Věta 2.7. 2.část: Vyšší derivace v koncových bodech

$$\frac{.d^p}{dt^p}\mathbf{b}(o) = \frac{n!}{(n-p)!}\Delta^p\mathbf{b}_0$$

$$\frac{d^p}{dt^p}\mathbf{b}(1) = \frac{n!}{(n-p)!}\Delta^p\mathbf{b}_{n-p}$$

závisí pouze na $\mathbf{b}_o, ..., \mathbf{b}_p$ příp. $\mathbf{b}_{n-p}, ..., \mathbf{b}_n$

$$\lim_{t^*\to 0^+}\frac{n!}{(n-p)!}\sum_{i=0}^{n-p}\Delta^p\mathbf{b}_i B_i^{n-p}(t^*) = \lim_{t^*\to 0^+}\frac{n!}{(n-p)!}\Delta^p\mathbf{b}_0(1-t^*) = \frac{n!}{(n-p)!}\Delta^p\mathbf{b_o}$$

$$\lim_{t^*\to 1^-}\frac{n!}{(n-p)!}\sum_{i=0}^{n-p}\Delta^k\mathbf{b}_i B_i^{n-p}(t^*) =$$

$$= \lim_{t^*\to 1^-}\frac{n!}{(n-p)!}\Delta^p\mathbf{b}_{n-p}^{n-p}(t^*) = \lim_{t^*\to 1^-}\frac{n!}{(n-p)!}\Delta^p\sum_{k=0}^{n-p}\mathbf{b}_k B_k^{n-p}(t^*) = \frac{n!}{(n-p)!}\Delta^p\mathbf{b}_{n-p}$$

Věta 2.7. 3.část: Bézierovy body jakožto funkce derivací v koncových bodech

$$\mathbf{b}_i = \sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{n!}{(n-p)!}\frac{d^k}{dt^k}\mathbf{b}(0) = \sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k\binom{i}{k}\frac{(n-k)!}{n!}\frac{d^k}{dt^k}\mathbf{b}(1)$$

Důkaz pro $\mathbf{b}_i = \sum\limits_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{n!}{(n-p)!}\frac{d^k}{dt^k}\mathbf{b}(0)$:

Důkaz provedeme matematickou indukcí. Nejprve dokažme pro $i = 0$:

$$\mathbf{b}_0 : \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}(0)$$

Předpokládejme, že tvrzení platí pro i a dokazujeme pro $i+1$.

Předpoklad: $\mathbf{b}_i = \sum\limits_{i=0}^{i}\binom{i}{k}\Delta^k\mathbf{b}_o$

Protože $\frac{d^k}{dt^k}\mathbf{b}(0) = \frac{n!}{(n-k)!}\Delta^k\mathbf{b}_o$, můžeme si pravou stranu rovnice napsat jako:

$$\sum_{k=0}^{i+1}\binom{i+1}{k}\Delta^k\mathbf{b}_o$$

což si můžeme rozdělit na tři části. Dále využijeme toho, že: $\Delta^{i+1}\mathbf{b}_0 = \Delta^i\mathbf{b}_1 - \Delta^i\mathbf{b}_0$

$$\sum_{k=0}^{i+1}\binom{i+1}{k}\Delta^k\mathbf{b}_o = \mathbf{b}_0 + \sum_{k=1}^{i}\left(\binom{i}{k}\Delta^k\mathbf{b}_o + \binom{i}{k-1}\Delta^k\mathbf{b}_o\right) + \Delta^i\mathbf{b}_1 - \Delta^i\mathbf{b}_0 =$$

Pozn. (*)

$$= \mathbf{b}_i + \sum_{k=1}^{i}\binom{i}{k-1}\Delta^k\mathbf{b}_o + \Delta^i\mathbf{b}_1 - \Delta^i\mathbf{b}_0 =$$

(zde po přeindexování dostaneme:)

$$= \mathbf{b}_i + \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} \Delta^{k+1}\mathbf{b}_o + \Delta^i\mathbf{b}_1 - \Delta^i\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_i + \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} \left(\Delta^k\mathbf{b}_1 - \Delta^k\mathbf{b}_0\right) + \Delta^i\mathbf{b}_1 - \Delta^i\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_i + \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1}$$

což jsme chtěli dokázat.

ad (*) - úprava binomických výrazů:

$$\binom{i}{k} + \binom{i}{k-1} = \frac{i!}{k!(i-k)!} + \frac{i!}{(k-1)!(i-k+1)!} =$$

$$= \frac{i!(i-k+1)! + i!k!}{(i-k)!(k-i)!k(i-k+1)} = \frac{i!(i-k+1+k)}{(i-k+1)!k!} = \frac{(i+1)!}{k!(i-k+1)!} = \binom{i+1}{k}$$

