A New Category? Domains, Spaces and Equivalence Relations

Jan Paseka
zpracováno na základě článku Dany S. Scotta

School of Computer Science
Carnegie Mellon University

13. března 1997

Abstrakt

Motivačními kategoriemi pro tuto přednášku jsou kategorie SET množin a TOP topologických prostorů, které mají mnogé dobré uzávěrové vlastnosti - jsou *úplné, resp. koúplné* tj. mají všechny limity resp. kolimity, jsou *well-powered resp. co-well-powered* tj. pro každý objekt B existuje množina monomorfismů $m_i : A_i \to B$ (resp. epimorfismů $e_i : B \to A_i$), $i \in I$ tak, že každý monomorfismus $m : A \to B$ (epimorfismus $m : B \to A$) je ekvivalentní nějakému m_i (e_i) tj. systémy podobjektů a kvocientů lze reprezentovat pomocí množin. Přito SET lze považovat za úplnou podkategorii TOP a zapomínající funktor $\mathcal{F} : TOP \to SET$ zachovává limity a kolimity, ale nereflektuje je. Kategorie SET je kartézsky uzavřená tj. máme adjunkci

$$\frac{L \times M \to N}{L \to N^M}.$$

Kategorie TOP přitom kartézsky uzavřená není, je nutné se omezit na vhodné podkategorie nebo ji naopak vhodně rozšířit.

V předneseném referátu se budeme věnovat zavedení nové kategorie EQU za účelem navržení vhodného modelu pro λ-kalkulus. To budou tzv. *ekvilogické prostory* (topologické prostory opatřené relací ekvivalence) spolu s *ekvivariantními zobrazeními* (tj. třídami ekvivalence množiny všech spojitých zobrazení zachovávajích relaci ekvivalence na ekvilogickém prostoru). Přitom kategorie TOP je úplná podkategorie EQU.

Nejprve se budeme detailně věnovat zkoumání T_0 topologických prostorů a algebraických svazů, pak budeme studovat některé vlastnosti EQU a jejích podkategorií.

1 T_0-prostory a algebraické svazy

Topologický prostor je uspořádaná dvojice $\mathcal{T} = (T, \Omega_{\mathcal{T}})$, kde T je množina bodů a $\Omega_{\mathcal{T}}$ systém otevřených množin $\mathcal{T}$. Označujeme pak $T = |\mathcal{T}|$, pro $x \in |\mathcal{T}|$ definujeme *filtr okolí bodu* x jakožto $\mathcal{T}(x) = \{U \in \Omega_{\mathcal{T}} : x \in U\}$. Topologický prostor je T_0, jestliže $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(y)$ implikuje $x = y$ pro všechny body $x, y \in |\mathcal{T}|$.

Specializační uspořádání na $\mathcal{T}$ je definováno jakožto

$$x \leq_{\mathcal{T}} y \text{ právě, když } \mathcal{T}(x) \subseteq \mathcal{T}(y)$$

všechny body $x, y \in |\mathcal{T}|$. Přitom, je-li $(T, \leq)$ uspořádaná množina, lze na T definovat topologii horních množin tj. množin tvaru $X = \uparrow X$.

Uvažme nyní úplný svaz $\mathcal{L} = (L, \leq_{\mathcal{L}})$. Píšeme opět $\mathcal{L} = L$ a $\bigvee, \bigwedge, \vee, \wedge$ pro svazové operace suprema a infima. Přitom prvek $c \in |\mathcal{L}|$ se nazývá *kompaktní*, jestliže pro každou podmnožinu $S \subseteq |\mathcal{L}|$, $c \leq \bigvee S$ existuje konečná podmnožina $S_0 \subseteq S$ tak, že $c \leq \bigvee S_0$. Úplný svaz se nazývá *algebraický*, jestliže je každý prvek supremem kompaktních prvků ležících pod ním. Platí tedy, že pro $x, y \in |\mathcal{L}|$ a pro $c \in \mathcal{K}(\mathcal{L})$, $c \leq x$ právě tehdy, když $c \leq y$ implikuje, že $x = y$. *Algebraický uzávěrový systém* na množině A je podmnožina $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$ uzavřená na libovolné průniky a usměrněná sjednocení.

