,$$
$$y = -1 + 2t,$$
$$z = -2 - 5t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Postupné řešení

Zadání:

```
> Q:=[1,3,2]; t:='t':p:= [3,-1,-2] + [-1,2,-5]*t:
print(`p: x`=op([1,1],p)+op([2,1,1],p)*t);
print(y=op([1,2],p)+op([2,1,2],p)*t);
print(z=op([1,3],p)+op([2,1,3],p)*t);
```

$$Q := [1, 3, 2]$$
$$p : x = 3 - t$$
$$y = -1 + 2\,t$$
$$z = -2 - 5\,t$$

Směrový vektor přímky bude normálovým vektorem roviny:

```
> n:=op([2,1],p);
```

$$n := [-1, 2, -5]$$

Rovnice roviny tedy bude tvaru:

```
> d:='d': rho:=n[1]*x + n[2]*y + n[3]*z + d = 0;
```

$$\rho := -x + 2\,y - 5\,z + d = 0$$

Bod Q leží v rovině. Jeho souřadnice tedy musí splňovat rovnici roviny:

```
> d:=solve(subs({x=Q[1],y=Q[2],z=Q[3]},%));
```

$$d := 5$$

Rovnice roviny ρ tedy je:

```
> rho;
```

$$-x + 2\,y - 5\,z + 5 = 0$$

Vzdálenost bodu od přímky

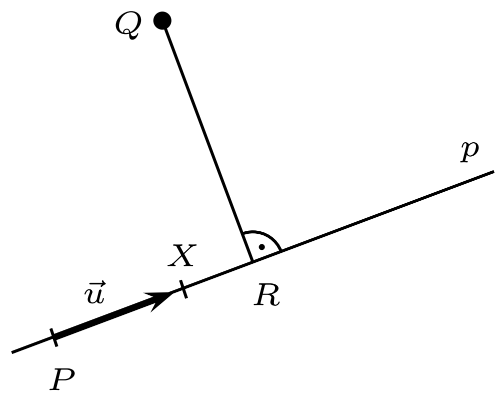
Než přistoupíme k řešení další úlohy, připomeňme si, že vzdálenost bodu od přímky měříme na kolmici. Chceme-li tedy zjistit vzdálenost daného bodu Q od přímky p, hledáme na přímce p bod R, který je patou kolmice vedené bodem Q k přímce p (obr. 4.8).

Jak vyjádříme, že bod X leží na přímce p? Jak vyjádříme, že přímka XQ je kolmá k přímce p?

Odpovědi na tyto otázky obsahuje řešení následujího příkladu.

Příklad 4.5.3

Určete vzdálenost d bodu $Q[7,1,9]$ od přímky $p(P,\vec{u})$; $P[1,3,-1]$, $\vec{u}=(4,1,3)$.



Obrázek 4.8: Vzdálenost bodu od přímky

Postupné řešení

Zadání:

```
> Q:=[7,1,9];P:=[1,3,-1];u:=[4,1,3];
```

$$Q := [7,1,9]$$
$$P := [1,3,-1]$$
$$u := [4,1,3]$$

Určíme parametrické vyjádření bodů X přímky p:

```
> t:='t': X:=[P[1]+t*u[1],P[2]+t*u[2],P[3]+t*u[3]];
```

$$X := [1+4\,t, 3+t, -1+3\,t]$$

Z podmínky, že součin $(X-Q)\cdot\vec{u}=0$, určíme hodnotu parametru t, pro kterou $X=R$:

```
> soucin:=(X[1]-Q[1])*u[1]+(X[2]-Q[2])*u[2]+(X[3]-Q[3])*u[3];
```

$$soucin := -52+26\,t$$

```
> t:=solve(soucin,t);
```

$$t := 2$$

Dosazením získáme souřadnice bodu R:

```
> R:=X;
```

$$R := [9,5,5]$$

Vzdálenost bodu Q od přímky p je rovna vzdálenosti Q od bodu R:

```
> vzdalenost:=sqrt((R[1]-Q[1])^2+(R[2]-Q[2])^2+(R[3]-Q[3])^2);
```

$$vzdalenost := 6$$

Jiný postup pro nalezení bodu R (kolmého průmětu Q na přímku p)

Určujeme vzdálenost bodu Q od přímky $p(P, u)$. Zadání:

```
> Q;P;u;
```

$$[7, 1, 9]$$
$$[1, 3, -1]$$
$$[4, 1, 3]$$

Určíme parametrické vyjádření přímky p:

```
> t:='t': p:=[P[1]+t*u[1],P[2]+t*u[2],P[3]+t*u[3]];
```

$$p := [1 + 4\,t, 3 + t, -1 + 3\,t]$$

Bodem Q vedeme rovinu ρ kolmou k přímce p:

```
> d:='d': rho:=u[1]*x+u[2]*y+u[3]*z+d=0;
```

$$\rho := 4\,x + y + 3\,z + d = 0$$

```
> subs(x=Q[1],y=Q[2],z=Q[3],rho);
```

$$56 + d = 0$$

```
> d:=solve(subs(x=Q[1],y=Q[2],z=Q[3],rho),d);
```

$$d := -56$$

```
> rho;
```

$$4\,x + y + 3\,z - 56 = 0$$

Sestrojíme průsečík R roviny ρ a přímky p:

```
> t:=solve(subs(x=p[1],y=p[2],z=p[3],rho),t);
```

$$t := 2$$

```
> R:=P+t*u;
```

$$R := [9, 5, 5]$$

Dostáváme stejný bod R a vzdálenost Q od p je rovna vzdálenosti bodů Q a R:

```
> vzdal:=sqrt((R[1]-Q[1])^2+(R[2]-Q[2])^2+(R[3]-Q[3])^2);
```

$$vzdal := 6$$

Řešení pomocí procedury

Pro řešení příkladů tohoto typu můžeme použít proceduru `VzdalenostOdPrimky`. Použijme `vystup` $= 4$ pro postup řešení i s obrázkem:

```
> VzdalenostOdPrimky(Q,P,u,4);
```

