Počítačová geometrie.

V.3.3.Vliv kontrolních bodů:

$\mathbf{b}_i$ má největší vliv na $\mathbf{b}(t)$ v právě jednom bodě.
Důkaz:

$$\sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} \beta_j \mathbf{b}_j \\ \beta_j \end{pmatrix} B_j^n \mapsto \frac{\sum\limits_{j=0}^{n} \beta_j \mathbf{b}_j B_j^n(t)}{\sum\limits_{i=0}^{n} \beta_i B_i^n(t)}, \beta_{>}0$$

Perspektivistickou projekcí jsme dostali Racionální béziérův křivkový segment.

Jelikož chceme vědět, kdy má $\mathbf{b}_i$ největší vliv na RBKS ($\mathbf{b}_j$ je pevné), je třeba zjistit, kdy má výraz

$$\frac{\beta_j B_j^n(t)}{\sum\limits_{i=0}^{n} \beta_i B_i^n(t)} \mathbf{b_j}$$

maximum (do čitatele zlomku jsme vzali jeden člen sumy z čitatele předchozího výrazu). Protože maximum počítáme vzhledem k t, hodnoty $\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}$ i β_j lze zanedbat. Dostaneme tedy výraz

$$\frac{(t)^j (1-t)^{n-j}}{\sum\limits_{i=0}^{n} \beta_i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} t^i (1-t)^{n-i}}$$

jehož úpravou získáme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} \beta_i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} t^{i-j} (1-t)^{(n-i)+(j-n)}} &= \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} \beta_i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} t^{i-j} (1-t)^{j-i}} \\ &= \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} \beta_i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{i-j}} \end{aligned}$$

Maximum posledního výrazu je totéž, jako minimum výrazu

$$\sum_{i=0}^{n} \beta_i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{i-j}$$

$$0 < \frac{t}{1-t} < \infty; (t \in [0;1])$$

Vyjádříme tedy první derivaci tohoto výrazu podle t :

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \beta_i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{i-j}\right)' = \sum_{i=0}^{n} \left(\beta_i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{i-j}\right)' = \left[\left(\frac{t}{1-t}\right) = \alpha\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\beta_i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \alpha^{i-j}\right)' = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \, (i-j) \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \alpha^{i-j-1}$$

Tuto derivaci položíme rovnu nule:

$$\sum_{i=0}^{n} \beta_i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \alpha^{i-j-1} = 0$$

Zcela zřejmě platí:

$$\alpha \to \infty .... \sum_{i=0}^{n} \beta_i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \alpha^{i-j-1} \to \infty$$
$$\alpha \to 0 .... \sum_{i=0}^{n} \beta_i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \alpha^{i-j-1} \to -\infty$$

Jelikož jde o **spojitou rostoucí** funkci, jejíž "první" členy jsou kladné a "poslední" záporné

$$(-\infty .... -----0+++++ .... +\infty)$$

zcela jistě existuje člen nulový a to právě jeden.