Příkladem algebraických uzávěrových systémů je svaz podgrup grupy, svaz okruhových ideálů, svaz podprostorů lineárního vektorového prostoru. Přitom uzavřené podmnožiny topologického prostoru netvoří algebraický uzávěrový systém - je porušena podmínka uzavřenosti na usměrněná sjednocení. Ke každému algebraickému uzávěrovému systému $\mathcal{C}$ na množině A je přidružen uzávěrový operátor $C : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ tak, že $C(B) = \{D \in \mathcal{C} : B \subseteq D\}$. Zároveň lze dokázat, že každý algebraický svaz je izomorfní nějakému algebraickému uzávěrovému systému.

Buď $\mathcal{L}$ úplný svaz. Σ-*topologie* (*Scottova topologie*) $\Sigma_{\mathcal{L}}$ na $\mathcal{L}$ je definována jakožto systém podmnožin $U \subseteq |\mathcal{L}|$ tak, že $U = \uparrow U$ a pro $S \subseteq |\mathcal{L}|$, $\bigvee S \in U$ máme $\bigvee S_0 \in U$ pro nějakou konečnou podmnožinu $S_0 \subseteq S$.

Platí pak jednoduchý vztah mezi Scottovou topologií a specializačním uspořádáním na úplném svazu.

Věta 1.1 *Buď $\mathcal{L}$ úplný svaz. Pak dvojice $(|\mathcal{L}|, \Sigma_{\mathcal{L}})$ je T_0 prostor, jehož specializační uspořádání je právě $\leq_{\mathcal{L}}$.*

Důkaz. Evidentně, $\Sigma_{\mathcal{L}}$ je uzavřená na libovolné sjednocení a konečné průniky. Abychom ověřili podmínku T_0, podívejme se na množinu

$$\{y \in |\mathcal{L}| : y \not\leq x\} \in \Sigma_{\mathcal{L}}.$$

Předpokládejme, že $y \not\leq x$. Pak $x \notin \{z \in |\mathcal{L}| : z \not\leq x\} \in \Sigma_{\mathcal{L}}(y)$. tj. $\Sigma_{\mathcal{L}}(x) \neq \Sigma_{\mathcal{L}}(y)$. Protože Scottově otevřené množiny jsou horní, je nutně $\leq_{\mathcal{L}}$ obsažené v specializačním uspořádání. Obráceně, pokud $x \not\leq_{\mathcal{L}} y$, je i $x \not\leq y$ tj. obě uspořádání jsou totožná. ▮

Kategorie $\mathcal{C}Lat$ úplných svazů má za objekty úplné svazy a za morfismy Scottově spojité funkce tj. monotonní zobrazení zachovávající usměrněná suprema. Máme-li potenční množinu $\mathcal{P}(A)$, odpovídající $\Sigma_{\mathcal{P}(A)}$ se skládá z množin mající „konečný charakter" tj. $U \in \Sigma_{\mathcal{P}(A)} \iff$ pro všechny podmnožiny $X \subseteq A$ platí:

$$X \in U \iff X_0 \in U,\ X_0 \text{ je nějaká konečná podmnožina } X.$$

To ale není nic jiného, než že $\Sigma_{\mathcal{P}(A)}$ je součinová topologie na $\mathbf{2}^A$, kde $\mathbf{2} = (\{0,1\}, \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\})$.

