9. AFINNÉ PODPRIESTORY A SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC

V tejto kapitole sa opäť pozrieme cez prizmu toho, čo sme sa dosiaľ naučili, na sústavy lineárnych rovníc. Uvidíme, že množina riešení každej takej sústavy tvorí afinný (v homogénnom prípade dokonca lineárny) podpriestor niektorého stĺpcového vektorového priestoru K^n. Taktiež naopak, ukážeme, že každý afinný podpriestor v K^n možno popísať ako podpriestor riešení vhodnej sústavy lineárnych rovníc. Na vyjadrenie množiny riešení tejto sústavy pomocou parametrov sa potom možno dívať ako na *parametrické rovnice* príslušného afinného podpriestoru. Získané znalosti nám umožnia v konkrétnych prípadoch určiť vzájomnú polohu afinných podpriestorov.

V celej kapitole K označuje pevné, inak ľubovoľné, pole; m, n sú ľubovoľné, pevne zvolené prirodzené čísla.

9.1. Podpriestor riešení homogénnej sústavy a jeho báza

Nech $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in K^m$. Uvažujme homogénnu sústavu lineárnych rovníc s maticou $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

a nehomogénnu sústavu s maticou $\boldsymbol{A}$ a pravou stranou $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Množiny ich riešení označíme

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{x} \in K^n;\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\},$$

resp.

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in K^n;\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}.$$

Predpisom $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$ je definované lineárne zobrazenie $\varphi\colon K^n \to K^m$, pričom $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{Ker}\varphi$. Z toho okamžite vyplýva

9.1.1. Tvrdenie. *Pre ľubovoľnú maticu $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$ množina $\mathcal{R}(\boldsymbol{A})$ riešení homogénnej sústavy $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ tvorí lineárny podpriestor vektorového priestoru K^n.*

Doteraz sme homogénnu sústavu riešili úpravou jej matice $\boldsymbol{A}$ na redukovaný stupňovitý tvar $\boldsymbol{B}$. Z tohto tvaru sme potom vyčítali, ktoré neznáme si zvolíme za parametre a ktoré neznáme si vyjadríme pomocou nich. Presnejšie, neznámu x_j sme si zvolili za parameter práve vtedy, keď sa v j-tom stĺpci matice $\boldsymbol{B}$ nenachádzal vedúci prvok žiadneho riadku matice $\boldsymbol{B}$; ak sa v j-tom stĺpci nachádzal vedúci prvok nejakého riadku, tak neznámu x_j sme si vyjadrili pomocou týchto parametrov.

Uvedená veta nám umožňuje alternatívny popis množiny riešení $\mathcal{R}(\boldsymbol{A})$ – keďže ide o lineárny podpriestor v K^n, môžeme ho najúspornejšie popísať zadaním (niektorej) jeho bázy. Každú bázu priestoru $\mathcal{R}(\boldsymbol{A})$ nazývame tiež *fundamentálnym systémom riešení* sústavy $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Potom každé riešenie príslušnej homogénnej sústavy možno jednoznačne vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov z fundamentálneho systému riešení, a tiež naopak, každa lineárna kombinácia vektorov fundamentálneho systému je riešením príslušnej sústavy. Fundamentálny systém riešení nájdeme nasledujúcim postupom.

Maticu $\boldsymbol{A}$ upravíme pomocou ERO na redukovaný stupňovitý tvar $\boldsymbol{B} \in K^{m\times n}$. Množinu $\{1,\ldots,n\}$ rozdelíme na dve podmnožiny J, J', podľa toho, či sa v j-tom stĺpci matice $\boldsymbol{B}$ nachádza alebo nenachádza vedúci prvok nejakého jej riadku. Označme k počet prvkov množiny J' a zapíšme ju v tvare $J' = \{j_1 < j_2 < \ldots < j_k\}$. Pre každý index $j_l \in J'$ zostrojíme vektor $\boldsymbol{v}_l = (v_{1l},\ldots,v_{nl})^T \in K^n$ takto: Zvolíme $v_{j_l l} = 1$ a $v_{j_i l} = 0$ pre $i \neq l$. Pre $j \in J$ vypočítame hodnoty v_{jl} k uvedeným hodnotám parametrov $v_{j_1 l},\ldots,v_{j_k l}$ tak, aby celý vektor $\boldsymbol{v}_l$ vyhovoval podmienke $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{v}_l = \boldsymbol{0}$. Potom vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ tvoria bázu podpriestoru riešení $\mathcal{R}(\boldsymbol{A})$. Pritom zrejme platí $k = n - h(\boldsymbol{A})$.

Namiesto dôkazu posledného tvrdenia si celý postup ozrejmíme na príklade.

9.1.2. Príklad. Predpokladajme, že sme maticu $\boldsymbol{A}$ pomocou ERO už upravili na redukovaný stupňovitý tvar

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vedúce prvky riadkov sa nachádzajú v stĺpcoch 1, 3 a 4. Teda neznáme x_2 a x_5 si zvolíme za parametre a neznáme x_1, x_3 a x_4 si vyjadríme pomocou nich. Naša prvá voľba je $x_2 = 1$, $x_5 = 0$. Tomu zodpovedá vektor $\boldsymbol{v}_1 = (-2,1,0,0,0)^T$. Druhá voľba parametrov je $x_2 = 0$, $x_5 = 1$. Tomu zodpovedá vektor $\boldsymbol{v}_2 = (1/3,0,-1/2,2,1)^T$. Potom vektory $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ tvoria bázu podpriestoru (fundamentálny systém) riešení $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{B}) \subseteq \mathbb{R}^5$.

Ak sa „z estetických dôvodov“ chceme vyhnúť zlomkom vo výsledku, stačí miesto vektorov obsahujúcich ako súradnice zlomky vziať ich vhodné nenulové skalárne násobky. V našom prípade stačí nahradiť bázový vektor $\boldsymbol{v}_2$ „krajším“ bázovým vektorom $6\boldsymbol{v}_2 = (2,0,-3,12,6)^T$.

Pre „veľkosť“ podpriestoru riešení homogénnej sústavy z našich úvah vyplýva

9.1.3. Tvrdenie. *Pre ľubovoľnú maticu $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$ platí*

$$\dim \mathcal{R}(\boldsymbol{A}) = n - h(\boldsymbol{A}).$$

9.2. Podpriestor riešení nehomogénnej sústavy

Prejdime teraz k otázke štruktúry množiny riešení $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$ nehomogénnej sústavy $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

9.2.1. Tvrdenie. *Nech $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in K^m$.*

(a) Ak $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathcal{R}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$, tak $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} \in \mathcal{R}(\boldsymbol{A})$.

