Masarykova Univerzita
Přírodovědecká fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Ondřej Chudoba

Databáze testových otázek v IS MU: Integrální počet funkcí více proměnných

Vedoucí práce: RNDr. Roman Plch, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Učitelství matematiky a fyziky pro střední školy

2010

Masarykova univerzita

Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Ondřej Chudoba**

Studijní program – obor: **Fyzika – Učitelství matematiky pro střední školy**

Ředitel Ústavu matematiky a statistiky PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje diplomovou práci s tématem:

Databáze testových otázek v IS MU: Integrální počet funkcí více proměnných

Test questions in IS MU: Integral calculus of functions of several variables

Oficiální zadání: Vytvořte v IS MU sadu testových otázek pro podporu výuky Integrálního počtu funkcí více proměnných. K tvorbě ilustrační 3D grafiky využijte programy Maple a JavaView.

Literatura:
Kuben, Jaromír – Hošková, Šárka – Račková, Pavlína. Integrální počet funkcí více proměnných. 1. vydání, Brno: UO, 2005. 146 s. ISBN 80-7231-031-3.

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Roman Plch, Ph.D.
Datum zadání diplomové práce: prosinec 2008
Datum odevzdání diplomové práce: dle harmonogramu ak. roku 2009/2010

V Brně dne 1. 12. 2008

prof. RNDr. Jiří Rosický, DrSc.
ředitel Ústavu matematiky a statistiky

Děkuji RNDr. Romanu Plchovi, Ph.D. za vedení diplomové práce – za cenné rady a konstruktivní připomínky. Děkuji technikům Informačního systému za vstřícnou pomoc s tvorbou testů.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím uvedených zdrojů.
Souhlasím s uložením této práce v knihovně Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity, s jejím veřejným půjčováním a využitím pro vědecké, vzdělávací nebo jiné veřejně prospěšné účely, a to za předpokladu, že převzaté informace budou řádně citovány a nebudou využívány komerčně.

V Brně dne 9. května 2010

Ondřej Chudoba

Název práce: Databáze testových otázek v IS MU: Integrální počet funkcí více proměnných

Autor: Ondřej Chudoba

Ústav matematiky a statistiky Přírodovědecké fakulty MU

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Roman Plch, Ph.D.

Abstrakt: Tato práce se zabývá tvorbou sady otázek v IS MU na téma Integrální počet funkcí více proměnných. V první části práce je vyložena autorova motivace k výběru tématu a popsán postup tvorby sady testových otázek v IS MU a také jsou okomentovány vytvořené sady otázek. Ve druhé části práce je vyložena matematická teorie. Vytvořené testy jsou přiloženy na CD jako příloha.

Klíčová slova: Integrální počet, tvorba sady otázek, typy otázek

Title: Test questions in IS MU: Integral calculus of functions of several variables

Author: Ondřej Chudoba

Department of Mathematics and Statistics, Fakulty of Science, MU

Supervisor: RNDr. Roman Plch, Ph.D.

Abstract: This thesis is concerned with creating the question set in IS MU on subject Integral calculus of functions of several variables. In the first part of this thesis is given a description of author's motivation to choice this theme and creating the test questions in IS MU and are commented the created question sets. In the second part of this thesis is unloaded the mathematical theory. The created question sets are enclosed on CD.

Keywords: Integral calculus, creating the question set, question types

Obsah

Úvod

Cílem práce bylo vytvořit databázi testových otázek pro podporu výuky Integrálního počtu funkcí více proměnných v Informačním systému Masarykovy univerzity (dále jen IS).

Práce je rozdělena na dvě části. V první je vyložena motivace k výběru tématu diplomové práce, stručně popsán postup tvorby testů v IS MU a nakonec jsou okomentovány vytvořené sady testů. Druhá část diplomové práce se zabývá výkladem teorie integrálů ve vícerozměrných prostorech. Obě části jsou rozděleny do tří kapitol. Přílohou je kompaktní disk, na kterém jsou uloženy vytvořené sady otázek.

Text nemá za cíl být vyřerpávajícím návodem k tvorbě testů a skripty k dané partii matematiky. Spíše uvádí zájemce (zejména vyučujícího či jeho pomocníka) do problematiky tvorby sady otázek, přičemž k hlubšímu vhledu je čtenář odkázán na konkrétní zdroje, resp. druhá část práce může sloužit studentům jako shrnutí potřebné látky.

Tato práce byla vysázena systémem LaTeX 2_ε. Grafika byla vytvořena systémem METAPOST pomocí balíku `mfpic`.

Část I

Tvorba testů

Kapitola 1

Co předcházelo tvorbě testů

Považuji za důležité sdělit, proč jsem si pro svou diplomovou práci vybral toto téma a jak jsem se rozhodl jej zpracovat. To jest obsahem této kapitoly.

1.1 Motivace k výběru tématu

Pro budoucí učitelskou praxi je nemálo důležité zaobírat se problémem, jak prověřovat nabyté znalosti studentů. Jsou dvě hlavní formy – písemná a ústní. Jako pedagog začátečník nepreferuji jednu před druhou, obě formy mají své pro i proti, a obě formy vyžadují precizní realizaci. Spíše než o exaktní výklad celé problematiky, jedná se zde o formulaci subjektivních postojů k věci. O tématu existuje celá řada stručných i rozsáhlých textů, např. [8], [12].

Už téměř od základní školy zná každý žák resp. student rozdělení na písemku a test (slangově řečeno). A téměř každý žák má vyhraněný postoj k oboum formám, zpravidla jednu upřednostňuje mnohem více než druhou. Bez ohledu na to, setká se během svého (nejen) studijního života s oběma typy. Jednoznačně se (jakožto student) řadím ke skupině, která upřednostňuje písemku – tedy několik málo otevřeně formulovaných otázek. Např. „řešte rovnici $x^2 + 2x + 1 = 0$“, nebo „graficky zdůvodněte, že rovnice $x^2 - x + 1 = 0$ nemá reálné kořeny“, naproti testové formulaci otázky: „kořenem rovnice $x^2 + 2x + 1 = 0$ je číslo a)0 b)-1 c)$+1$ d)2“. Totiž drtivá většina testů, které jsem skládal mě odstrašila – kvůli tomu, jak byly vytvořeny. Ať šlo o testy v dílčích předmětech na základní a střední škole, či např. testy v rámci závěrečné zkoušky v autoškole. A právě tyto (dle mého názoru) nekvalitně vytvořené testy, se kterými jsem se setkal, mi byly motivací k výběru tématu diplomové práce. To je možná zdánlivý paradox, ale neodsuzuji test jako formu zjišťování znalostí, jen opovrhuji nekvalitně vytvořenými testy. A právě proto jsem se rozhodl vzít si jako cíl diplomové práce vytvoření databáze testů, které by z mého pohledu splňovaly všechny atributy kvalitního testu. Motivací k výběru tématu byl i pozitivní vztahu k programu Maple. Nakolik se mi povedlo vyložený cíl splnit, nechť posoudí čtenář po přečtení této diplomové práce.

1.2 Příprava před tvorbou testů

Databáze testových otázek měla být vytvořena na téma integrální počet funkcí více proměnných. Tato partie matematiky je nyní na ÚMS PřF MU vyučována (v případě učitelského studia matematiky) v rámci předmětu Matematická analýza 4, který je volitelný a obsahem navazuje na (povinný) čtyřsemestrální kurz matematické analýzy. Cíl předmětu Matematická analýza 4 (semestr Podzim 2009) tak, jak je uveden v [7] je zde pro úplnost doslovně opsán:

> Hlavním cílem kurzu je porozumění základním pojmům, výsledkům a osvojení nejjednodušších výpočetních a aplikačních postupů „pokročilých“ oblastí matematické analýzy, zastoupených integrály ve vícerozměrných prostorech, Fourierovými řadami a diferenčními rovnicemi. Po absolvování kurzu bude student schopen: definovat a interpretovat základní pojmy užívané ve výše uvedených oblastech; formulovat příslušné matematické věty a tvrzení a vysvětlit metody jejich důkazů; ovládat efektivní techniky výpočtů používané v těchto oblastech; aplikovat získané poznatky při řešení konkrétních příkladů.

Tyto informace z IS MU byly hlavním východiskem při tvorbě diplomové práce. Bylo tedy nutné zopakovat si a ucelit vědomosti získané v rámci pěti semestrů výuky matematické analýzy. Teorie integrálů ve vícerozměrných prostorech potřebná ke složení vytvořených testů je uvedena v části II.

Další neméně důležitou částí přípravy bylo důkladně promyslet a formulovat atributy, které musí mnou vytvořené testy splňovat, abych je mohl považovat za dobré. Jinými slovy: musel jsem si vybavit všechny více i méně zásadní chyby, kterých se dle mého tvůrci testů se kterými jsem se setkal dopustili, a těchto se snažit vyvarovat. Považuji za důležité zde tyto atributy explicitně zmínit. Jsou seřazeny sestupně podle významnosti.

1. Aby člověk přiměřeně ovládající danou látku úspěšně složil test ověřující znalost této látky.

   Test který dle mého tuto podmínku naprosto nesplňoval, byl závěrečný test v autoškole.

2. Testy musejí mít vysokou míru validity, nebo-li musí testovat to, co deklarují že testují.

3. Otázky v testech musejí být jednoznačně a korektně formulované, nesmí obsahovat rozsáhlá a „šroubovaná“ souvětí.

   To neznamená, že by konkrétní otázka nemohla mít relativně dlouhé zadání. Ale musí být vždy dbáno na jazykovou i matematicko-logickou správnost.

4. Testové otázky musejí být formulovány tak, aby student musel použít postup, jehož ovládnutí otázka ověřuje.

   Např. ověřujeme v nějakém testu to, zda student umí řešit kvadratickou rovnici. Otázku formulujeme takto: „kořenem rovnice $x^2+2x+1=0$ je číslo a)0 b)-1 c)$+1$ d)-2“. Tím je učiněn krok vedle, neboť tato otázka jen ověřuje, zda student umí dosadit číslo do výrazu. Mírnou obměnou otázky, např takto: „kořenem rovnice $x^2 + 2x + 1 = 0$ je číslo a)0 b)-1 c)$+1$ d)jiné než $0, -1, +1$“, v tomto případě situaci nezměníme, opět stačí dosadit nabídnutá čísla. Postatná obměna může být např.: „kořenem rovnice $x^2 + 2x + 1 = 0$ je číslo a)0 b)-1 c)$+1$ d)jiné než $0, -$ $-1, +1$, doplněte jaké:........“, případně jen: „kořenem rovnice $x^2 + 2x + 1 = 0$ je číslo $x_1 = \ldots$ a $x_2 = \ldots$, doplňte čísla“. Studentovi potom nezbyde nic jiného, než rovnici vyřešit, a to právě chceme.

5. Otázky budou bodovány tak, že za správnou odpověď se body přičítají a za špatnou odečítají, ponechání otázky bez odpovědi bude hodnoceno nula body.

   Odečítat body za špatné odpovědi je kontroverzní téma tvůrců testů. Dle mého přesvědčení by se body za špatnou odpověď měly odečítat. A to bez ohledu na to, zda je správně jedna z nabídnutých odpovědí nebo více, zkrátka odpoví-li student jinak než správně, odečítají se body. Přičemž za ponechání otázky bez odpovědi je hodnocena nula body – ani se nepřičítá ani neodečítá.

   Důvodem je především eliminace možnosti test otipovat – tato „metoda“ je poměrně účinná v otázkách, kde je správně právě jedna nabídnutá odpověď. Dalším důvodem je širší aspekt: je-li člověk v životě postaven před nějaký problém, pak buď najde jeho řešení, je si jím jistý a stojí si za ním, a nebo řešení nenalezne a pak zůstane problém nevyřešen. Nebo-li: buď jistě vím, pak odpovím, nebo nevím, pak netipuji a neodpovím.

6. Test by celkově neměl být příliš snadný. Zcela bez chyby s plným počtem bodů by jej složilo nejvýše 5 % až 10 % studentů.

   Skládat těžký test je velmi frustrující a svým způsobem demotivující, avšak na rozdíl od základní a střední školy může být dle mého názoru na vysoké škole tento fakt ignorován. Samozřejmě se tomu musí podřídit výsledné hodnocení – výsledné rozškálování známek podle bodů.

Kapitola 2

Tvorba testů v IS MU

V této kapitole je rozebráno a ilustrováno, jak vytvořit sadu otázek a jaké možnosti dává IS MU tvůrci testů.

2.1 Založení sady otázek

Člověk mající účet v IS MU může tvořit sady testových otázek. Avšak pouze uživatel mající v IS status učitele má přístup do složky `testbank`, kam studenti přístup nemají. Projděme ale postup od začátku, jak začít tvořit sady testových otázek.

Testové otázky na dané téma se seskupují do jednotlivých sad testových otázek, zpravidla podle jednotlivých podtémat. Důvodem je přehlednost a dále možnost následně z těchto sad nechat vybírat otázky pro „ostrý“ test.

Sada testových otázek je textový soubor s příponou `.qdef`, ve kterém jsou zadány otázky i odpovědi. Založíme jej vstupem do sekce „Učitel“ → „Odpovědníky“ → „Sady otázek – vytváření, úprava“ a klikneme na „Založit novou sadu otázek“. Vyplníme název a složku, do které se sada uloží (zpravidla složka `testbank`). Má-li daný předmět v IS více učitelů, má do složky `testbank` přístup každý z nich a je tedy třeba postupovat opatrně, abychom omylem needitovali či dokonce nesmazali sadu otázek vytvořenou některým z kolegů.

Sady testových otázek může vytvářet i uživatel bez statusu učitele, postup je následující: přejdeme do sekce „Elportál“, dále zvolíme „Vstup do nepředmětových e-learningových aplikací“ → „Sady otázek – vytváření úprava“ → „Založit novou sadu otázek“. Sadu otázek pojmenujeme a uložíme do vhodné složky. Pokud bude uložena do složky `testbank`, uživatel „neučitel“ už k ní nebude mít přístup, tomuto uživateli je tedy doporučeno založit si např. v sekci „Můj web“ k tomuto účelu složku a uložit novou sadu do ní. U této nové složky si uživatel může nastavit příslušná přístupová práva.