Věta 1.2 Věta o vložení *Buď $\mathcal{T}$ T_0 prostor. Pak zobrazení $\varepsilon_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \to \mathcal{P}(\Omega_{\mathcal{T}})$ definované předpisem $\varepsilon_{\mathcal{T}}(x) = \mathcal{T}(x)$ je topologické vložení.*

Důkaz. Protože je $\mathcal{T}$ T_0, jedná se o injekci. Ověřme, že tato injekce je spojitá. Stačí zřejmě prověřit, že pro každou elementární otevřenou podmnožinu $\mathcal{V}$ v $\mathcal{P}(\Omega_{\mathcal{T}})$ je množina $\varepsilon_{\mathcal{T}}^{-1}(\mathcal{V})$ otevřená v $\mathcal{T}$. Položme $\mathcal{U} = \{U_0, \ldots, U_{n-1}\} \subseteq \Omega_{\mathcal{T}}$. To nám určuje otevřenou podmnožinu v $\mathcal{P}(\Omega_{\mathcal{T}})$:

$$\mathcal{V} = \{\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\Omega_{\mathcal{T}}) : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}\}.$$

Přitom $\varepsilon_{\mathcal{T}}^{-1}(\mathcal{V}) = \{x \in |\mathcal{T}| : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}(x)\} = \bigcap_{i=0}^{n-1} U_i \in \Omega_{\mathcal{T}}$. Přitom všechny otevřené množiny jsou sjednoceními takovýchto elementárních otevřených množin tj. $\varepsilon_{\mathcal{T}}$ je spojité. ▮

Věta 1.3 Věta o rozšíření *Buď $\mathcal{X}$ podprostor topologického prostoru $\mathcal{Y}$. Je-li zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{P}(A)$ spojité, má funkce f spojité rozšíření $\overline{f} : \mathcal{Y} \to \mathcal{P}(A)$.*

Důkaz. Je-li A jednoprvková množina, je tvrzení evidentní. Totiž pak $\mathcal{P}(A) \simeq \mathbf{2}$ a spojitá funkce $f : X \to \mathbf{2}$ nám určuje otevřenou podmnožinu X a naopak. Tedy máme dokázat, že každá otevřená množina podprostoru $\mathcal{X}$ je zúžením nějaké otevřené podmnožiny prostoru $\mathcal{Y}$, ale to je přesně definice podprostoru. Evidentně, tvrzení bude platit i pro součin potenčních prostorů. Protože je $\mathcal{P}(A)$ homeomorfní se součinem prostorů $\mathcal{P}(\{a\})$, $a \in A$, platí věta i pro $\mathcal{P}(A)$.

Poznamenejme, že spojité rozšíření $\overline{f}$ lze definovat jakožto:

$$\overline{f}(y) = \bigcup\{\bigcap\{f(x) : x \in U \cap |\mathcal{X}|\} : U \in \mathcal{Y}(y)\}$$

pro všechna $y \in |\mathcal{Y}|$.▮

Poznamenejme, že *spojitá uzávěrová operace* $C : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ je spojitá funkce taková, že $\mathbf{I}_{\mathcal{P}(A)} \subseteq C = C \circ C$.

Věta 1.4 *Buď $C : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ spojitá uzávěrová operace. Pak* $\mathrm{Fix}(C) = \mathrm{Im}(C)$ *je algebraický uzávěrový systém.*

Věta 1.5 *Systém $(\mathcal{L} \to \mathcal{M})$ všech spojitých funkcí z jednoho úplného svazu $\mathcal{L}$ do úplného svazu $\mathcal{M}$ je úplný svaz vzhledem k uspořádání po bodech.*

Důkaz. Pro $f, g \in (\mathcal{L} \to \mathcal{M})$ definujme

$$f \leq_{(\mathcal{L}\to\mathcal{M})} g \iff \forall x \in |\mathcal{L}|. f(x) \leq_{\mathcal{M}} g(x).$$

Buď F množina spojitých funkcí. Klademe, pro $x \in |\mathcal{L}|$,

$$(\bigvee_{(\mathcal{L}\to\mathcal{M})} F)(x) = \bigvee_{\mathcal{M}}\{f(x) : f \in F\}.$$

Evidentně, $\bigvee_{(\mathcal{L}\to\mathcal{M})} F$ je spojitá funkce, která je nejmenší horní závora množiny F.
▮

Věta 1.6 *Kategorie $\mathcal{C}Lat$ úplných svazů a spojitých funkcí je kartézsky uzavřená.*