(b) Ak $\boldsymbol{z} \in \mathcal{R}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}(\boldsymbol{A})$, tak $\boldsymbol{z} + \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$.

Dôkaz. Možno overiť priamym výpočtom.

Z uvedeného tvrdenia vyplýva, že na popis množiny $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$ všetkých riešení nehomogénnej sústavy stačí poznať podpriestor $\mathcal{R}(\boldsymbol{A})$ všetkých riešení príslušnej homogénnej sústavy, t. j. nejaký fundamentálny systém $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ jej riešení, a ľubovoľné jedno riešenie $\boldsymbol{z} \in \mathcal{R}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$ nehomogénnej sústavy. Tvrdenie možno potom schématicky zapísať v niektorom z tvarov

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{z} + \mathcal{R}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{z} + \boldsymbol{x};\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}(\boldsymbol{A})\}\\ &= \boldsymbol{z} + [\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n] = \{\boldsymbol{z} + c_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_k\boldsymbol{v}_k;\ c_1, \ldots, c_k \in K\}.\end{aligned}$$

Každý si môže vybrať ten, ktorý sa mu najväčšmi pozdáva.

S využitím pojmov predchádzajúcej kapitoly možno naše úvahy zhrnúť do nasledujúcej podoby.

9.2.2. Tvrdenie. *Nech $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in K^m$. Ak sústava $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má aspoň jedno riešenie, tak $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$ je afinný podpriestor v K^n so zameraním $\mathcal{R}(\boldsymbol{A})$. To znamená,*

$$\operatorname{Dir}\mathcal{R}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{A}) \quad \text{a} \quad \dim\mathcal{R}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b}) = \dim\mathcal{R}(\boldsymbol{A}) = n - h(\boldsymbol{A}).$$

9.3. Frobeniova veta a riešenie nehomogénnej sústavy

Odpoveď na otázku riešiteľnosti nehomogénnej sústavy možno dať porovnaním hodnosti jej základnej a rozšírenej matice.

Začneme pozorovaním, že sústava $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má aspoň jedno riešenie $\boldsymbol{z} \in K^n$ práve vtedy, keď $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im}\varphi$ (kde $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}$). Ak tento prípad nastane, tak, ako sme už ukázali, $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{z} + \mathcal{R}(\boldsymbol{A})$.

9.3.1. Veta. *(Frobenius) Nech $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in K^m$. Potom nehomogénna sústava $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má riešenie práve vtedy, keď $h(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b}) = h(\boldsymbol{A})$.*

Dôkaz. Z poznámky vyslovenej tesne pred vetou vyplýva, že sústava $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má riešenie práve vtedy, keď $\boldsymbol{b} \in [\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{A}), \ldots, \boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{A})]$, t. j. práve vtedy keď

$$[\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{A}), \ldots, \boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{A}), \ldots, \boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{A})].$$

Keďže

$$\begin{aligned}h(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b}) &= \dim[\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{A}), \ldots, \boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{b}],\\ h(\boldsymbol{A}) &= \dim[\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{A}), \ldots, \boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{A})]\end{aligned}$$

a druhý z týchto podpriestorov je podpriestorom prvého, uvedená podmienka je zrejme ekvivalentná s rovnosťou $h(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b}) = h(\boldsymbol{A})$.

Frobeniova veta vlastne hovorí už známu vec: nehomogénna sústava $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ nemá riešenie práve vtedy, keď sa pri úprave jej rozšírenej matice $(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$ na redukovaný stupňovitý tvar objaví nejaký riadok tvaru $(0, \ldots, 0\,|\,d) \in K^{n+1}$, kde $0 \neq d \in K$. Takýto riadok totiž zodpovedá rovnici $0 = d$.

Ak upravíme pomocou ERO rozšírenú maticu $(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$ na redukovaný stupňovitý tvar $(\boldsymbol{B}\,|\,\boldsymbol{c})$, kde $\boldsymbol{B} \in K^{m\times n}$ a $\boldsymbol{c} \in K^m$, tak $\boldsymbol{B}$ je tiež v redukovanom stupňovitom tvare. Potom $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{B}\,|\,\boldsymbol{c}) \neq \emptyset$ práve vtedy, keď sa žiaden vedúci prvok nejakého riadku matice $(\boldsymbol{B}\,|\,\boldsymbol{c})$ nenachádza v poslednom, t. j. $(n+1)$-om stĺpci. Bázu priestoru riešení $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{B})$ nájdeme postupom popísaným v paragrafe 9.1. Nech J, J' a k majú tam uvedený význam. Jedno riešenie $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n)^T$ nehomogénnej sústavy dostaneme voľbou parametrov $z_{j_1} = \ldots = z_{j_k} = 0$ pre $j_l \in J'$. Zvyšné hodnoty z_j potom vypočítame tak, aby $\boldsymbol{z}$ vyhovovalo podmienke $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}$, t. j. $z_j = c_j$ pre $j \in J$.

9.3.2. Príklad. Predpokladajme, že sme maticu $(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$ pomocou ERO už upravili na redukovaný stupňovitý tvar

$$(\boldsymbol{B}\,|\,\boldsymbol{c}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 1/4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 & 6 & -2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vidíme, že $h(\boldsymbol{B}\,|\,\boldsymbol{c}) = h(\boldsymbol{B}) = 3$, teda $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{B}\,|\,\boldsymbol{c}) \neq \emptyset$. Vedúce prvky riadkov sa nachádzajú v stĺpcoch 1, 2 a 3. Teda neznáme x_4, x_5 a x_6 si zvolíme za parametre a neznáme x_1, x_2 a x_3 si vyjadríme pomocou nich. Prvej voľbe $x_4 = 1$, $x_5 = x_6 = 0$ zodpovedá vektor $\boldsymbol{v}_1 = (-3, -4, -1, 1, 0, 0)^T$. Druhá voľba $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$ nám dá vektor $\boldsymbol{v}_2 = (-1/4, -2, 5, 0, 1, 0)^T$. Treťou voľbou $x_4 = x_5 = 0$, $x_6 = 1$ získame vektor $\boldsymbol{v}_3 = (0, 1, -6, 0, 0, 1)^T$. Potom vektory $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ tvoria bázu podpriestoru riešení $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{B}) \subseteq \mathbb{R}^6$ príslušnej homogénnej sústavy. Konečne voľbou parametrov $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ získame jedno riešenie $\boldsymbol{z} = (2, -1, -2/7, 0, 0, 0)^T$ nehomogénnej sústavy.

