Současný stav systémů počítačové algebry

Pojmy

Dříve než se začneme zabývat současným stavem systémů počítačové algebry, uveďme si význam dvou základních pojmů, a sice počítačová algebra a systémy počítačové algebry.

Počítačová algebra (Computer algebra)
Počítačová algebra je část počítačové vědy, která navrhuje, analyzuje a implementuje algebraické algoritmy. Na počítačovou algebru se můžeme také dívat jako na speciální druh vědeckých výpočtů (a sice algebraických), který zahrnuje široké spektrum základních cílů, metod a aplikací. Jako protipól algebraických výpočtů stojí výpočty numerické, které se využívají především při aproximativním počítání. Počítačová algebra se tedy opírá převážně o přesné symbolické výpočty. To však samozřejmě neznamená, že je zbavena počítání s čísly. Desítkové a jiné reprezentace čísel se objevují v každém symbolickém počítání. Čísla ale nejsou jedinými objekty, s nimiž počítačová algebra pracuje. Spolu s nimi se zabývá také polynomy, racionálními a trigonometrickými funkcemi, algebraickými čísly atd. Samozřejmě někdy v počítačové algebře též využíváme numerických algoritmů, takže při řešení problémů bývá vhodné symbolické a numerické výpočty rozumně kombinovat.
Obecně můžeme počítačovou algebru charakterizovat následovně:

1. počítačová algebra se týká počítání s algebraickými strukturami. Algebraickými strukturami jsou myšleny základní číselné obory, jejich algebraické rozšíření, okruhy polynomů, prostory funkcí, diferenciální prostory, abstraktní prostředí teorie grup apod. Velmi často je časově ekonomičtější počítat jednoduché výrazy algebraicky než je vyhodnocovat numericky.

2. výhodou algoritmů počítačové algebry jsou přesnost a nenáchylnost k aproximativním chybám. Takže typicky, když např. řešíme systém algebraických rovnic jako

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2y^2 + 3x^2y + y^4 - y^3 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0, \end{aligned}$$

   zajímá nás spíše řešení v přesné reprezentaci $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2})$, než aproximativní $(0{,}86602\ldots, -0{,}5)$.

3. vstupy algoritmů počítačové algebry jsou výrazy nebo formule a jako výsledek také očekáváme výrazy a formule. K tomu jsou tyto algoritmy přizpůsobeny a my z jejich výstupů v podobě algebraických výrazů můžeme odvodit, jak změna parametrů ovlivní výsledek. Příkladem typického výsledku algebraického algoritmu je např.

$$\int \frac{x}{x^2 - a}\, dx = \frac{\ln|x^2 - a|}{2} \text{ namísto } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{x^2 - 1}\, dx = 0{,}1438\ldots.$$

   V důsledku toho můžeme sestavit algebraické algoritmy např. pro rozklad polynomů na kořenové činitele, rozhodování o ekvivalenci algebraických výrazů, řešitelnost integračních problémů pro specifické třídy výrazů, řešitelnost diferenciálních rovnic a soustav algebraických rovnic, platnost geometrických tvrzení, parametrizaci algebraických křivek apod.

Systémy počítačové algebry (Computer algebra systems - CAS)
Systém počítačové algebry je matematický nástroj, který pomáhá vykonávat symbolické výpočty elementární algebry, trigonometrie a kalkulu, vyhodnocování, rozklad, kombinování, expandování a zjednodušování algebraických výrazů. Prostřednictvím CAS můžeme také integrovat, derivovat, provádět operace s vektory a maticemi, směrodatné odchylky a spoustu dalších komplexnějších operací, týkajících se lineární algebry, kalkulu, diferenciálních rovnic, statistiky aj. CAS také dovolují tvořit grafy např. polynomických, trigonometrických exponenciálních aj. funkcí.