Důkaz. Buď $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ úplné svazy. Pak máme ukázat, že máme vzájemně jednoznačnou korespondenci

$$\frac{\mathcal{L} \times \mathcal{M} \to \mathcal{N}}{\mathcal{L} \to (\mathcal{M} \to \mathcal{N})}.$$

Definujme zobrazení $\Lambda : (\mathcal{L} \times \mathcal{M} \to \mathcal{N}) \to (\mathcal{L} \to (\mathcal{M} \to \mathcal{N}))$ předpisem

$$\Lambda(f)(x)(y) = f(\langle x, y\rangle),$$

pro $f \in \mathcal{L} \times \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, $x \in |\mathcal{L}|$ a $y \in |\mathcal{N}|$. Pak $\Lambda(f) \in \mathcal{L} \to (\mathcal{M} \to \mathcal{N})$. Podobně definujme zobrazení $\Gamma : (\mathcal{L} \to (\mathcal{M} \to \mathcal{N})) \to (\mathcal{L} \times \mathcal{M} \to \mathcal{N})$ předpisem

$$\Gamma(g)(\langle x, y\rangle) = g(x)(y)$$

pro $g \in \mathcal{L} \to (\mathcal{M} \to \mathcal{N})$ $\langle x, y\rangle \in |\mathcal{L}| \times |\mathcal{N}|$. Pak $\Gamma(g) \in \mathcal{L} \times \mathcal{M} \to \mathcal{N}$. ▮

Pro množinu A označíme A^* jakožto disjunktní sjednocení všech konečných kartézských mocnin A; tj.

$$A^* := \coprod_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Věta 1.7 *Funkční prostor $(\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B))$ je retrakt potenční množiny $\mathcal{P}(A^* \times B)$. Retrakce je pak spojitá uzávěrová operace.*

Důkaz. Nechť $f \in (\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B))$. Položme

$$\Phi(f) := \{\langle\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle, y\rangle : y \in f(\{x_0, \ldots, x_{n-1}\})\}.$$

Snadno se ověří, že $\Phi : (\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)) \to \mathcal{P}(A^* \times B)$ je spojité. Totiž, je-li f_i, $i \in I$ usměrněný systém prvků z $(\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B))$, máme $\langle\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle, y\rangle \in \Phi\left(\bigvee^{\uparrow} f_i\right)$ $\iff y \in \bigcup^{\uparrow}_{i\in I} f_i(\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}) \iff$ existuje $i_0 \in I$ tak, že $y \in f_{i_{i_0}}\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ $\iff$ existuje $i_0 \in I$ tak, že $\langle\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle, y\rangle \in \Phi(f_{i_0}) \iff \langle\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle, y\rangle \in \bigcup^{\uparrow}_{i\in I} \Phi(f_i)$.

Podobně máme spojité zobrazení $\Psi : \mathcal{P}(A^* \times B) \to (\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B))$ definované předpisem

$$\Psi(F)(X) = \{y : \exists x \in X^*.\langle s, y\rangle \in F\},$$

pro $F \subseteq A^* \times B$ a $X \subseteq A$. Protože množina je usměrněné sjednocení svých konečných podmnožin, je spojitá funkce $f \in (\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B))$ zcela určena funkčními hodnotami na konečných podmnožinách. Máme tedy

$$\Psi(\Phi(f)) = f.$$

Obráceně, snadno se ověří, že pro $F \subseteq A^* \times B$ máme

$$F \subseteq \Phi(\Psi(F)).$$

Nechť $\langle\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle, y\rangle \in F$. Pak $y \in \Psi(F)(\{x_0, \ldots, x_{n-1}\})$ tj. $\langle\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle, y\rangle \in \Phi(\Psi(F))$.

Celkem tedy je složené zobrazení $\Phi \circ \Psi$ spojitá uzávěrová operace, jehož obraz je izomorfní úplnému svazu $(\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B))$. ▌

Buď nyní $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ úplné algebraické svazy, $\mathcal{L} \simeq \mathrm{Fix}\mathcal{C}$, $\mathcal{C} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, $\mathcal{M} \simeq \mathrm{Fix}\mathcal{D}$, $\mathcal{D} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(B)$. Pak je funkční prostor $(\mathcal{L} \to \mathcal{M})$ izomorfní oboru hodnot zobrazení $\mathcal{E} : (\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)) \to (\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B))$, kde

$$\mathcal{E}(\mathcal{G}) = \mathcal{D} \circ \mathcal{G} \circ \mathcal{C}$$

pro $\mathcal{G} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$. Je tedy funkční prostor algebraických svazů algebraický svaz.

