Vlastnosti Bernsteinových polynomů

1. Rozklad jednotky: Součet Bernsteinových polynomů stupně n je 1:

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(x) = 1.$$

2. Pozitivita: Bernsteinovy polynomy jsou v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ nezáporné:

$$B_i^n(x) \geq 0, i = 0, \ldots, n, x \in \langle 0, 1\rangle.$$

3. Maximum: $B_i^n(x)$ nabývá svého maxima v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ v bodě $\frac{i}{n}, i = 0, \ldots, n$.

4. Sumace:

$$\sum_{i=0}^{n} iB_i^n(x) = n \cdot x.$$

5. Symetrie:

$$B_i^n(x) = B_{n-i}^n(1 - x), i = 0, \ldots, n.$$

6. Rekurze: Pro $i = 0, \ldots, n$ platí, že Bernsteinův polynom stupně $n + 1$ je konvexní kombinací dvou Bernsteinových polynomů stupně n:

$$B_{i+1}^{n+1}(x) = xB_i^n(x) + (1 - x)B_{i+1}^n(x).$$

7. Derivace: Pro $i = 1, \ldots, n - 1$ platí:

$$\frac{d}{dx}B_i^n(x) = n \cdot [B_{i-1}^{n-1}(x) - B_i^{n-1}(x)].$$

8. Integrace:

$$\int_0^1 B_i^n(x)dx = \frac{1}{n+1}.$$

Důkaz:

(1.) Rozepsáním podle definice Bernsteinových polynomů stupně n a úpravou podle binomické věty dostáváme uvedený vztah:

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i(1 - x)^{n-i} = (x + 1 - x)^n = 1.$$

(2.) Podle definice Bernsteinových polynomů stupně n:

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i(1 - x)^{n-i}, i = 0, \ldots, n,$$

ale $\binom{n}{i} > 0 \wedge x^i \geq 0 \wedge (1-x)^{n-i} \geq 0$ pro $x \in \langle 0,1 \rangle$.Dohromady tedy:

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \geq 0, i = 0, \ldots, n.$$

(3.) Z analýzy víme, že funkce $f(x)$ může mít v bodě x_0 maximum, je-li $f(x_0)' = 0$ nebo, je-li x_0 krajním bodem intervalu na kterém extrém hledáme. rozlišme tedy případy:

▶ pro $i = 0$: $B_0^n(x) = \binom{n}{0} x^0 (1-x)^n = (1-x)^n$
nabývá maximum na $\langle 0,1 \rangle$ v $x = 0 = \frac{0}{n}$ (klesající funkce),

▶ pro $i = n$: $B_n^n(x) = \binom{n}{n} x^n (1-x)^{n-n} = x^n$
nabývá maximum na $\langle 0,1 \rangle$ v $x = 1 = \frac{n}{n}$ (rostoucí fce),

▶ pro $i = 1, \ldots, n-1$: v $x = 0$ a $x = 1$ je $B_i^n(x) = 0$, derivujeme na $(0,1)$:

$$(B_i^n(x))' = \left[\binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \right]' = \binom{n}{i} \cdot \left[i x^{i-1} (1-x)^{n-i} - x^i (n-i)(1-x)^{n-i-1} \right],$$

$$\binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \left(\frac{i}{x} - \frac{n-i}{1-x} \right) = 0 \iff \frac{i}{x} - \frac{n-i}{1-x} = \frac{i - nx}{x(1-x)} = 0 \iff x = \frac{i}{n}, i = 1, \ldots, n-1,$$

Dohromady $B_i^n(x)$ nabývá svého maxima v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ v bodě $\frac{i}{n}, i = 0, \ldots, n$.

(4.) Podle definice Bernsteinových polynomů stupně n, úpravou a substitucí $j = i - 1$:

$$\sum_{i=0}^{n} i B_i^n(x) = \sum_{i=0}^{n} i \frac{n!}{(n-i)!i!} x^i (1-x)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{(n-i)!(i-1)!} x^i (1-x)^{n-i}$$
$$= n \cdot x \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-i)!(i-1)!} x^{i-1} (1-x)^{n-i} = n \cdot x \cdot \sum_{j=0}^{n} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j},$$

ale podle vlastnosti (1.) platí $\sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = 1$, dohromady:

$$\sum_{i=0}^{n} i B_i^n(x) = n \cdot x \cdot \sum_{j=0}^{n} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = n \cdot x.$$

(5.) Rozepsáním podle definice Bernsteinových polynomů stupně n a úpravou obou stran zvlášť dostáváme:

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$$
$$B_{n-i}^n(x) = \binom{n}{n-i} (1-x)^{n-i} \left(1 - (1-x)\right)^{n-(n-i)} = \binom{n}{i} (1-x)^{n-i} x^i = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i},$$

tedy, že: $B_i^n(x) = B_{n-i}^n(x)$.