Historie

Povězme si nyní něco o historii systémů počítavé algebry. První CAS vznikly asi před čtyřiceti lety. Začali je vyvíjet především fyzikové, kteří je potřebovali pro svou práci. Často totiž pro řešení svých problémů potřebovali provádět složité algebraické výpočty, na něž už zkrátka nestačila tužka a papír. Zpočátku byly CAS využívány výhradně ve vysoce odborných oblastech jako inženýrství, vědecký výzkum apod. Uvažovalo se také o využití CAS pro výuku matematiky na středních a vysokých školách. To se však dlouho nepodařilo prosadit, protože matematici a pedagogové se obávali, že studenti používající CAS by se nenaučili, jak se dělá opravdová matematika s použitím tužky a papíru. Situace se vyhrotila až v osmdesátých letech, kdy začali počítačoví vědci a někteří matematici volat o nahrazení kalkulu diskrétní matematikou jako základu vysokoškolského matematického vzdělání. Byl to důsledek prudkého rozvoje počítačů, který se ani do dnešní doby nezastavil, spíše naopak stále roste. Sama podstata počítačů nutila počítačové vědce, aby uvažovali spíše diskrétně než kontinuálně. Od druhé poloviny osmdesátých let se v Americe konalo několik konferencí, na nichž se diskutovalo, zda nahradit či nenahradit kalkul diskrétní matematikou ve vysokoškolském matematickém vzdělávání. Tyto konference byly jednou z příčin tzv. reformy kalkulu. Další příčinou byla počítačová revoluce. Z ní vyplývající masové rozšiřování mikropočítačů umožnilo také rozšíření CAS, které do té doby běžely pouze na srediskových počítačích a nebyly tudíž přístupné komukoli. Výsledek reformy kalkulu byl nakonec takový, že kalkul si udržel své ústřední postavení ve vysokoškolském matematickém vzdělání, ale využívá CAS jako prostředků, které mají pomoci zkvalitnit výuku především v těchto čtyřech směrech:

1. zlepšit porozumění studentů daným pojmům
2. naučit aproximaci a analýzu chyb
3. zlepšit cvičení a testování
4. překonat omezení daná slabými algebraickými dovednostmi studentů.

Zejména je kladen důraz na 1. a 4. bod.

V době vzniku prvních CAS ještě zdaleka nebyl dostačující hardware, což brzdilo jak rozvoj CAS, tak i jejich rozšiřování. Zpočátku byl tedy rozvoj CAS silně závislý na rozvoji hardwaru, což už v dnešní době takřka neplatí a CAS se směle rozvíjejí a pronikají do stále rostoucího okruhu lidských činností.

Co se týče využití CAS ve vzdělávání, jsou např. v Americe CAS využívány ve výuce nejen na vysokých, ale i na středních školách. U nás je situace zatím o něco pozadu. Na vysokých školách, poskytujících matematické nebo technické vzdělání se CAS využívají, avšak na středních školách jsou zatím využívány jen velmi sporadicky. Vše ale nasvědčuje tomu, že CAS v dohledné době proniknou i na školy střední.

Současný stav

Nyní se tedy pokusme shrnout současný stav a trendy vývoje systémů počítačové algebry. Asi jeden z nejdůležitějích současných trendů je integrace CAS do vzdělávání, především v matematických a technických oborech. Již jsme se o ní zmínili výše, nyní se tedy podívejme na příčiny, proč ještě u nás nejsou CAS využívány na středních školách. Situaci zřejmě brzdí dva hlavní důvody. Prvním je nedostatečné počítačové vybavení škol. Tento problém se však v dnešní době dotýká především základních škol, na úrovni škol středních je již prakticky odstraněn. Druhým důvodem je neochota pedagogů měnit své osvědčené a zavedené metody, nebo zejména u starších kantorů stále ještě přetrvávající strach z počítačů.

Druhým směrem vývoje je rozšiřování CAS do nových oborů lidské činnosti. Z těch netradičních jmenujme např. mozkovou chirurgii, biologii apod. Zlepšování CAS však umožňuje nové možnosti jejich využití i v oborech, kde jsou s úspěchem využívány již delší dobu.

Třetím trendem je rozvoj CAS sám o sobě, tedy vývoj nových verzí jednotlivých systémů. Tento vývoj je zaměřen většinou na rozšiřování funkčnosti, aby zvládly řešení stále komplexnějších a složitějších problémů než jejich předchozí verze, a také na zlepšování uživatelského rozhraní.

Dalším směrem vývoje je slučování CAS s jinými systémy, které by umožnilo řešit mnohem komplexnější problémy, než pro které jsou navrženy samotné CAS. Příkladem tohoto směru může být slučování CAS s tzv. systémy automatizované teorie důkazů.

Nyní si uvedeme přehled několika CAS. Úplný seznam CAS lze najít např. na internetové adrese:
`http://www.can.nl/Systems and Packages/Per Purpose/General/index.html`

Axiom – moderní objektové koncepty, komerční, velmi mocný, v současnosti asi nejúplnější;

bernina – interaktivní program s rozhraním ke knihovně počítačové algebry;

Computer Algebra Kit – kolekce malých programů pro počítačovou algebru;

CASA – CAS pro konstrukci algebraické geometrie v Maplu;

CoCoA – speciální polynomicky orientovaný systém;

Derive – jednoduchý, nízké hardwarové nároky, použitelný i pro kapesní počítače, ovládaný pomocí menu;

DrMath – nový shareware systém pro symbolickou matematiku;