Zadani ulohy:

Urcete vzdalenost d bodu Q[7, 1, 9] od primky p(P,u); P[1, 3, -1], u = (4, 1, 3).

Postup reseni:

*1) Nejdrive urcime parametricke vyjadreni primky p: X = P + t*u:*

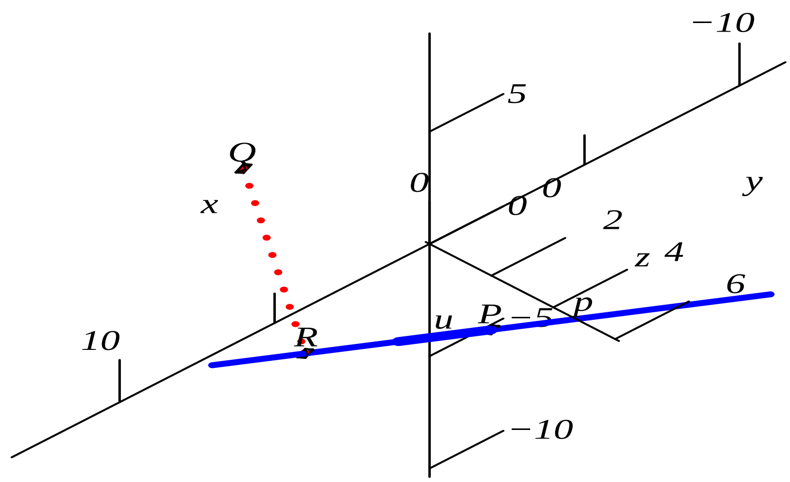
$$X = [1, 3, -1] + t[4, 1, 3]$$

2) Z podminky kolmosti (X-Q).u=0 urcime hodnotu t tak, ze X=R:

$$t = 2$$

3) Urcime vzdalenost $d = |RQ|$:

Vzdalenost d bodu Q od primky p(P,u) je 6



Pokud chceme jen výsledek, zvolíme jako čtvrtý parametr 1.

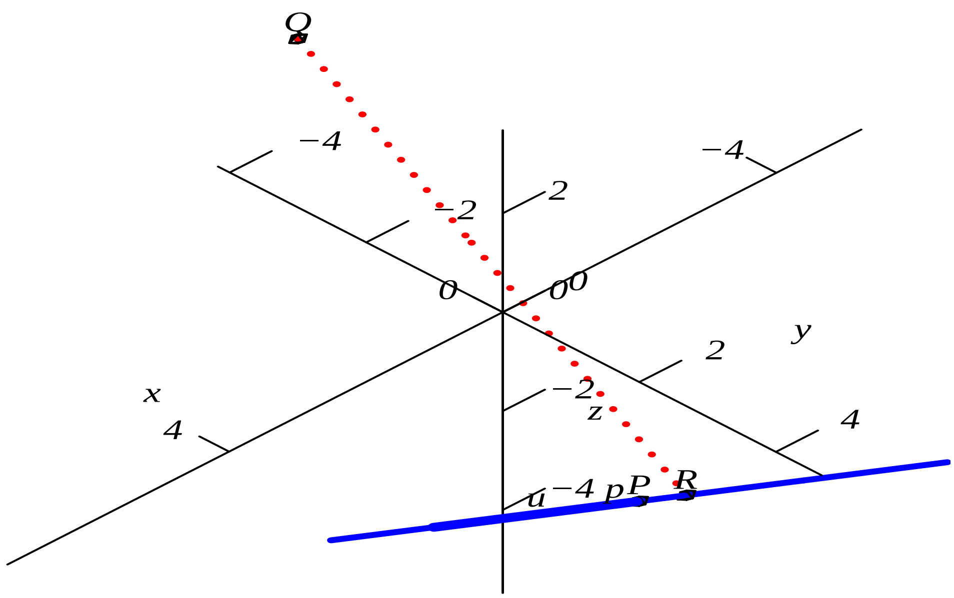
```
>  VzdalenostOdPrimky([7,1,9],[1,3,-1],[4,1,3],1);
```

$$6$$

Pro vyřešení pouze do obrázku zvolíme `vystup`=5

```
> VzdalenostOdPrimky([-1,-4,2],[1,3,-1],[4,1,3],5);
```

*Vzdalenost bodu Q od primky p(P,u) je 2/13*2561^(1/2)*



Vzdálenost bodu od roviny

Vyřešme nejprve obecnou úlohu (bez konkrétního numerického zadání) - určit vzdálenost v daného bodu P od dané roviny ρ.

