8. AFINNÉ PODPRIESTORY A AFINNÉ ZOBRAZENIA

Keď sme v paragrafe 4.1, odvolávajúc sa na geometrický názor, ilustrovali pojem lineárneho podpriestoru, ako príklad sme uviedli, že netriválne vlastné lineárne podpriestory „nášho“ trojrozmerného vektorového priestoru $\mathbb{R}^3$ sú práve priamky a roviny *prechádzajúce počiatkom* $\mathbf{0}$. Kritickejší čitateľ mohol vtedy oprávnene zapochybovať o adekvátnosti a prirodzenosti tohto pojmu, či aspoň pocítiť potrebu zaviesť taký pojem podpriestoru, ktorý by napr. v $\mathbb{R}^3$ zahŕňal *všetky* priamky a roviny, nielen tie prechádzajúce počiatkom. Podobne sme v paragrafe 6.1 hneď po definícii pojmu lineárneho zobrazenia boli nútení učiniť poznámku o jeho odlišnosti od pojmu lineárnej funkcie používaného v matematickej analýze. Vzápätí sme prijali záväzok, že sa s týmto nedostatkom v príhodný čas vyrovnáme.

Ten čas práve nastal. Spomínané medzery zaplníme definíciami pojmu *afinného podpriestoru* alebo tiež *lineárnej variety* a pojmu *afinného zobrazenia*. *Afinita* znamená *príbuznosť, spriaznenosť*. Čitateľ sám uvidí, že objekty označené prívlastkom „afinný“ sú úzko spriaznené so zodpovedajúcimi objektmi nesúcimi prívlastok „lineárny“. Ťažiskom kapitoly bude klasifikácia vzájomnej polohy afinných podpriestorov vo vektorovom priestore.

8.1. Body a vektory

Na vektory, čiže na prvky vektorových priestorov – aspoň pokiaľ ide o konečnorozmerné vektorové priestory nad $\mathbb{R}$, – sa dívame ako na orientované úsečky s počiatkom v bode $\mathbf{0}$. Už táto veta prezrádza, že *pôvodne* sa na prvky takéhoto priestoru dívame ako na *body* a celý priestor chápeme ako *homogénny*, t. j. všetky body považujeme za rovnocenné a nevyčleňujeme v ňom nijaký privilegovaný bod za počiatok. Až na základe tohto pôvodného porozumenia dokážeme po vyčlenení nejakého počiatku O (ktorým sa môže stať ľubovoľný bod homogénneho priestoru) nahradiť bod A príslušného priestoru orientovanou úsečkou $\overleftrightarrow{OA}$ a následne abstrahovať od jej polohy, to znamená uvidieť za ňou *vektor* $\boldsymbol{u} = \overleftrightarrow{OA}$, daný len jej veľkosťou, smerom a orientáciou, ktorý možno umiestniť do ľubovoľného bodu priestoru – nielen do počiatku.

Afinným priestorom nad poľom K rozumieme vektorový priestor V nad týmto poľom, pri pohľade na ktorý sme sa vrátili k onomu pôvodnému porozumeniu jeho štruktúre a prvkom. Tie sa z vektorov stali opäť bodmi a počiatok (t. j. nulový vektor) stratil svoje výsadné postavenie – stal sa z neho bod ako každý iný.

Formálnu definíciu afinného priestoru nad poľom K tu uvádzať nebudeme. Sme totiž toho názoru, že matematická formalizácia rozdielu medzi oboma spomínanými pohľadmi na prvky vektorového priestoru by v tejto chvíli vniesla do veci viac zmätku než svetla. Celkom postačí, keď úlohu prepínača medzi oboma pohľadmi zveríme dvojiciam slov „bod“ – „vektor“ a „afinný“ – „lineárny“, prípadne „afinný“ – „vektorový“. Na druhej strane však pred nami vyvstáva potreba formálnej definície podmnožín vektorového priestoru, ktoré sú „vernými kópiami“ lineárnych podpriestorov – nemusia však prechádzať počiatkom, ale možu byť umiestnené „kdekoľvek“.

8.2. Afinné podpriestory

V celom tomto a nasledujúcich dvoch paragrafoch V označuje nejaký pevný, no inak ľubovoľný, vektorový priestor nad poľom K a m, n sú prirodzené čísla.