Věta 1.8 *Kategorie $\mathcal{A}Lat$ algebraických svazů a spojitých funkcí je kartézsky uzavřená kategorie.*

Na závěr poznamenejme, že kategorie $\mathcal{A}Lat$ je velmi hezká kategorie, ale je téměř zcela disjunktní od kategorie množin SET. Budeme se snažit zavést kartézsky uzavřenou kategorii, která bude obsahovat všechny výše zmíněné kategorie s mnoha dobrými vlastnostmi kategorie $\mathcal{A}Lat$.

2 Ekvilogické prostory

Definice. Kategorie *EQU ekvilogických prostorů* má za objekty struktury $\mathcal{E} = (|\mathcal{E}|, \Omega_{\mathcal{E}}, \equiv_{\mathcal{E}})$, kde $(|\mathcal{E}|, \Omega_{\mathcal{E}})$ je T_0-prostor, $(|\mathcal{E}|, \equiv_{\mathcal{E}})$ je ekvivalence. Morfismy této kategorie jsou třídy ekvivalencí spojitých zobrazení mezi ekvilogickými prostory $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$, které zachovávají ekvivalenci $\equiv$. Přitom dvě spojitá zobrazení f, g jsou ekvivalentní, jestliže

$$\forall x, y \in |\mathcal{E}|. x \equiv_{\mathcal{E}} y \Longrightarrow f(x) \equiv_{\mathcal{F}} g(y).$$

Pak říkáme, že třída $[f]$ je ekvivariantní zobrazení a píšeme $g \equiv_{\mathcal{E} \to \mathcal{F}} h$. Snadno se ověří, že se skutečně jedná o relaci ekvivalence (reflexivita plyne z toho, že f je spojité zobrazení zachovávající relaci $\equiv$, symetrie je zřejmá, tranzitivita plyne z tranzitivity $\equiv_{\mathcal{F}}$ a reflexivity $\equiv_{\mathcal{E}}$). Přitom složení ekvivariantních zobrazení $[f]$ a $[g]$ je ekvivariantní zobrazení $[f \circ g]$.

Poznamenejme, že relace ekvivalence ekvilogického prostoru má velmi málo společného s topologií.

Věta 2.1 *Kategorie EQU je úplná a koúplná.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, jak vypadají *součiny* $\prod \mathcal{E}_\alpha, \alpha \in \Lambda$. Součinem topologických prostorů $(|\mathcal{E}_\alpha|, \Omega_{\mathcal{E}_\alpha})$ je jejich kartézský součin opatřený součinovou topologií. Zároveň je součin relací ekvivalence $\equiv_\alpha$ opět relace ekvivalence $\prod \equiv_\alpha$. Projekce jsou evidentně spojité, zachovávají relaci ekvivalence a určují nám tedy ekvivariantní zobrazení $[\pi_\beta]$. Mějme nyní množinu ekvivariantních zobrazení $f_\beta : \mathcal{H} \to \mathcal{E}_\beta$, $\beta \in \Lambda$. Pomocí axiomu výběru existují spojitá zobrazení $g_\beta : |\mathcal{H}| \to |\mathcal{E}_\beta|$, $\beta \in \Lambda$, zachovávající relaci ekvivalence. Definujme zobrazení $g : |\mathcal{H}| \to \prod |\mathcal{E}_\beta|$ předpisem $\pi_\beta(g(h)) = g_\beta(h)$. Pak g je evidentně spojité. Nechť $x \equiv_{\mathcal{H}} y$. Pak $g_\beta(x) \equiv_{\mathcal{E}_\beta} g_\beta(y)$. Tedy i $g(x) \equiv_{\prod \mathcal{E}_\beta} g(y)$. Pak odpovídající ekvivariantní zobrazení $f = [g]$ je jednoznačně určené.