Postup řešení se skládá ze tří úloh, které umíme řešit:

1. Bodem P vedeme přímku p kolmou k rovině ρ (obr. 4.7 na straně 45).
2. Určíme průsečík R přímky p a roviny ρ.
3. Určíme vzdálenost $v = |PR|$.

Předpokládejme, že ρ: $ax + by + cz + d = 0$ a bod je dán souřadnicemi - $P[p_1, p_2, p_3]$:

```
> a:='a':b:='b':c:='c':d:='d':rho:=[a,b,c,d]:
rho[1]*x+rho[2]*y+rho[3]*z+rho[4]=0;p:='p':P:=[p[1],p[2],p[3]];
```

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$P := [p_1, p_2, p_3]$$

Vektor (a, b, c) bude směrovým vektorem kolmice p, která je tedy tvaru:

```
> t:='t': X[1]:=P[1]+rho[1]*t: X[2]:=P[2]+rho[2]*t: X[3]:=P[3]+
+rho[3]*t: print(`p: x`=X[1]); print(y=X[2]); print(z=X[3]);
```

$$\begin{aligned} p: x &= p_1 + ta \\ y &= p_2 + tb \\ z &= p_3 + tc \end{aligned}$$

Průsečík určíme dosazením bodu přímky p do rovnice roviny ρ:

```
> rho[1]*X[1]+rho[2]*X[2]+rho[3]*X[3]+rho[4]=0;
```

$$a\,(p_1 + ta) + b\,(p_2 + tb) + c\,(p_3 + tc) + d = 0$$

```
> t:=solve(%,t);
```

$$t := -\frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Bod R je bodem přímky p. Proto $R = P + t\vec{u}$. Po úpravě dostáváme $R - P = t \cdot \vec{u}$. Hledaná vzdálenost je vzdáleností bodů R a P. Takže dostáváme $v = |P\rho| = |R-P| = |t\vec{u}| = |t|.|\vec{u}|$. Velikost vektoru (a, b, c) je $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ a dostáváme:

```
> v:= abs(t)*sqrt(rho[1]^2+rho[2]^2+rho[3]^2);
```

$$v := \left|\frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2}\right| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Což můžeme psát ve tvaru:

```
> v:=RealDomain[simplify](v);
```

$$v := \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Výsledek zformulujeme jako větu:

Věta. Vzdálenost bodu $P[p_1, p_2, p_3]$ od roviny ρ: $ax + by + cz + d = 0$ je vyjádřena vzorcem

$$v = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Příklad 4.5.4

Určete vzdálenost d bodu $P[3, -2, -1]$ od roviny ρ: $2x - 6y + 3z - 1 = 0$.

Postupné řešení

Zadání:

```
> P:=[3,-2,-1]; rho:=[2,-6,3,-1]:
rho[1]*x+rho[2]*y+rho[3]*z+rho[4]=0;
```

$$P := [3, -2, -1]$$

$$2\,x - 6\,y + 3\,z - 1 = 0$$

Vzdálenost vypočítáme dosazením do vzorce, který jsme právě odvodili:

```
> d=v;
```

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

```
> d=abs(rho[1]*P[1]+rho[2]*P[2]+rho[3]*P[3]+rho[4])/sqrt(rho[1]^2+
+rho[2]^2+rho[3]^2);
```

$$d = 2$$

Dostáváme výsledek:
Vzdálenost bodu P od roviny ρ je 2.

Řešení pomocí procedury

Pro řešení příkladů tohoto typu můžeme použít proceduru `VzdalenostOdRoviny`:

```
> VzdalenostOdRoviny(P,rho,4);
```

Zadani ulohy:

*Urcete vzdalenost d bodu P[3, -2, -1] od roviny rho: 2*x-6*y+3*z-1 = 0.*

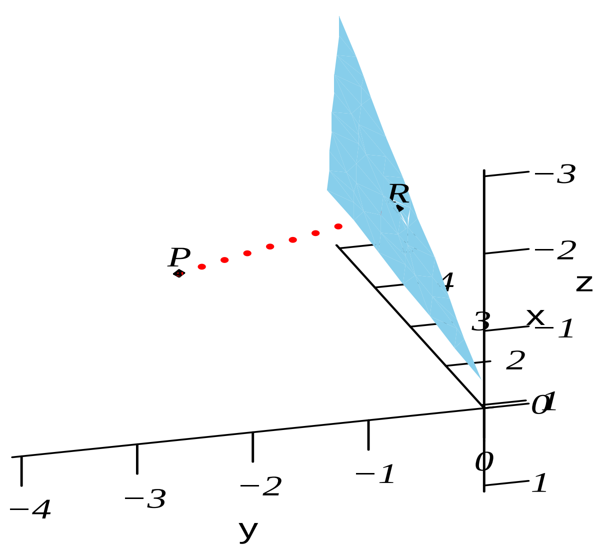
Postup reseni:

1) Pouze dosadime do vzorce:

$$v = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Vzdalenost bodu od roviny je

2



```
> VzdalenostOdRoviny([2,-1,2],[4,-2,6,-1],4);
```

Zadani ulohy:

*Urcete vzdalenost d bodu P[2, -1, 2] od roviny rho: 4*x-2*y+6*z-1 = 0.*

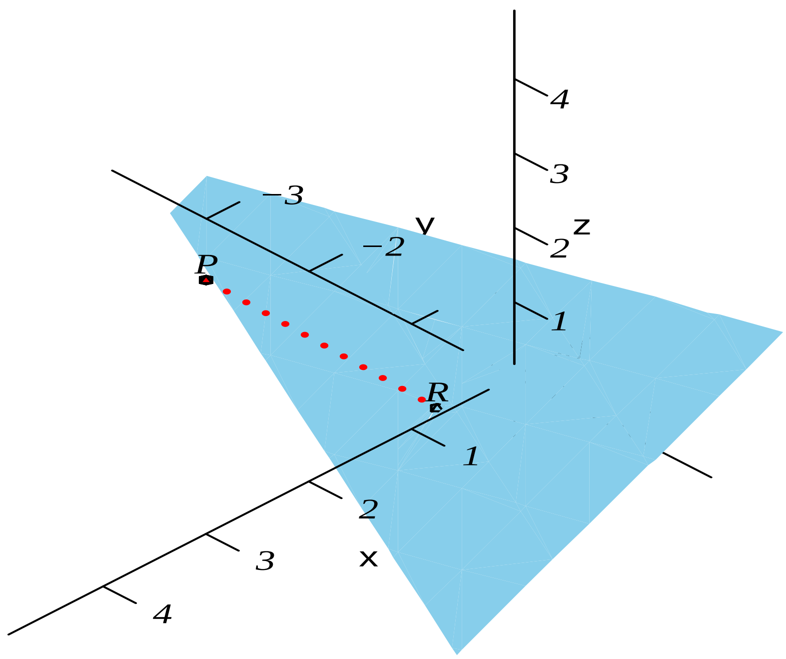
Postup reseni:

1) Pouze dosadime do vzorce:

$$v = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Vzdalenost bodu od roviny je

$$\frac{3}{4}\sqrt{14}$$



Odchylka dvou přímek

Vzpomeňme si, jak je definována odchylka dvou přímek p, q v prostoru. Na přímce p zvolíme libovolný bod a vedeme jím přímku q' rovnoběžnou s přímkou q. Odchylka přímek p, q je rovna odchylce přímek p, q' (tyto přímky již leží v rovině). Protože rovnoběžné přímky mají stejné směrové vektory, platí:

Věta. Odchylka přímek $p(P, \vec{u})$ a $q(Q, \vec{v})$ je číslo $\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, pro které platí

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}.$$

Příklad 4.5.5

Určete odchylku φ přímek $p(A, \vec{u})$ a $q(B, \vec{v})$, je-li dáno: $A[1,0,3]$, $\vec{u} = (1,1,-2)$, $B[3,1,-1]$, $\vec{v} = [-1,0,1]$.

Postupné řešení

Zadání:

```
> A:=[1,0,3];u:=[1,1,-2];B:=[3,1,-1]; v:=[-1,0,1];phi:='phi':
```

$$A := [1,0,3]$$
$$u := [1,1,-2]$$
$$B := [3,1,-1]$$
$$v := [-1,0,1]$$

Dosadíme do vzorce:

```
> cos(phi):= abs(u[1]*v[1]+u[2]*v[2]+u[3]*v[3])/sqrt((sqrt(u[1]^2+
+u[2]^2+u[3]^2)*sqrt(v[1]^2+v[2]^2+v[3]^2))^2);
```

$$\cos(\varphi) := \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Odtud již dostáváme odchylku:

```
> phi:=arccos(cos(phi));
```

$$\varphi := \frac{1}{6}\pi$$

Odchylka ve stupních je tedy:

```
> phi[stupne]:=phi*360/2/Pi;
```

$$\varphi_{stupne} := 30$$

Řešení pomocí procedury

Protože při určování odchylky přímek nehraje roli jejich umístění v prostoru, ale pouze jejich směr, můžeme pro hledání odchylky dvou přímek použít proceduru `OdchylkaVektoru`. Do procedury potom zadáváme jen směrové vektory zadaných přímek:

```
> OdchylkaVektoru(u,v);
```

Zadani ulohy:

Urcete odchylku vektoru u a v, u = (1,1,-2), v = (-1,0,1).

Postup reseni:

1) Pouze dosadime do vzorce:

$$\cos(\varphi) = \frac{|u * v|}{|u|\ |v\ |}$$

2) Z toho dostavame:

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

*Odchylka vektoru (v radianech) je 1/6*Pi.*

Odchylka vektoru je 30 stupnu.

```
> OdchylkaVektoru([1,1,3],[-1,0,1],1);
```

$$\arccos\left(\frac{1}{11}\sqrt{22}\right)$$

Zadáme-li dva kolmé vektory, dostaneme o jejich kolmosti na závěr poznámku:

```
> OdchylkaVektoru([0,1,0],[-1,0,1]);
```

Zadani ulohy:

Urcete odchylku vektoru u a v, u = (0,1,0), v = (-1,0,1).

Postup reseni:

1) Pouze dosadime do vzorce:

$$\cos(\varphi) = \frac{|u * v|}{|u\ |\ |v\ |}$$

2) Z toho dostavame:

$$\cos(\varphi) = 0$$

*Odchylka vektoru (v radianech) je 1/2*Pi.*

Odchylka vektoru je 90 stupnu.

