Věta 3.2 Vlastnosti racionálních Bézierových křivkových segmentů

2.<u>Vlastnosti konvexního obalu:</u>Křivkový segment leží v konvexním obalu Bézierových bodů. Zejména tedy leží i v konvexním obalu Bézierova polygonálního tahu.

Důkaz:

Vycházejme z definice konvexního obalu:

$$conv(x) = \{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i.\mathbf{x_i} : \sum \alpha_i = 1, \alpha_1 \geq 0, \mathbf{x_i} \in x\}$$

Chceme tedy dokázat, že : $\mathbf{b}(t) \in conv(\mathbf{b}_0, ..., \mathbf{b}_n)$

$\mathbf{b}^*(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{\beta_i \mathbf{b}_i}{\beta_i}.B_i^n(t) = \binom{\hat{\mathbf{b}^*}(t)}{\hat{b^*}(t)}$

Tedy : $\mathbf{b}^*(t) \in conv.(\binom{\beta_0 \mathbf{b}_o}{\beta_o}, ..., \binom{\beta_n \mathbf{b}_n}{\beta_n})$

$\hat{\mathbf{b}^*}(t) \in conv.(\beta_i \mathbf{b}_i)$

$\hat{\mathbf{b}^*}(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i.\beta_i.\mathbf{b}_i, \quad \sum \alpha_i = 1, \ \alpha_i \geq 0$

$\hat{b^*}(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i.\beta_i$

$\mathbf{b}(t) = \frac{\hat{\mathbf{b}^*}(t)}{\hat{b^*}(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i.\beta_i.\mathbf{b}_i}{\sum_{j=0}^{n} \alpha_j.\beta_j} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_i.\beta_i}{\sum_{j=0}^{n} \alpha_j.\beta_j}.\mathbf{b}_i$

$$Ale : \frac{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i.\beta_i}{\sum_{j=0}^{n} \alpha_j.\beta_j} = 1$$

A tím je důkaz hotov

<u>3.Vliv kontrolních bodů:</u> Vliv kontrolních bodů $\mathbf{b}_i$ má největší vliv na $\mathbf{b}(t)$ v případě, že t = i/n.

Ovšem tvrzení neplatí.

Důkaz neplatnosti:

Bézierův křivkový segment je tvaru: $\sum_{j=0}^{n} \binom{\beta_j \mathbf{b}_j}{\beta_j}.B_j^n(t)$

Jeho projekcí dostávám výraz : $\frac{\sum_{j=0}^{n} \beta_j.\mathbf{b}_j.B_j^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} \beta_i B_i^n(t)}$

Úpravou dostáváme výraz:$\frac{\beta_j.B_j^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} \beta_i.B_i^n(t)}.\mathbf{b}_j$

Maximum záleží pouze na výrazech, kde se vyskytuje t, tedy výraz β_j můžeme vynechat a výraz $B_j^n(t)$ dát do jmenovatele a potom hledáme maximum výrazu:

$$\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n}\beta_i.\binom{n}{i}.t^{i-j}.(1-t)^{n-i-(n-j)}} = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n}\beta_i.\binom{n}{i}.(\frac{t}{1-t})^{i-j}}$$

Tedy hledám minimum výrazu :$\sum\limits_{i=0}^{n}\beta_i.\binom{n}{i}.(\frac{t}{1-t})^{i-j}$

$0 \overset{t\to 0}{<} \frac{t}{1-t} \overset{t\to 1}{<} \infty$

Označíme si $\frac{t}{1-t}$ jako α a výraz zderivujeme podle α a položíme roven 0, abychom zjistili extrém (minimum) :

$$\sum_{i=0}^{n}\beta_i.\binom{n}{i}.(i-j).\alpha^{i-j-i} = 0$$

Existuje α_0, pro které je $f(\alpha_0)$ rovna nule:

$i = j \rightarrow 0$
$j > i \rightarrow -$
$j < i \rightarrow +$

A existuje jediné, neboť funkce je spojitá a rostoucí.

j = 0 :

$\beta_i = \frac{1}{\binom{n}{i}}$ $\quad ; f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \alpha + 1 \quad ; f(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2} + 1 \quad \Rightarrow$
$-\frac{1}{\alpha^2} + 1 = 0 \quad \alpha^2 = 1, \alpha = 1, \alpha \in (0, \infty)$

Dosadíme za α : $\alpha = \frac{t}{1-t} \Rightarrow 1 = 2t \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

Tedy pro j = 1 věta platí. Ale zkusme jinou volbu:

$\beta_o = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta_2 = 2$:

$f(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha + 2\alpha + 1$

$f(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha^2 + 2$

$-\frac{1}{2}\alpha^2 + 2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$
$\alpha = \frac{t}{1-t} \Rightarrow t = \frac{1}{3}$ Tedy obecně se t nerovná i/n.