Sada otázek je tímto založená a můžeme se pustit do tvorby jednotlivých otázek. Klikneme na „Plnit sadu testových otázek“ a vstoupíme tím na stránku, kde se vytvářejí jednotlivé otázky. Otázky můžeme vkládat buď formulářem nebo textovým editorem. Vkládat otázky přes formulář je jednoduché a značně intuitivní, nevyžaduje hlubší znalost struktury otázky. Tímto způsobem ale nemůžeme využít všechny možnosti, které IS dává. Vhodnější je vkládat otázky pomocí textového editoru – při tvorbě testů z matematiky je tento způsob v podstatě nezbytný. Průměrně zdatnému uživateli vkládat otázky pomocí textového editoru nebude činit větší problémy.

Pravidla pro zadávání otázek a typy otázek jsou velmi dobře shrnuty a okomentovány v souboru `vzorove_testy.qdef`, který je ke stažení v Nápovědě IS. Vše je také dobře a velmi podrobně vysvětleno v samotné Nápovědě IS. S jakýmkoliv dotazem je možné se obrátit na e-techniky Informačního systému, adresa `isna@fi.muni.cz`.

2.2 Typy otázek

Nyní k samotné tvorbě otázek pomocí textového editoru. Stručně lze základní pravidla shrnout takto:

- Znak „#“ uvozuje řádek, který se celý nezpracovává a studentům nezobrazuje.

  Vhodné např. pro interní poznámky autora testu.

- Definice jedné testové otázky se odděluje od další definice dvěma pomlčkami „--“, přičemž tento řádek již nesmí obsahovat další znaky.

- Testová otázka se skládá ze zadávací části s případnou poznámkou a hodnotící části. Zadávací část začíná se začátkem definice testové otázky:

  ```
  # otázka z~učebnice pro gymnázia, str. 23 nahoře, je dost lehká
  Kdo byl prvním prezidentem České republiky?
   :r1 Václav Klaus
   :r2 Václav Havel
   :r3 Jan Žižka
  ```

  V zadávací části nesmí být dvojtečka, čárka, otazník či pomlčka na začátku řádku. Hodnotící část začíná dvojtečkou (nebo otazníkem, čárkou, pomlčkou) na začátku řádku:

  ```
  :r1 To je druhý prezident ČR.
  :r2 ok Výborně, jen tak dál! :-)
  :r3 Nikoliv, to byl vojevůdce žijící před pěti sty lety. :-(
  ```

- V textu otázky lze sázet matematický text. Provádí se standardně jazykem LaTeX a je třeba jej „obalit“ tagy `<M>` a `</M>`. Např. větu „Jaké má kořeny rovnice $x^2 + 2x + 1 = 0$?“ zadáme takto:

  ```
  Jaké má kořeny rovnice <M>x^2+2x+1=0</M>?
  ```

- Jak jednotlivým variantám přiřadit bodové hodnocení bude vyloženo dále.

IS umožňuje tvůrci sady otázek fomulovat různé typy otázek, rozlišují se tzv. manipulačním prvkem, který se v nich vyskytuje. Lze použít tyto typy otázek:

- `:r` výběr právě jedné z nabídnutých možností

- `:c` výběr jedné nebo více z nabídnutých možností
- `:v` výběr z nabídky
- `:t` doplňení textu (je ověřována příma shoda textu), tedy 1/2 a 2/4 je rozdílná odpověď
- `:n` doplnění čísla
- `:m` přiřazení do dvojice
- `:s` správný slovosled
- `:a` odpověď textem, student vloží souvislý text, který musí být ručně zkontrolován
- `:l` doplnění matematického textu (výraz, číslo), 1/2 je zde totéž co 2/4, shoda je ověřována programem Maple, výraz se zadává jazykem programu Maple – viz dále
- lze vložit i obrázek, video a odkaz na zvukový soubor – viz dále

Při tvorbě matematických textů se prakticky využívají jen některé z možných typů otázek. Ty, které jsem ve vytvořených testech použil, zde ilustruji na konkrétních příkladech, většina příkladů bude použita ze souboru `vzorove_testy.qdef`, abych zde zbytečně nezveřejňoval zadání vytvořených testů.

Otázka typu :r

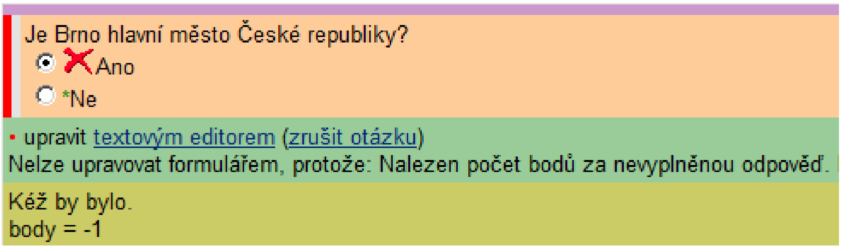
Tento typ otázky je v podstatě nejzákladnější. Vybírá se právě jedna správná odpověď. Zadáme-li otázku takto:

```
Je Brno hlavní město České republiky?
 :r1 Ano
 :r2 Ne
:r1 Kéž by bylo.
:r2 ok 1 Ano to je pravda, ale jistě je to velmi významné město.
- -1
? -1
```

Správná odpověď je „Ne“, za její volbu obdrží student +1 bod, ponecháli otázku bez odpovědi, bude mu udělen −1 bod. Do hodnotící části lze zadat komentář zvolené odpovědi, který se zobrazí po opravení testu, viz obr. 2.1. Při zobrazení této otázky IS náhodně zamíchá nabídnuté odpovědi. Zadáme-li otázku následovně, odpovědi se nezamíchají:

```
Masarykova univerzita se nachází v~Brně.
    :r1 To je pravdivý výrok.   :r2 To je nepravdivý výrok.
:r1 ok 1 Správně!
:r2 0
- 0
```

Správná odpověď je první, za její volbu obdrží student +1 bod, zvolí-li odpověď druhou, která je chybná, obdrží 0 bodů, ponechá-li otázku bez odpovědi, bude mu uděleno taktéž 0 bodů.



Obr. 2.1. Otázka typu :r

Otázka typu :c

Tento manipulační prvek, také hojně využívaný, umožňuje studentovi vybrat jednu nebo více z nabídnutých odpovědí. Příklad použití a obodování:

```
Z˜čeho je složena voda?
    :c1 vodík
    :c2 hliník
    :c3 kyslík
    :c4 železo
:c1:c3 ex ok 2
? -1
- -1
```

Označí-li student právě dvě správné odpovědi (vodík, kyslík), obdrží +2 body, v kterémkoliv jiném případě obdrží −1 bod. Jiný způsob bodování může vypadat např. takto:

```
Z˜čeho je složena voda?
    :c1 vodík
    :c2 hliník
    :c3 kyslík
    :c4 železo
:c1 ok 1
:c2 -1
:c3 ok 1
:c4 -1
```

Za označení kterékoliv ze správných odpovědí dostane student +1 bod (tedy 2 body maximálně). Za vyznačení kterékoliv ze špatných odpovědí obdrží student −1 bod. Body za odpovědi se sčítají.

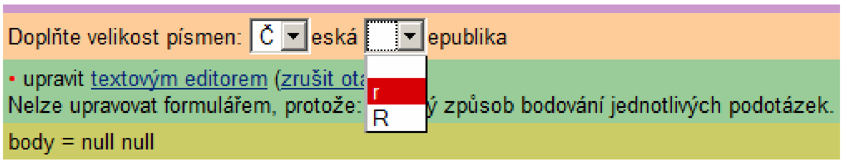
Otázka typu :v

Tento typ otázky umožňuje studentovi doplnit jednu z nabídnutých možností. Příklad použití a obodování:

```
Doplňte velikost písmen:  :v1a eská  :v1b epublika
:v1a="Č" ok 1
```

```
:v2a="č" -1
:v1b="r" ok 1
:v2b="R" -1
```

Jak vypadá takto zadaná otázka v IS je na obr. 2.2. Do hodnotící části je třeba zadat



Obr. 2.2. Otázka typu :v

nabízené možnosti, které mají být v roletě. Obodování je analogické jako u předešlých typů otázek.

Otázka typu :t

Tento typ otázky jsem ve vytvořených testech nepoužil, její použití je snadné, např.:

```
Doplňte odpovídající slovo:
jaro, léto, podzim, :t________
:t=zima ok 1
```

Několika podtržítky se vymezí velikost políčka, kam se vpisuje text. IS ověří přímou shodu textu, čili pokud student vpíše cokoliv jiného než „zima“ bude to hodnoceno jako špatná odpověď.

Otázka typu :n

Tento typ otázky jsem ve vytvořených testech taktéž nepoužil, použití je snadné, např.:

```
Uveďte číslo <M>\pi</M> s~přesností na 3 desetinná místa :n1
:n1=3.141..3.142 ok 1
:n1=3.11..3.16 Správně je 3.1415926...
```

Je ověřováno, zda studentem zapsané číslo leží v zadaném intervalu. Pozor – desetinná čárka se zadává jako tečka.

Otázka typu :l

Otázka tohoto typu je v matematických testech hojně využívána. Student zapíše odpověď (matematický text) a IS pomocí programu Maple ověří jeho matematickou shodu. Odpověď je nutné zadat syntaxí programu Maple. Otázka typu `:l` má obrovskou výhodu, že nezáleží na tom, zda student zapíše 2^2, nebo 4, nebo $\sqrt{16}$, vše je bráno jako ekvivalentní odpověď. Je-li použito tohoto typu otázky, měli by být studenti před otevřením testu důkladně obeznámeni se syntaxí programu Maple. To ale není věc nikterak obtížná a zdržující. Otázka tohoto typu se použije např. takto:

```
Mějme funkci <M>f(x)=x</M>.
Potom <M>\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x</M>=:l1____
Doplňte příslušné číslo.
:l1="1/2" ok 1
? -1
```

Jak vypadá takto zadaná otázka v IS je na obr. 2.3. Student může doplnit jakékoliv číslo,

Obr. 2.3. Otázka typu :l

je-li rovno číslu $\frac{1}{2}$, obdrží +1 bod za správnou odpověď. Tlačítko „Zkontrolovat syntax“ slouží k ověření, zda bylo správně zadáno chtěné číslo či výraz – IS vpravo vedle tohoto tlačítka vysadí zapsané číslo či výraz, případnou chybu ohlásí. Tímto je vysoce omezena možnost dopustit se chyby vlivem špatně zadaného čísla či výrazu.

Vzhledem k tomu, že je odpověď ověřována programem Maple, nic nebrání studentovi zadat do políčka pro odpověď příkaz syntaxí programu Maple, kterým bude daný příklad přímo vypočítán. V příkladu výše to znamená, že student by mohl do políčka pro odpověď napsat příkaz `int(x,x=0..1);`, který po zpracování programem Maple dá výsledek $\frac{1}{2}$, což je správná odpověď a tedy student by dostal (neprávem) body za správnou odpověď. Analogicky by tohoto šlo zneužít při výpočtu dalších typů příkladů. Tvůrce testů může tomuto jednoduše zábránit. Totiž do zadání otázky se specifikuje, které funkce programu Maple se nesmí v odpovědi objevit. Děje se tak pomocí tzv. blacklistu: do hodnotící části se vloží text `b[seznam_funkci]`, kde `seznam_funkci` je seznam názvů zakázaných funkcí. V příkladu výše by bylo použití následující:

```
Mějme funkci <M>f(x)=x</M>.
Potom <M>\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x</M>=:l1____
Doplňte příslušné číslo.
:l1="1/2 b[int]" ok 1
? -1
```

Naopak, chce-li tvůrce testů specifikovat, které funkce lze použít, použije se zcela analogicky tzv. whitelistu. Do hodnotící části otázky se potom vloží text: `w[seznam_funkci]`.

Otázky typu :m, :s, :a

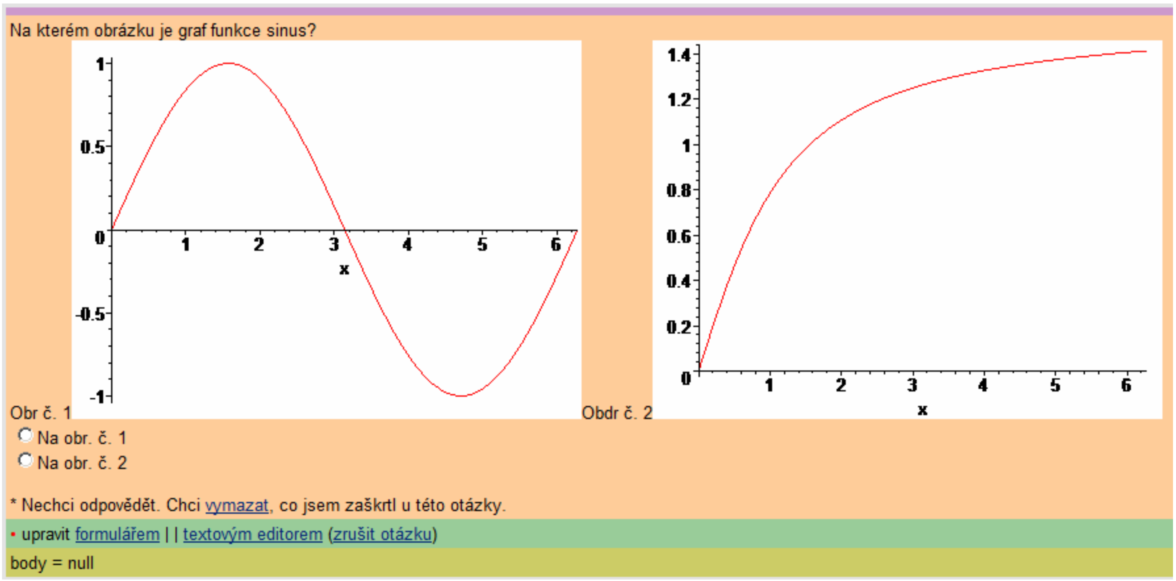
Použití těchto typů otázek v matematických testech je velmi málo pravděpodobné. Nepovažuji za důležité jej zde tedy ilustrovat. Použití je podobně popsáno mj. např. v Nápovědě IS.