(6.) Podle definice Bernsteinových polynomů stupně n a úpravou $\binom{n+1}{i+1} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i+1}$:

$$B_{i+1}^{n+1}(x) = \binom{n+1}{i+1} x^{i+1} (1-x)^{n-i} = \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} \right] x^{i+1} (1-x)^{n-i}$$
$$= x \cdot \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} + (1-x) \cdot \binom{n}{i+1} x^{i+1} (1-x)^{n-i-1}$$
$$= x B_i^n(x) + (1-x) B_{i+1}^n(x).$$

(7.) Podle definice Bernsteinových polynomů stupně n, derivováním a úpravami:
▶ pro $i = 0$:

$$(B_0^n(x))' = \left[\binom{n}{0} x^0(1-x)^n\right]' = -n(1-x)^{n-1} = -n\binom{n-1}{0} x^0(1-x)^{n-1} = -nB_0^{n-1}(x)$$

vztah platí ($n.B_{-1}^{n-1}$ nedefinované položme rovno 0),
▶ pro $i = n$:

$$(B_n^n(x))' = \left[\binom{n}{n} x^n(1-x)^{n-n}\right]' = nx^{n-1} = n\binom{n-1}{n-1} x^{n-1}(1-x)^{n-1-(n-1)} = nB_{n-1}^{n-1}(x)$$

vztah platí ($-n.B_n^{n-1}$ nedefinované položme rovno 0),
▶ pro $0 \le i \le n$:

$$\begin{aligned}(B_i^n(x))' &= \left[\binom{n}{i} x^i(1-x)^{n-i}\right]' = \binom{n}{i} \cdot \left[i \cdot x^{i-1}(1-x)^{n-i} - (n-i) \cdot x^i(1-x)^{n-i-1}\right] \\ &= \frac{n!}{i!(n-i)!} i x^{i-1}(1-x)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i)!}(n-i)x^i(1-x)^{n-1-i} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(i-1)!(n-1-(i+1))!} x^{i-1}(1-x)^{n-i} - \frac{n(n-1)!}{i!(n-1-i)!} x^i(1-x)^{n-1-i} \\ &= n\binom{n-1}{i-1} x^{i-1}(1-x)^{n-i} - n\binom{n-1}{i} x^i(1-x)^{n-1-i} = n \cdot [B_{i-1}^{n-1}(x) - B_i^{n-1}(x)].\end{aligned}$$

(8.) Nejprve dokážeme pro $i = n$:

$$\int_0^1 B_n^n(x)dx = \int_0^1 \binom{n}{n} x^n(1-x)^0 dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Uvažme vlastnost (7.) a rovnost, která platí pro derivaci, zintegrujme:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} B_i^{n+1}(x) &= (n+1) \cdot [B_{i-1}^n(x) - B_i^n(x)] \\ \frac{\left[B_i^{n+1}(x)\right]_0^1}{n+1} &= \left[B_{i-1}^n(x)\right]_0^1 - \left[B_i^n(x)\right]_0^1,\end{aligned}$$

ale $\left[B_i^{n+1}(x)\right]_0^1 = \left[\binom{n+1}{i} x^i(1-x)^{n+1-i}\right]_0^1 = \binom{n+1}{i}\left[1^i(1-1)^{n+1-i} - 0^i(1-0)^{n+1-i}\right] = 0$:

$$\int_0^1 B_{i-1}^n(x) - \int_0^1 B_i^n(x) = 0 \iff \int_0^1 B_{i-1}^n(x) = \int_0^1 B_i^n(x).$$

Platí-li vztah $\int_0^1 B_i^n(x)dx = \frac{1}{n+1}$ pro i, pak tedy platí i pro $i-1$ (indukční krok). My ovšem víme, že platí pro $i = n$. Celkově tedy platí pro $i = 0, \ldots, n$.