Důkaz pro $\mathbf{b}_i = \sum\limits_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{i}{k} \frac{(n-k)!}{n!} \frac{d^k}{dt^k}\mathbf{b}(1)$:
Opět matematickou indukcí vzhledem k n. Nejdříve ukažme, že tvrzení platí pro $i = n$

$$\mathbf{b}_n = \sum_{k=0}^{n-n} (-1)^k \frac{(n-k)!}{n!} \frac{d^k}{dt^k}\mathbf{b}(1) = (-1)^0 \frac{n!}{n!} \Delta^0 \mathbf{b}_n = \mathbf{b}_n$$

Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro i a dokazujeme pro $i+1$
Předpoklad:

$$\mathbf{b}_{n-i} = \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \frac{(n-k)!}{n!} \frac{d^k}{dt^k}\mathbf{b}(1) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \Delta^k \mathbf{b}_{n-k}$$

Vezměme si pravou stranu rovnice pro $i+1$:

$$\sum_{k=0}^{n-(i+1)} (-1)^k \binom{i+1}{k} \frac{(n-k)!}{n!} \frac{d^k}{dt^k}\mathbf{b}(1) =$$

$$\sum_{k=0}^{n-(i+1)} (-1)^k \binom{i+1}{k} \frac{(n-k)!}{n!} \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k \mathbf{b}_{n-i-1} =$$

Sumu si rozdělíme na tři části a opět použijeme (*):

$$= \mathbf{b}_n + \sum_{k=1}^{i} (\binom{i}{k} + \binom{i+1}{k}) \Delta^k \mathbf{b}_{n-k} - (-1)^i \Delta^{i+1} \mathbf{b}_{n-i-1} =$$

Využíváme také toho, že $\mathbf{b}(1) = \mathbf{b}_n$, což jsme dostali po dosazení $p = o$ do vzorce z 2. části věty.

$$\mathbf{b}_n + \sum_{k=1}^{i} \binom{i}{k} \Delta^k \mathbf{b}_{n-k} + \sum_{k=1}^{i} \binom{i}{k-1} \Delta^k \mathbf{b}_{n-k} - (-1)^i \Delta^{i+1} \mathbf{b}_{n-i-1} =$$

$$= \mathbf{b}_n + \sum_{k=1}^{i} (-1)^k \binom{i}{k} \Delta^k \mathbf{b}_{n-k} + \sum_{k=1}^{i} (-1)^k \binom{i}{k-1} \Delta^k \mathbf{b}_{n-k} - (-1)^i (\Delta^i \mathbf{b}_{n-i} - \Delta^i \mathbf{b}_{n-i-1}) =$$

$$= \mathbf{b}_{n-i} + \sum_{k=1}^{i}(-1)^k\binom{i}{k-1}\Delta^k\mathbf{b}_{n-k} - (-1)^i\Delta^i\mathbf{b}_{n-i} + (-1)^i\Delta^i\mathbf{b}_{n-i-1} =$$

$$= \mathbf{b}_{n-i}\sum_{k=0}^{i-1}(-1)(-1)^k\binom{i}{k}\Delta^{k+1}\mathbf{b}_{n-k-1} - (-1)^i\Delta^i\mathbf{b}_{n-i} + (-1)^i\Delta^i\mathbf{b}_{n-i-1} =$$

$$= \mathbf{b}_{n-i}\sum_{k=0}^{i-1}(-1)^k\binom{i}{k}\left(\Delta^k\mathbf{b}_{n-k-1} - \Delta^k\mathbf{b}_{n-k}\right) - (-1)^i\Delta^i\mathbf{b}_{n-i} + (-1)^i\Delta^i\mathbf{b}_{n-i-1} =$$

$$= \mathbf{b}_{n-i} + \sum_{k=0}^{i}(-1)^k\binom{i}{k}\Delta^k\mathbf{b}_{n-k-1} - \sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\Delta^k\mathbf{b}_{n-k} =$$

$$= \mathbf{b}_{n-i} + \mathbf{b}_{(n-1)-i} - \mathbf{b}_{n-i} = \mathbf{b}_{(n-(i+1)}$$

což jsme chtěli dokázat.

Pozn. :

$$\Delta^k\mathbf{b}_{n-k-1} = \Delta^k\mathbf{b}_{(n-1)-k}$$

protože platí:

$$\mathbf{b}_{n-i} = \sum_{k=0}^{i}(-1)^k\binom{i}{k}\Delta^k\mathbf{b}_{n-k},$$

po výměně n za $n-1$ dostaneme:

$$\mathbf{b}_{(n-1)-i} = \sum_{k=0}^{i}(-1)^k\binom{i}{k}\Delta^k\mathbf{b}_{n-1-k}$$