Vkládání obrázků

Vložení obrázku je věc velmi užitečná a zpestřující. Použití je snadné: nejprve je vhodné vytvořit si ve složce `testbank` podsložku, kam budeme vkládat soubory s obrázky, např. složku `pictures`. Předpokládejme, že máme obrázek (třeba exportovaný z programu Maple) s názvem `graf.gif`. Vstoupíme do složky `pictures` a nahrajeme do ní soubor `graf.gif`. Nyní již zbývá jen do zadání otázky vložit odkaz na obrázek. Např. chceme, aby student vybral jeden z nabídnutých obrázků:

```
Na kterém obrázku je graf funkce sinus?
Obr č. 1<IMG SRC="https://is.muni.cz/auth/el/1431/
podzim2007/M5521/odp/tb/10431225/sinus1.gif?
fakulta=1431;obdobi=3843;studium=310988;kod=M5521">
Obr č. 2<IMG SRC="https://is.muni.cz/auth/el/1431/
podzim2007/M5521/odp/tb/10431225/sinus2.gif?
fakulta=1431;obdobi=3843;studium=310988;kod=M5521">
 :r1 Na obr. č. 1
 :r2 Na obr. č. 2
:r1 ok
```

Odkaz na obrázek, který se vloží do zadání otázky získáme např. tak, že vstoupíme do složky `pictures` a pravým tlačítkem myši klikneme na název obrázku a vybereme „Kopírovat adresu obrázku“, adresa se tak uloží do schránky a pak už ji jen vložíme do zadání otázky. Samozřejmě je možné vkládat do jedné otázky více obrázků. Takto zadaná otázka potom vypadá jako na obr. 2.4



Obr. 2.4. Příklad použití obrázků

Zcela anologicky se do otázky vkládá zvukový soubor, video, či odkaz na jiný soubor (např. na dokument formátu PDF).

Vkládání dynamických obrázků

Výše bylo vyloženo, jak vložit obrázek, či jiný multimediální soubor. Jednalo o statické obrázky. IS ale také umožňuje vložit obrázek z programu Maple tak, že se zachová jeho „dynamičnost“. Je-li na obrázku např. graf nějaké funkce dvou proměnných, je možné s grafem otáčet, přibližovat jej, měnit jeho barvu a mnoho dalších věcí, které jsou velmi podobné možnostem, které skýtá program Maple. Vše se děje pomocí programu JavaView. JavaView 3D je prohlížeč geometrických útvarů a výpočetní program napsaný v jazyce Java. Pro zobrazení 3D objektů na webových stránkách potřebujeme jednak program JavaView, který si lze volně stáhnout ze stránek autorů `http://www-sfb288.math.tuberlin.de/vgp/javaview/download/` a dále to, aby internetový prohlížeč podporoval prostředí Java.

Vložit dynamický obrázek do otázky není zcela tak snadné jako v případě statického obrázku např. ve formátu `.gif`. Předně je potřeba obrázek z Maplu vhodným způsobem exportovat – tak, aby s ním dokázal pracovat program JavaView. Tento postup je podrobně popsán v [2, str. 2]. Nyní předpokládejme, že jsme nějaký 3D obrázek úspěšně exportovali do kýženého formátu, máme tedy soubor `paraboloid.mpl`. Zkopírujeme jej někam do složky `testbank`. Dále do téže složky příp. do její podsložky je třeba zkopírovat knihovnu `javaview.jar`, což je základní Java archiv obsahující aplikaci JavaView a všechny příslušné Java třídy, nalezneme ji v instalaci programu JavaView. Do zadání otázky potom vložíme následující text:

```
<APPLET CODEBASE="odkaz1"
CODE="javaview.class" ARCHIVE="odkaz2"
WIDTH="250" HEIGHT="250">
<PARAM NAME="model" VALUE="odkaz3">
</APPLET>
```

Kde

- `odkaz1` je odkaz na knihovnu `javaview.jar`
- `odkaz2` je odkaz na složku, ve které se nachází jak knihovna `javaview.jar`, tak soubor `paraboloid.mpl`, tedy pravděpodobně složka `testbank`
- `odkaz3` je odkaz na soubor `paraboloid.mpl`

Postup je podrobně vyložen a mnoho dalších informací lze nalézt v [9, str. 8 a dále].

Vzorová otázka s použitím dynamického 3D obrázku je ve složce `testbank` v sadě otázek s názvem `ukazka3D.qedf`.

2.3 Založení odpovědníku

Máme-li vytvořenou sadu příp. sady otázek zbývá již jen vytvořit z nich samotný test – tzv. odpovědník. V IS klikneme na „Učitel“, v sekci „Odpovědníky“ vybereme „správa odpovědníku“ a klikneme na „Založit nový popis odpovědníku“. IS nás již dále navede a provede nás nastavením různých vlastností odpovědníku.

Kapitola 3

Komentář vytvořených testů

3.1 Základní informace

Téma integrální počet funkcí více proměnných jsem rozdělil do níže uvedených částí. Ke každé části byla vytvořena sada otázek.

- První sada: Teorie, 10 otázek
- Druhá sada: Dvojný integrál řešený pomocí Fub. věty, 15 otázek
- Třetí sada: Dvojný integrál řešený pomocí transformace souřadnic, 16 otázek
- Čtvrtá sada: Trojný integrál řešený pomocí Fub. věty, 19 otázek
- Pátá sada: Trojný integrál řešený pomocí transformace souřadnic, 20 otázek
- Šestá sada: Aplikace dvojného a trojného integrálu, 20 otázek

Celkem tedy bylo vytvořeno 100 otázek (1040 řádků zdrojového kódu). Dále bylo pomocí programu Maple vytvořeno 56 doprovodných obrázků.

Příklady použité v sadách otázek nejsou přímo převzaty z žádné literatury. V některých případech jsem se pouze inspiroval některou literaturou, některé příklady jsou zcela vymyšleny (s pomocí programu Maple). Inspiroval jsem se zejména z [3], [6], [5] a ze zápisků ze cvičení předmětu Matematická analýza 4, který jsem absolvoval v semestru Podzim 2007, vyučujícím byl RNDr. Jiří Glozar. Nicméně žádný příklad by neměl mít zcela identické zadání s příkladem uvedeným v literatuře. Tím byla situace poněkud náročná. Ale považoval bych za bezpředmětné prostě jen opsat zadání příkladů z nějaké knihy či skript.

Jak již bylo řečeno, velkým pomocníkem mi byl program Maple, ve kterém jsem nejen kontroloval vymyšlené příklady, ale i kreslil pro svoji potřebu obrázky a také generoval obrázky použité v sadách otázek – více viz dále. Velmi jednoduché příklady jsem „ručně“ nepočítal, ale ty obtížnější jsem musel nejprve spočítat ručně a pak teprve ověřit výsledek v programu Maple, abych věděl, zda je příklad vůbec „rozumně řešitelný“.

K tématu byl také vytvořen odpovědník, umožňující otestování si vytvořených otázek.

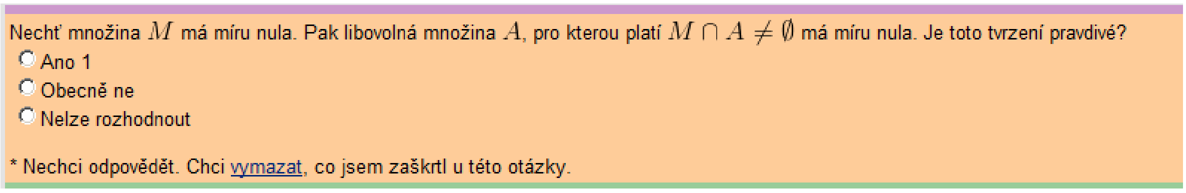
Vytvořené sady otázek (včetně odpovědníku) jsou uloženy ve složce `testbank` předmětu M5521 Matematická analýza 4 s programem MAPLE (podzim 2007). Tyto soubory (včetně použitých obrázků) jsou přiloženy na CD jako příloha diplomové práce.

3.2 Typy vytvořených otázek

V této části budou postupně okomentovány vytvořené otázky. Čtenář nechť posoudí, nakolik jsou v nich splněny podmínky podrobně popsané v podkapitole 1.2 na str. 9.

První sada otázek

Obsahuje otázky ověřující orientaci v teorii integrálního počtu funkcí více proměnných. U žádné z otázek není nutné nic zlouhavě počítat, většina lze vyřešit tzv. z hlavy. Pro ilustraci je jedna otázka z této sady uvedena na obr. 3.1.



Obr. 3.1. Příklad otázky z první sady

Druhá sada otázek

Tato sada obsahuje tři typy otázek:

- Výpočet dvojného integrálu pomocí Fub. věty. Doplňuje se nejen výsledek, ale i integrační meze ve dvojnásobném integrálu. (3 otázky)

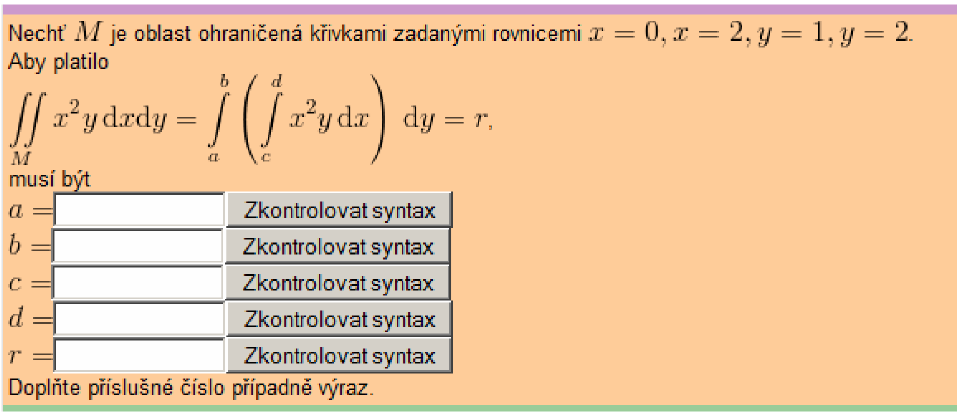
  Tyto příklady považuji za poměrně snadné, ale i tak dle mého dobře ověří orientaci v látce. V těchto příkladech je použita otázka typu `:l`, a to i přesto, že mnohdy je odpovědí jen číslo sestávající z jedné číslice. Bylo by tedy možné použít otázku typu `:t`, to jsem ale neudělal z toho důvodu, že by tak bylo nepřímo nápovězeno, že odpovědí je „nejvýše“ racionální číslo, tedy ne např. $\sqrt{3}$. Navíc, pokud by byla správná odpověď např. $1/2$ a student by zadal $2/4$, při použití otázky typu `:t` by tato odpověď byla hodnocena jako chybná.

  Příklad otázky tohoto typu je na obr. 3.2.

- Určení, pro kterou integrační oblast dá uvedený integrál daný výsledek. (7 otázek)

  Nabídnuté integrační oblasti jsou zadány obrázkem, student se tedy musí nejprve zorientovat v obrázku a vyčíst si v něm potřebné integrační meze. Rovinné oblasti jsou více či méně složité, přičemž otázka je formulována tak, že nestačí zkusit dvě nabídnuté oblasti, pokud to nejyjde, tak automaticky zaškrtnout, že výsledkem je třetí oblast, ale musí integrál spočítat i pro oblast třetí.

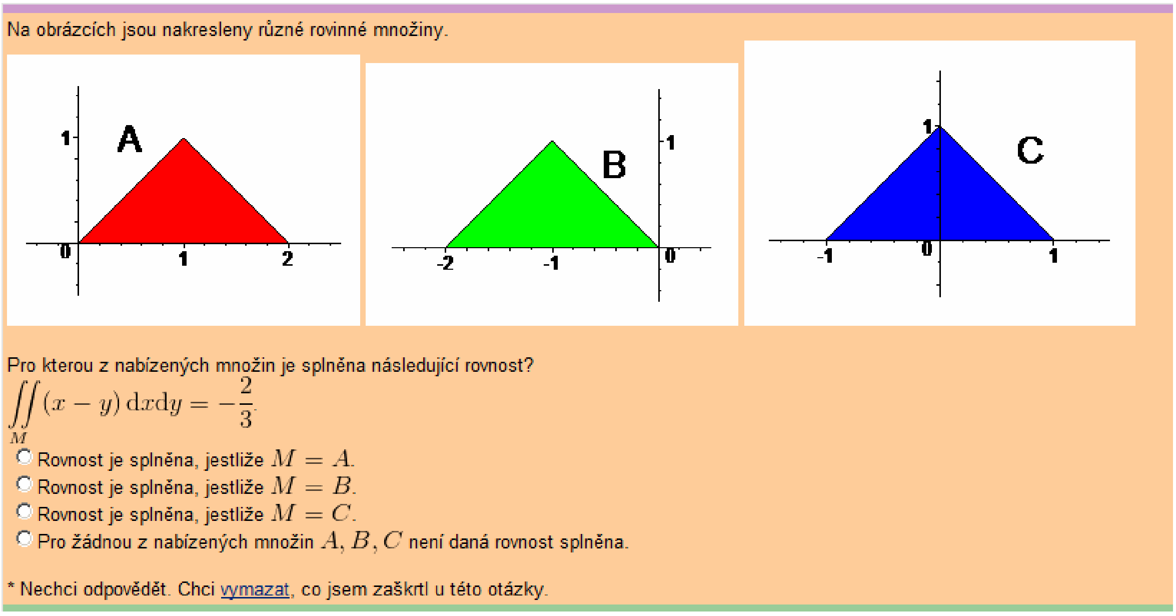
  Některé otázky tohoto typu se zdají být na první pohled obtížné, a to tvarem integrační oblasti. V nabídnutém integrálu je ale integrandem pouze konstanta, čehož když si student všimne a zná souvislost mezi dvojným integrálem a obsahem rovinné množiny, vyřeší příklad prakticky z hlavy a v mnohem kratším čase, než ten, kdo integrál „tvrdě“ počítá. Zvažoval jsem použití takové formulace otázky,



Obr. 3.2. Příklad otázky z druhé sady

mohla by být někým označena jako „chyták“. Nakonec jsem se rohodl ji zařadit, za „chyták“ ji nepovažuji – totiž než člověk začne řešit nějaký problém, měl by se nejprve rozhodnout, jak jej bude řešit a zvolit ten nejvhodnější postup.

Příklad otázky tohoto typu je na obr. 3.3.



Obr. 3.3. Příklad otázky z druhé sady

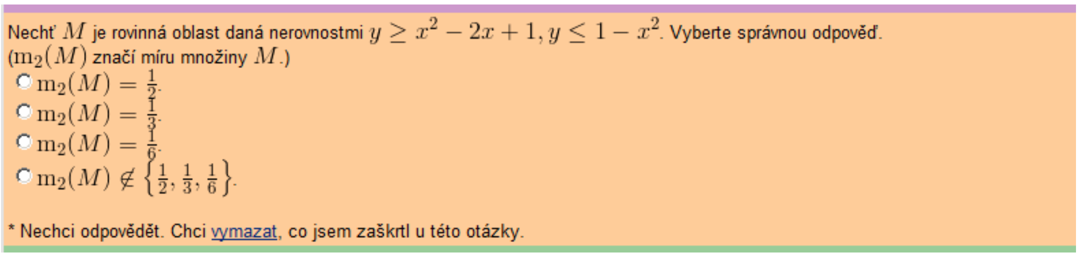
- Určení míry rovinné množiny. (5 otázek)

  Tento typ otázek by, pravda, mohl být zařazen spíše do sady Aplikace.