Výsledok možno prehľadne zapísať do tabuľky (treba si však uvedomiť, že sme ju vypĺňali uvedeným postupom):

	$\boldsymbol{v}_1$	$\boldsymbol{v}_2$	$\boldsymbol{v}_3$	$\boldsymbol{z}$
x_1	-3	$-1/4$	0	2
x_2	-4	-2	1	-1
x_3	-1	5	-6	$-2/7$
x_4	1	0	0	0
x_5	0	1	0	0
x_6	0	0	1	0

Porovnajte túto tabuľku s maticou $(\boldsymbol{B}\,|\,\boldsymbol{c})$!

9.4. Parametrické a všeobecné rovnice afinných podpriestorov

Hoci sa v tomto i v nasledujúcom paragrafe obmedzíme len na afinné podpriestory stĺpcového vektorového priestoru K^n, naše úvahy majú širšiu platnosť. Zvolením pevnej bázy ich možno pomocou súradnicového zobrazenia zrejmým spôsobom preniesť aj na afinné podpriestory ľubovoľného konečnorozmerného vektorového priestoru V.

Každý afinný podpriestor $M \subseteq K^n$ má tvar

$$M = \boldsymbol{p} + [\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k] = \boldsymbol{p} + [\boldsymbol{\alpha}]$$

pre nejaký bod $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)^T \in M$ a vhodnú usporiadanú k-ticu $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k)$ vektorov z K^n, kde $\boldsymbol{u}_j = (u_{1j}, \ldots, u_{nj})^T$. To znamená, že pre ľubovoľné $\boldsymbol{x} \in K^n$ platí $\boldsymbol{x} \in M$ práve vtedy, keď existuje $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_k)^T \in K^k$ také, že

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{t},$$

kde usporiadanú k-ticu $\boldsymbol{\alpha}$ sme ako obyčajne stotožnili s maticou $(u_{ij}) \in K^{n \times k}$ so stĺpcami $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$. Rovnosť $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{t}$ je maticovým zápisom *parametrických* *rovníc* afinného podpriestoru $M \subseteq K^n$. Vektor $\boldsymbol{t} \in K^n$ nazývame *vektorom parametrov* a jeho zložky $t_1, \ldots, t_k \in K$ *parametrami.* Po rozpísaní do zložiek

$$\begin{aligned}
x_1 &= p_1 + u_{11}t_1 + u_{12}t_2 + \ldots + u_{1k}t_k \\
x_2 &= p_2 + u_{21}t_1 + u_{22}t_2 + \ldots + u_{2k}t_k \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= p_n + u_{n1}t_1 + u_{n2}t_n + \ldots + u_{nk}t_k
\end{aligned}$$

dostaneme obvyklejší tvar, s akým sme sa v dimenzii $n = 2$ resp. $n = 3$ už stretli v stredoškolskej analytickej geometrii.

Ak navyše vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ sú lineárne nezávislé, čo možno vždy dosiahnuť vynechaním „nadbytočných“ vektorov, tak parametrické rovnice podpriestoru M nám priamo ukážu jeho dimenziu: $\dim M = k$.

Zápis afinného podpriestoru $M \subseteq K^n$ v tvare $M = \boldsymbol{p} + [\boldsymbol{\alpha}]$, kde $\boldsymbol{p} \in M$ a $\boldsymbol{\alpha}$ je nejaká usporiadaná k-tica, ktorá generuje jeho zameranie $\operatorname{Dir} M$ (môžeme si dovoliť predpokladať, že $\boldsymbol{\alpha}$ je dokonca báza v $\operatorname{Dir} M$), budeme nazývať jeho *parametrickým vyjadrením.* Parametrické vyjadrenie $M = \boldsymbol{p} + [\boldsymbol{\alpha}]$ afinného podpriestoru možno priamo prepísať do jeho parametrických rovníc $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{t}$, ($\boldsymbol{t} \in K^k$). Taktiež naopak, z jeho parametrických rovníc možno okamžite získať jeho parametrické vyjadrenie. Súvis medzi týmito dvoma druhmi popisu je natoľko bezprostredný, že ich ani nemusíme príliš úzkostlivo rozlišovať.

Na druhej strane, v predchádzajúcich paragrafoch sme videli, že každá sústava lineárnych rovníc $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ s rozšírenou maticou $(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{b}) \in K^{m\times(n+1)}$ (pokiaľ má riešenie), popisuje afinný podpriestor $\mathcal{R}(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{b}) \subseteq K^n$. Nájsť parametrické rovnice tohto podpriestoru už vieme, treba si to len uvedomiť. Ak totiž $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ je báza podpriestoru $\mathcal{R}(\boldsymbol{A})$ riešení príslušenej homogénnej sústavy a $\boldsymbol{z} \in \mathcal{R}(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{b})$ je ľubovoľné jedno riešenie nehomogénnej sústavy – a jedno i druhé (pokiaľ existuje) naozaj vieme nájsť –, tak

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{t},$$

kde $\boldsymbol{t} \in K^k$ je vektor parametrov, sú parametrické rovnice afinného podpriestoru $\mathcal{R}(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{b}) \subseteq K^n$.

Inak povedané, vyriešiť sústavu lineárnych rovníc $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ znamená vlastne nájsť nejaké (prípadne nie celkom hocaké ale v istom zmysle „pekné“) parametrické rovnice (alebo parametrické vyjadrenie) afinného podpriestoru $\mathcal{R}(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{b}) \subseteq K^n$.

Často je však potrebné riešiť obrátenú úlohu: k parametricky zadanému afinnému podpriestoru $M \subseteq K^n$ nájsť jeho *všeobecné rovnice*, t. j. sústavu lineárnych rovníc $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ o n neznámych $x_1, \ldots, x_n$ takú, že $M = \mathcal{R}(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{b})$.