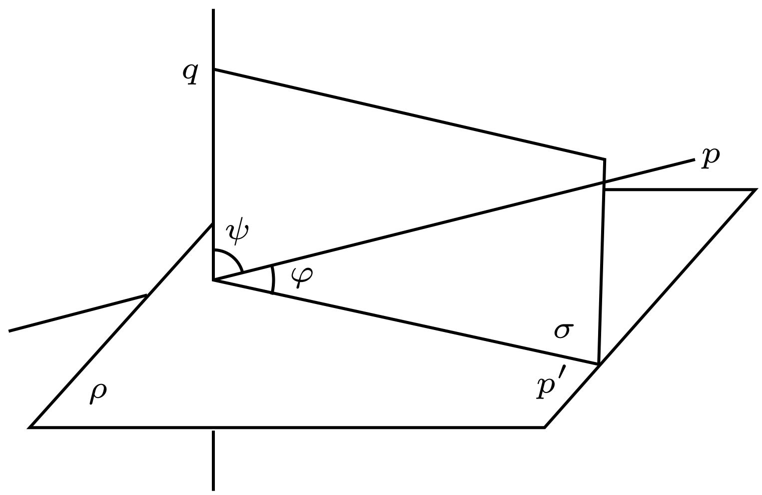
Poznamka: vektory jsou kolme.

Odchylka přímky a roviny

Je-li přímka p k rovině ρ kolmá, je odchylka přímky p a roviny ρ rovna $\frac{\pi}{2}$.

Není-li přímka p kolmá k rovině ρ, vedeme jí rovinu σ kolmou k rovině ρ (obr. 4.9).

Rovina σ protne rovinu ρ v přímce p'. Odchylka φ přímky p a roviny ρ je pak odchylka přímek p, p'. Vidíme, že je pro nás výhodnější sestrojit přímku q kolmou k rovině ρ (na obr. 4.9 je vedena průsečíkem roviny ρ a přímky p). Označíme-li ψ odchylku přímek p, q, je potom $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$.



Obrázek 4.9: Odchylka přímky a roviny

Příklad 4.5.6

Vypočítejte odchylku φ přímky AB a roviny ρ, je-li: $A[1,0,7]$, $B[3,-3,6]$, $\rho\colon 2x-3y+$ $+z+4=0$.

Postupné řešení

Zadání:

```
> A:=[1,0,7];B:=[3,-3,6];rho:=[2,-3,1,4]: sort(rho[1]*'x'+rho[2]*
*'y'+rho[3]*'z'+rho[4]=0,[x,y,z]);psi:='psi': phi:='phi':
```

$$A := [1,0,7]$$

$$B := [3,-3,6]$$

$$2\,x-3\,y+z+4=0$$

Směrový vektor přímky AB je vektor $B-A$:

```
> u:=B-A;
```

$$u := [2,-3,-1]$$

Určíme normálový vektor roviny ρ:

```
> v:=[rho[1],rho[2],rho[3]];
```

$$v := [2, -3, 1]$$

Vypočítáme velikost úhlu φ dosazením do vzorce:

```
> cos(psi):= abs(u[1]*v[1]+u[2]*v[2]+u[3]*v[3])/sqrt((sqrt(u[1]^2+
+u[2]^2+u[3]^2)*sqrt(v[1]^2+v[2]^2+v[3]^2))^2);
```

$$\cos(\psi) := \frac{6}{7}$$

Po úpravě:

```
> psi:=arccos(cos(psi));
```

$$\psi := \arccos\left(\frac{6}{7}\right)$$

To je přibližně:

```
> psi:=evalf(psi,5);
```

$$\psi := 0.54111$$

Hledaná odchylka je $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$:

```
> phi:=Pi/2-psi;
```

$$\varphi := \frac{\pi}{2} - 0.54111$$

Odtud dostáváme přibližnou velikost φ:

```
> phi:=evalf(%,5);
```

$$\varphi := 1.0297$$

Tu můžeme převést na stupně:

```
> phi[stupne]:=evalf(phi*360/2/Pi,5);
```

$$\varphi_{stupne} := 58.999$$

Odchylka je tedy příbližně 59 stupňů.

Řešení pomocí procedury

Pro řešení příkladů tohoto typu můžeme použít proceduru `OdchylkaPrimkyRoviny`:

```
> OdchylkaPrimkyRoviny(A,B-A,rho);
```

Zadani ulohy:

*Urcete odchylku primky p urcene bodem P[1, 0, 7] a vektorem u = (2,-3,-1) a roviny rho: 2*x-3*y+z+4 = 0.*

Postup reseni:

1) Urcime normalovy vektor n roviny rho:

$$n = [2, -3, 1]$$

2) Urcime odchylku psi vektoru u a n ze vzorce:

$$\cos(\psi) = \frac{|u * n|}{|u\ |\ |n|}$$

$$\psi = \arccos\left(\frac{6}{7}\right)$$

To je priblizne

0.54111

3) Hledana odchylka phi je doplnkem psi:

$$\varphi = \frac{1}{2}\pi - \psi$$

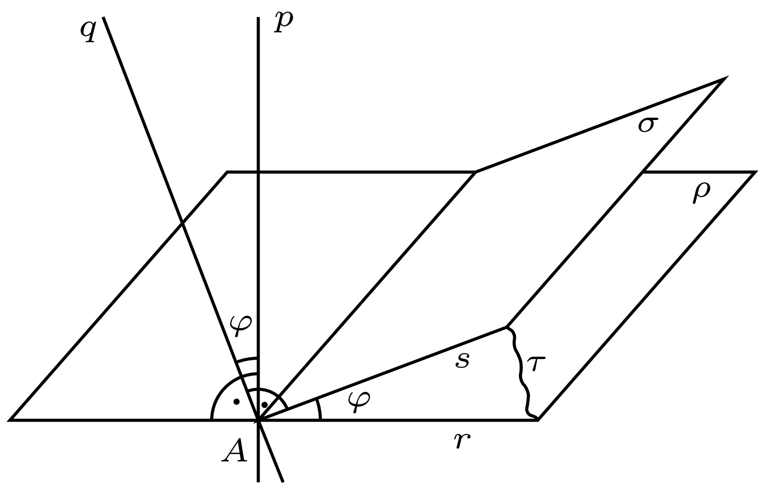
Odchylka primky a roviny je priblizne 1.0297.

Odchylka primky a roviny je priblizne 59.0 stupnu.

Odchylka dvou rovin

Odchylku dvou rovin ρ, σ dostaneme tak, že obě roviny protneme třetí rovinou τ, která je k oběma rovinám kolmá (to znamená, že je kolmá k jejich průsečnici). Rovina τ protne rovinu ρ, resp. σ v přímce r, resp. s (obr. 4.10). Odchylka φ rovin ρ a σ je odchylka přímek r a s.

Průsečíkem A rovin ρ, τ a σ veďme kolmici p, resp. q k rovině ρ, resp. σ. Všechny přímky p, q, r, s leží v rovině τ. Přímky p, q mají stejnou odchylku φ jako přímky r, s. Odchylku φ rovin ρ a σ tedy snadno určíme pomocí normálových vektorů těchto rovin.



Obrázek 4.10: Odchylka dvou rovin

Příklad 4.5.7

Určete odchylku rovin $\rho\colon -x+2y+z+5=0$ a $\sigma\colon x+y+2z+7=0$.

Postupné řešení

Zadání:

```
> rho:=[-1,2,1,5]: sort(rho[1]*'x'+rho[2]*'y'+rho[3]*'z'+rho[4]=0,
[x,y,z]); sigma:=[1,1,2,7]: sort(sigma[1]*'x'+sigma[2]*'y'+sigma[3]*
*'z'+sigma[4]=0,[x,y,z]); phi:='phi':
```

$$-x+2\,y+z+5=0$$
$$x+y+2\,z+7=0$$

Normálové vektory rovin jsou:

```
> a:=[rho[1],rho[2],rho[3]]; b:=[sigma[1],sigma[2],sigma[3]];
```

$$a := [-1,2,1]$$
$$b := [1,1,2]$$

Podle vzorce pro odchylku platí:

```
> cos(phi):=abs(a[1]*b[1]+a[2]*b[2]+a[3]*b[3])/sqrt(a[1]^2+a[2]^2+
+a[3]^2)/sqrt(b[1]^2+b[2]^2+b[3]^2);
```

$$\cos(\varphi) := \frac{1}{2}$$

Po úpravě dostáváme odchylku v radiánech:

```
> phi:=arccos(cos(phi));
```

$$\varphi := \frac{1}{3}\,\pi$$

Můžeme převést na stupně:

```
> phi[stupne]:=phi/2/Pi*360;
```

$$\varphi_{stupne} := 60$$

Řešení pomocí procedury

Pro řešení příkladů tohoto typu můžeme použít proceduru `OdchylkaRovin`:

```
> OdchylkaRovin(rho,sigma);
```

Zadani ulohy:

*Urcete odchylku rovin rho: -x+2*y+z+5 = 0*
*a sigma: x+y+2*z+7 = 0.*

Postup reseni:

1) Odchylka rovin je rovna odchylce normalovych vektoru. Ty jsou:

$$[-1,2,1],\ [1,1,2]$$

2) Odchylku normalovych vektoru vypocitame ze vzorce:

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}$$

*Odchylka rovin (v radianech) je 1/3*Pi.*

Odchylka rovin je 60 stupnu.

Zkusme vypočítat odchylku dvou rovnoběžných rovin:

```
> OdchylkaRovin(rho,rho+[0,0,0,2]);
```

Zadani ulohy:

*Urcete odchylku rovin rho: -x+2*y+z+5 = 0*
*a sigma: -x+2*y+z+7 = 0.*

Postup reseni:

1) Odchylka rovin je rovna odchylce normalovych vektoru. Ty jsou:

$$[-1, 2, 1],\ [-1, 2, 1]$$

2) Odchylku normalovych vektoru vypocitame ze vzorce:

$$\cos(\varphi) = 1$$

Odchylka rovin (v radianech) je 0.

Odchylka rovin je 0 stupnu.

Poznamka: Roviny jsou rovnobezne ruzne.

Jiné zadání s výstupem pouze jako hodnota:

```
> OdchylkaRovin([0,0,1,4],rho,1);
```

$$\arccos\left(\frac{1}{6}\sqrt{6}\right)$$

Alternativní procedura

Protože vlastně hledáme odchylku normálových vektorů, můžeme použít přímo normálové vektory rovin do procedury `OdchylkaVektoru` (na rozdíl od předchozí procedury ale není možné na výstupu získat případnou poznámku o speciální vzájemné poloze rovin):

```
> OdchylkaVektoru(a,b,2);
```

Odchylka vektoru je 60 stupnu.