  Příklad otázky tohoto typu je na obr. 3.4.

Třetí sada otázek

Tato sada obsahuje dva typy otázek:



Nechť M je rovinná oblast daná nerovnostmi $y \geq x^2 - 2x + 1, y \leq 1 - x^2$. Vyberte správnou odpověď.
($\mathrm{m}_2(M)$ značí míru množiny M.)

- $\mathrm{m}_2(M) = \frac{1}{2}$.
- $\mathrm{m}_2(M) = \frac{1}{3}$.
- $\mathrm{m}_2(M) = \frac{1}{6}$.
- $\mathrm{m}_2(M) \notin \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right\}$.

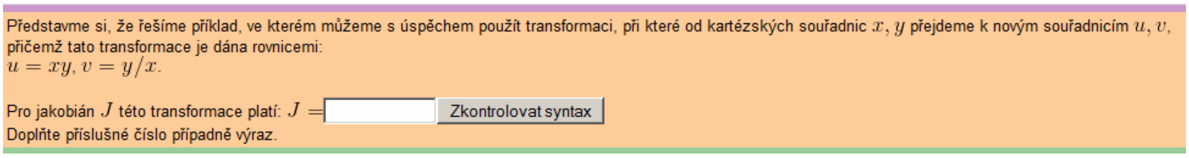
* Nechci odpovědět. Chci vymazat, co jsem zaškrtl u této otázky.

Obr. 3.4. Příklad otázky z druhé sady

- Určit jakobián dané transformace. (4 otázky)

  Považuji za důležité aktivně ovládat výpočet jakobiánu, proto jsem tyto otázky zařadil.

  Příklad otázky tohoto typu je na obr. 3.5.



Představme si, že řešíme příklad, ve kterém můžeme s úspěchem použít transformaci, při které od kartézských souřadnic x, y přejdeme k novým souřadnicím u, v, přičemž tato transformace je dána rovnicemi:
$u = xy, v = y/x$.

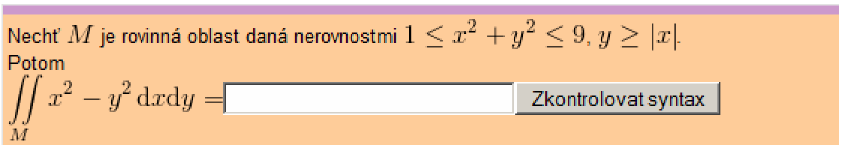
Pro jakobián J této transformace platí: $J =$ Zkontrolovat syntax
Doplňte příslušné číslo případně výraz.

Obr. 3.5. Příklad otázky z třetí sady

- Výpočet dvojného integrálu transformací do křivočarých souřadnic.

  Otázky mají různý charakter – někdy je více obtížné stanovit meze integrálů, někdy je zase více obtížné vypočítat potom upravený integrál.

  Příklad otázky tohoto typu je na obr. 3.6.



Nechť M je rovinná oblast daná nerovnostmi $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq |x|$.
Potom
$\iint\limits_M x^2 - y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ Zkontrolovat syntax

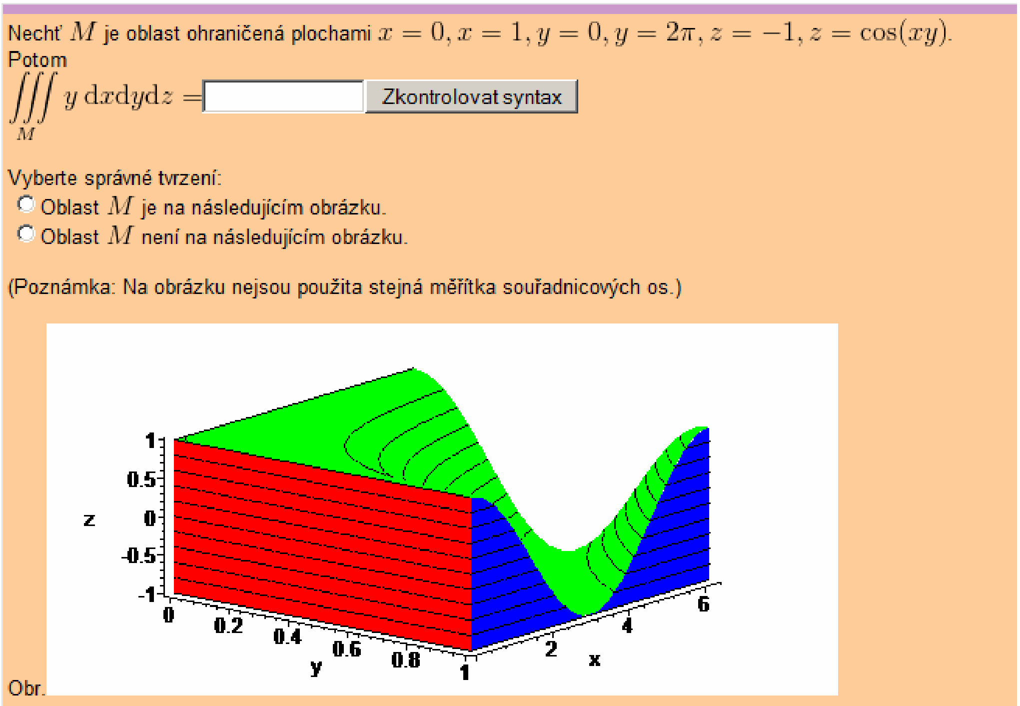
Obr. 3.6. Příklad otázky z třetí sady

Čtvrtá sada otázek

Tato sada obsahuje vlastně jen jeden typ otázky: vypočítat trojný integrál, přičemž u některých příkladů je přiložen jeden či více obrázků a má se rozhodnout, zda útvar na obrázku je oblast M.

Důkladně jsem zvažoval, zda použít statické obrázky (vložené obyčejně ve formátu `.gif`), či využít možnosti vložit dynamické obrázky zobrazené pomocí programu JavaView. Rozhodl jsem se pro obyčejné statické obrázky. Důvodů je několik: především chci, aby řešení příkladů na toto téma rozvíjelo (přesněji nutilo rozvíjet) studentovu představivost v prostoru a orientaci v kartézské soustavě souřadnic. Také aby student řešil příklad standardně – nikoliv „odzadu“, testově, čili aby si nejprve nakreslil a hlavně představil prostorovou oblast, přes kterou se bude integrovat a pak ji teprve srovnal s těmi na obrázku a vybral shodnou, příp. řešil další úkoly. Přičemž množiny nabídnuté na obrázku jsou kresleny různou barvou a s z různou orientací jednotlivých os kartézské soustavy souřadnic. Dynamické obrázky zobrazované pomocí programu JavaView jsou velice hezké a je fascinující, že si objekt může člověk prohlédnout z libovolného směru, může si jej přiblížit, měnit průhlednost, atd. Jistě je možné tohoto výborně využít během výuky tématu, ale v mnou vytvořených testech by právě tato vlastnost naopak hrála ostře negativní roli. Tedy rozhodnutí pro statické obrázky není jen z mého spíše konzervativního založení v otázkách didaktiky.

Příklad otázky z této sady je na obr. 3.7.



Obr. 3.7. Příklad otázky z čtvrté sady

Pátá sada otázek

Tato sada, obdobně jako čtvrtá, obsahuje vlastně jen jeden typ otázky: vypočítat trojný integrál pomocí vhodné transformace souřadnic, přičemž u některých příkladů je přiložen jeden či více obrázků a má se buď rozhodnout, zda na obrázku je oblast M, a nebo zda bychom viděli totéž, pokud bychom se na oblast M podívali daným způsobem.

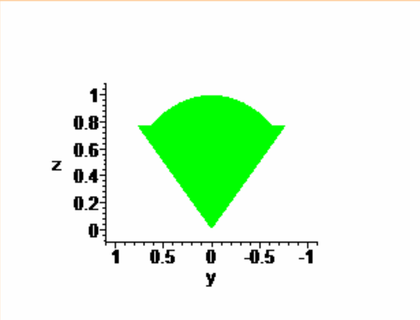
Pro použití obrázků platí stejný komentář jako výše.

Příklad otázky z této sady je na obr. 3.8.

Nechť M je oblast daná nerovnostmi $\sqrt{x^2+y^2} \le z, x^2+y^2+z^2 \le 1$.
Potom
$\iiint\limits_M y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$ [ ] Zkontrolovat syntax

Pokud bychom se na oblast M podívali rovnoběžně s osou x, ve směru růstu jejích hodnot, uviděli bychom to samé, jako na následujícím obrázku?
- Ano.
- Ne.

Obr.



Obr. 3.8. Příklad otázky z páté sady

Šestá sada otázek

Poslední, šestá sada otázek, obsahuje otázky ověřující porozumění dvojnému a trojnému integrálu ve smyslu jeho aplikací. Ve všech 20 otázkách je úkolem určit míru rovinné či prostorové množiny.

Příklady otázek z této sady jsou na obr. 3.9.

Nechť M je oblast v prostoru ohraničená plochami o rovnicích $x^2+y^2=a^2, x-y+z=3a, z=0$, kde a je kladný reálný parametr.
Potom
$\mathrm{m}_3(M) =$ [ ] Zkontrolovat syntax
Doplňte příslušné číslo příp. výraz. $\mathrm{m}_3(M)$ značí míru množiny M.

• upravit textovým editorem (zrušit otázku)
Nelze upravovat formulářem, protože: Nalezena poznámka. Odpovědní prvek musí být na začátku řádku. Mezi možnými odpověďmi nalezen jeden řádek bez odpovědního prvku. Nalezen počet bodů za jinou odpověď.

body = null

• vložit novou otázku ! | r | c | t | tt | v | w | n | m | b | bb | s | a | ! | e | textovým editorem || vložit mezitext editorem HTML | textovým editorem

18. • klikněte: ukaž/skryj zdrojovou formu

Nechť M je oblast v prostoru ohraničená plochami o rovnicích $x^2+y^2=1, z=1-xy, z=xy-1$.
Potom
$\mathrm{m}_3(M) =$ [ ] Zkontrolovat syntax
Doplňte příslušné číslo. $\mathrm{m}_3(M)$ značí míru množiny M.

• upravit textovým editorem (zrušit otázku)
Nelze upravovat formulářem, protože: Nalezena poznámka. Odpovědní prvek musí být na začátku řádku. Mezi možnými odpověďmi nalezen jeden řádek bez odpovědního prvku. Nalezen počet bodů za jinou odpověď.

Obr. 3.9. Příklady otázek z šesté sady

Část II

Teorie integrálů ve vícerozměrných prostorech

Kapitola 1

Riemannův integrál

Dvojný a trojný integrál je zobecněním určitého integrálu funkce jedné proměnné. Ten funkci jedné proměnné přiřazuje číslo, které vyjadřuje např. obsah rovinné množiny ohraničené grafem nezáporné funkce a vodorovnou osou, objem rotačního tělesa či obsah jeho pláště nebo fyzikální vlastnosti, jako je hmotnost nebo moment setrvačnosti. To podle toho, co vyjadřuje daná funkce definovaná na nějakém ohraničeném uzavřeném intervalu. Analogicky dvojný (resp. trojný) integrál bude přiřazovat funkci dvou (resp. tří) proměnných definované na vhodné rovinné (resp. prostorové) množině určité číslo. Toto číslo bude mít různý význam, v závislosti na tom, co bude vyjadřovat daná funkce. Opět to bude např. obsah či objem.

Při konstrukci dvojného a trojného integrálu se budeme muset vypořádat s problémem, na který jsme při studiu integrálu funkcí jedné proměnné nenarazili. Tím je definiční obor integrované funkce. U funkcí jedné proměnné to byl vždy interval, avšak u funkcí dvou a tří proměnných půjde o více či méně složité útvary.

1.1 Dvojný integrál

Budeme postupovat podobně jako při konstrukci určitého integrálu funkce jedné proměnné (viz např. [3]).

Zaveďme označení: je-li A nějaká množina, označme jí příslušející míru $\mathrm{m}_i(A)$, $i \in$ $\in \{1, 2, 3\}$, kde index i vyjadřuje, v jakých jednotkách (délkových, plošných, objemových) se daná míra měří. Tedy $\mathrm{m}_2(A)$ bude značit obsah množiny A. Dále budeme potřebovat některé topologické pojmy v rovině a v prostoru, zejména pojmy *ohraničená* a *uzavřená* množina: množina A se nazývá ohraničená, jestliže pro její průměr $d(A)$ platí $d(A) < \infty$; množina A se nazývá uzavřená, pokud $A = \overline{A}$. Více viz např. [1].

Začněme následující úlohou.

Příklad 1.1. Máme dánu rovinnou desku A o známé plošné hustotě σ, která je spojitou funkcí polohy: $\sigma = \sigma(x, y)$. Označme celkovou hmotnost desky $M(A)$. Úkolem je najít hodnotu $M(A)$. Následujícím postupem bychom mohli najít přibližnou hodnotu $M(A)$:

1. Desku A rozdělíme na n ($n \in \mathbb{N}$) menších částí $A_1, \dots, A_n$. Tyto části se překrývají jen hraničními čarami. Celková hmotnost bude rovna součtu hmotností jednotli-

vých částí:

$$M(A) = \sum_{i=1}^{n} M(A_i).$$

2. V každé části A_i vyberme jako zástupce libovolně jeden bod B_i, $i = 1, \dots, n$. Jestliže budou části A_i velmi malé, bude na nich plošná hustota přibližně konstantní a přibližně rovna hustotě v bodě B_i. Hustota je veličina, která nám říká, jaká je hmotnost jednotkového objemu – pro homogenní těleso. Proto bude (pro $\forall i \in$ $\in \{1, \dots, n\}$) platit
$$M(A_i) \approx \mathrm{m}_2(A_i) \cdot \sigma(B_i).$$

3. Pro celkovou hmotnost pak dostaneme vztah
$$M(A) \approx \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m}_2(A_i) \cdot \sigma(B_i). \tag{1.1}$$

4. Je zřejmé, že čím větší n zvolíme, tím přesnější bude vztah (1.1) dávat výsledek.

Postup přibližného řešení příkladu 1.1 je jistě elegantní a v bežném životě použitelný, avšak abychom mohli počítat přibližné hmotnosti jednotlivých části, jejichž tvar může být velice složitý, musíme umět určit jejich obsah. A to zatím zvládneme pouze, jedná-li se o velmi speciální množiny (čtverec, trojúhelník). Vlastně zatím ani nemáme definováno, co znamená pojem „obsah množiny". Budeme tedy postupovat takto:

- Nejprve zavedeme integrál na speciálních obdélnících, které budeme dělit opět jen na takové speciální obdélníky. Problém s určením jejich obsahu tedy v tu chvíli nenastane.
- Pomocí takového integrálu zavedeme obsah rovinné množiny a současně určíme, které množiny vůbec mají obsah.
- Konečně zavedeme integrál pro obecnou množinu mající obsah, a to převedením na případ, kdy je definičním oborem speciální obdélník zmíněný výše.