Nech teda $M = \boldsymbol{p} + [\boldsymbol{\alpha}]$ je afinný podpriestor v K^n, daný bodom $\boldsymbol{p} \in K^n$ a usporiadanou k-ticou $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k)$ vektorov z K^n, ktorú stotožníme s maticou $\boldsymbol{\alpha} = (u_{ij}) \in K^{n\times k}$ so stĺpcami $\boldsymbol{u}_j$. Parametrické rovnice $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{t}$ podpriestoru M, kde $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)^T \in K^n$ je vektor neznámych a $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_k)^T \in K^k$ je vektor parametrov, možno prepísať do tvaru

$$\boldsymbol{I}_n \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{t} \;+\; \boldsymbol{p},$$

ktorý možno reprezentovať blokovou maticou

$$(\boldsymbol{I}_n \,|\, \boldsymbol{\alpha} \,|\, \boldsymbol{p}).$$

Naša metóda bude založená na *eliminácii parametrov* $t_1, \dots, t_k$ úpravou tejto matice pomocou ERO. Maticu $(\boldsymbol{I}_n \,|\, \boldsymbol{\alpha} \,|\, \boldsymbol{p})$ budeme upravovať na riadkovo ekvivalentnú maticu tak, aby stredný blok vo výslednej matici bol v stupňovitom tvare. Môžu nastať dve možnosti

(1) $h(\boldsymbol{\alpha}) = n$, čo spoznáme podľa toho, že všetky riadky stredného bloku výslednej matice sú nenulové. V tom prípade $M = V$ a všeobecné rovnice tohto podpriestoru tvorí prázdna sústava (t. j. sústava ktorá neobsahuje žiadnu rovnicu). My sa jednoducho uspokojíme s konštatovaním $M = V$ a nijakými všeobecnými rovnicami sa ďalej nebudeme zaoberať.

(2) $h(\boldsymbol{\alpha}) < n$. Vtedy možno stredný blok výslednej matice rozdeliť do dvoch pod sebou umiestnených blokov $\left(\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{0}}\right)$, kde horný blok $\boldsymbol{D}$ je stupňovitá matica typu $h(\boldsymbol{\alpha}) \times k$, ktorá má všetky riadky nenulové, teda dolný nulový blok má rozmer $(n - h(\boldsymbol{\alpha})) \times k$. Toto rozdelenie stredného bloku indukuje rozdelenie celej výslednej matice do blokov

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{A}' & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{b}' \\ \hline \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \end{array}\right).$$

Potom $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sú všeobecné rovnice afinného podpriestoru M, t. j. platí $M = \boldsymbol{p} + [\boldsymbol{\alpha}] = \mathcal{R}(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{b})$.

Popísaný algoritmus možno stručne zhrnúť do schémy

$$(\boldsymbol{I}_n \,|\, \boldsymbol{\alpha} \,|\, \boldsymbol{p}) \xrightarrow{\text{ERO}} \left(\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{A}' & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{b}' \\ \hline \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \end{array}\right),$$

kde $\boldsymbol{D}$ je matica v stupňovitom tvare s nenulovými riadkami (ktorých počet teda nutne je $h(\boldsymbol{D}) = h(\boldsymbol{\alpha})$). Ako vedľajší produkt takéhoto výpočtu, možno z k-tice $\boldsymbol{\alpha}$ vybrať bázu zamerania $\operatorname{Dir} M = [\boldsymbol{\alpha}]$: je tvorená vektormi $\boldsymbol{u}_{j_1}, \dots, \boldsymbol{u}_{j_l}$, kde $1 \le j_1 < \dots < j_l \le k$ sú indexy tých stĺpcov matice $\boldsymbol{D}$, v ktorých sa nachádzajú vedúce prvky jej riadkov (pozri tvrdenie 4.5.3). Správnosť celého algoritmu vyplýva z nasledujúceho tvrdenia.

9.4.1. Tvrdenie. *Nech* $\boldsymbol{B} \in K^{n \times m}$, $\boldsymbol{C} \in K^{n \times k}$ *a* $\boldsymbol{p} \in K^n$. *Ak bloková matica* $(\boldsymbol{B} \,|\, \boldsymbol{C} \,|\, \boldsymbol{p})$ *je riadkovo ekvivalentná s blokovou maticou*

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{A}' & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{b}' \\ \hline \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \end{array}\right),$$

kde $\boldsymbol{D}$ *je matica v stupňovitom tvare s nenulovými riadkami, tak*

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{b}) = \left\{\boldsymbol{x} \in K^m;\, (\exists\, \boldsymbol{t} \in K^k)(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{t} + \boldsymbol{p})\right\}.$$

Dôkaz. Matica $(\boldsymbol{B} \,|\, \boldsymbol{C} \,|\, \boldsymbol{p})$ zodpovedá sústave $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{t} + \boldsymbol{p}$ v neznámych $x_1, \dots, x_m$, $t_1, \dots, t_k$. Podobne matica

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{A}' & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{b}' \\ \hline \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \end{array}\right)$$

zodpovedá sústave

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{t} + \boldsymbol{b}' \\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

v rovnakých neznámych. Vzhľadom na riadkovú ekvivalenciu príslušných matíc sú obe sústavy ekvivalentné.

Dokážeme, že pre ľubovoľné $\boldsymbol{x} \in K^m$ nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$;
(ii) $(\exists\, \boldsymbol{t} \in K^k)(\boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{t} + \boldsymbol{b}' \ \&\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b})$;
(iii) $(\exists\, \boldsymbol{t} \in K^k)(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{t} + \boldsymbol{p})$.

Keďže implikácie (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) platia triviálne, vysvetlenie potrebuje iba implikácia (i) $\Rightarrow$ (ii). Zrejme hodnosť matice $\boldsymbol{D}$ sa rovná počtu jej riadkov a ten je $\leq n$. Preto tiež $h(\boldsymbol{D} \mid \boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}') = h(\boldsymbol{D})$ nezávisle na $\boldsymbol{x}$. Ale to podľa Frobeniovej vety 9.3.1 znamená, že sústava $\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{t} = \boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}'$ (v neznámych $t_1, \ldots, t_k$) má nejaké riešenie $\boldsymbol{t} \in K^k$ pre ľubovoľné $\boldsymbol{x} \in K^m$.

Poznámka. Z uvedeného dôkazu vyplýva, že tvrdenie 9.4.1 zostáva v platnosti, aj keď matica $\boldsymbol{D}$ nie je v stupňovitom tvare; stačí žiadať len lineárnu nezávislosť jej riadkov. Tú však možno najistejšie nahliadnuť práve úpravou príslušnej matice na stupňovitý tvar.