Kapitola 5

Generování zadání

Pro potřeby zadání písemných prací a také rozšíření sbírek příkladů je někdy potřeba vytvářet nová zadání úloh nebo alespoň obměnit souřadnice v zadání. Tyto souřadnice bychom mohli náhodně vybrat. Libovolně zvolená čísla ale u většiny příkladů nevedou k vytvoření příkladu, který by měl výsledek v přijatelném tvaru a tím by byl pro výuku použitelný. Z didaktického i praktického hlediska by totiž měli studenti na střední škole příklad bez komplikací nesouvisejících s analytickou geometrií vyřešit, zejména pokud mají příklad řešit bez použití kalkulačky nebo počítače. Jde také o mezivýsledky, které by neměly vycházet jako složité výrazy, ale spíše jednodušší, např. zlomek s omezeným jmenovatelem, odmocnina z celého čísla apod.

Proto jsem vytvořil v programu Maple proceduru `GenerujVzdalenostOdPrimky`, která vytváří obměněná zadání k příkladu 4.5.3 na straně 47 - „Určete vzdálenost d bodu $Q[7,1,9]$ od přímky $p(P,\vec{u})$; $P[1,3,-1]$, $\vec{u}=(4,1,3)$“.

Procedura má dva povinné parametry. První určuje rozsah absolutních hodnot souřadnic útvarů ve vytvořeném zadání úlohy. Druhý parametr omezuje jmenovatele parametru t při výpočtu. Třetím (nepovinným) parametrem lze určit soubor, do kterého se budou zadání ukládat (jinak ZadaniVzdalenostOdPrimky.txt). Výstupem procedury jsou texty zadání uložené (s řešeními) do souboru a poslední zadání v proměnné `ZadaniVzdalenostOdPrimky` tvaru `(Q, P, u, vzdal)`, kde `vzdal` je výsledek úlohy.

Nově generované příklady jsou připsány na konec souboru a lze si tedy udělat pěknou „sbírku“ různých zadání stejné úlohy. Protože se nově vytvořená zadání mohou hodit zejména pro vytvoření písemné práce, ponechal jsem možnost vygenerovat při jednom volání procedury zadání lišící se pouze jednou souřadnicí, a to souřadnicí p_3. Tato „podobná“ zadání pak mohou být při písemné práci zrádná pro opisující studenty. Zadání totiž mohou vzbudit klamné zdání, že se jedná o tentýž příklad. A pokud student opíše řešení u souseda, nejenže bude mít špatný výsledek, ale usvědčí ho to také z opisování (pokud tedy vyloučíme možnost omylu při čtení zadání).

Pokud k vytvoření téměř shodných zadání dojde, je na to uživatel upozorněn jak na výstupu v Maple, tak také v souboru se zadáními. Pokud by chtěl uživatel vytváření „podobných“ zadání zamezit, stačí odstranit `#` v místě, které je označeno v zápisníku balikandy.mw a nechat balík andy nově vytvořit. Pro účely následného použití jsou zadání zapisována tak, aby na lichých řádcích bylo zadání a na sudých výsledek. Pokud se vyskytnou „podobná“ zadání, tak lichý řádek za nimi začíná jejich počtem a následující řádek je prázdný. To umožňuje automatické načítání jednotlivých zadání např. při vytváření již zmiňovaného zadání písemné práce.

A nyní již k vlastnímu volání procedury. Chceme-li souřadnice v rozsahu $\langle -4, 4\rangle$ a aby parametr t vycházel jako celočíselný násobek $\frac{1}{2}$, zvolíme první parametr 4 a druhý 2:

```
> GenerujVzdalenostOdPrimky(4,2);
```

Urcete vzdalenost d bodu Q[-3, -1, -3] od primky p(P, u); P[2, 4, 4], u = (1, 1, -3).

Reseni, $2\sqrt{22}$

Zapsano do souboru ZadaniVzdalenostOdPrimky.txt

Pro další výpočty přímo v zápisníku máme k dispozici poslední zadání v proměnné `ZadaniVzdalenostOdPrimky`:

```
> ZadaniVzdalenostOdPrimky;
```

$$[-3, -1, -3],\ [2, 4, 4],\ [1, 1, -3],\ 2\sqrt{22}$$

Zda vytvořené zadání splňuje danou podmínku na to, aby parametr t při výpočtu vycházel jako celočíselný násobek jedné poloviny, můžeme lehce ověřit procedurou `VzdalenostOdPrimky`. Stačí ji volat tak, aby Maple vypsal i postup řešení:

```
> VzdalenostOdPrimky(ZadaniVzdalenostOdPrimky[1..3]);
```

Zadani ulohy:

Urcete vzdalenost d bodu Q[-3, -1, -3] od primky p(P,u);
P[2, 4, 4], u = (1, 1, -3).