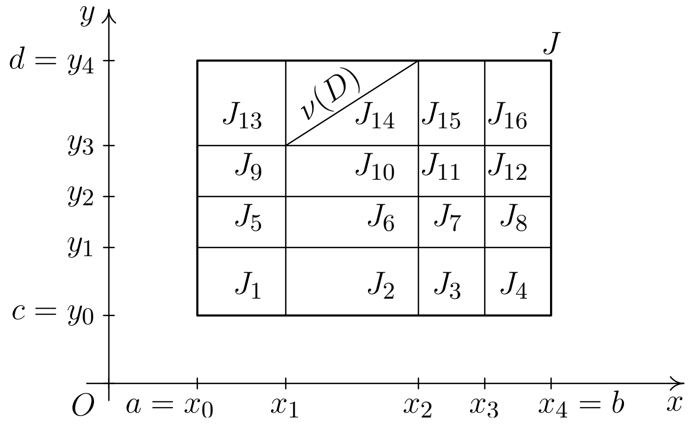
Definice 1.2. Nechť J_1, J_2 jsou intervaly takové, že $J_1, J_2 \subset \mathbb{R}$ a J_1 i J_2 obsahují alespoň dva prvky. *Intervalem v rovině* nebo-li *dvojrozměrným intervalem* J budeme rozumět kartézský součin intervalů J_1, J_2, tedy $J = J_1 \times J_2$.

Intervaly v definici 1.2 mohou být různého typu. Pro nás budou mít klíčový význam případy, kdy oba intervaly J_1, J_2 budou **ohraničené** a **uzavřené**. Odpovídající dvojrozměrný interval J pak bude ohraničený a uzavřený obdélník, jehož strany budou rovnoběžné se souřadnicovými osami.

Nyní můžeme přistoupit k definici Riemannova integrálu.
Uvažujme funkci f, která je definovaná na dvojrozměrném ohraničeném a uzavřeném intervalu $J = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ a je na tomto intervalu ohraničená.

Proveďme dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ takto (viz obr. 1.1): $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m =$ $= b$, $m \in \mathbb{N}$ a podobně i dělení intervalu $\langle c, d \rangle$ takto: $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n =$ $= d$, $n \in \mathbb{N}$. Rovnoběžky se souřadnicovými osami které procházejí body $x_0, \dots, x_m$ a

$y_0, \dots, y_n$ rozdělí interval J na menší intervaly. Označme tyto intervaly $J_1, \dots, J_k$, kde $k = m \cdot n$. Množinu $D = \{J_1, \dots, J_k\}$ nazvěme *dělením intervalu* J a její prvky *dělícími intervaly*. Dále zaveďme *normu* $\nu(D)$ dělení D takto: $\nu(D) = \max\{d_1, \dots, d_k\}$, kde d_i je délka úhlopříčky intervalu J_i, $i = 1, \dots, k$. V každém dělícím intervalu J_i vyberme jeden bod (tzv. *reprezentanta*) $T_i = [\xi_i, \eta_i]$, $i = 1, \dots, k$, a označme $\Xi = \{T_1, \dots, T_k\}$ množinu k těchto bodů, kterou budeme nazývat *výběr reprezentantů dělení* D. Mějme



Obr. 1.1. Dělení dvojrozměrného intervalu J s vyznačenou normou dělení $\nu(D)$

tedy nějaké dělení $D = \{J_1, \dots, J_k\}$ intervalu J a výběr reprezentantů tohoto dělení $\Xi = \{T_1, \dots, T_k\}$. Součet

$$\mathcal{S}(f, D, \Xi) = \sum_{i=1}^{k} f(T_i) \cdot \mathrm{m}_2(J_i)$$

nazýváme *integrálním součtem* příslušným funkci f, dělení D a výběru reprezentantů Ξ.

Definice 1.3. Nechť je dána funkce f proměnných x, y, která je definovaná na uzavřeném a ohraničeném dvojrozměrném intervalu J a je na tomto intervalu ohraničená. Předpokládejme, že existuje reálné číslo I s následující vlastností: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ takové, že $\forall D$ intervalu J, jehož norma $\nu(D) < \delta$, a pro libovolný výběr reprezentantů Ξ tohoto dělení platí $|I - \mathcal{S}(f, D, \Xi)| < \varepsilon$. Pak řekneme, že funkce f je na J *integrovatelná*, nebo-li že má *dvojný* nebo též *dvojrozměrný integrál.* Hodnota tohoto integrálu je I. Píšeme

$$\iint\limits_J f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = I.$$

Funkci f pak nazýváme *integrandem* a interval J *integračním oborem.*

Poznámka 1.4. Definici 1.3 lze volně slovy vyjádřit tak, že požadujeme, aby se integrální součty při zmenšování normy dělení definičního intervalu přibližovaly k jisté pevné hodndotě I, přičemž nezáleží na volbě reprezentantů. Matematicky zapsáno pomocí limity:

$$\lim_{\nu(D) \to 0} \mathcal{S}(f, D, \Xi) = I.$$

Definice 1.5. Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je libovolná množina. Funkci $\chi_M : \mathbb{R}^2 \to \{0, 1\}$ nazveme *charakteristickou funkcí* a definujeme ji takto:

$$\chi_M(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } [x, y] \in M, \\ 0 & \text{pro } [x, y] \in \mathbb{R}^2 \setminus M. \end{cases}$$

Definice 1.6. Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je ohraničená množina a J je ohraničený uzavřený dvojrozměrný interval takový, že $M \subset J$. Řekneme, že množina M je *měřitelná (v jordanově smyslu)*, jestliže její charakteristická funkce χ_M je integrovatelná na J. Její *Jordanovu dvojrozměrnou míru* nebo-li *obsah* pak definujeme vztahem

$$\mathrm{m}_2(M) = \iint\limits_J \chi_M(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Věta 1.7. *Nechť rovinné množiny $M_1, \ldots, M_n$, kde $n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné v jordanově smyslu. Pak jsou jordanovsky měřitelné také množiny $M_1 \cup \cdots \cup M_n$ a $M_1 \cap \cdots \cap M_n$.*

Nechť rovinné množiny M_1 a M_2 jsou jordanovsky měřitelné. Pak je jordanovsky měřitelný také jejich množinový rozdíl $M_1 \setminus M_2$.

Věta 1.8. *Označme ∂M hranici množiny M. Ohraničená množina $M \subset \mathbb{R}^2$ je jordanovsky měřitelná právě tehdy, když platí $\mathrm{m}_2(\partial M) = 0$.*

Věta 1.9. *Množina $M \subset \mathbb{R}^2$ má Jordanovu míru nula právět tehdy, když k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje konečný systém dvojrozměrných ohraničených uzavřených intervalů $J_1, \ldots, J_k$, kde $k \in \mathbb{N}$, takových, že platí $M \subset J_1 \cup \cdots \cup J_k$ a $\mathrm{m}_2(J_1) + \cdots + \mathrm{m}_2(J_k) < \varepsilon$.*

Věta 1.10. *Nechť množiny $M_1, \ldots, M_k$ v $\mathbb{R}^2$, kde $k \in \mathbb{N}$, mají míru nula. Pak také množina $M_1 \cup \cdots \cup M_k$ má míru nula.*

Věta 1.11. *Podmnožina množiny míry nula má míru nula.*

Věta 1.12. *Nechť funkce f proměnné x je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak její graf $\mathrm{Gr}_f = \{[x, f(x)] : x \in \langle a, b \rangle\} \subset \mathbb{R}^2$ má jordanovu míru nula.*

Z předchozích vět plyne následující věta.

Věta 1.13. *Nechť hranice ohraničené množiny $M \subset \mathbb{R}^2$ je sjednocením konečně mnoha grafů spojitých funkcí jedné proměnné definovaných na ohraničených uzavřených intervalech. Pak je množina M jordanovsky měřitelná.*

Definice 1.14. Mějme funkci f definovanou na množině $A \subset \mathbb{R}^2$ a nechť B je taková množina, že $A \subset B$. Definujme součin $f \cdot \chi_A$ na celé množině B:

$$f(X) \cdot \chi_A(X) = \begin{cases} f(X) & \text{pro } X \in A, \\ 0 & \text{pro } X \in B \setminus A. \end{cases}$$

Definice 1.15. Nechť funkce f dvou proměnných x, y je definovaná a ohraničená na měřitelné množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Nechť J je dvojrozměrný ohraničený uzavřený interval takový, že $M \subset J$. Řekneme, že funkce f je *integrovatelná* na M, jestliže existuje dvojný integrál $\iint_J f(x,y) \cdot \chi_M(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Integrál funkce f přes množinu M značíme $\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ a nazýváme jej *dvojný* nebo *dvojrozměrný*. Jeho hodnotu definujeme vztahem

$$\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_J f(x,y) \cdot \chi_M(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Funkci f budeme nazývat *integrandem* a množinu M *integračním oborem.*

1.2 Trojný integrál

Integrál funkce tří proměnných budeme konstruovat zcela analogicky. Postupujme tedy rychleji bez výrazných komentářů.

Definice 1.16. Nechť $J_1, J_2, J_3 \subset \mathbb{R}$ jsou intervaly obsahující alespoň dva prvky. *Intervalem v prostoru* nebo-li *trojrozměrným intervalem* budeme rozumět množinu J, která je jejich kartézským součinem: $J = J_1 \times J_2 \times J_3$.

Uvažujme funkci g, která je definovaná na trojrozměrném ohraničeném uzavřeném intervalu $J = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \times \langle e,f\rangle$ a je na tomto intervalu ohraničená. Zvolme dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ takto: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b, m \in \mathbb{N}$, dělení intervalu $\langle c,d\rangle$ takto: $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d, n \in \mathbb{N}$, a dělení intervalu $\langle e,f\rangle$ takto: $e = z_0 < z_1 < < \cdots < z_p = f, p \in \mathbb{N}$. Rovinami rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami procházející těmito body, rozdělme interval J na menší intervaly, označme je $J_1, \ldots, J_k, k = m \cdot \cdot n \cdot p$. Množinu $D = \{J_1, \ldots, J_k\}$ těchto trojrozměrných intervalů nazvěme *dělením intervalu* J a její prvky *dělícími intervaly.* Zaveďme *normu* $\nu(D)$ dělení D takto: $\nu(D) = = \max\{d_1 \ldots, d_k\}$, kde d_i je délka tělesové úhlopříčky intervalu J_i, $i = 1, \ldots, k$. V každém dělícím intervalu J_i vyberme jeden bod (tzv. *reprezentanta*) $T_i = [\xi_i, \eta_i, \zeta_i]$, $i = 1, \ldots, k$ a označme $\Xi = \{T_1, \ldots, T_k\}$ množinu k těchto bodů, kterou budeme nazývat *výběrem reprezentantů dělení D.* Součet

$$\mathcal{S}(g, D, \Xi) = \sum_{i=1}^{k} g(T_i) \cdot \mathrm{m}_3(J_i)$$

budeme nazývat *integrálním součtem* příslušným funkci g, dělení D a výběru reprezentantů Ξ.

Definice 1.17. Nechť funkce g proměnných x, y, z je definovaná na uzavřeném ohraničeném trojrozměrném intervalu J a je na tomto intervalu ohraničená. Předpokládejme, že existuje reálné číslo I s následující vlastností: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ takové, že $\forall D$ intervalu J, jehož norma $\nu(D) < \delta$, a pro libovolný výběr reprezentantů Ξ tohoto dělení platí $|I - \mathcal{S}(g, D, \Xi)| < \varepsilon$. Pak řekneme, že funkce g je na intervalu J *integrovatelná*, nebo-li že má *trojný* nebo též *trojrozměrný integrál*. Hodnota tohoto integrálu je I. Píšeme

$$\iiint\limits_J g(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = I.$$

Funkci g nazýváme *integrandem* a interval J *integračním oborem.*

Definice 1.18. Nechť $M \subset \mathbb{R}^3$ je libovolná množina. Funkci $\chi_M : \mathbb{R}^3 \to \{0, 1\}$ nazveme *charakteristickou funkcí* a definujeme ji takto:

$$\chi_M(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{pro } [x, y, z] \in M, \\ 0 & \text{pro } [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \setminus M. \end{cases}$$

Definice 1.19. Nechť $M \subset \mathbb{R}^3$ je ohraničená množina a J je ohraničený uzavřený trojrozměrný interval obsahující M, tj. $M \subset J$. Řekneme, že množina M je *jordanovsky měřitelná*, jestliže její charakteristická funkce χ_M je integrovatelná na J. Její *Jordanovu trojrozměrnou míru* nebo-li *objem* pak definujeme vztahem

$$\mathrm{m}_3(M) = \iiint\limits_J \chi_M(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Věta 1.20. *Nechť prostorové množiny $M_1, \dots, M_n$, kde $n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné v jordanově smyslu. Pak jsou jordanovsky měřitelné také množiny $M_1 \cup \dots \cup M_n$ a $M_1 \cap \dots \cap M_n$.*

Nechť prostorové množiny M_1 a M_2 jsou jordanovsky měřitelné. Pak je jordanovsky měřitelný také jejich množinový rozdíl $M_1 \setminus M_2$.