Kvôli pohodliu čitateľa budeme písmenami $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ (možno s indexmi) značiť výlučne body, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ označujú zasa výlučne vektory, kým $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ môžu podľa potreby označovať body i vektory. Taktiež sa dohodneme, že rozdiel dvoch bodov budeme chápať ako vektor, kým súčet bodu a vektora ako bod.

Nech $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in V$, $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{q}$. *Priamkou* prechádzajúcou alebo tiež určenou bodmi $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ rozumieme množinu $\ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$, ktorú dostaneme tak, že do bodu $\boldsymbol{p}$ umiestnime všetky možné skalárne násobky vektora $\boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}$. Typický bod priamky $\ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ má teda tvar

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t(\boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}) = (1 \Leftrightarrow t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q},$$

kde $t \in K$, čiže

$$\ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \{s\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q};\ s, t \in K \ \&\ s + t = 1\} \subseteq V.$$

Tento výraz má, samozrejme, zmysel aj pre $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$, vtedy však nejde o priamku ale o jednobodovú množinu $\ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{p}\}$. Z uvedeného tvaru ihneď vidíme, že

$$\ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \ell(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$$

pre ľubovoľné $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in V$.

Lineárnu kombináciu, t. j. výraz tvaru

$$t_0\boldsymbol{p}_0 + t_1\boldsymbol{p}_1 + \ldots + t_n\boldsymbol{p}_n = \sum_{i=0}^{n} t_i\boldsymbol{p}_i,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{p}_0, \ldots, \boldsymbol{p}_n \in V$, $t_0, t_1, \ldots, t_n \in K$, nazývame *afinnou kombináciou* bodov $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$, ak platí $t_0 + t_1 + \ldots + t_n = 1$. Výsledok afinnej kombinácie bodov budeme chápať ako bod; iné lineárne kombinácie bodov ako afinné sa v našich úvahách nevyskytnú. (Ešte si všimnite, že každá afinná kombinácia je neprázdna, t. j. obsahuje aspoň jeden člen.)

Neprázdnu podmnožinu M vektorového priestoru V nazývame jeho *afinným podpriestorom*, prípadne *lineárnou varietou* vo V, ak pre všetky body $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \in M$ a každý skalár $s \in K$ platí

$$s\boldsymbol{p} + (1 \Leftrightarrow s)\boldsymbol{q} \in M \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r} \in M.$$

Inak povedané, $\emptyset \neq M \subseteq V$ je afinný podpriestor, ak M je uzavretá vzhľadom na afinné kombinácie uvedených dvoch typov. Prvá podmienka znamená, že pre všetky $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in M$ platí $\ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \subseteq M$, t. j. M s každou dvojicou bodov obsahuje celú priamku nimi určenú. Druhú podmienku dodávame len kvôli poliam charakteristiky 2; ak $\operatorname{char} K \neq 2$, tak už vyplýva z prvej, takže je vlastne zbytočná. Na druhej strane, napr. vo vektorovom priestore V nad poľom $\mathbb{Z}_2$ pre všetky body $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in V$ platí $\ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\}$, teda len prvej podmienke by vyhovovala *každá podmnožina* $M \subseteq V$. Podrobnejšie o tom pojednáva nasledujúce tvrdenie, ktoré je očividne analógiou tvrdenia 4.1.2.

8.2.1. Tvrdenie. *Pre ľubovoľnú neprázdnu množinu $M \subseteq V$ nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) M je afinný podpriestor vo V, t. j. pre ľubovoľné $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \in M$, $s \in K$ platí $s\boldsymbol{p} + (1 - s)\boldsymbol{q} \in M$ a $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r} \in M$;

(ii) M je uzavretá vzhľadom na ľubovoľné afinné kombinácie trojíc bodov, t. j. pre všetky $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \in M$, $s, t \in K$ platí $s\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q} + (1 - s - t)\boldsymbol{r} \in M$;

(iii) M je uzavretá vzhľadom na akékoľvek afinné kombinácie, t. j. pre všetky $n \in \mathbb{N}$, body $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n \in M$ a skaláry $t_0, t_1, \ldots, t_n \in K$ také, že $t_0 + t_1 + \ldots + t_n = 1$, platí $t_0\boldsymbol{p}_0 + t_1\boldsymbol{p}_1 + \ldots + t_n\boldsymbol{p}_n \in M$;

Ak $\operatorname{char} K \neq 2$, tak uvedené podmienky sú navyše ekvivalentné s podmienkou

(i^-) pre ľubovoľné $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in M$, $s \in K$ platí $s\boldsymbol{p} + (1 - s)\boldsymbol{q} \in M$.