Popišme nyní *ekvalizátory*. Předpokládejme, že $[f], [g] : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ jsou ekvivariantní zobrazení, $f, g : |\mathcal{E}| \to |\mathcal{F}|$ jejich reprezentanti. Položme $G = \{x \in \mathcal{E} : f(x) = g(x)\}$. Definujme topologii $\Omega_{\mathcal{G}} = \{U \cap G : U \in \Omega_E\}$ a ekvivalenci $\equiv_{\mathcal{G}}$ jakožto restrikci $\equiv_{\mathcal{E}}$ na G. Pak máme spojité zobrazení $i : |\mathcal{G}| \to |\mathcal{E}|$, které evidentně zachovává ekvivalenci. Zejména tedy $[i] : \mathcal{G} \to \mathcal{E}$ splňuje $[i] \circ [f] = [i] \circ [g]$ a dává nám ekvalizátor. Totiž, je-li $[h] : \mathcal{H} \to \mathcal{E}$ ekvivariantní zobrazení tak, že $[h] \circ [f] = [h] \circ [g]$, máme speciálně $f(h(x)) = g(h(x))$ pro $x \in |\mathcal{H}|$ tj. existuje spojité zobrazení $d : |\mathcal{H}| \to |\mathcal{G}|$ tak, že $h = d \circ i$. Přitom d zachovává ekvivalenci. Zejména tedy existuje právě jedno ekvivariantní zobrazení $[d] : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ tak, že $[h] = [d] \circ [i]$.

Věnujme se nyní *součtům*. Součet topologických prostorů je právě disjunktní sjednocení, přičemž topologie je generována sjednocením příslušných topologií. Co se týče relace ekvivalence, poznamenejme, že sjednocení relací ekvivalence na disjunktních množinách je opět relace ekvivalence. Zbývající část je podobná jako pro součty.

Věnujme se nyní *koekvalizátorům*. Předpokládejme, že $[f], [g] : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ jsou ekvivariantní zobrazení, $f, g : |\mathcal{E}| \to |\mathcal{F}|$ jejich reprezentanti. Položme $G = F$. Definujme topologii $\Omega_{\mathcal{G}} = \Omega_F$ a ekvivalenci $\equiv_{\mathcal{G}}$ jakožto ekvivalenci generovanou relací $\{\langle f(x), g(x)\rangle : x \in |\mathcal{E}|\}$ a ekvivalencí $\equiv_{\mathcal{F}}$. Pak máme spojité zobrazení $\mathrm{id}_G : |\mathcal{F}| \to |\mathcal{G}|$, které evidentně zachovává ekvivalenci. Zejména tedy $[\mathrm{id}_G] : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ splňuje $[f] \circ [\mathrm{id}_G] = [g] \circ [\mathrm{id}_G]$ a dává nám koekvalizátor. Totiž, je-li $[h] : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ ekvivariantní zobrazení tak, že $[f] \circ [h] = [g] \circ [h]$, máme speciálně $h(f(x)) = h(g(x))$ pro $x \in |\mathcal{E}|$ tj. existuje spojité zobrazení $d : |\mathcal{G}| \to |\mathcal{H}|$ tak, že $h = [\mathrm{id}_G] \circ d$. Přitom d zachovává ekvivalenci. Zejména tedy existuje právě jedno ekvivariantní zobrazení $[d] : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ tak, že $[h] = [\mathrm{id}_G] \circ [d]$.

Celkem je tedy EQU úplná a koúplná kategorie. ▮

Poznamenejme, že EQU obsahuje kategorii relací ekvivalence EQRTotiž každou relaci na množině můžeme chápat jakožto jakožto diskrétní topologický prostor s touto relací ekvivalence. Zároveň lze pomocí axiomu výběru dokázat, že kategorie SET množin je *ekvivalentní* s kategorií EQR relací ekvivalence. Přitom ale není EQU ekvivalentní s TOP.