Věta 1.21. *Označme ∂M hranici množiny M. Ohraničená množina $M \subset \mathbb{R}^3$ je jordanovsky měřitelná právě tehdy, když platí $\mathrm{m}_2(\partial M) = 0$.*

Věta 1.22. *Množina $M \subset \mathbb{R}^3$ má Jordanovu míru nula právět tehdy, když k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje konečný systém trojrozměrných ohraničených uzavřených intervalů $J_1, \dots, J_k$, kde $k \in \mathbb{N}$, takových, že platí $M \subset J_1 \cup \dots \cup J_k$ a $\mathrm{m}_3(J_1) + \dots + \mathrm{m}_3(J_k) < \varepsilon$.*

Věta 1.23. *Nechť množiny $M_1, \dots, M_k$ v $\mathbb{R}^3$, kde $k \in \mathbb{N}$, mají míru nula. Pak také množina $M_1 \cup \dots \cup M_k$ má míru nula.*

Věta 1.24. *Podmnožina množiny míry nula má míru nula.*

Věta 1.25. *Nechť funkce g proměnných x, y je spojitá na uzavřené měřitelné množině $M \subset \mathbb{R}^3$. Pak její graf $\mathrm{Gr}_g = \{[x, y, g(x, y)] : [x, y] \in M\}$ má jordanovu míru nula, tedy platí $\mathrm{m}_3(\mathrm{Gr}_g) = 0$.*

Z předchozích vět plyne následující věta.

Věta 1.26. *Nechť hranice ohraničené množiny $M \subset \mathbb{R}^3$ je sjednocením konečně mnoha grafů spojitých funkcí dvou proměnných definovaných na uzavřených měřitelných množinách. Pak je množina M jordanovsky měřitelná.*

Věta 1.27. *Nechť množina $M \subset \mathbb{R}^2$ má Jordanovu míru rovnu nule. Nechť funkce f a g jsou definované a ohraničené na M, přičemž platí $f(x,y) \le g(x,y)\ \forall\,[x,y] \in M$. Pak pro množinu $W = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3\colon\ [x,y] \in M, f(x,y) \le z \le g(x,y)\}$ platí $\mathrm{m}_3(W) = 0$.*

Definice 1.28. Mějme funkci f definovanou na množině $A \subset \mathbb{R}^3$ a nechť B je taková množina, že $A \subset B$. Definujme součin $f \cdot \chi_A$ na celé množině B:

$$f(X) \cdot \chi_A(X) = \begin{cases} f(X) & \text{pro } X \in A, \\ 0 & \text{pro } X \in B \setminus A. \end{cases}$$

Definice 1.29. Nechť funkce f tří proměnných x, y, z je definovaná a ohraničená na měřitelné množině $M \subset \mathbb{R}^3$. Nechť J je trojrozměrný ohraničený uzavřený interval takový, že $M \subset J$. Řekneme, že funkce f je *integrovatelná* na M, jestliže existuje trojný integrál $\iiint_J f(x,y,z) \cdot \chi_M(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Integrál funkce f přes množinu M značíme $\iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ a nazýváme jej *trojný* nebo *trojrozměrný*. Jeho hodnotu definujeme vztahem

$$\iiint\limits_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_J f(x,y,z) \cdot \chi_M(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Funkci f budeme nazývat *integrandem* a množinu M *integračním oborem.*

1.3 Základní vlastnosti a existence dvojných a trojných integrálů

Věta 1.30. *Nechť funkce f a g jsou integrovatelné na měřitelné množina M. Pak také funkce $f \pm g$, αf, kde α je libovolná konstanta, $f \cdot g$, $|f|$, $\max(f,g)$ a $\min(f,g)$ jsou opět itegrovatelné na množině M.*

Je-li funkce f integrovatelná na měřitelné množině M, je integrovatelná také na každé její měřitelné podmnožině $M_1 \subset M$.

Věta 1.31. *Nechť funkce f a g jsou integrovatelné na měřitelné množině M a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. Pak pro dvojný integrál platí*

$$\iint\limits_M \big(f(x,y) \pm g(x,y)\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \pm \iint\limits_M g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

(aditivita vzhledem k integrandu)

$$\iint\limits_M \alpha f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \alpha \iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(homogenita vzhledem k integrandu)

A zcela analogicky pro trojný integrál.

Věta 1.32. *Nechť* $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^2$ *jsou měřitelné množiny a* $M = M_1 \cup M_2$*, přičemž platí* $\mathrm{m}_2(M_1 \cap M_2) = 0$*. Pak*

$$\iint\limits_{M} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{M_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{M_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(aditivita vzhledem k integračnímu oboru).

To za předpokladu, že existuje integrál $\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *nebo integrály* $\iint_{M_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *a* $\iint_{M_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*.*

Celé tvrzení platí zcela analogicky pro trojný integrál.

Poznámka 1.33. Věta 1.32 říká, že je možné integrační obor rozdělit na dvě měřitelné části, které se překrývají „zanedbatelně málo“ – míra průniku musí být rovna nule, a převést výpočet původního integrálu na součet dvou nových integrálů přes tyto části. Tvrzení lze indukcí rozšířit i na větší počet částí $M_1, \dots, M_n$, kde $n \geq 2$. Průnik každé dvojice částí $M_i \cap M_j, i \neq j$, musí mít míru nula.

Definice 1.34. Nechť V je určitá bodová vlastnost, kterou daná funkce f může, ale nemusí v jednotlivých bodech jisté množiny M mít. Řekneme, že funkce f má vlastnost V *skoro všude* v množině M, jestliže množina M_1 těch bodů z M, v nichž funkce f vlastnost V nemá, má míru nula.

Věta 1.35. *Nechť* M *je měřitelná množina. Je-li ohraničená funkce* f *spojitá skoro všude v* M*, je integrovatelná v* M*.*

Je-li funkce f *integrovatelná v* M *a platí-li pro ohraničenou funkci* g*, že* $f = g$ *skoro všude v* M*, je funkce* g *také integrovatelná v* M *a integrály mají stejnou hodnotu.*

Věta 1.36. *Nechť funkce* f *a* g *jsou integrovatelné na měřitelné množině* M *a platí* $f(X) \leq g(X)$ *skoro všude v* M*. Pak platí*

$$\iint\limits_{M} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint\limits_{M} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

a zcela analogicky pro trojný integrál.

Kapitola 2

Fubiniova věta a výpočet dvojných a trojných integrálů

V kapitole 1 jsme definovali Riemannův dvojný a trojný integrál a uvedli jejich základní vlastnosti. Dosud ale nebylo popsáno, jak vypočítat hodnotu takových integrálů. U funkcí jedné proměnné existuje pro pro výpočet určitého integrálu Newtonova–Leibnizova formule: pro integrovatelnou funkci f platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, kde F je primitivní funkce k funkci f, tj. platí $F' = f$. Pro výpočet dvojných a trojných integrálů takový relativně snadný nástroj není. Fubiniova věta nám však umozňuje převést vícerozměrné integrály na vícenásobné – tzn. např. dvojný integrál tak lze vypočítat pomocí dvou po sobě jdoucích jednorozměrných integrací.

2.1 Fubiniova věta pro dvojný integrál

Mějme funkci f proměnných x, y, která je definovaná na dvojrozměrném intervalu $J = = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Pro každé pevné $x \in \langle a, b\rangle$ je výraz $f(x, y)$ funkcí proměnné y, která je definovaná na intervalu $\langle c, d\rangle$. Předpokládejme, že pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ existuje $\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$. Dostáváme funkci (označme ji g) proměnné x definovanou na intervalu $\langle a, b\rangle$ a danou vztahem

$$g(x) = \int\limits_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y. \tag{2.1}$$

Definice 2.1. Nechť je funkce g daná vztahem (2.1) integrovatelná, pak číslo

$$\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

nazýváme *dvojnásobným integrálem funkce f přes interval J*. Integrál $\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$ se nazývá *vnitřní* a integrál $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *vnější*.

Poznámka 2.2. Pořadí integrace můžeme zaměnit. Pak dostaneme (existují-li příslušné integrály) dvojnásobný integrál

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Věta 2.3 (Fubini). *Nechť funkce f proměnných x, y je spojitá na dvojrozměrném intervalu $J = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Pak funkce $g(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí:*

$$\iint_J f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

Tedy dvojný integrál je roven dvojnásobnému integrálu, integrujeme-li nejprve podle y a pak podle x.

Poznámka 2.4. Záměnou proměnných ve vztahu (2.2) dostaneme, že bude rovněž platit

$$\iint_J f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Oba dvojnásobné integrály budou tedy dávat stejnou hodnotu. Pro výpočet si můžeme vybrat kterýkoliv z nich, to však neznamená, že oba půjdou vypočítat stejně snadno.

Příklad 2.5. Vypočítejte dvojný integrál $\iint_J (4x^2 - 2xy + y - 3)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $J = \langle 0, 1\rangle \times$ $\times \langle 5, 7\rangle$.
Řešení:
Integrand $4x^2 - 2xy + y - 3$ je funkce spojitá. Postupujme podle Fubiniovy věty.

$$\iint_J (4x^2 - 2xy + y - 3)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_5^7 \left(\int_0^1 (4x^2 - 2xy + y - 3)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \int_5^7 \left[\frac{4}{3}x^3 - x^2 y + xy - 3x \right]_0^1 \mathrm{d}y = \int_5^7 -\frac{5}{3}\,\mathrm{d}y = -\frac{10}{3}.$$

Snadno lze ověřit, že obdržíme stejný výsledek, integrujeme-li nejprve podle y a pak podle x.

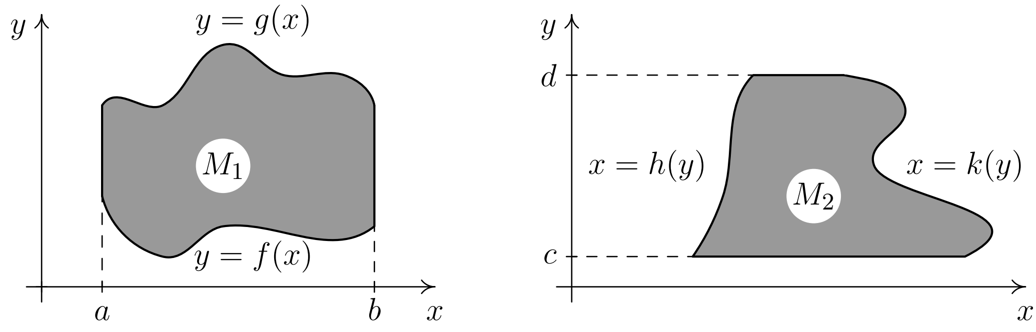
Definice 2.6. Nechť f a g jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, přičemž na tomto intervalu platí $f(x) \leq g(x)$. Měřitelnou množinu M_1 tvaru

$$M_1 = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\right\}$$

nazveme *zobecněný obdélník* nebo *elementární oblast* vzhledem k x (obr. 2.1(a)).
A podobně nazveme zobecněným obdélníkem nebo elementární oblastí vzhledem k y měřitelnou množinu M_2 tvaru

$$M_2 = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon c \leq y \leq d, h(y) \leq x \leq k(y)\right\},$$

kde h a k jsou spojité funkce na intervalu $\langle c, d\rangle$, přičemž na tomto intervalu platí $h(y) \leq k(y)$ (obr. 2.1(b)).



(a) Vzhledem k x (b) Vzhledem k y

Obr. 2.1. Elementární oblasti v rovině

Věta 2.7 (Fubini)**.** *Nechť funkce f proměnných x, y je spojitá na elementární oblasti $M \subset \mathbb{R}^2$ tvaru $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$, kde φ a ψ jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, přičemž pro libovolné $x \in \langle a, b\rangle$ platí $\varphi(x) \leq \psi(x)$. Pak platí*

$$\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Poznámka 2.8. Tvrzení věty 2.7 lze slovně popsat takto: *Nejprve se integruje podle y v proměnných mezích a pak podle x v konstantních mezích.*
Je-li M elementární oblastí vzhledem k y, vymění se ve větě 2.7 role proměnných, tj. nejprve se integruje podle x v proměnných mezích a pak podle y v konstantních mezích.

Příklad 2.9. Vypočítejte $\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $f(x, y) = x^3y^3$ a množina M je ohraničená přímkami $x = 0$, $x = 2$, $y = x$ a $y = 2x$.
Řešení:
Množinu M si lze snadno představit, jde o elementární oblast vzhledem k x. Funkce

$f(x,y) = x^3y^3$ je spojitá. V korespondenci s Fubiniovou větou 2.7 můžeme napsat: $a = 0$, $b = 2$, $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = 2x$. A dosadit:

$$\int_0^2 \left(\int_x^{2x} x^3y^3 \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \left(x^3 \left[\frac{y^4}{4} \right]_x^{2x} \right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{15}{4} x^7 \, \mathrm{d}x = 120.$$

2.2 Fubiniova věta pro trojný integrál

Mějme funkci g proměnných x, y, z, která je definovaná na trojrozměrném intervalu $J = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \times \langle e, f\rangle$. Pro každé pevné $x \in \langle a, b\rangle$ je výraz $g(x, y, z)$ funkcí dvou proměnných y, z, která je definovaná na dvojrozměrném intervalu $J_1 = \langle c, d\rangle \times \langle e, f\rangle$. Předpokládejme, že pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ existuje $\iint_{J_1} g(x, y, z) \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Dostáváme funkci (označme ji h) proměnné x definovanou na intervalu $\langle a, b\rangle$ a danou vztahem

$$h(x) = \iint_{J_1} g(x, y, z) \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{2.3}$$

Definice 2.10. Nechť je funkce h daná vztahem (2.3) integrovatelná, pak číslo

$$\int_a^b h(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\iint_{J_1} g(x, y, z) \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x$$

nazýváme *dvojnásobným integrálem funkce g přes interval J*, integrujeme-li nejprve podle yz a pak podle x. Integrál $\iint_{J_1} g(x, y, z) \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z$ se nazývá *vnitřní* a integrál $\int_a^b h(x) \, \mathrm{d}x$ se nazývá *vnější*.

Věta 2.11 (Fubini). *Nechť funkce g je spojitá na trojrozměrném intervalu $J = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \times \langle e, f\rangle$. Označme $J_1 = \langle c, d\rangle \times \langle e, f\rangle$. Pak platí*

1. *Funkce $h(x) = \iiint_{J_1} g(x, y, z) \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z$ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a*

$$\iiint_J g(x, y, z) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b h(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\iint_{J_1} g(x, y, z) \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x.$$

2. *Funkce $k(y, z) = \int_a^b g(x, y, z) \, \mathrm{d}x$ je integrovatelná na J_1 a*

$$\iiint_J g(x, y, z) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{J_1} k(y, z) \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{J_1} \left(\int_a^b g(x, y, z) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. *Funkce $l(x, y) = \int_e^f g(x, y, z) \, \mathrm{d}z$ je pro každé pevné $x \in \langle a, b\rangle$ integrovatelná na intervalu $\langle c, d\rangle$, funkce $m(x) = \int_c^d l(x, y) \, \mathrm{d}y$ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a*

$$\iiint_J g(x, y, z) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \left\{ \int_c^d \left(\int_e^f g(x, y, z) \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x.$$

Věta 2.12 (Fubini). *Nechť funkce g je spojitá na elementární oblasti vzhledem k xy*

$$V = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \colon\ [x,y] \in M, u(x,y) \le z \le v(x,y)\right\},$$

kde $M \subset \mathbb{R}^3$ je uzavřená měřitelná množina a u a v jsou spojité funkce na M, přičemž platí $u(x,y) \le v(x,y)$ pro $[x,y] \in M$. Pak funkce $h(x,y) = \int_{u(x,y)}^{v(x,y)} g(x,y,z)\,\mathrm{d}z$ je integrovatelná na množině M a platí

$$\iiint\limits_V g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_M h(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_M \left(\int\limits_{u(x,y)}^{v(x,y)} g(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Z této věty vyplývá následující tvrzení.