9.4.2. Príklad. Nájdeme všeobecné rovnice afinného podpriestorru $M = \boldsymbol{p} + [\boldsymbol{\alpha}]$ stĺpcového vektorového priestoru $\mathbb{Z}_{11}^5$ nad poľom $\mathbb{Z}_{11}$, kde $\boldsymbol{p} = (1,2,3,4,5)^T$ a $\boldsymbol{\alpha}$ je tvorená stĺpcami matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Budeme upravovať maticu

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 5 & 8 & 5 \end{array}\right)$$

pomocou ERO tak, aby stredný blok nadobudol stupňovitý tvar. Po niekoľkých krokoch dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 2 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 \\ 10 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 9 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Predovšetkým vidíme, že tretí vektor štvorice $\boldsymbol{\alpha}$ je lineárnou kombináciou predchádzajúcich dvoch, preto ho možno v príslušnom parametrickom vyjadrení podpriestoru M vynechať. Zvyšné tri vektory v $\boldsymbol{\alpha}$ sú lineárne nezávislé, čiže $\dim M = 3$. Konečne, všeobecné rovnice podpriestoru M vyzerajú takto

$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 + x_3 \phantom{{}+ x_4 + x_5} &= 6 \\ 9x_1 + 3x_2 \phantom{{}+ x_3} + x_4 + x_5 &= 2\,. \end{aligned}$$

Dosadením sa možno presvedčiť, že bod $\boldsymbol{p}$ skutočne vyhovuje tejto sústave a vektory štvorice $\boldsymbol{\alpha}$ príslušnej homogénnej sústave.

9.5. Rovnice prieniku a spojenia afinných podpriestorov

V tomto paragrafe sa pokúsime zostaviť všeobecné recepty, pomocou ktorých budeme vedieť napísať či už všeobecné alebo parametrické rovnice prieniku a spojenia dvoch afinných podpriestorov stĺpcového vektorového priestoru K^n. Pri tom vezmeme do úvahy tri možnosti zadania pôvodných podpriestorov:

(1) Oba podpriestory sú zadané všeobecnými rovnicami.
(2) Oba podpriestory sú zadané parametricky.
(3) Jeden podpriestor je zadaný pomocou všeobecných rovníc a druhý parametricky.

Každú situáciu budeme ilustrovať na jednom až dvoch konkrétnych príkladoch, v ktorých navyše vyšetríme i vzájomnú polohu oboch afinných podpriestorov.

(1) Nech afinné podpriestory M, $N \subseteq K^n$ majú všeobecné rovnice $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ resp. $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, kde $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in K^m$, $\boldsymbol{B} \in K^{l\times n}$, $\boldsymbol{c} \in K^l$. Potom všeobecnými rovnicami prieniku $M \cap N$ je sústava

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{c}\end{aligned}$$

s rozšírenou maticou

$$\left(\begin{array}{c|c}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{c}\end{array}\right).$$

Parametrické vyjadrenie prieniku $M \cap N$ možno získať vyriešením tejto sústavy.

Ak hľadáme parametrické vyjadrenie spojenia $M \sqcup N$, najprv vyriešením sústav s rozšírenými maticami $(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$ resp. $(\boldsymbol{B}\,|\,\boldsymbol{c})$ získame parametrické vyjadrenia jednotlivých podpriestorov M a N. Z nich na základe tvrdenia 8.3.3(b) zostavíme parametrické vyjadrenie podpriestoru $M \sqcup N$ (pozri tiež príklad 8.3.5). Konečne, ak nás zaujímajú všeobecné rovnice podpriestoru $M \sqcup N$, môžeme ich odvodiť z jeho parametrických rovníc metódou opísanou v druhej časti predchádzajúceho paragrafu 9.4 (pozri tvrdenie 9.4.1 a príklad 9.4.2).

9.5.1. Príklad. Afinné podpriestory M, N vektorového priestoru $\mathbb{Q}^4$ sú dané sústavami

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 9\\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -3\end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0\\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 6\,.\end{aligned}$$

Ak dáme tieto sústavy dohromady, získame všeobecné rovnice prieniku. Ich riešenie však bude výhodné trochu odložiť a najprv upraviť rozšírené matice pôvodných sústav:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -1 & 1 & 9\\ 1 & -1 & 1 & -1 & -3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 6\end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & 2 & -1 & 0\\ 1 & -3 & -2 & 1 & 6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & -1\end{array}\right).$$

Z upravených matíc okamžite dostávame parametrické vyjadrenie pôvodných podpriestorov (matica v hranatých zátvorkách označuje lineárny podpriestor generovaný jej stĺpcami)

$$M = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ak napíšeme obe upravené rozšírené matice všeobecných rovníc podpriestorov M a N do blokov pod seba, dostaneme rozšírenú maticu všeobecných rovníc podpriestoru $M \cap N$. Jej úpravou na redukovaný stupňovitý tvar vyjde

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 9/5 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & -21/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Odtiaľ už priamo vyplýva parametrické vyjadrenie

$$M \cap N = \begin{pmatrix} 3 \\ 9/5 \\ -21/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Zistili sme, že dvojrozmerné afinné podpriestory M, N majú jednorozmerný prienik, teda sú *rôznobežné*. Preto tiež $\dim(M \sqcup N) = 2 + 2 - 1 = 3$.

Ak postavíme vedľa seba generátory smerových podpriestorov $\operatorname{Dir} M$ a $\operatorname{Dir} N$, úpravou príslušnej matice zistíme, že prvé tri sú lineárne nezávislé a posledný z nich je lineárnou kombináciou predchádzajúcich. Teda stĺpce matice

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tvoria bázu zamerania afinného podpriestoru $M \sqcup N$. Jeho parametrické vyjadrenie je

$$M \sqcup N = \boldsymbol{p} + [\boldsymbol{\beta}],$$

kde $\boldsymbol{p} = (3, 9/5, -21/5, 0)^T$. Úpravou blokovej matice $(\boldsymbol{I}_4 \,|\, \boldsymbol{\beta} \,|\, \boldsymbol{p})$ podľa algoritmu z druhej časti paragrafu 9.4. (pozri poznámku za tvrdením 9.4.1) výmenou prvého a posledného riadku dostaneme všeobecné rovnice podpriestoru $M \sqcup N$:

$$x_1 = 3\,.$$

(2) Nech $M = \boldsymbol{p} + [\boldsymbol{\alpha}]$, $N = \boldsymbol{q} + [\boldsymbol{\beta}]$ sú parametrické vyjadrenia dvoch afinných podpriestorov v K^n. Potom, ako už vieme, $M \sqcup N = \boldsymbol{p} + [\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ a podľa tvrdenia 4.5.3 vynechaním vhodných stĺpcov z blokovej matice $(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ možno dostať

bázu zamerania $\operatorname{Dir}(M \sqcup N)$. Všeobecné rovnice podpriestoru $M \sqcup N$ dostaneme úpravou blokovej matice $(\boldsymbol{I}_n \,|\, \boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \,|\, \boldsymbol{p})$, prípadne matice, v ktorej je prostredný blok nahradený bázou zamerania $\operatorname{Dir}(M \sqcup N)$, podľa algoritmu z paragrafu 9.4.