Dôkaz. Implikácie (iii) ⇒ (ii) ⇒ (i) sú zrejmé aj bez predpokladu $\operatorname{char} K \neq 2$. Dokážeme implikáciu (i) ⇒ (iii); pri dôkaze vyjde navyše najavo, že pre $\operatorname{char} K \neq 2$ stačí na odvodenie záveru (iii) slabšia podmienka (i^-) miesto (i).

Predpokladajme (i) (teda tým skôr (i^-)) a pripusťme, že podmienka (iii) neplatí. Označme n najmenšie prirodzené číslo, pre ktoré to nastane. Potom $n \geq 2$ a pre všetky $k < n$ podmienka (iii) platí, čiže M je uzavretá na afinné kombinácie $\leq n$ bodov. Nech $\boldsymbol{p}_0, \ldots, \boldsymbol{p}_n \in M$, $t_0, \ldots, t_n \in K$ sú také, že $t_0 + \ldots + t_n = 1$ a $t_0\boldsymbol{p}_0 + \ldots + t_n\boldsymbol{p}_n \notin M$. Treba zvážiť dve možnosti.

(a) Ak $t_i \neq 1$ pre aspoň jedno $i \leq n$, tak bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $t_0 \neq 1$. Označme

$$\boldsymbol{q} = \frac{t_1}{1 - t_0}\boldsymbol{p}_1 + \ldots + \frac{t_n}{1 - t_0}\boldsymbol{p}_n.$$

Keďže

$$\frac{t_1}{1 - t_0} + \ldots + \frac{t_n}{1 - t_0} = \frac{t_1 + \ldots + t_n}{1 - t_0} = 1,$$

$\boldsymbol{q} \in M$, lebo $\boldsymbol{q}$ je afinnou kombináciou n bodov z M. Potom

$$t_0\boldsymbol{p}_0 + t_1\boldsymbol{p}_1 + \ldots + t_n\boldsymbol{p}_n = t_0\boldsymbol{p}_0 + (1 - t_0)\boldsymbol{q} \in M$$

vyplýva už z podmienky (i^-). To je však spor.

(b) Ak $t_i = 1$ pre všetky $i \leq n$, tak ide o afinnú kombináciu $\boldsymbol{p}_0 + \boldsymbol{p}_1 + \ldots + \boldsymbol{p}_{n-1} + \boldsymbol{p}_n$ a $t_1 + \ldots + t_{n-1} = -1$. Potom $\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{p}_1 - \ldots - \boldsymbol{p}_{n-1}$ je afinnou kombináciou $n - 1$ bodov z M, teda $\boldsymbol{q} \in M$. Podľa druhej z podmienok v (i) máme

$$\boldsymbol{p}_0 + \boldsymbol{p}_1 + \ldots + \boldsymbol{p}_{n-1} + \boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}_n \in M,$$

čo je opäť spor.

Ak $\operatorname{char} K \neq 2$, možno sa zaobísť bez tejto podmienky. Keďže $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, už z ($i^-$) vyplýva $\frac{1}{2}\boldsymbol{p}_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{p}_n \in M$. Nakoľko $2 + (-1) = 1$, opäť len z (i^-) dostávame

$$\boldsymbol{p}_0 + \boldsymbol{p}_1 + \ldots + \boldsymbol{p}_{n-1} + \boldsymbol{p}_n = 2\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{p}_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{p}_n\right) - \boldsymbol{q} \in M.$$

Poznámka. Ak $\operatorname{char} K = \infty$, tak možnosť (b) zrejme nemôže nastať, teda v uvedenom dôkaze stačí uvažovať len možnosť (a). Zároveň vidno, že v druhej časti bodu (b) je podstatný predpoklad $\operatorname{char} K \neq 2$. Bez neho by sme totiž nevedeli zaručiť existenciu prvku $1/2 = 2^{-1} \in K$ inverzného k prvku $2 = 1 + 1 \in K$.

