Věta 3.2 Vlastnosti racionálních Bézierových křivkových segmentů

1. *Chování v koncových bodech: Kontrolní polygon a křivkový segment mají stejný počáteční a koncový bod. První a poslední kontrolního polygonu je tečný ke křivce. Ostatní Bézierovi bodu nejsou interpolovány, pouze aproximovány.*

Důkaz

Racionální Bézierův křivkový segment:

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\beta_0 \mathbf{b}_0 B_0^n(t) + \ldots + \beta_n \mathbf{b}_n B_n^n(t)}{\beta_0 B_0^n(t) + \ldots + \beta_n B_n^n(t)}$$

čitatele označíme $u(t)$ a jmenovatele $v(t)$.

Platí

$$\mathbf{b}'(t) = \frac{u'(t)v(t) - u(t)v'(t)}{v^2(t)}$$

Pro počáteční bod dokážeme

$$\frac{\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0}{||\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0||} = \frac{\mathbf{b}'(0)}{||\mathbf{b}'(0)||}$$

Podle věty 2.7 platí

$$\begin{aligned} u'(0) &= n(\beta_1 \mathbf{b}_1 - \beta_0 \mathbf{b}_0) \\ v'(0) &= n(\beta_1 - \beta_0) \end{aligned}$$

Dále platí

$$\begin{aligned} u(0) &= \beta_0 \mathbf{b}_0 \\ v(0) &= \beta_0 \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'(0) &= \frac{n(\beta_1 \mathbf{b}_1 - \beta_0 \mathbf{b}_0) \cdot v(0) - u(0) \cdot n(\beta_1 - \beta_0)}{v^2(0)} \\ &= \frac{n\beta_0\beta_1 \mathbf{b}_1 - n\beta_0^2 \mathbf{b}_0 + n\beta_0\beta_1 \mathbf{b}_0 - n\beta_0^2 \mathbf{b}_0}{\beta_0^2} \\ &= \frac{n\beta_1(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)}{\beta_0} \end{aligned}$$

Dosazením dostáváme

$$\frac{\mathbf{b}'(0)}{||\mathbf{b}'(0)||} = \frac{\frac{n\beta_1(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)}{\beta_0}}{||\frac{n\beta_1(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)}{\beta_0}||} = \frac{\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0}{||\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0||}$$

Pro koncový bod dokážeme

$$\frac{\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}}{||\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}||} = \frac{\mathbf{b}'(1)}{||\mathbf{b}'(1)||}$$

Podle věty 2.7 platí

$$\begin{aligned} u'(1) &= n(\beta_n \mathbf{b}_n - \beta_{n-1}\mathbf{b}_{n-1}) \\ v'(1) &= n(\beta_n - \beta_{n-1}) \end{aligned}$$

Dále platí

$$\begin{aligned} u(1) &= \beta_n \mathbf{b}_n \\ v(1) &= \beta_n \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'(1) &= \frac{n(\beta_n \mathbf{b}_n - \beta_{n-1}\mathbf{b}_{n-1}) \cdot v(1) - u(1) \cdot n(\beta_n - \beta_{n-1})}{v^2(1)} \\ &= \frac{n\beta_n^2 \mathbf{b}_n - n\beta_n\beta_{n-1}\mathbf{b}_{n-1} + n\beta_n^2\mathbf{b}_n - n\beta_n\beta_{n-1}\mathbf{b}_n}{\beta_n^2} \\ &= \frac{n\beta_{n-1}(\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1})}{\beta_n} \end{aligned}$$

Dosazením dostáváme

$$\frac{\mathbf{b}'(1)}{||\mathbf{b}'(1)||} = \frac{\frac{n\beta_{n-1}(\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1})}{\beta_n}}{||\frac{n\beta_{n-1}(\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1})}{\beta_n}||} = \frac{\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}}{||\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}||}$$