Věta 2.13. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 2.12 a navíc M je elementární oblast vzhledem k x tvaru $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \colon a \le x \le b, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$, kde φ a ψ jsou spojité funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$, přičemž $\varphi(x) \le \psi(x)$ pro $x \in \langle a,b\rangle$. Pak platí:*

$$\iiint\limits_V g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_a^b \left\{\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int\limits_{u(x,y)}^{v(x,y)} g(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x.$$

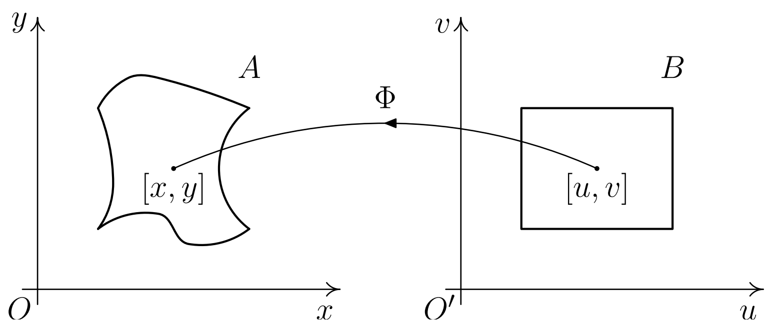
Kapitola 3

Transformace integrálů

Metody výpočtu formulované v závěru předchozí kapitoly jsou použitelné tehdy, když je integračním oborem interval nebo elementární oblast. Výpočet však může být značně komplikovaný. Změnou souřadnicového systému lze tyto výpočty zjednodušit, resp. je nám umožněno řešit některé jinak neřešitelné příklady. Změnou souřadnicového systému nám půjde o to, změnit integrační obor do podoby, která bude vhodnější pro použití Fubiniovy věty, přičemž mnohdy se nám integrand zkomplikuje.

3.1 Transformace dvojného integrálu

Poloha bodu A v rovině se obvykle určuje dvojicí čísel $[x, y]$ – tzv. kartézskými souřadnicemi. Lze přejít i k jiným souřadnicím – transformací $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, pro niž platí $\Phi([u, v]) = [x, y]$, přiřadíme bodu $[u, v]$ bod $[x, y]$ o kartézských souřadnicích (viz obr. 3.1). Číslo x i číslo y je tedy funkcí u a v: $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$. Dvojice funkcí φ a ψ tudíž popisuje vztah mezi původními souřadnicemi $[u, v]$ a novými souřadnicemi $[x, y]$.



Obr. 3.1. Transformace souřadnic

Definice 3.1. Nechť $B \subset \mathbb{R}^2$ a $\Phi\colon B \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení určené rovnostmi $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$. Řekneme, že zobrazení Φ je *spojitě diferencovatelné* v B, jestliže existuje otevřená množina Ω, $B \subset \Omega$, taková, že Φ lze rozšířit na Ω, přičemž funkce φ a ψ mají v Ω spojité parciální derivace prvního řádu podle všech svých proměnných.

Definice 3.2. Je-li Φ spojitě diferencovatelné zobrazení, determinant

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\varphi & \frac{\partial}{\partial v}\varphi \\ \frac{\partial}{\partial u}\psi & \frac{\partial}{\partial v}\psi \end{vmatrix}$$

se nazývá *jakobián* zobrazení Φ.

Definice 3.3. Je-li Φ spojitě diferencovatelné zobrazení v B, pak při označení z definice 3.1 se zobrazení Φ nazývá *regulární*, je-li jakobián J v Ω nenulový.

Věta 3.4. *Nechť $B \subset \mathbb{R}^2$ je uzavřená měřitelná množina a $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $B \subset \Omega$. Nechť $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ je prosté regulární zobrazení zadané rovnostmi $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$. Nechť funkce f proměnných x a y je spojitá v množině $A = \Phi(B)$. Pak platí*

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_B f\big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\big)\cdot|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Věta 3.5. *Nechť $B_1 \subset B \subset \mathbb{R}^2$, kde B_1 je otevřená množina, B je měřitelná množina a platí $\mathrm{m}_2(B \setminus B_1) = 0$. Nechť $\Phi\colon B \to \mathbb{R}^2$ je spojitě diferencovatelné zobrazení, které je regulární a prosté v B_1. Označme $A = \Phi(B)$, $A_1 = \Phi(B_1)$. Nechť je množina A měřitelná a platí $\mathrm{m}_2(A \setminus A_1) = 0$. Nechť je funkce f ohraničená na množině A a spojitá na množině A_1. Nechť je funkce $f\big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\big)\cdot|J(u,v)|$ ohraničená na množině B. Pak platí*

$$\iint_B f\big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\big)\cdot|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Definice 3.6. Mějme bod T v rovině s kartézskými souřadnicemi $[x,y]$. Označme r vzdálenost bodu T od počátku O kartézské soustavy souřadnic a φ úhel, který svírá polopřímka $\overrightarrow{OT}$ s kladnou částí osy x. Je-li $T \equiv O$, úhel φ není určen – můžeme za něj zvolit libovolné číslo. Je-li $T \not\equiv O$, odečteme od úhlu φ nejvyšší možný celočíselný násobek 2π tak, aby výsledná hodnota ležela v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$. Dvojici $[r,\varphi]$ pak nazýváme *polárními souřadnicemi* bodu T.

Věta 3.7. *Nechť bod $T \in \mathbb{R}^2$ má kartézské souřadnice $[x,y]$ a polární souřadnice $[r,\varphi]$. Vztah mezi kartézskými a polárními souřadnicemi bodu T je pak dán rovnicemi*

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi.$$

Takto dané zobrazení je spojitě diferencovatelné a pro jeho jakobián platí $|J| = r$.

Poznámka 3.8. Existují i další typy transformací, které lze s úspěchem použít:

- Afinní transformace.
  Ta mění měřítka na souřadnicových osách a případně posouvá počátek. Označíme-li $[x, y]$ kartézské souřadnice bodu T a $[u, v]$ nové souřadnice téhož bodu, bude vztah mezi nimi dán rovincemi

$$x = au + m,$$
$$y = bv + n,$$

  kde $a, b, m, n \in \mathbb{R}$ a $a, b > 0$. Jakobián transformace je $|J| = ab$.

- Transformace do zobecněných polárních souřadnic.
  Označíme-li $[x, y]$ kartézské souřadnice bodu T a $[r, \varphi]$ nové souřadnice téhož bodu, bude vztah mezi nimi dán rovnicemi

$$x = ar\cos\varphi + m,$$
$$y = br\sin\varphi + n,$$

  kde $a, b, m, n \in \mathbb{R}$ a $a, b > 0$. Jakobián transformace je $|J| = ab \cdot r$.

Příklad 3.9. Ukažte, že pro jakobián transformace do zobecněných polárních souřadnic v poznámce 3.8 platí $|J| = abr$.

Řešení:
Postupujme podle definice 3.2:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r}(ar\cos\varphi + m) & \frac{\partial}{\partial\varphi}(ar\cos\varphi + m) \\ \frac{\partial}{\partial r}(br\sin\varphi + n) & \frac{\partial}{\partial\varphi}(br\sin\varphi + n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} =$$
$$= abr\cos^2\varphi + abr\sin^2\varphi = abr(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = abr.$$

Volbou $a = b = 1$ a $m = n = 0$ dostaneme polární souřadnice a jejich jakobián z věty 3.7.

Příklad 3.10. Vypočítejte daný integrál pomocí vhodné transformace souřadnic:

$$\iint\limits_{\Omega} 2xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \Omega\colon x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4.$$

Řešení:
Množinu Ω si lze snadno představit: jedná se o čtvrtinu kruhu, která leží v prvním kvadrantu – kruhu, který má střed v počátku a poloměr 2. Tvar množiny Ω nám prozrazuje, že daný integrál budeme transformovat do polárních souřadnic. Pro integrační proměnné bude platit $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Předpoklady věty 3.5 jsou splněny, můžeme tedy

napsat (daný integrál označme I):

$$I = \iint_{\Omega} 2xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 2 \cdot r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi \cdot r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 2r^3 \cos\varphi \sin\varphi \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 2r^3 \cos\varphi \sin\varphi \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos\varphi \sin\varphi \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{2} \right) \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\cos\varphi \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi = 8 \cdot \left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi \right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} = 8 \cdot \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = 4.$$

3.2 Transformace trojného integrálu

Poznámka 3.11. Stanovme následující označení. Prostor $\mathbb{R}^3$, v němž budeme souřadnice bodů popisovat kartézskými souřadnicemi $[x, y, z]$, budeme značit $\mathbb{R}^3(x, y, z)$. Prostor $\mathbb{R}^3$, v němž budeme souřadnice bodů popisovat jinými souřadnicemi $[u, v, w]$, budeme značit $\mathbb{R}^3(u, v, w)$.

Definice 3.12. Nechť $B \subset \mathbb{R}^3$ a $\Phi\colon B \to \mathbb{R}^3$ je zobrazení určené rovnostmi $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \omega(u, v, w)$. Řekneme, že zobrazení Φ je *spojitě diferencovatelné* v B, jestliže existuje otevřená množina Ω, $B \subset \Omega$, taková, že Φ lze rozšířit na Ω, přičemž funkce φ, ψ a ω mají v Ω spojité parciální derivace prvního řádu podle všech svých proměnných.

Definice 3.13. Je-li Φ spojitě diferencovatelné zobrazení, determinant

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\varphi & \frac{\partial}{\partial v}\varphi & \frac{\partial}{\partial w}\varphi \\ \frac{\partial}{\partial u}\psi & \frac{\partial}{\partial v}\psi & \frac{\partial}{\partial w}\psi \\ \frac{\partial}{\partial u}\omega & \frac{\partial}{\partial v}\omega & \frac{\partial}{\partial w}\omega \end{vmatrix}$$

se nazývá *jakobián* zobrazení Φ.

Definice 3.14. Je-li Φ spojitě diferencovatelné zobrazení v B, pak při označení z definice 3.12 se zobrazení Φ nazývá *regulární*, je-li jakobián J v Ω nenulový.

Věta 3.15. *Nechť $B \subset \mathbb{R}^3(u, v, w)$ je uzavřená měřitelná množina a $\Omega \subset \mathbb{R}^3(u, v, w)$ je otevřená množina, $B \subset \Omega$. Nechť $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}^3(x, y, z)$ je prosté regulární zobrazení zadané rovnostmi $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \omega(u, v, w)$. Nechť funkce f proměnných x, y a z je spojitá v množině $A = \Phi(B)$. Pak platí*

$$\iiint_A f(x, y, z) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_B f\big(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \omega(u, v, w)\big) \cdot |J(u, v, w)| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

Věta 3.16. *Nechť $B_1 \subset B \subset \mathbb{R}^3(u,v,w)$, kde B_1 je otevřená množina, B je měřitelná množina a platí $\mathrm{m}_3(B \setminus B_1) = 0$. Nechť $\Phi\colon B \to \mathbb{R}^3(x,y,z)$ je spojitě diferencovatelné zobrazení, které je regulární a prosté v B_1. Označme $A = \Phi(B)$, $A_1 = \Phi(B_1)$. Nechť je množina A měřitelná a platí $\mathrm{m}_3(A \setminus A_1) = 0$. Nechť je funkce f ohraničená na množině A a spojitá na množině A_1. Nechť je funkce $f\big(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \omega(u,v,w)\big) \cdot |J(u,v,w)|$ ohraničená na množině B. Pak platí*

$$\iiint_B f\big(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \omega(u,v,w)\big) \cdot |J(u,v,w)| \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

Definice 3.17. Mějme bod T v prostoru s kartézskými souřadnicemi $[x,y,z]$. Označme T' jeho kolmý průmět do souřadnicové roviny xy, tedy T' má souřadnice $T' = [x,y,0]$. Bod T' vyjádříme v polárních souřadnicích $[r,\varphi]$ v rovině xy. Polohu bodu T v prostoru pak určíme trojicí čísel $[r,\varphi,z]$, kterou budeme nazývat *cylindrické* (příp. *válcové*) *souřadnice* bodu T.

Věta 3.18. *Nechť bod $T \in \mathbb{R}^3$ má kartézské souřadnice $[x,y,z]$ a cylindrické souřadnice $[r,\varphi,z]$. Vztah mezi kartézskými a cylindrickými souřadnicemi bodu T je pak dán rovnicemi*

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \\ z &= z. \end{aligned}$$

Takto dané zobrazení je diferencovatelné a pro jeho jakobián platí $|J| = r$.

Definice 3.19. Nechť bod T má v prostoru kartézské souřadnice $[x,y,z]$. Označme T' jeho kolmý průmět do souřadnicové roviny xy. Tedy T' má souřadnice $[x,y,0]$. Označme r vzdálenost bodu T od počátku O kartézské soustavy souřadnic. Označme φ úhel, který svírá polopřímka $\overrightarrow{OT'}$ s kladnou částí osy x. Označme ϑ úhel, který svírá polopřímka $\overrightarrow{OT}$ s kladnou částí osy z. Poloha bodu T v prostoru je pak určena trojicí čísel $[r,\varphi,\vartheta]$, kterou budeme nazývat *sférické* (příp. *kulové*) *souřadnice* bodu T.

Věta 3.20. *Nechť bod $T \in \mathbb{R}^3$ má kartézské souřadnice $[x,y,z]$ a sférické souřadnice $[r,\varphi,\vartheta]$. Vztah mezi kartézskými a sférickými souřadnicemi bodu T je pak dán rovnicemi*

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\vartheta, \\ y &= r\sin\varphi\sin\vartheta, \\ z &= r\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Takto dané zobrazení je diferencovatelné a pro jeho jakobián platí $|J| = r^2\sin\vartheta$.

