# 5. BÁZE A DIMENZE

## 5.1. Steinitzova věta a konečně rozměrné prostory

**Věta 1.** Steinitzova věta Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$. Jsou-li vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé a všechny patří do lineárního obalu $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m]$, pak $n \leq m$.

**Důkaz** Protože $\mathbf{u}_j \in [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m]$ pro každé $j \leq n$, existují $\mathbf{c}_j = (c_{1j}, \ldots, c_{mj})^T \in K^m$ tak, že

$$\mathbf{u}_j = c_{1j}\mathbf{v}_1 + \ldots + c_{mj}\mathbf{v}_m = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) \cdot \mathbf{c}_j.$$

Jinak řečeno

$$(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) \cdot \mathbf{C},$$

kde $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m \times n}$ je matice se sloupci $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$.

Předpokládejme, že $m < n$. Pak dle tvrzení 3.3 má homogénní soustava $\mathbf{C}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alespoň jedno řešení $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \neq \mathbf{0}$. Jednoduchým výpočtem dostáváme

$$\begin{aligned} x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_n\mathbf{u}_n &= (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) \cdot \mathbf{x} \\ &= (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} \\ &= (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

což je ve sporu s lineární nezávislostí vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$.

**Tvrzení 2.** Pro libovolný vektorový prostor $V$ jsou nasledující podmínky ekvivalentní:

*(i)* existuje konečná množina $X \subseteq V$ tak, že $[X] = V$;

*(ii)* každá lineárně nezávislá množina $Y \subseteq V$ je konečná.

Říkáme, že vektorový prostor $V$ je *konečně rozměrný*, pokud splňuje některou (tedy nutně obě) z ekvivalentních podmínek (i), (ii) právě dokázaného tvrzení. V opačném případě říkáme, že $V$ je *nekonečněrozměrný* vektorový prostor.

# 5.2. Báze a dimenze konečně rozměrného prostoru

Nechť $V$ je konečně rozměrný vektorový prostor. *Bází* prostoru $V$ nazýváme každou lineárně nezávislou uspořádanou $n$-tici $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ vektorů z $V$, která generuje celý prostor $V$. Říkáme pak, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ tvoří bázi prostoru $V$.

Nasledující tvrzení je přímým důsledkem věty 4.10, která říká:

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$, pričemž vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé. Potom z množiny $\{1, \ldots, m\}$ můžeme vybrat indexy $i_1 < \ldots < i_k$ tak, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_{i_1}, \ldots, \mathbf{v}_{i_k}$ jsou lineárně nezávislé a generují stejný podprostor jako vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$..

**Tvrzení 3.** Nechť $V$ je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

*(a)* libovolnou lineárně nezávislou uspořádanou $k$-tici $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ vektorů z $V$ můžeme doplnit do nějaké báze $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \ldots, \mathbf{u}_n)$ prostoru $V$;

*(b)* z libovolné generující uspořádané $m$-tice $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ vektorů z $V$ můžeme vybrat nějakou bázi $(\mathbf{v}_{i_1}, \ldots, \mathbf{v}_{i_n})$ prostoru $V$.

**Věta 4.** Nechť $V$ je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

*(a)* $V$ má alespoň jednu bázi;

*(b)* libovolné dvě báze prostoru $V$ mají stejný počet prvků.

Právě dokázaná věta nám umožňuje korektně definovat *dimenzi* nebo též *rozměr* konečně rozměrného vektorového prostoru $V$ jako počet prvků jeho libovolné báze. Dimenzi vektorového prostoru $V$ značíme $\dim V$. Pokud $\dim V = n$, říkáme, že $V$ je $n$*-rozměrný* vektorový prostor. Pokud $V$ je nekonečně rozměrný prostor, klademe $\dim V = \infty$. V případě, že bude potřebné zdůraznit úlohu číselného tělesa $K$, budeme používat podrobnější označení $\dim_K V$.

Tedy $V$ je konečně rozměrný právě tehdy, když $\dim V < \infty$.

**Tvrzení 5.** Nechť $\dim V = n$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$. Potom libovolné dvě z následujících podmínek implikují třetí:

*(i)* vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ jsou lineárně nezávislé;

*(ii)* $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m] = V$;

*(iii)* $m = n$.

To kromě jiného znamená, že na ověření, zda $n$ vektorů $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ tvoří bázi $n$-rozměrného vektorového prostoru $V$, stačí ověřit jen jednu (a to libovolnou) z podmínek (i), (ii).

# 5.3. Souřadnice vektoru vzhledem na danou bázi

Následující věta je speciálním případem věty 4.8.

**Věta 6.** Vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ tvoří bázi vektorového prostoru $V$ právě tehdy, když každý vektor $\mathbf{x} \in V$ můžeme jednoznačně vyjádřit ve tvaru lineární kombinace $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$.