Pokiaľ nás zaujímajú všeobecné rovnice prieniku $M \cap N$, najjednoduchšie ich získame tak, že parametrické rovnice každého z podpriestorov M, N prevedieme na všeobecné rovnice a tieto spojíme dohromady. Parametrické vyjadrenie prieniku $M \cap N$ dostaneme vyriešením jeho všeobecných rovníc.

Jestvuje aj iná cesta k parametrickým rovniciam prieniku $M \cap N$. Ako vedľajší produkt pri nej možno získať bázy zameraní $\operatorname{Dir} M$, $\operatorname{Dir} N$, $\operatorname{Dir}(M \sqcup N)$, teda aj parametrické rovnice spojenia $M \sqcup N$. Pri tejto metóde upravujeme blokovú maticu $(\boldsymbol{\alpha} \,|\, \boldsymbol{\beta} \,|\, \boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})$ pomocou ERO na stupňovitý tvar

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{A}' & \boldsymbol{B}' & \boldsymbol{c}' \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{c} \end{array}\right),$$

kde matica $\boldsymbol{A}'$ má všetky riadky nenulové (teda lineárne nezávislé a ich počet je $h(\boldsymbol{A}') = h(\boldsymbol{\alpha}) = \dim M$). Prienik $M \cap N$ je tvorený všetkými $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{t} \in N$, ktoré patria zároveň do M, t. j. existuje vektor parametrov $\boldsymbol{s}$ taký, že $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{s}$. Hľadáme teda všetky vektory parametrov $\boldsymbol{t}$, ku ktorým existuje nejaký vektor parametrov $\boldsymbol{s}$ taký, že platí

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{s} = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{t} + (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}).$$

Podľa tvrdenia 9.4.1 (stačí v ňom zameniť poradie prvého a druhého zvislého bloku) k danému $\boldsymbol{t}$ existuje takéto $\boldsymbol{s}$ práve vtedy, keď $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$. Vyriešením tejto sústavy získame parametrické vyjadrenie

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{z},$$

kde $\boldsymbol{r} \in \mathcal{R}(\boldsymbol{B} \,|\, \boldsymbol{c})$ a $\boldsymbol{\gamma}$ je báza lineárneho podpriestoru $\mathcal{R}(\boldsymbol{B})$, s vektorom parametrov $\boldsymbol{z}$, ktoré dosadíme do parametrických rovníc podpriestoru N. Dostaneme tak parametrické rovnice

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{\beta} \cdot (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{q} + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \cdot \boldsymbol{z}$$

podpriestoru $M \cap N$.

Metóda zostavenia všeobecných rovníc prieniku $M \cap N$ ako i oboch typov rovníc spojenia $M \sqcup N$, popísaná v prvej časti bodu (2), je (aspoň dúfame) dostatočne jasná. V nasledujúcom príklade sa preto sústredíme len na nájdenie parametrických rovníc prieniku $M \cap N$ metódou z druhej časti a určenie vzájomnej polohy M a N.

9.5.2. Príklad. Nech

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad N_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \\ 5 & 0 & 9 \\ 3 & 4 & 11 \end{bmatrix}, \qquad N_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \\ 5 & 0 & 9 \\ 3 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

sú afinné podpriestory v $\mathbb{R}^4$. Zrejme $\operatorname{Dir} N_1 = \operatorname{Dir} N_2$; označme tento lineárny podpriestor D. Obe úlohy o dvojiciach podpriestorov M, N_1 aj M, N_2 budeme riešiť súčasne. Platí

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 8 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 9 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 11 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Ak si z matice na pravej strane odmyslíme krajný pravý blok, po vynechaní rovnice $0 = 0$ z nej dostaneme sústavu

$$4t_1 - 2t_2 + 6t_3 = 0.$$

Lineárny podpriestor $\operatorname{Dir} M \cap D$ je tvorený práve všetkými lineárnyni kombináciami $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{t}$, kde $\boldsymbol{\beta}$ je matica generátorov D (a jeho báza, čo možno zistiť doupravením stredného bloku na stupňovitý tvar) a $\boldsymbol{t}$ vyhovuje uvedenej homogénnej rovnici. Teda $\dim(\operatorname{Dir} M \cap D) = \dim \operatorname{Dir} M = 2$. Preto $\operatorname{Dir} M \subseteq D$ a platí $M \parallel N_1$ aj $M \parallel N_2$.

Sústava

$$\begin{aligned} 4t_1 - 2t_2 + 6t_3 &= 2 \\ 0 &= 1, \end{aligned}$$

ktorej musí vyhovovať vektor parametrov $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3)^T$, aby ním určený bod z N_1 patril aj do M, nemá riešenie. Preto $M \cap N_1 = \emptyset$ a M, N_1 sú *pravé rovnobežky.*

Naopak, analogická sústava pre dvojicu M, N_2 vedie na jedinú, očividne riešiteľnú rovnicu

$$4t_1 - 2t_2 + 6t_3 = 1.$$

V dôsledku toho $M \subseteq N_2$.

(3) Nech afinný podpriestor $M \subseteq K^n$ je daný všeobecnými rovnicami $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a afinný podpriestor $N = \boldsymbol{q} + [\boldsymbol{\beta}] \subseteq K^n$ je daný parametricky. Ak hľadáme všeobecné rovnice prieniku $M \cap N$, stačí nájsť všeobecné rovnice podpriestoru N a pridať ich k sústave $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Ich vyriešením potom možno dostať aj parametrické vyjadrenie $M \cap N$. Ak hľadáme popis spojenia $M \sqcup N$, najvýhodnejšie je vyriešiť všeobecné rovnice podpriestoru M a z parametrických vyjadrení oboch podpriestorov M, N zostaviť parametrické vyjadrenie $M \sqcup N$ podľa tvrdenia 8.3.3 a príkladu 8.3.5. Elimináciou parametrov odtiaľ dostaneme všeobecné rovnice podpriestoru $M \sqcup N$.