Postup reseni:

*1) Nejdrive urcime parametricke vyjadreni primky p: X = P + t*u:*

$$X = [2, 4, 4] + t[1, 1, -3]$$

2) Z podminky kolmosti (X-Q).u=0 urcime hodnotu t tak, ze X=R:

$$t = 1$$

3) Urcime vzdalenost d = |RQ|:

*Vzdalenost d bodu Q od primky p(P,u) je 2*22^(1/2)*

Vidíme, že t je 1 a tedy splňuje naše požadavky.
Následující volání procedury je ukázkou vytvoření „podobných“ zadání:

```
> GenerujVzdalenostOdPrimky(4,2);
```

Urcete vzdalenost d bodu Q[-1, 3, -2] od primky p(P, u); P[4, -3, -2], u = (0, -3, -3).

Reseni, $\sqrt{43}$

Urcete vzdalenost d bodu Q[-1, 3, -2] od primky p(P, u); P[4, -3, 1], u = (0, -3, -3).

Reseni, $1/2\sqrt{262}$

Urcete vzdalenost d bodu Q[-1, 3, -2] od primky p(P, u); P[4, -3, 4], u = (0, -3, -3).

Reseni, $\sqrt{97}$

*********** Zadani 3 predchozich prikladu se lisi pouze v souradnici p3. ***********

Zapsano do souboru ZadaniVzdalenostOdPrimky.txt

Textový soubor ZadaniVzdalenostOdPrimky.txt, kam se zadání uložila, pak vypadá třeba takto (pro ilustraci celého souboru jsou zde vypsány také úlohy vygenerované předtím a potom):

$\vdots$

```
Urcete vzdalenost d bodu Q[-1, 1, 0] od primky p(P, u); P[-4, 3, ...
Reseni: 1/2*42^(1/2)
Urcete vzdalenost d bodu Q[-1, 3, -2] od primky p(P, u); P[4, -3, ...
Reseni: 43^(1/2)
Urcete vzdalenost d bodu Q[-1, 3, -2] od primky p(P, u); P[4, -3, ...
Reseni: 1/2*262^(1/2)
Urcete vzdalenost d bodu Q[-1, 3, -2] od primky p(P, u); P[4, -3, ...
Reseni: 97^(1/2)
3*** Zadani 3 predchozich prikladu se lisi pouze v souradnici p3. ***

Urcete vzdalenost d bodu Q[-4, 1, 2] od primky p(P, u); P[2, -2, ...
Reseni: 3/2*2^(1/2)
```

$\vdots$

Důležitý je prázdný řádek. Ten nám udržuje pozici zadání na lichých řádcích a řešení na sudých. Zároveň lze použít pro vyhledání „podobných“ zadání při zpětném načítání jednotlivých řádků. Při načítání pak stačí hledat podle prvního znaku a přesně víme, co řádek obsahuje, příp. co obsahují řádky předcházející. Tak si můžeme podle přání ze souboru vytáhnout automatizovaně třeba tři podobná zadání nebo zase zadání teoreticky nepodobná (nevytvořená při jednom volání procedury).

Závěr

V předchozích kapitolách jsem popsal, jak lze se zápisníkem Analyticka_geometrie.mw pracovat. Doufám, že to pro čtenáře bude motivací k jeho otevření a vyzkoušení jednotlivých procedur.

Nyní bych ještě chtěl naznačit, jak by se na tuto práci dalo navázat. V kapitole 5 popisuji proceduru na generování obměněných zadání jednoho příkladu. Dvě takové procedury vytvořila ve své diplomové práci [3] Jana Kotačková. Otevírá se zde prostor pro vytvoření celé sady těchto procedur a automatizovanému vytváření zadání celých písemných prací.

Pokud bychom chtěli již nyní obměnit zádání jiného příkladu, pro jehož řešení je zde uvedena procedura, máme také určitou možnost. A to kombinaci ručního a automatizovaného postupu. Můžeme totiž proceduru na řešení volat s náhodně zvolenými souřadnicemi. A pokud se nám bude líbit výsledek, resp. mezivýsledky, zadání si uložíme nebo opíšeme.

Na některých školách se již při výuce matematiky počítač využívá. Proto by mohla být tato práce pomůckou nebo inspirací pro využití progamu Maple při výuce nebo procvičování látky z analytické geometrie.

Možnosti pro využití programu Maple při výuce jsou obrovské a jeho pořízení do školy může být velmi přínosné. Lze ho totiž využít nejen pro výuku analytické geometrie, ale také v diferenciálním a integrálním počtu, ve výuce posloupností a řad, algebry a v dalších částech matematiky.

Seznam použité literatury

[1] Charvát, J., Zhouf, J., Boček, L. *Matematika pro gymnázia - Rovnice a nerovnice.* 4. vyd. Praha, 2008. ISBN 978-80-7196-362-2.

[2] Kočandrle, M., Boček, L. *Matematika pro gymnázia - Analytická geometrie*. 3. vyd. Praha, 2008. ISBN 978-80-7196-163-5.

[3] Kotačková, J. *Analytická geometrie na střední škole s programem Maple*, diplomová práce. Brno, 2003.

[4] Lomtatidze, L., Plch, R. *Sázíme v LaTeXu diplomovou práci z matematiky.* 1. vyd. Brno, 2003. ISBN 80-2103228-6.

[5] Přikrylová, J. *Využití systému Maple při výuce analytické geometrie*, diplomová práce. Brno, 1997.

[6] Westermann, T., et al. *Mathematische Begriffe visualisiert mit Maple V.* Berlin, 1999. ISBN 3-540-66509-9.