Nasledujúca veta ukazuje, že afinné podpriestory skutočne nie sú ničím iným, než lineárnymi podpriestormi posunutými do ľubovoľného bodu príslušného vektorového priestoru.

8.2.2. Veta. *Nech $M \subseteq V$. Potom M je afinný podpriestor vo V práve vtedy, keď existuje bod $\boldsymbol{p} \in V$ a lineárny podpriestor $S \subseteq V$ taký, že*

$$M = \boldsymbol{p} + S = \{\boldsymbol{p} + \boldsymbol{u};\ \boldsymbol{u} \in S\}.$$

V tom prípade pre všetky $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \in M$, $\boldsymbol{u} \in S$ platí

$$\boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{r} \in S, \qquad \boldsymbol{q} + \boldsymbol{u} \in M, \qquad M = \boldsymbol{q} + S,$$
$$S = \{\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{q};\ \boldsymbol{x} \in M\} = \{\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{y};\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M\}.$$

Dôkaz. Nech $M \subseteq V$ je afinný podpriestor a $\boldsymbol{p} \in M$ je jeho ľubovoľný bod. Položme

$$S = \{\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{p};\ \boldsymbol{x} \in M\}.$$

Potom zrejme $M = \boldsymbol{p} + S$. Stačí teda dokázať, že $S \subseteq V$ je lineárny podpriestor. Keďže $\boldsymbol{p} \in M$, platí $\mathbf{0} = \boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{p} \in S$. Ukážeme uzavretosť S na lineárne kombinácie. Nech $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S$, $a, b \in K$. Potom $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}$ pre nejaké $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$. Jednoduchý výpočet dáva

$$a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} = a(\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}) + b(\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}) = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} + (1 \Leftrightarrow a \Leftrightarrow b)\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}.$$

Prvé tri sčítance tvoria afinnú kombináciu bodov z M, teda $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} + (1 \Leftrightarrow a \Leftrightarrow b)\boldsymbol{p} \in M$; preto tiež $a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} \in S$

Nech naopak $M = \boldsymbol{p} + S$ pre nejaký bod $\boldsymbol{p} \in V$ a lineárny podpriestor $S \subseteq V$. Podľa tvrdenia 8.2.1 stačí ukázať uzavretosť M na afinné kombinácie trojíc. Nech $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in M$, $s, t \in K$. Potom $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{w}$ pre nejaké $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in S$. Počítajme

$$\begin{aligned} s\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} + (1 \Leftrightarrow s \Leftrightarrow t)\boldsymbol{z} &= s(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{u}) + t(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}) + (1 \Leftrightarrow s \Leftrightarrow t)(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{w}) \\ &= \boldsymbol{p} + s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} + (1 \Leftrightarrow s \Leftrightarrow t)\boldsymbol{w}. \end{aligned}$$

Keďže $t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v} + (1 \Leftrightarrow s \Leftrightarrow t)\boldsymbol{w} \in S$, dostávame $s\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} + (1 \Leftrightarrow s \Leftrightarrow t)\boldsymbol{z} \in M$.

Ďalšie tri podmienky možno teraz overiť priamymi výpočtami, ktoré prenechávame čitateľovi; štvrtá z nich okamžite vyplýva.

8.2.3. Dôsledok. *Každý lineárny podpriestor S vektorového priestoru V je jeho afinným podpriestorom. Afinný podpriestor M vektorového priestoru V je jeho lineárnym podpriestorom práve vtedy, keď $\mathbf{0} \in M$.*

Zameraním alebo tiež *smerovým podpriestorom* afinného podpriestoru $M \subseteq V$ nazývame lineárny podpriestor

$$\operatorname{Dir} M = \{\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{y};\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M\} \subseteq V.$$

(Označenie pochádza z anglického slova *direction*). Podľa vety 8.2.2 je $\operatorname{Dir} M$ jediný lineárny podpriestor vo V taký, že $M = \boldsymbol{p} + \operatorname{Dir} M$ pre nejaké (pre každé) $\boldsymbol{p} \in M$. Taktiež pre každé $\boldsymbol{p} \in M$ platí

$$\operatorname{Dir} M = \{\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{p};\ \boldsymbol{x} \in M\}.$$