Uvědomme si, že existence aspoň jednoho vyjádření $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ je ekvivalentní s podmínkou, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ generují $V$. Jednoznačnost tohoto vyjádření je zase ekvivalentní s lineární nezávislostí vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Tedy $\alpha = (\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n})$ je bází $V$ tehdy a jen tehdy, když pro každé $\mathbf{x} \in V$ existuje právě jedno $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in K^n$ tak, že

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \alpha \cdot \mathbf{c}.$$

Tento jednoznačně určený sloupcový vektor $\mathbf{c} \in K^n$ budeme nazývat *souřadnice vektoru* $\mathbf{x}$ *vzhledem na bázi* $\alpha$ a označovat

$$\mathbf{c} = (\mathbf{x})_\alpha.$$

Tedy každá báze $\alpha$ v $n$-rozměrném vektorovém prostoru $V$ definuje *souřadnicové zobrazení* $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\alpha$ z $V$ do sloupcového vektorového prostoru $K^n$.

**Tvrzení 7.** Nechť $\alpha = (\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_n})$ je báze konečně rozměrného vektorového prostoru $V$. Potom příslušné souřadnicové zobrazení $V \to K^n$ je bijektívní a zachovává lineární kombinace, t. j. pro libovolná $a, b \in K$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí

$$(a\mathbf{x} + b\mathbf{y})_\alpha = a(\mathbf{x})_\alpha + b(y)_\alpha.$$

K němu inverzní zobrazení $K^n \to V$ je dané předpisem $\mathbf{c} \mapsto \alpha \cdot \mathbf{c}$.

V označení posledního tvrzení tedy pro libovolné $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{c} \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = \alpha \cdot (\mathbf{x})_\alpha, \qquad (\alpha \cdot \mathbf{c})_\alpha = \mathbf{c}.$$

První rovnost ukazuje, jak je možno vektor $\mathbf{x}$ rekonstruovat z dané báze $\alpha$ a jeho souřadnic $(\mathbf{x})_\alpha$ v této bázi; druhá, že souřadnice lineární kombinace $\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i$ v báze $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ tvoří vektor $(c_1, \ldots, c_n)^T$.

Právě zavedené souřadnice můžeme nazvat *sloupcovými souřadnicemi* vzhledem k dané bázi. Podobným způsobem můžeme zavést i *řádkové souřadnice* a dokázat pro ně analogická tvrzení jako pro sloupcové.

## Příklad 8.

Označme $\mathbf{e}_i^{(n)} = \mathbf{s}_i(\mathbf{I}_n) \in K^n$ sloupcový vektor skládající ze samých nul, mimo $i$-té složky, která je 1. Potom $\varepsilon^{(\mathbf{n})} = (\mathbf{e}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{n})}, \ldots, \mathbf{e}_{\mathbf{n}}^{(\mathbf{n})})$ je báze sloupcového vektorového prostoru $K^n$. Nazýváme ji *kanonickou bází* tohoto prostoru. Můžeme ji ztotožnit s jednotkovou maticí $\mathbf{I}_n$. Občas budeme horní index $(n)$ vynechávat a příslušnou bázi označovat stručně $\varepsilon = (\mathbf{e}_{\mathbf{1}}, \ldots, \mathbf{e}_{\mathbf{n}})$. Pro libovolný vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n,$$

proto $(\mathbf{x})_\varepsilon = \mathbf{x}$, t. j. každý vektor $\mathbf{x} \in K^n$ splýva se svými vlastními souřadnicemi v kanonické bázi.

*Kanonická báze* řádkového vektorového prostoru $K^n$ je tvořená řádky jednotkové matice $\mathbf{I}_n$ a značíme ju stejně jako v předcházejícím případě $\varepsilon^{(\mathbf{n})} = (\mathbf{e}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{n})}, \ldots, \mathbf{e}_{\mathbf{n}}^{(\mathbf{n})})^{\mathbf{T}}$ nebo stručně $\varepsilon = (\mathbf{e}_{\mathbf{1}}, \ldots, \mathbf{e}_{\mathbf{n}})^{\mathbf{T}}$, jen s tím rozdílem, že $\varepsilon^{(\mathbf{n})} = \varepsilon$ sloupec vektorů a každé $\mathbf{e}_i$ je řádek skládající se ze samých nul, mimo $i$-té pozice, na které je 1.

**Věta 9.** Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $\dim K^n = n$.

## 5.4. Dimenze součtu a součinu vektorových prostorů

**Věta 10.** Nechť $S, T \subseteq V$ jsou konečně rozměrné lineární podprostory vektorového priestoru $V$. Potom

$$\dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T).$$

**Důsledek 11.** Nechť $S$, $T$ jsou lineární podprostory vektorového priestoru $V$. Potom $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, t. j. součet $S+T$ je direktní právě tehdy, když

$$\dim(S+T) = \dim S + \dim T.$$

**Tvrzení 12.** Nechť $V$, $W$ jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad číselným tělesem $K$. Potom pro dimenzi jejich přímého spučinu platí

$$\dim(V \times W) = \dim V + \dim W.$$