Definice. Kategorie $PEQU$ *parciálních ekvilogických prostorů* má za objekty struktury $\mathcal{A} = (|\mathcal{A}|, \Omega_{\mathcal{A}}, \equiv_{\mathcal{A}})$, kde $(|\mathcal{A}|, \Omega_{\mathcal{A}})$ je Scottova topologie na algebraickém svazu $\mathcal{A}$ a kde $(|\mathcal{A}|, \equiv_{\mathcal{A}})$ je parciální ekvivalence, reflexivní pouze na množině $\{x \in |\mathcal{A}| : (x, x) \in \equiv_{\mathcal{A}}$. Morfismy mezi parciálními ekvilogickými prostory jsou třídy ekvivalence spojitých zobrazení mezi algebraickými svazy, která zachovávají relaci parciální ekvivalence a pro které platí $f \equiv_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} f$. Přitom

$$f \equiv_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} g \iff \forall x, y \in |\mathcal{A}| x \equiv_{\mathcal{A}} y \Longrightarrow f(x) \equiv_{\mathcal{B}} g(y).$$

Pak říkáme, že třída $[f]$ je ekvivariantní zobrazení. Složení ekvivariantních zobrazení $[f]$ a $[g]$ je ekvivariantní zobrazení $[f \circ g]$.

Věta 2.2 *Kategorie EQU a $PEQU$ jsou ekvivalentní.*

Důkaz. Připomeňme, že dvě kategorie $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jsou ekvivalentní, jestliže máme dva funktory $S : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ a $T : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ tak, že funktory ST a $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ spolu s funktory TS a $\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}$ jsou přirozeně izomorfní. To je ale ekvivalentní tomu, že existuje funktor $S : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, který je plný a věrný a každý objekt $Y \in \mathcal{Y}$ je izomorfní $S(X)$ pro nějaký objekt $X \in \mathcal{X}$.

Přitom funktor $S : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je *plný*, jestliže pro každou dvojici objektů $X, X' \in \mathcal{X}$ a pro každý morfismus $g : S(X) \to S(X')$ existuje morfismus $f : X \to X'$ tak, že $g = S(f)$. Podobně, funktor $S : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je *věrný*, jestliže pro každou dvojici objektů $X, X' \in \mathcal{X}$ a pro každou dvojici morfismů $f_1, f_2 : X \to X'$ tak, že $S(f_1) = S(f_2)$ máme $f_1 = f_2$.

Definujme proto funktor restrikce $R : PEQU \to EQU$ následovně: $R(\mathcal{A}) = R(|\mathcal{A}|, \Omega_{\mathcal{A}}, \equiv_{\mathcal{A}}) = \mathcal{E} = (|\mathcal{E}|, \Omega_{\mathcal{E}}, \equiv_{\mathcal{E}})$, kde $|\mathcal{E}| = \{x \in |\mathcal{A}| : x \equiv_{\mathcal{A}} x\}, \Omega_{\mathcal{E}} = \{U \in |\mathcal{E}| : U \in \Omega_{\mathcal{A}}\}, \equiv_{\mathcal{E}} = \equiv_{\mathcal{A}} \cap |\mathcal{E}| \times |\mathcal{E}|$. Poznamenejme, že $x \equiv_{\mathcal{A}} y$ implikuje (z tranzitivity a symetrie) $x, y \in |\mathcal{E}|$. Dále klademe pro ekvivariantní zobrazení $[f] : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ v $PEQU$, $R([f]) = [f_{/|R(\mathcal{A})|}]$, $f_{/|R(\mathcal{A})|} : |R(\mathcal{A})| \to |R(\mathcal{B})|$ je evidentně korektně definováno, je spojité a zachovává relaci ekvivalence.

Dokažme nejprve, že R je věrný. Nechť $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in PEQU$, $[f_1], [f_2] : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ jsou ekvivariantní morfismy v $PEQU$ tak, že $R([f_1]) = R([f_2])$. Pak přímo z definice dostáváme, že $f_{1/|R(\mathcal{A})|} \equiv_{\mathcal{R}(\mathcal{A}) \to \mathcal{R}(\mathcal{B})} f_{2/|R(\mathcal{A})|}$ a protože se stačí omezit pouze na ekvivalentní prvky, které jsou implicitně obsaženy v $|R(\mathcal{A})|$, dostáváme okamžitě věrnost tj. $f_1 \equiv_{\mathcal{A} \to \mathcal{B}} f_2$.