Pre každú usporiadanú $(n+1)$-ticu bodov $(\boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n)$, vektorového priestoru V, prípadne pre jeho konečnú neprázdnu podmnožinu $\{\boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n\}$, označme

$$\ell(\boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n) = \{t_0\boldsymbol{p}_0 + \dots + t_n\boldsymbol{p}_n;\, t_0, \dots, t_n \in K \;\&\; t_0 + \dots + t_n = 1\}$$

množinu všetkých afinných kombinácií bodov $\boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n$. Z práve dokázaného tvrdenia vyplýva, že $\ell(\boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n)$ je najmenší afinný podpriestor vo V, ktorý obsahuje všetky body $\boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n$; nazývame ho *afinný obal* bodov $\boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n$ alebo tiež *afinný podpriestor generovaný* bodmi $\boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n$.

Vo všeobecnosti možno pre ľubovoľnú (i nekonečnú) neprázdnu množinu $X \subseteq V$ definovať jej *afinný obal* $\ell(X)$, nazývaný tiež *afinný podpriestor generovaný* množinou X, ako množinu všetkých (konečných) afinných kombinácií bodov z X. Opäť platí, že $\ell(X)$ je najmenší afinný podpriestor vo V, pre ktorý $X \subseteq \ell(X)$.

8.2.4. Tvrdenie. *Nech* $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n \in V$. *Potom*

$$\ell(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n) = \boldsymbol{p}_0 + [\boldsymbol{p}_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n \Leftrightarrow \boldsymbol{p}_0],$$
$$\operatorname{Dir} \ell(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n) = [\boldsymbol{p}_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n \Leftrightarrow \boldsymbol{p}_0].$$

Dôkaz prenechávame ako cvičenie čitateľovi.

Dimenziou alebo tiež *rozmerom* afinného podpriestoru $M \subseteq V$, označenie $\dim M$, nazývame dimenziu jeho zamerania, teda

$$\dim M = \dim \operatorname{Dir} M.$$

Body $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n$ vektorového priestoru V nazývame *afinne nezávislé*, ak vektory $\boldsymbol{p}_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n \Leftrightarrow \boldsymbol{p}_0$ sú lineárne nezávislé. Z nasledujúceho očividného tvrdenia okrem iného vyplýva, že body $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n \in V$ sú afinne nezávislé práve vtedy, keď pre nejaké (pre každé) $0 \le k \le n$ vektory $\boldsymbol{p}_j \Leftrightarrow \boldsymbol{p}_k$, kde $0 \le j \le n$ a $j \neq k$, sú lineárne nezávislé. Inak povedané, platí

8.2.5. Tvrdenie. *Body* $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n \in V$ *sú afinne nezávislé práve vtedy, keď*

$$\dim \ell(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n) = n$$

Zrejme 0-rozmerné afinné podpriestrory vo V sú práve všetky body $\boldsymbol{p} \in V$ (presnejšie, všetky jednobodové podmnožiny vo V). Tieto afinné podpriestory nazývame tiež *triviálne*. Jednorozmené afinné podpriestory vo V nazývame *priamkami*. Každá priamka má naozaj tvar $\ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ pre nejaké afinne nezávislé (t. j. rôzne) body $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in V$. Dvojrozmerné afinné podpriestory vo V nazývame *rovinami*. Taktiež samotný priestor V je svojim *nevlastným* afinným podpriestorom. Ak $\dim V = n$, tak $(n \Leftrightarrow 1)$-rozmerné afinné podpriestory vo V nazývame *nadrovinami*.

Kým pojmy „bod“, „priamka“ a „rovina“ sú absolútne v tom zmysle, že závisia len na dimenzii príslušného afinného podpriestoru, pojem nadroviny je relatívny, lebo závisí na vzťahu dimenzií afinného podpriestoru a celého priestoru. Napríklad ak $\dim V = 1$ (t. j. ak samotné V je priamka), tak každý bod vo V je zároveň nadrovinou. Nadrovinami v dvojrozmernom priestore (t. j. v rovine) sú zasa všetky priamky. V trojrozmernom priestore V pojmy roviny a nadroviny splývajú. V štvorrozmernom priestore sú zasa nadrovinami trojrozmerné podpriestory; atď. Ešte poznamenajme, že v 0-rozmernom (t. j. jednobodovom) priestore V niet priamok, rovín ani nadrovín.