Iná metóda, ako nájsť parametrické vyjadrenie prieniku $M \cap N$ spočíva v dosadení parametrického vyjadrenia podpriestoru N do všeobecných rovníc podpriestoru M. Tým dostaneme sústavu

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{q} + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{b},$$

alebo po úprave s ňou ekvivalentnú sústavu

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{t} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{q},$$

ktorej musí vyhovovať vektor parametrov $\boldsymbol{t}$, aby ním určený bod $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{t} \in N$ patril aj do podpriestoru M, teda do prieniku $M \cap N$. Uvedenú sústavu vyriešime úpravou jej rozšírenej matice $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\beta} \,|\, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{q})$. Podobne ako v prípade (2) riešenie dostaneme v parametrickom tvare

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{z},$$

kde $\boldsymbol{r} \in \mathcal{R}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\beta} \,|\, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{q})$ a $\boldsymbol{\gamma}$ je báza lineárneho podpriestoru $\mathcal{R}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\beta})$, s vektorom parametrov $\boldsymbol{z}$, ktoré dosadíme do parametrických rovníc podpriestoru N. Tak získame parametrické rovnice

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{\beta} \cdot (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{q} + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \cdot \boldsymbol{z}$$

podpriestoru $M \cap N$.

I tentokrát sa v nasledujúcom príklade zameriame len na nájdenie parametrických rovníc prieniku $M \cap N$ druhou z opísaných metód a na určenie vzájomnej polohy M a N.

9.5.3. Príklad. Afinný podpriestor $M \subseteq \mathbb{R}^4$ má všeobecné rovnice

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Rozšítenú maticu tejto sústavy označíme $(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$. Afinný podpriestor $N \subseteq \mathbb{R}^4$ je určený ako afinný obal $N = \ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$ bodov $\boldsymbol{p} = (3,0,1,1)^T$, $\boldsymbol{q} = (4,-1,2,2)^T$, $\boldsymbol{r} = (4,1,2,0)^T$ a $\boldsymbol{s} = (7,3,4,5)^T$. Jeho parametrické vyjadrenie potom je

$$N = \boldsymbol{p} + [\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}-\boldsymbol{p}] = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Keďže

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}-\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

bod tvaru $\boldsymbol{p} + t_1(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}) + t_2(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}) + t_3(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{p}) \in N$ patrí do prieniku $M \cap N$ práve vtedy, keď príslušný vektor parametrov $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3)^T$ vyhovuje sústave s rozšírenou maticou

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Podpriestor riešení tejto sústavy má parametrické vyjadrenie

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dosadením do parametrického vyjadrenia N dostaneme

$$\begin{aligned} M \cap N &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

a $\dim(M \cap N) = 1$. Ľahko nahliadneme, že hodnosť matice sústavy podpriestoru M je 2, preto tiež $\dim M = 4 - 2 = 2$, a $\dim N = 3$. Z toho dôvodu $M \cap N$ je vlastný podpriestor tak v M ako aj v N, čiže M, N sú *rôznobežné*.

Cvičenia

1. Nájdite nejaký fundamentálny systém riešení sústavy homogénnych lineárnych rovníc $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ pre matice

(a) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&0\\2&0&-1&1&-1\\1&0&1&5&-2\end{pmatrix}\in\mathbb{Q}^{3\times5}$; (b) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&1&\sqrt{3}\\1&\sqrt{2}&1\\3&2&1+\sqrt{6}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$;

(c) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+\mathrm{i}&1-\mathrm{i}&2+3\mathrm{i}\\5-\mathrm{i}&-1-5\mathrm{i}&13\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times3}$; (d) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&4&0&9\\0&3&2&5\\0&1&1&0\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_{11}^{3\times4}$.

Vyjadrite všeobecné riešenie každej sústavy ako lineárnu kombináciu fundamentálneho systému riešení.

2. Nájdite nejaké riešenie nehomogénnej sústavy $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ a fundamentálny systém riešení príslušnej homogénnej sústavy danej rozšírenou maticou

(a) $(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\2&3&7&2\\1&2&2&5\end{array}\right)\in\mathbb{Q}^{3\times4}$; (b) $(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cc|c}1&\pi&\mathrm{e}-1\\\mathrm{e}^{-1}&-1&\pi^2\end{array}\right)\in\mathbb{R}^{2\times3}$;

(c) $(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&0&-1\\-1&1&2&1&2\\2&7&5&1&-1\end{array}\right)\in\mathbb{R}^{3\times5}$; (d) $(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\1&1&1&4\\3&4&0&2\end{array}\right)\in\mathbb{Z}_5^{3\times4}$.

Vyjadrite všeobecné riešenie každej sústavy v tvare súčtu jedného jej riešenia a lineárnej kombinácie fundamentálneho systému riešení príslušnej homogénnej sústavy.

3. V každom z nasledujúcich prípadov napíšte parametrické rovnice afinného podpriestoru M vektorového priestoru $\mathbb{R}^3$ alebo $\mathbb{R}^4$ nad poľom $\mathbb{R}$ a nájdite jeho všeobecné rovnice:

(a) $M=\{(0,2,-1)\}\subseteq\mathbb{R}^3$;
(b) $M=(1,-1,2)+[(1,-5,4)]\subseteq\mathbb{R}^3$;
(c) $M=[(1,3,-1),(2,0,5)]\subseteq\mathbb{R}^3$;
(d) $M=\ell(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_4,2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)\subseteq\mathbb{R}^4$
(e) $M=(0,2,-1,1)+[(3,1,10,-8),(3,5,8,-6)]\subseteq\mathbb{R}^4$;
(f) $M=\ell((1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(0,1,1,1))\subseteq\mathbb{R}^4$;
(g) $M=\mathbb{R}^4$.

4. Pre dané lineárne podpriestory S, T vektorového priestoru $\mathbb{R}^4$ nájdite v každom z nasledujúcich prípadov nejaké bázy lineárnych podpriestorov $S\cap T$, $S+T\subseteq\mathbb{R}^4$ a určte ich dimenzie:

(a) $S=\left[(1,1,1,1)^T,(2,0,0,3)^T\right]$, $T=\left[(3,2,1,0)^T,(6,3,2,4)^T\right]$;
(b) $S=[\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4]$, $T=\left[(1,0,2,0)^T,(2,-1,4,1)^T,(4,-1,8,1)^T\right]$;
(c) $S=[\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4]$, $T=\left[(1,0,1,0)^T,(0,1,0,1)^T,(1,0,0,1)^T\right]$.

5. Pre dané afinné podpriestory M, N vektorového priestoru $\mathbb{R}^4$ nájdite v každom z nasledujúcich prípadov všeobecné aj parametrické rovnice ich prieniku $M\cap N$ a určte ich vzájomnú polohu ako aj dimenziu spojenia $M\sqcup N$:

(a) $M=\ell\left((1,0,2,0)^T,(0,2,0,1)^T\right)$, $N=(4,1,7,2)^T+\left[(1,2,3,4)^T,(0,1,2,3)^T,(0,0,1,2)^T\right]$;
(b) $M=(0,0,1,-1)^T+\left[(1,2,2,1)^T,(2,1,1,2)^T\right]$, $N=\left[(0,1,1,0)^T,(1,0,0,1)^T,(1,-1,0,0)^T\right]$;
(c) $M=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$, $N=(1,1,1,1)^T+[\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4]$.

