Veta. *Vlastnosti čtyřúhelníkových Bézierových segmentů*
Chování v okrajových křivkách:Okrajové body kontrolní sítě jsou Bézierovy body hraničních křivek rovinného segmentu.

Důkaz. Dokážeme, že pro hodnoty parametrů $(u, v) = (0, 0), (1, 0), (0, 1) a (1, 1)$ platí, že kontrolní body $\mathbf{b(0,0)} = \mathbf{b_{00}}$, $\mathbf{b(1,0)} = \mathbf{b_{n0}}$, $\mathbf{b(0,1)} = \mathbf{b_{0m}}$ a $\mathbf{b(1,1)} = \mathbf{b_{nm}}$,
tzn., že okrajové body kontrolní sítě leží na čtyřúhelníkovém rovinném segmentu.
Pro $(u, v) = (0, 0)$ platí:
$\mathbf{b(0,0)} = \sum_{\mathbf{i=0}}^{\mathbf{n}} \sum_{j=0}^{m} \mathbf{b_{ij} B_j^m(0) B_i^n(0)} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b_i(0) B_i^n(0)}$.
protože $\mathbf{b_i(0)} = \sum_{j=0}^{m} \mathbf{b_{ij} B_j^m(0)} = \sum_{j=0}^{m} \mathbf{b_{ij} \binom{m}{j} 0^j 1^{m-1}} =$
$\mathbf{b_{i0} \binom{m}{0} 0^0 1^m} + \mathbf{b_{i1} \binom{m}{1} 0^1 1^{m-1}} + \ldots + \mathbf{b_{im} \binom{m}{m} 0^m 1^0} = \mathbf{b_{i0}}$,
platí:
$\mathbf{b(0,0)} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b_{i0} B_i^n(0)} =$
$\sum_{i=0}^{n} \mathbf{b_{i0} \binom{n}{i} 0^i 1^{(n-i)}} = \mathbf{b_{00}}$
Analogicky lze provést pro parametry $(0, 1), (1, 0)$ a $(1, 1)$. □

Veta. Planarita
Beziérova rovinná část je rovina, právě když beziérova kontrolní síť tvoří rovinnou mřížku.

Důkaz. (a)
Předpokládám, že beziérova kontrolní síť tvoří rovinnou mřížku. Bod $\mathbf{b_{ij}}$ má souřadnice $\begin{pmatrix} ij_1 \\ ij_2 \\ . \\ . \\ . \\ ij_d \end{pmatrix}$.
Protože všechny body $\mathbf{b_{ij}}$ leží v jedné rovině, můžeme je po vhodné transformaci souřadnic vyjádřit ve tvaru $\mathbf{b_{ij}} = \begin{pmatrix} ij_1 \\ ij_2 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$.
Výsledný bod beziérovy rovinné části získáme jako afinní kombinaci kontrolních bodů:
$\mathbf{b(u,v)} = \sum_{\mathbf{i=0}}^{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{j=0}}^{\mathbf{m}} \mathbf{b_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}$,
což z hlediska výpočtu představuje lineární kombinaci matic tvaru

$\sum_{i=o}^{n}\sum_{j=o}^{m} c_{ij}\begin{pmatrix} ij_1 \\ ij_2 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}.$

Bod $\mathbf{b}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ je tedy rovněž určen pouze prvními dvěmi souřadnicemi $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}.$

To platí pro všechny $\mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, kde u,v nabývá hodnot od 0 do 1.
Dimenze beziérovy rovinné části je 2 a jedná se o rovinu.
(b)
Předpokládám, že Beziérova rovinná část je rovina. Každý její bod $\mathbf{b}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$, který je určen afinní kombinací bodů kontrolní sítě $\mathbf{b_{ij}}$ lze ve vhodných souřadnicích vyjádřit
$\mathbf{b}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)=\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}.$
Pro k-tou souřadnici bodu $\mathbf{b}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$, kde k je větší nebo rovno než 3 platí:
$0 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} b_{ij}^k B_j^m(v^*) B_i^n(u^*)$.

Tato rovnost musí platit pro všechny body beziérovy rovinné části, tzn. parametry u,v volíme libovolně z intervalu $< 0, 1 >$. Nutně tedy $b_{ij}^k = 0$ pro všechna i=0,…,n a j=0,…,m.

Body kontrolní sítě musí jít rovněž vyjádřit ve tvaru $\mathbf{b_{ij}} = \begin{pmatrix} b_{ij}^1 \\ b_{ij}^2 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$, proto podprostor $< (\mathbf{b_{ij}}) >$ má dimenzi 2. ∎

Veta. *Plochové křivky*
Obraz přímky v rovině určené u-v na ploše je polynomiální křivka stupně nejvýše m+n.

Důkaz. Pro přímku ležící v rovině u-v platí: $u = kv + q$.
Zobrazením této přímky na plochu přímo dostaneme polygonální křivku

stupně max. n+m:
$f(u) = \mathbf{b}(\mathbf{kv}+\mathbf{q}, \mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{i=0}}^{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{j=0}}^{\mathbf{m}} \mathbf{b_{ij}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{j}} \mathbf{v^j(1-v)^{m-j}} \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{i}} \mathbf{(kv+q)^n(1-kv-q)^{n-i}}$,
po roznásobení a provedení sumace $f(u) = c_o v^{m+n} + c_1 v^{m+n-1} + ... + c_{m+n-1} v + c_{m+n}$,
tzn. f(u) je polynom stupně nejvýše n+m. □