FELIX – počítání s algebraickými strukturami a podstrukturami;

FORM – symbolické manipulace pro složité matematické problémy;

GAMS – komerční, vysoce kvalitní modelovací systém pro matematické programování problémů;

GAP – výpočty diskrétní algebry založené na teorii grup;

GiNaC – otevřený systém pro symbolické počítání uvnitř C++;

GRTensorII – balík počítačové algebry pro diferenciální geometrii;

HartMath – CAS napsaný v jazyce Java;

Kalamaris – nový matematický balík podobný systému Mathematica;

Interpreter for symbolic manipulation – jednoduchý CAS v jazycích C++ nebo Java;

JACAL – symbolické zjednodušování a manipulace s rovnicemi;

lundin.SymbolicMath – Java knihovna tříd pro symbolické derivování a vyhodnocování;

Macaulay 2 – algebraická geometrie a komutativní algebra;

Macsyma – komerční, silný, všeobecně zaměřený matematický nástroj, klasický, rozšířený hlavně v USA;

MAGMA – systém pro algebru, teorii čísel, geometrii a kombinatoriku;

MAS – experimentální CAS;

Mathematica – komerční, numerické výpočty, symbolická algebra, funkce, programování, vynikající grafika a uživatelské rozhraní, dnes asi nejpoužívanější CAS, především díky agresivní obchodní politice a designu vyhovujícímu inženýrským potřebám;

Mathomatic – program s umělou inteligencí algebraické manipulace;

MAXIMA – CAS pro symbolické a numerické výpočty;

Mock-Mma – jednoduchý systém napodobující Mathematicu, napsaný v Common Lispu;

MuPAD – symbolické a numerické výpočty, paralelní programování, vizualizace;

Punimax – komerční CAS pro symbolické a numerické výpočty;

Reduce – komerční, obecné algebraické výpočty, klasický systém, dodáván se zdrojovými texty;

Redten – balík symbolické algebry pro tensorové objekty;

Ricci – symbolické tensorové výpočty pro diferenciální geometrii;

Risa/Asir – experimentální CAS s programovacími knihovnami;

SACLIB – knihovna v jazyce C pro počítačovou algebru;

SAML – jednoduchá algebraická knihovna;

SimLab – CLISPový kód pro základy počítačové algebry a vyměřování 2D oblastí;

Singular – CAS pro výpočty informací o singularitách;

SISYPHOS – výpočty v modulární grupové algebře p-adických grup;

Software from Symbolic Computation Group – symbolické výpočty ve fyzice;

text deriv – balík navržený k provádění jednoduchých symbolických derivací;

Yacas – malý a vysoce flexibilní jazyk počítačové algebry;

Existuje také několik specializovaných systémů pro vysoce odborné oblasti, např.:

TRIGMAN – nebeská mechanika;

SCHOONSCHIP – kvantová fyzika;

CAMAL – nebeská mechanika, obecná teorie relativity;

SHEEP – velice rychlý, obecná teorie relativity.

V přehledu jsem záměrně vynechal systém Maple. Jelikož se celá diplomová práce opírá o práci s tímto systémem, bude nanejvýš vhodné povědět si o něm trošku podrobněji.

Maple

Maple je CAS od firmy Waterloo Maple Software (WMS). Byl vyvinut v osmdesátých letech členy skupiny nazvané *Symbolic Computation Group (SGP)* z Univerzity ve Waterloo. Současný výzkum a rozvoj je rozdělen mezi SGP, WMS a několik výzkumných organizací, např. *Centre for Experimental and Constructive Mathematics* v Burnaby v Kanadě, *Institute für Wissenschaftliches Rechnen, ETH-Zentrum* v Curychu ve Švýcarsku. Domovská stránka Maplu se nachází na adrese:
`http://www.daisy.uwaterloo.ca`,
domovskou stránku výrobců Maplu, WMS naleznete na adrese:
`http://www.maplesoft.com`.

Maple je obecně zaměřený CAS, navržený pro řešení matematických problémů a produkující vysoce kvalitní odbornou grafiku. Je to poměrně snadno naučitelný, ale přitom dostatečně silný matematický nástroj. Skládá se ze tří elementárních komponent, a sice z jádra, uživatelského rozhraní a Maplovské knihovny. Jádro a uživatelské rozhraní jsou napsány v jazyce C, jsou však od sebe důsledně odděleny.

Maple je jedním z prvních moderních CAS, který v sobě obsahuje kromě rozsáhlých algebraických manipulací i implementace numerických metod, knihovny speciálních funkcí a vynikající grafiku. Z uživatelského hlediska je jedním z nejpřátelštějších systémů, ačkoli pro efektivní používání Maplovského příkazového řádku člověk pochopitelně potřebuje určitý trénink. Maple také obsahuje rozsáhlou kontextovou a hypertextovou nápovědu. Ke každému příkazu či knihovně je uvedena nejen syntaxe a podrobné vysvětlení, ale i řada ilustračních příkladů.