6. Afinné podpriestory M, N vektorového priestoru $\mathbb{R}^5$ sú dané všeobecnými rovnicami. V každom z nasledujúcich prípadov zistite ich vzájomnú polohu, napíšte parametrické rovnice ich prieniku aj spojenia a určte dimenzie afinných oboch podpriestorov $M\cap N$, $M\sqcup N$:

(a) $M\colon\ x_1+2x_2=0,\ x_2-3x_3=1,\ 4x_3-x_4+x_5=2,$
$N\colon\ 2x_1+3x_3-x_5=5,\ x_2+x_4=0,\ x_1-2x_3=7;$
(b) $M\colon\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=5,\ x_1-x_2+x_3=1,\ x_2+2x_4-x_5=2,\ x_3=1,$
$N\colon\ 3x_1+x_2+2x_3+5x_4-x_5=10,\ x_1+x_3+2x_4-x_5=1;$
(c) $M\colon\ x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3,$
$N\colon\ x_1+x_2+x_3=6,\ x_1-x_2+x_3=2.$

7. Jeden z afinných podpriestorov M, N vektorového priestoru $\mathbb{R}^4$ je daný všeobecnými rovnicami a druhý parametricky. V každom z nasledujúcich prípadov zistite ich vzájomnú polohu, napíšte parametrické rovnice ich prieniku $M\cap N$ a všeobecné rovnice ich spojenia $M\sqcup N$ a určte dimenzie afinných podpriestorov $M\cap N$, $M\sqcup N$:

(a) $M\colon\ x+y+z=0,\ x-2y+z=4,\ x-u=0,$ $N=\left[(1,0,-1,0)^T\right]$;
(b) $M\colon\ 2x-y+2z=3,\ x+z-2u=0,$ $N=\left[(1,4,1,1)^T,(1,0,1,0)^T\right]$;
(c) $M\colon\ x+y=0,\ x+z=1,\ x+u=2,$ $N=\ell\left((1,1,2,2)^T,(2,2,3,2)^T\right)$.

8. Nech V je vektorový priestor nad poľom K a S je jeho lineárny podpriestor. Označme V/S množinu všetkých afinných podpriestorov M priestoru V takých, že $\operatorname{Dir} M = S$. Dokážte postupne nasledujúce tvrdenia:
(a) Pre každý prvok $\boldsymbol{x} \in V$ existuje práve jeden podpriestor $X \in V/S$ taký, že $\boldsymbol{x} \in X$. Inými slovami, množina V/S tvorí *rozklad* množiny V a triedou rozkladu, do ktorej patrí prvok $\boldsymbol{x} \in V$, je afinný podpriestor $\boldsymbol{x} + S \in V/S$ (pozri paragraf 0.6).
(b) Prvky $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ patria do tej istej triedy rozkladu V/S práve vtedy, keď $\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{y} \in S$. Inak povedané, vzťahom $\boldsymbol{x} \equiv_S \boldsymbol{y} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{y} \in S$ je definovaná ekvivalencia na množine V prislúchajúca k rozkladu V/S, teda $V/S = V/{\equiv_S}$.
(c) Nech $\boldsymbol{x}_1 \equiv_S \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{y}_1 \equiv_S \boldsymbol{y}_2$ a $c \in K$. Potom tiež $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1 \equiv_S \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2$ a $c\boldsymbol{x}_1 \equiv_S c\boldsymbol{x}_2$.
(d) Nech $X = \boldsymbol{x} + S$, $Y = \boldsymbol{y} + S$ patria do V/S. Vďaka (c) sú predpismi $X + Y = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + S$, $cX = c\boldsymbol{x} + S$ korektne definované operácie na množine V/S (to znamená, že výsledky týchto operácií nezávisia na reprezentantoch $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ tried X resp. Y ale výlučne na podpriestoroch X, Y).
(e) Množina V/S s uvedenými operáciami súčtu a skalárneho násobku tvorí vektorový priestor nad poľom K; nazývame ho *faktorový priestor* vektorového priestoru V podľa podpriestoru S. Čo je nulou v tomto vektorovom priestore?
(f) Priradením $\boldsymbol{x} \mapsto \zeta_S(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + S$ je definované surjektívne lineárne zobrazenie $\zeta_S \colon V \to V/S$ s jadrom $\operatorname{Ker} \zeta_S = S$.
(g) Nech U, V sú vektorové priestory nad poľom K a $\varphi \colon V \to U$ je lineárne zobrazenie. Priradením $\boldsymbol{x} + \operatorname{Ker} \varphi \mapsto \varphi(\boldsymbol{x})$ je *korektne* definované injektívne lineárne zobrazenie $V/\operatorname{Ker} \varphi \to U$. V dôsledku toho platí $V/\operatorname{Ker} \varphi \cong \operatorname{Im} \varphi$.
(h) Ak V je konečnorozmerný, tak $\dim V/S = \dim V \Leftrightarrow \dim S$, čo je ďalšia analógia medzi vlastnosťami dimenzie a logaritmu (porovnaj s tvrdením 5.4.3).

9. Nech V je vektorový priestor nad poľom K a S, T sú jeho lineárne podpriestory. Dokážte tzv. *kosoštvorcovú vetu o izomorfizme*:
$$(S+T)/T \cong S/(S \cap T).$$
(*Návod*: Dokážte, že priradením $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + T \mapsto \boldsymbol{x} + (S \cap T)$, kde $\boldsymbol{x} \in S$, $\boldsymbol{y} \in T$, je korektne definovaný lineárny izomorfizmus $(S+T)/T \to S/(S \cap T)$.)

10. Nech pole K má konečný počet prvkov q, V je vektorový priestor nad K konečnej dimenzie n a S je jeho lineárny podpriestor dimenzie k $(0 \le k \le n)$. Dokážte postupne nasledujúce tvrdenia:
(a) Faktorový priestor V/S má práve q^{n-k} prvkov.
(b) Počet všetkých k-rozmerných *afinných* podpriestorov priestoru V je práve $q^{n-k}\binom{n}{k}_q$, kde $\binom{n}{k}_q$ je q-binomický koeficient (pozri cvičenia 5.16, 5.17).