8.3. Prienik a spojenie afinných podpriestorov

V tomto paragrafe mierne zovšeobecníme niektoré výsledky paragrafov 4.3 a 5.4. o prieniku a súčte lineárnych podpriestorov do podoby použiteľnej pre afinné podpriestory.

8.3.1. Tvrdenie. *Nech M, $N \subseteq V$ sú afinné podpriestory. Potom $M \cap N$ je afinný podpriestor vo V práve vtedy, keď $M \cap N \neq \emptyset$. V tom prípade*

$$\operatorname{Dir}(M \cap N) = \operatorname{Dir} M \cap \operatorname{Dir} N.$$

Dôkaz. Ak $M \cap N = \emptyset$, tak to samozrejme nie je afinný podpriestor. Nech $M \cap N \neq \emptyset$. Označme $S = \operatorname{Dir} M$, $T = \operatorname{Dir} N$ príslušné smerové podpriestory. Zvoľme ľubovoľný bod $\boldsymbol{p} \in M \cap N$. Stačí dokázať rovnosť

$$M \cap N = \boldsymbol{p} + (S \cap T).$$

Zvoľme $\boldsymbol{q} \in M \cap N$. K nemu existujú $\boldsymbol{u} \in S$, $\boldsymbol{v} \in T$ také, že $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}$. Potom $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \in S \cap T$ a $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{p} + (S \cap T)$. Teda $M \cap N \subseteq \boldsymbol{p} + (S \cap T)$. Obrátená inklúzia je triviálna.

Neprázdnosť prieniku $M \cap N$ možno zaručiť za predpokladu, že lineárny priestor $\operatorname{Dir} M + \operatorname{Dir} N$ je „dosť veľký“.

8.3.2. Tvrdenie. *Nech M, $N \subseteq V$ sú afinné podpriestory. Potom*

$$\operatorname{Dir} M + \operatorname{Dir} N = V \;\Rightarrow\; M \cap N \neq \emptyset.$$

Dôkaz. Označme $S = \operatorname{Dir} M$, $T = \operatorname{Dir} N$. Zvoľme ľubovoľné $\boldsymbol{p} \in M$, $\boldsymbol{q} \in N$. Keďže $S + T = V$, existujú vektory $\boldsymbol{u} \in S$, $\boldsymbol{v} \in T$ také, že $\boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. Potom

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} + (\boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$$

V dôsledku toho $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{v} \in M \cap N$, lebo $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{u} \in M$ a $\boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{v} \in N$.

Spojením afinných podpriestorov M, $N \subseteq V$, označenie $M \sqcup N$, nazývame afinný obal ich zjednotenia. Teda

$$M \sqcup N = \ell(M \cup N).$$

Zrejme $M \sqcup N$ je najmenší afinný podpriestor vo V, ktorý obsahuje M aj N, a pre lineárne podpriestory S, $T \subseteq V$ platí $S \sqcup T = S + T$.

8.3.3. Tvrdenie. *Nech M, $N \subseteq V$ sú afinné podpriestory.*

(a) Ak $M \cap N \neq \emptyset$, tak

$$\operatorname{Dir}(M \sqcup N) = \operatorname{Dir} M + \operatorname{Dir} N,$$

$$M \sqcup N = M + \operatorname{Dir} N = N + \operatorname{Dir} M.$$

(b) Ak $M \cap N = \emptyset$, tak pre ľubovoľné $\boldsymbol{p} \in M$, $\boldsymbol{q} \in N$ platí

$$\operatorname{Dir}(M \sqcup N) = [\boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}] + \operatorname{Dir} M + \operatorname{Dir} N,$$

$$M \sqcup N = M + ([\boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}] + \operatorname{Dir} N) = N + ([\boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}] + \operatorname{Dir} M).$$

Poznámka. Stojí za zmienku, že obe rovnosti z (b) sú splnené aj za predpokladu $M \cap N \neq \emptyset$. V tom prípade však pre ľubovoľné $\boldsymbol{r} \in M \cap N$ platí

$$\boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p} = (\boldsymbol{r} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}) + (\boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{r}) \in \operatorname{Dir} M + \operatorname{Dir} N,$$

takže vektor $\boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}$ možno v príslušných vzťahoch vynechať. Rovnako tomu bude i v príklade 8.3.5.