Nyní ověřme, že funktor R je plný. Nechť $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in PEQU$, $[g] : R(\mathcal{A}) \to R(\mathcal{B})$ je ekvivariantní morfismus v EQU. Máme pak sestrojit ekvivariantní morfismus $[f] : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ v $PEQU$. Uvažme nejprve topologický prostor $\big(|R(\mathcal{A})|, \Omega_{R(\mathcal{A})}\big)$. Pak máme dle věty 1.2 a dle věty 1.3 spojité zobrazení $f_{\mathcal{A}} : |\mathcal{A}| \to \mathcal{P}(\Omega_{R(\mathcal{B})})$. Evidentně pak $f_{\mathcal{A}}(a) \in |\mathcal{B}|$ pro $a \in |\mathcal{A}|$, $f_{\mathcal{A}} : |\mathcal{A}| \to |\mathcal{B}|$ je spojité.

Na závěr, funktor R je surjektivní dle věty o vložení 1.2. Totiž, každý ekvilogický prostor $\mathcal{E}$ lze vložit do algebraického svazu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega_{\mathcal{E}})$. Na tomto svazu máme Scottovu topologii a relace ekvivalence se přirozeně definuje pouze na prvcích tvaru $\{x\}$, $x \in |\mathcal{A}|$. Pak $R(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$. ▌

Věta 2.3 *Kategorie EQU je kartézsky uzavřená.*

Důkaz. Stačí ověřit, že $PEQU$ je kartézsky uzavřená. Nechť tedy $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in PEQU$. Definujme $(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \in PEQU$ následovně:

1. $|(\mathcal{A} \to \mathcal{B})|$ je množina spojitých funkcí;

2. $\Omega_{(\mathcal{A} \to \mathcal{B})}$ je Σ-topologie na tomto algebraickém svazu;

3. $\equiv_{(\mathcal{A} \to \mathcal{B})}$ je parciální ekvivalence definovaná v předchozí definici ekvivalence.

Máme ukázat, že máme vzájemně jednoznačnou korespondenci

$$\frac{\mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}}{\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})}.$$

Ale protože kartézský součin i funkční prostor jsou algebraické svazy, stačí s využitím 1.6 ověřit, že izomorfismus mezi $(\mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C})$ a $(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C}))$ zachovává parciální ekvivalenci. Ale to je bezprostřední přepis definice. ▮

3 Další vlastnosti

Podobně jako SET lze i TOP plně a věrně vnořit do EQU. Totiž každý T_0-prostor lze opatřit relací identity, což je právě naše vnoření do EQU. Je třeba si uvědomit, že jsou zachovávány součiny a součty, ale už ne funkční prostory (např. TOP už není kartézsky uzavřená). Platí však následující:

Věta 3.1 *Pro každou nekonečnou podmnožinu A je prostor všech spojitých funkcí $(\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A))$ retraktem $\mathcal{P}(A)$ pomocí spojité uzávěrové operace. To stejné platí o součinovém prostoru $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$.*

Důkaz. Připomeňme, že $(\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A))$ je retrakt algebraického svazu $(\mathcal{P}(A^* \times A))$. Ale evidentně existuje bijekce mezi A a $A^* \times A$. Jsou tedy svazy $\mathcal{P}(A)$ a $(\mathcal{P}(A^* \times A))$ izomorfní. Zároveň je $(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A))$ izomorfní s $(\mathcal{P}(A + A))$, což je izomorfní s $\mathcal{P}(A)$. ▮

Z výše uvedeného jednoduchým propočtem plyne

Věta 3.2 *Pro každou nekonečnou podmnožinu A je kategorie všech relací ekvivalence na podprostorech prostoru $(\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A))$ subkartézsky uzavřená úplná podkategorie EQU.*