

**Veta.** *Vlastnosti Bézierových křivkových segmentů*

Omezené kolísání: žádná nadrovina neprotíná Bézierův křivkový segment častěji než odpovídající Bézierův polygonální tah (*variation diminishing property*).

Věta o zvýšení stupně BKS dává návod, jak zvýšit počet kontrolních bodů o 1 a BKS se přitom nezmění.

Dokážeme, že zvýšením stupně BKS a tím zvýšením počtu kontrolních bodů se nezvýší počet průsečíků s nadrovinou a polygonálním tahem.

Při nekonečném opakování zvyšování stupně dle Věty budou sestrojované polygonální tahy konvergovat k BKS (to vyplývá z aproximace křivky a z vlastnosti kontrolních bodů, které vytvářejí konvexní obal).

Máme tedy dáno  $(n + 1)$  kontrolních bodů  $\mathbf{b}_0^0 = \mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n^0 = \mathbf{b}_n$ . S použitím Věty o zvýšení stupně BKS získáme  $\mathbf{b}_k^l$ , kde  $l = (1, 2, \dots, \infty)$  a  $k = (0, 1, \dots, n + l + 1)$ .

Označme  $P^l$  polygon v  $l$ -tém kroce, tzn. polygon složený z úseček mezi body  $\mathbf{b}_0^l, \mathbf{b}_1^l, \dots, \mathbf{b}_{n+l+1}^l$ .

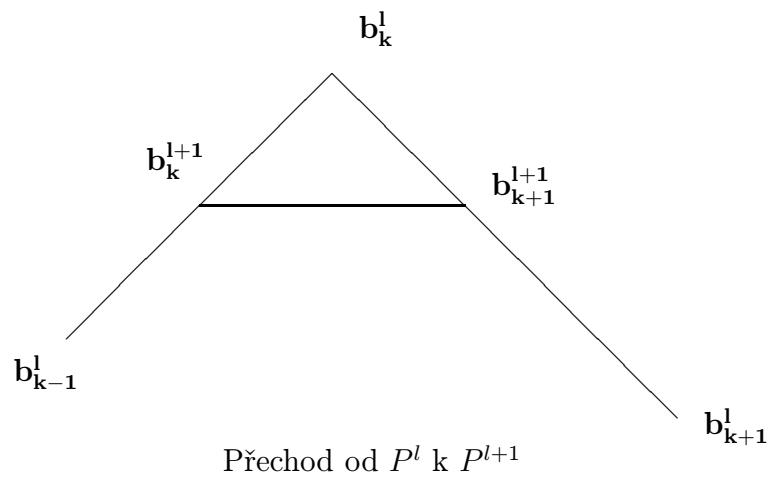
Označme  $\$$  počet všech průsečíků nadroviny s polygonem a  $\Theta$  nadrovinu. Přeformulujme tedy větu do tvaru:

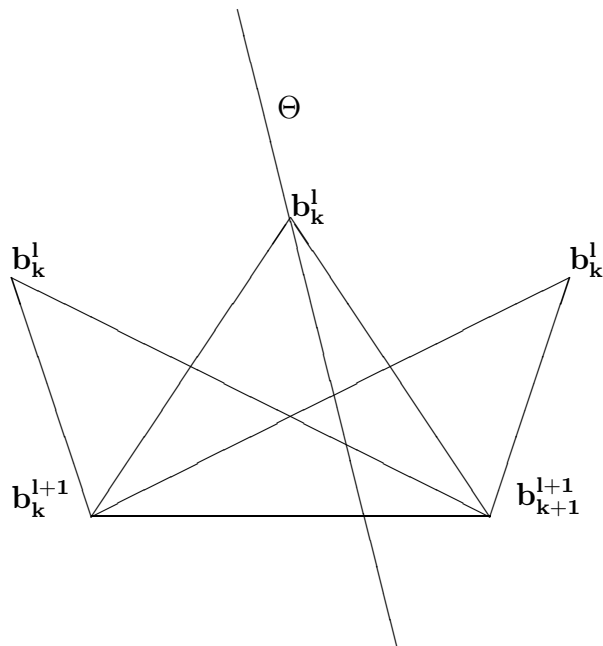
$$\$(\Theta \cap P^0) \geq \$(\Theta \cap P^1) \geq \dots \geq \$(\Theta \cap P^l) \rightarrow \$(\Theta \cap BKS)$$

Stačí nám dokázat, že

$$\$(\Theta \cap P^l) \geq \$(\Theta \cap P^{l+1})$$

**Lemma 1.** *Počet průsečíků nadroviny  $\Theta$  s polygonem v  $l$ -tém kroce  $\geq$  počet průsečíků  $\Theta$  s polygonem v  $(l + 1)$ -tém kroce.*





Diskuse průniku

*Důkaz.* Provedeme obměněnou implikaci: Protne-li  $\Theta$  úsečku s krajními body  $\mathbf{b}_k^{l+1}, \mathbf{b}_{k+1}^{l+1}$  polygonu v  $(l + 1)$ -kroce, pak  $\Theta$  protne alespoň jednu z úseček a) s krajními body  $\mathbf{b}_{k-1}^l, \mathbf{b}_k^l$  nebo b) s krajními body  $\mathbf{b}_k^l, \mathbf{b}_{k+1}^l$  v  $l$ -tém kroce. Body  $\mathbf{b}_k^{l+1}$  a  $\mathbf{b}_{k+1}^{l+1}$  musí ležet v opačných poloprostorech určených nadrovinou  $\Theta$  (aby  $\Theta$  protínala úsečku mezi těmito body). V předchozím, tj.  $l$ -tém, kroce musely tyto 2 body být spojeny lomenou čarou. Alespoň jednu z těchto čar musela tedy  $\Theta$  protnout.  $\square$

V obrázcích je použit průmět prostoru do roviny pro lepší názornost (průmět nadroviny do roviny je přímka) a díky afinním transformacím se vlastnosti zachovávají (např. BKS se zobrazí do BKS, ...)