Základním prvkem Maplu jsou tzv. zápisníky, pomocí nichž má uživatel možnost kombinovat text, vstupy, výstupy i grafiku. Z těchto důvodů je Maple vhodný jak pro zpracování úkolů, tak pro tvorbu protokolů. Může být užíván v dávkovém nebo interaktivním módu.

Nyní si ve stručnosti shrňme základní vlastnosti systému Maple, které jsou vlastní většině CAS:

- Maple umí pracovat s téměř libovolně velkými celými čísly. Řádově lze používat čísla s deseti tisíci ciframi.
- Jednoduchým způsobem lze definovat výrazy jako funkční závislosti, seznamy, množiny atd.
- Různými způsoby lze interaktivně zobrazovat bodová data, křivky, plochy (zadané přímo či implicitně), sdružovat několik grafik, animovat apod.
- Maple ovládá veškeré standardní procedury diferenciálního a integrálního počtu, umí řešit systémy lineárních, algebraických i diferenciálních rovnic, vše analyticky i numericky, v rozsahu převyšujícím základní výuku pro studenty odborné matematiky.
- Jsou implementovány numerické metody, které lze automaticky (a se zvolenou přesností) aplikovat, kdykoliv analytické procedury nevedou k cíli.
- Maple obsahuje velice bohatý programovací jazyk se syntaxí blízkou Pascalu. Lze v něm velice snadno definovat funkce, procedury i celé programové systémy. Tyto jsou pak plně přenositelné mezi všemi implementacemi systému Maple. V Maplovském programovacím jazyce je také napsána třetí základní část systému – Maplovská knihovna. V nejnovější verzi Malpe 6 tato knihovna obsahuje přes 3 000 funkcí.

Dalšími výhodami Maplu jsou jeho robustnost, poměrně nízké hardwarové nároky a dostupnost pro prakticky všechny běžné platformy (Win, Macintosh, Popular UNIX, Linuxové platformy,...). V současnosti je počet uživatelů systému Maple odhadován na 1 milion. Používají ho všechny významnější univerzity, výzkumné instituce a nespočet dalších organizací.

Nyní se podíváme na strukturu Maplovské knihovny v nové verzi Maple 6. Témata označená !) jsou novými, nebo rozšířenými oproti předchozím verzím systému.

Symboly

- Kalkul !)
- Lineární algebra !)
- Řešení rovnic !)
- Elementární a speciální funkce !)

- Obyčejné a parciální diferenciální rovnice !)
- Kombinatorika
- Komplexní čísla !)
- Diferenciální úpravy
- Finanční analýza
- Logika
- Geometrie !)
- Teorie grafů
- Teorie grup
- Galoisova teorie grup !)
- Teorie čísel !)
- Lineární optimalizace
- Lieova symetrizace
- Mocninné řady
- Statistika

Čísla
- Výpočty lineární algebry (generování, manipulace a počítání s vektory a maticemi; vektorové a maticové datové struktury) !)
- Strukturované prohledávání dat !)
- Utility pro import a export dat !)
- Datové struktury pro komplexní čísla !)
- Pohyblivá desetinná čárka !)

Grafika
- Grafy rozmanitých funkcí
- Různé souřadnicové systémy
- Implicitní grafy
- 2D a 3D geometrie !)
- Legendy, víceřádkový titulek a pojmenování svislé osy grafu !)
- Rotace 3D grafů v reálném čase !)
- 2D a 3D animace
- Export do : BMP !), CHAR, CPS, DFX !), GIF, HPGL, JPEG, PCX, PS, POV !), TEK, WMF !), X11

Programování
- 4GL programovací jazyk
- Moduly !)
- Generování C a Fortran kódu
- Procedurální programování
- Přístupnost prohlížení strojového kódu
- Rozšiřitelný systém !)
- Obsluha vyjímek !)
- Obsluha přetížení !)

- Ladění a analýza !)

Uživatelské rozhraní
- Tabulkový procesor !)
- Úplná schopnost word-processingu !)
- Hyperlinkový manažer !)
- Kontextová menu a palety !)
- Editor výrazů
- Ukrývání vstupů, výstupů, grafiky, tabulkového procesoru !)
- Export do : HTML, LaTeX, RTF !)
- Import dat : ASCII, maticové značky !), MatLab !)

Propojení
- MS Excel 2 000 !)
- MatLab
- Volání externích C knihoven