

1. Bod $B(u, v)$ leží v konvexním obalu definujících Bezierových bodů. Z definice víme, že

$$B(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{b}_{ij} \cdot B_i^n(u) \cdot B_j^m(v), u, v \in [0, 1], \mathbf{b}_{ij} \in \mathbf{R}^3,$$

kde $B_i^n(x) = \binom{n}{i} \cdot x^i \cdot (1-x)^{n-i}$ pro $i = 0, \dots, n, x \in [0, 1] \in \mathbf{R}$ a \mathbf{b}_{ij} jsou Bézierovy body.

Stačí dokázat, že koeficienty uvedeného součtu splňují

$$1 \geq B_i^n(u) \cdot B_j^m(v) \geq 0 \text{ a } \sum_{i=1, j=1}^{n, m} B_i^n(u) B_j^m(v) = 1$$

Již víme, že

$$\sum_{i=1}^n B_i^n(u) = 1 = \sum_{j=1}^m B_j^m(v),$$

odkud tvrzení plyne okamžitě.

2. Bézierův bod \mathbf{b}_{ij} má největší vliv na segment $b(u, v)$ v případě, že $(u, v) = (\frac{i}{n}, \frac{j}{m})$. Koeficient u bodu \mathbf{b}_{ij} je $B_i^n(u) \cdot B_j^m(v)$, který je definován jako $\binom{n}{i} \binom{m}{j} \cdot u^i \cdot (1-u)^{n-i} \cdot v^j \cdot (1-v)^{m-j}$.

Hledáme takové body u, v , pro které tento výraz nabude svého maxima. Budeme jej tedy derivovat podle příslušných proměnných u, v . Začneme podle u :

$$\binom{n}{i} \binom{m}{j} \cdot i \cdot u^{i-1} \cdot (1-u)^{n-i} \cdot v^j \cdot (1-v)^{m-j} + \binom{n}{i} \binom{m}{j} \cdot u^i \cdot (n-i) \cdot (1-u)^{n-i-1} \cdot v^j \cdot (1-v)^{m-j}$$

Vytkneme výrazy, které jsou společné oběma sčítancům

$$= \binom{n}{i} \binom{m}{j} \cdot v^j \cdot (1-v)^{m-j} \cdot u^{i-1} \cdot (1-u)^{n-i-1} \cdot [i \cdot (1-u) + u \cdot (n-i)] = 0$$

Obecně je

$$\binom{n}{i} \binom{m}{j} \cdot v^j \cdot (1-v)^{m-j} \cdot u^{i-1} \cdot (1-u)^{n-i-1}$$

kladný, tedy :

$$[i - iu + un - ui] = 0$$

$$i + un = 0$$

$$u = \frac{i}{n}$$

Pro v se dokáže analogicky.