Poznámka 3.21. Další typy transformací:

- Afinní transformace.
  Ta mění měřítka na souřadnicových osách a případně posouvá počátek. Označíme-li $[x,y,z]$ kartézské souřadnice bodu T a $[u,v,w]$ nové souřadnice téhož bodu, bude

vztah mezi nimi dán rovincemi

$$\begin{aligned} x &= au + m, \\ y &= bv + n, \\ z &= cw + p, \end{aligned}$$

kde $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$ a $a, b, c > 0$. Jakobián transformace je $|J| = abc$.

- Transformace do zobecněných cylindrických souřadnic.
  Označíme-li $[x, y, z]$ kartézské souřadnice bodu T a $[r, \varphi, w]$ nové souřadnice téhož bodu, bude vztah mezi nimi dán rovincemi

$$\begin{aligned} x &= ar\cos\varphi + m, \\ y &= br\sin\varphi + n, \\ z &= cw + p, \end{aligned}$$

  kde $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$ a $a, b, c > 0$. Jakobián transformace je $|J| = abc \cdot r$.

- Transformace do zobecněných sférických souřadnic.
  Označíme-li $[x, y, z]$ kartézské souřadnice bodu T a $[r, \varphi, \vartheta]$ nové souřadnice téhož bodu, bude vztah mezi nimi dán rovincemi

$$\begin{aligned} x &= ar\cos\varphi\sin\vartheta + m, \\ y &= br\sin\varphi\sin\vartheta + n, \\ z &= cr\cos\vartheta + p, \end{aligned}$$

  kde $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$ a $a, b, c > 0$. Jakobián transformace je $|J| = abc \cdot r^2 \sin\vartheta$.

Příklad 3.22.

1. Ukažte, že pro jakobián transformace do cylindrických souřadnic ve větě 3.18 platí $|J| = r$.
2. Ukažte, že pro jakobián transformace do sférických souřadnic ve větě 3.20 platí $|J| = r^2 \sin\vartheta$.

Řešení:
Postupujme podle definice 3.13 na str. 42:

1.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\varphi) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\cos\varphi) & \frac{\partial}{\partial z}(r\cos\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\varphi) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\sin\varphi) & \frac{\partial}{\partial z}(r\sin\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial r}z & \frac{\partial}{\partial \varphi}z & \frac{\partial}{\partial z}z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

2.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\varphi\sin\vartheta) & \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\cos\varphi\sin\vartheta) & \frac{\partial}{\partial\vartheta}(r\cos\varphi\sin\vartheta) \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\varphi\sin\vartheta) & \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\sin\varphi\sin\vartheta) & \frac{\partial}{\partial\vartheta}(r\sin\varphi\sin\vartheta) \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\vartheta) & \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\cos\vartheta) & \frac{\partial}{\partial\vartheta}(r\cos\vartheta) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{vmatrix} =$$

$$= -r^2\cos^2\varphi\sin^3\vartheta - r^2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta\sin\vartheta - r^2\cos^2\varphi\cos^2\vartheta\sin\vartheta -$$
$$- r^2\sin^2\varphi\sin^3\vartheta = -r^2\sin^3\vartheta - r^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta = -r^2\sin\vartheta,$$

$$|J| = \left|-r^2\sin\vartheta\right| = r^2\sin\vartheta.$$

Příklad 3.23. Vypočítejte dané integrály pomocí vhodné transformace:

1.
$$\iiint\limits_{\Omega} z\cdot\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \qquad \Omega\colon x^2+y^2\le 2y, 0\le z\le \tfrac{1}{2},$$

2.
$$\iiint\limits_{\Omega} xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \qquad \Omega\colon x^2+y^2+z^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0.$$

Řešení:

1. Zkoumejme množinu Ω, podle jejího tvaru zvolíme vhodnou transformaci. První nerovnost, kterou je dána množina Ω, lze upravit do tvaru $x^2+(y-1)^2\le 1$, což je zřejmě rovnice kruhu v rovině $z=0$ se středem v bodě $[0,1,0]$ a poloměrem 1. Množina Ω je tedy válec o poloměru 1 se středem dolní podstavy v bodě $[0,1,0]$ a středem horní podstavy v bodě $\left[0,1,\frac{1}{2}\right]$. Integrál proto transformujeme do cylindrických souřadnic. Pro integrační proměnné φ a z odtud platí $0\le\varphi\le\pi$, $0\le z\le\frac{1}{2}$. Pro integrační proměnnou r platí $0\le r\le h(\varphi)$, kde $h(\varphi)$ je funkce proměnné φ, jejíž předpis získáme „transformováním“ rovnice horní podstavy válce do cylindrických souřadnic: $r\le 2\sin\varphi \Rightarrow h(\varphi)=2\sin\varphi$. Můžeme dosadit a vypočítat integrál:

$$\iiint\limits_{\Omega} z\cdot\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\sin\varphi} zr^2\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \frac{8}{3}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\pi} z\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z =$$
$$= \frac{8}{3}\cdot\frac{4}{3}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} z\,\mathrm{d}z = \frac{8}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{4}{9}.$$

2. První nerovnost, kterou je dána množina Ω, zadává kouli o poloměru 1 se středem v počátku. Další nerovnosti z této koule vybírají jen její část, a sice osminu ležící

v prvním oktantu. Integrál proto transformujeme do sférických souřadnic. Pro integrační proměnné bude platit $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$. Můžeme dosadit a vypočítat integrál (označme jej I):

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \cos\varphi \sin\vartheta \cdot r \sin\varphi \sin\vartheta \cdot r \cos\vartheta \cdot r^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^5 \cos\varphi \sin\varphi \sin^3\vartheta \cos\vartheta \, \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \sin^3\vartheta \cos\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{1}{12} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\vartheta \cos\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{48}.$$

3.3 Aplikace

Věta 3.24. *Nechť A je rovinná (resp. prostorová) měřitelná množina. Z definic 1.6 a 1.15 (resp. z definic 1.19 a 1.29) vyplývá, že pro* obsah $\mathrm{m}_2(A)$ *(resp.* objem $\mathrm{m}_3(A)$*) této množiny platí*

$$\mathrm{m}_2(A) = \iint_A 1 \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y,$$

resp.

$$\mathrm{m}_3(A) = \iiint_A 1 \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z,$$

Věta 3.25. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je ohraničená oblast, jejíž hranice je sjednocením konečně mnoha regulárních křivek. Předpokládejme, že funkce $f(x,y)$ má spojité a ohraničené první parciální derivace na Ω a je spojitá na uzávěru $\overline{\Omega}$.*
Označme $S = \{[x,y,f(x,y)] \in \mathbb{R}^3 \colon (x,y) \in \overline{\Omega}\}$ její graf. Pak pro obsah tohoto grafu platí:

$$\mathrm{m}_2(S) = \iint_\Omega \sqrt{1 + \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]^2} \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Příklad 3.26. Odvoďte:

1. Vzorec pro obsah obdélníka o délkách stran a, b.
2. Vzorec pro obsah kruhu o poloměru R.
3. Vzorec pro obsah množiny, která je sjednocením elipsy o délkách poloos a, b a její vnitřní oblasti.

Řešení:

1. Obdélník je rovinná měřitelná množina. Umístíme jej do prvního kvadrantu kartézské soustavy souřadnic tak, že jeden z jeho vrcholů leží v počátku a strany jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Pro obsah S obdélníka potom platí:

$$S = \iint\limits_{\text{obdélník}} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^b \int\limits_0^a 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a \int\limits_0^b 1\,\mathrm{d}y = ab.$$

Výsledek: $S = ab$.

2. Kruh je rovinná měřitelná množina. Umístíme jej do kartézské soustavy souřadnic tak, že bude mít střed v počátku. Jeho analytické vyjádření potom bude $K\colon x^2 + y^2 \leq R^2$. Integrál $\iint_K 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ vypočítáme transformací do polárních souřadnic. Pro integrační proměnné zřejmě platí $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Můžeme dosadit a vypočítat integrál:

$$S = \iint\limits_K 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{R^2}{2} \int\limits_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi = \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi = \pi R^2.$$

Výsledek: $S = \pi R^2$.

3. Jedná se o rovinnou měřitelnou množinu, označme si ji E. Elipsu umístíme do kartézské soustavy souřadnic tak, že její střed bude ležet v počátku, hlavní poloosa a na ose x a vedlejší poloosa b na ose y. Analytické vyjádření množiny E potom bude $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$. Integrál $\iint_E 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ vypočítáme transformací do zobecněných polárních souřadnic. Pro integrační proměnné platí $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$, kde horní mez proměnné r se získala „transformací" rovnice množiny E do zobecněných polárních souřadnic. Můžeme dosadit a vypočítat integrál:

$$S = \iint\limits_E 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 abr\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = ab\,\frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi = ab\,\frac{1}{2} \cdot 2\pi = ab\pi.$$

Výsledek: $S = ab\pi$.

Příklad 3.27. Odvoďte:

1. Vzorec pro objem koule o poloměru R.

2. Vzorec pro objem rotačního kužele o poloměru podstavy R a výšce H.

3. Vzorec pro obsah kulové plochy o poloměru R.

Řešení:

1. Koule je prostorová měřitelná množina. Označme si ji U. Kouli umístíme do kartézské soustavy souřadnic tak, že její střed bude ležet v počátku. Analytické vyjádření množiny U potom bude $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$. Integrál $\iiint_U 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ vypočítáme transformací do sférických souřadnic. Pro integrační proměnné zřejmě platí $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$. Můžeme dosadit a vypočítat integrál:

$$V = \iiint\limits_U 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R r^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \frac{R^3}{3} \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{R^3}{3} \int\limits_0^\pi \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = 2\pi \cdot \frac{R^3}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Výsledek: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

2. Rotační kužel je prostorová měřitelná množina. Označme si ji L. Kužel umístíme do kartézské soustavy souřadnic tak, že bude mít vrchol v počátku a střed podstavy bude ležet na kladné části osy z. Analytické vyjádření množiny L potom bude $\left(\frac{H}{R}\right)^2 x^2 + \left(\frac{H}{R}\right)^2 y^2 \leq z^2$. Integrál $\iiint_L 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ vypočítáme transformací do cylindrických souřadnic. Pro integrační proměnné bude platit $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq$ $\leq H$, $0 \leq r \leq z\frac{R}{H}$, kde horní mez proměnné r se získala „transformací“ rovnice množiny L do cylindrických souřadnic. Můžeme dosadit a vypočítat integrál:

$$V = \iiint\limits_L 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{H} \int\limits_0^{z\frac{R}{H}} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi = \frac{R^2}{2H^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{H} z^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{R^2}{2H^2} \cdot \frac{H^3}{3} \int\limits_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi = \frac{R^2}{2H^2} \cdot \frac{H^3}{3} \cdot 2\pi = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Výsledek: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

3. Postupujme podle věty 3.25. Kulovou plochu umístíme do kartézské soustavy souřadnic tak, že bude mít střed v počátku. Její analytické vyjádření potom bude $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Hledejme obsah poloviny kulové plochy, která se nachází v poloprostoru $z \geq 0$. Oblastí Ω potom bude kružnice o rovnici $x^2 + y^2 = R^2$, a funkce $f(x, y)$ bude mít předpis $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Oblast Ω i funkce $f(x, y)$ splňují

předpoklady věty 3.25. Pro hledaný obsah kulové plochy bude platit:

$$
\begin{aligned}
2S &= \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + \left[\frac{\partial\left(\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial\left(\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)}{\partial y}\right]^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right]^2 + \left[\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right]^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= \iint\limits_{\Omega} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Tento integrál vypočítáme transformací do polárních souřadnic:

$$
2S = \iint\limits_{\Omega} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = R \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{R} \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\, \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 2\pi R^2.
$$

Výsledek: $S = 4\pi R^2$.

Literatura

[1] DOŠLÁ, Zuzana, DOŠLÝ, Ondřej. *Metrické prostory: teorie a příklady*, 2. přeprac. vyd. Brno: nakl. MU, 2000. 83 s. ISBN 80-2101-328-1.

[2] FILIPEC, Zdeněk, PLCH, Roman. *Maple a JavaView*, PDF dokument, dostupné z `http://www.am.vsb.cz/sarmanova/publikace/clzivy.pdf`

[3] HOŠKOVÁ, Šárka, KUBEN, Jaromír, RAČKOVÁ, Pavlína. *Integrální počet funkcí jedné proměnné*, 2006, dostupné z `http://www.math.muni.cz/~plch/ip.pdf`.

[4] HOŠKOVÁ, Šárka, KUBEN, Jiří, RAČKOVÁ, Pavlína. *Integrální počet funkcí více proměnných*, 1. vyd. Brno: nakl. UO, 2005, 140 s. ISBN 80-7231-031-3.

[5] KALAS, Josef, KUBEN, Jaromír. *Integrální počet funkcí více proměnných*, 1. vyd., Brno: nakl. MU, 2009, 272 s. ISBN 978-80-210-4975-8.

[6] KARÁSEK, Jiří. *Matematika II*, 2. vyd. Brno: PC-DIR. spol. s r. o., 1995, 214 s. ISBN 80-214-0714-X

[7] *Katalog předmětů v IS MU*, `http://is.muni.cz/predmety/katalog.pl`

[8] LAVICKÝ, Tomáš. *Tvorba a využívanie školských testov: učebný text pre PVPZ a PV*, PDF dokument, dostupné z `http://www.mcpo.sk/downloads/Publikacie/PrirodPred/PPCHE200501.pdf`

[9] MUSIL, Vít. *Prezentace matematické grafiky na webu s programem JavaView (Integrální počet funkcí více proměnných): diplomová práce.* Brno: Masarykova univerzita, Fakulta přírodovědecká, 2007. 60 l., Vedoucí diplomové práce: Roman Plch.

[10] PLCH, Roman, ŠARMANOVÁ, Petra, SOJKA, Petr. *Integrální počet funkcí více proměnných: Interaktivní sbírka příkladů a testových otázek*, PDF dokument, dostupné z `http://www.math.muni.cz/~plch/main/maple/sbirka/f.pdf`.

[11] PRŠANCOVÁ, Monika. *Databáze testových otázek v IS MU: Diferenciální rovnice: diplomová práce.* Brno: Masarykova univerzita, Fakulta přírodovědecká, 2009. 55 l., Vedoucí diplomové práce: Roman Plch.

[12] STANĚK, Miroslav. [online] *Testy – informace pro každého*, poslední revize 8. 5. 2010 [cit. 2010-03-04]. Dostupné z `http://mstanek.webpark.cz/testy.html`