Věta 2.5 Rozdělení Bézierových křivkových segmetů

Každý bod $\mathbf{b}(t^*), t^* \in [0,1]$, *rozěluje Bézierův křivkový segment do dvou dílčích křivek. Tyto dílčí křivky jsou opět Bézierovy křivkové segmenty stejného stupně. Jejich Bézierovy body jsou určeny pomocnými body*

$$\mathbf{b}_0^0, \mathbf{b}_1^1, \ldots, \mathbf{b}_n^n$$

resp.

$$\mathbf{b}_n^n, \mathbf{b}_n^{n-1}, \ldots, \mathbf{b}_n^0$$

Casteljauova algoritmu pro bod t^*.

Důkaz

Označme $\mathbf{d}(t)$ Bézierův křivkový segment s Bézierovými body $\mathbf{b}_n^n, \mathbf{b}_n^{n-1}, \ldots, \mathbf{b}_n^0$. Stačí ověřit, že $\mathbf{d}(t) = \mathbf{b}(t + (1-t)t^*)$ pro všechna $t \in [0,1]$.
Přitom víme

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_n^{n-i} B_i^n(t) &= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-i} \mathbf{b}_{n-n+i+k} B_k^{n-i}(t^*) \right) B_i^n(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-i} \mathbf{b}_{i+k} B_k^{n-i}(t^*) \right) B_i^n(t) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_j \left(\sum_{\substack{0 \le i,k \\ i+k=j}} B_k^{n-i}(t^*) B_i^n(t) \right)
\end{aligned}$$

Nyní stačí dokázat

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{0 \le i,k \\ i+k=j}} B_k^{n-i}(t^*) B_i^n(t) &= \sum_{\substack{0 \le i,k \\ i+k=j}} \binom{n-i}{k} (t^*)^k (1-t^*)^{n-i-k} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\
&= \sum_{\substack{0 \le i,k \\ i+k=j}} \binom{n-i}{k} (t^*)^k (1-t^*)^{n-j} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_j (t + (1-t)t^*) \binom{n}{k} (1 - t - (1-t)t^*)^{n-i} \\
&= \sum_{\substack{0 \le i,k \\ i+k=j}} \frac{(n-i)!}{(n-i-k)!k!} \frac{n!}{(n-i)!i!} \frac{j!}{j!} (t^*)^k (1-t^*)^{n-j} t^i (1-t)^{n-i} \\
&= \sum_{\substack{0 \le i,k \\ i+k=j}} \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{j!}{k!i!} (t^*)^k (1-t^*)^{n-j} t^i (1-t)^{n-i} \\
&= \sum_{\substack{0 \le i,k \\ i+k=j}} \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{j!}{(j-i)!i!} (t^*)^{j-i} (1-t^*)^{n-j} t^i (1-t)^{n-i} \\
&= \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (t^*)^{j-i} (1-t^*)^{n-j} t^i (1-t)^{n-i}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{n}{j}(t^*)^j(1-t^*)^{n-j}(1-t)^n \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{1}{(t^*)^i} \frac{t^i}{(1-t)^i} 1^{j-i} \\
&= \binom{n}{j}(t+(1-t)t^*)^j(1-t-(1-t)t^*)^{n-j}
\end{aligned}
$$

Po dosazení do původního vztahu

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_j \left(\sum_{\substack{0 \le i,k \\ i+k=j}} B_k^{n-i}(t^*) B_i^n(t) \right) &= \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_j \binom{n}{j}(t+(1-t)t^*)^j(1-t-(1-t)t^*)^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_j B_j^n(t+(1-t)t^*)
\end{aligned}
$$