Dôkaz. Stačí dokázať len (b), lebo (a) z neho vyplýva vo svetle našej poznámky. Označme $S = \operatorname{Dir} M$, $T = \operatorname{Dir} N$ a zvoľme $\boldsymbol{p} \in M$, $\boldsymbol{q} \in N$. Budeme dokazovať iba rovnosť

$$M \sqcup N = \boldsymbol{p} + [\boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}] + S + T;$$

zvyšok je už jej bezprostredným dôsledkom.

Každý bod $\boldsymbol{r} \in M \sqcup N$ je afinnou kombináciou

$$\boldsymbol{r} = \sum_{i=0}^{m} s_i \boldsymbol{p}_i + \sum_{j=0}^{n} t_j \boldsymbol{q}_j$$

kde $\boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_m \in M$, $\boldsymbol{q}_0, \dots, \boldsymbol{q}_n \in M$, $s_0, \dots, s_m, t_0, \dots, t_n \in K$ a $\sum_i s_i + \sum_j t_j = 1$. Potom $\boldsymbol{p}_i \Leftrightarrow \boldsymbol{p} \in S$, $\boldsymbol{q}_j \Leftrightarrow \boldsymbol{q} \in T$ pre $i \leq m$, $j \leq n$. Označme $s = s_0 + \ldots + s_m$, $t = t_0 + \ldots + t_n$ a počítajme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= (s\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q}) + \sum_{i=0}^{m} s_i(\boldsymbol{p}_i \Leftrightarrow \boldsymbol{p}) + \sum_{j=0}^{n} t_j(\boldsymbol{q}_j \Leftrightarrow \boldsymbol{q}) \\
&= \boldsymbol{p} + t(\boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}) + \sum_{i=0}^{m} s_i(\boldsymbol{p}_i \Leftrightarrow \boldsymbol{p}) + \sum_{j=0}^{n} t_j(\boldsymbol{q}_j \Leftrightarrow \boldsymbol{q}) \in \boldsymbol{p} + [\boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}] + S + T,
\end{aligned}$$

keďže $s = 1 \Leftrightarrow t$. Teda $M \sqcup N \subseteq \boldsymbol{p} + [\boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}] + S + T$. Obrátená inklúzia je triviálna.

8.3.4. Dôsledok. *Nech M, $N \subseteq V$ sú konečnorozmerné afinné podpriestory. Potom*

$$\dim(M \sqcup N) = \begin{cases} \dim M + \dim N \Leftrightarrow \dim(M \cap N), & \text{ak } M \cap N \neq \emptyset, \\ \dim M + \dim N \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Dir} M \cap \operatorname{Dir} N) + 1, & \text{ak } M \cap N = \emptyset. \end{cases}$$

8.3.5. Príklad. Vo vektorovom priestore V uvažujme konečnorozmerné afinné podpriestory

$$M = \boldsymbol{p} + [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m], \qquad N = \boldsymbol{q} + [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n].$$

Potom

$$M \sqcup N = \begin{cases} \boldsymbol{p} + [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n], & \text{ak } M \cap N \neq \emptyset, \\ \boldsymbol{p} + [\boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n], & \text{ak } M \cap N = \emptyset, \end{cases}$$

$$\dim(M \sqcup N) = \begin{cases} \dim[\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n], & \text{ak } M \cap N \neq \emptyset, \\ \dim[\boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]), & \text{ak } M \cap N = \emptyset. \end{cases}$$

Ak navyše predpokladáme, že tak vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m$ ako aj vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ sú lineárne nezávislé, tak

$$\dim(M \sqcup N) = \begin{cases} m + n \Leftrightarrow k, & \text{ak } M \cap N \neq \emptyset, \\ m + n \Leftrightarrow k + 1, & \text{ak } M \cap N = \emptyset, \end{cases}$$

kde $k = \dim([\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m] \cap [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n])$.

8.3.6. Príklad. V stĺpcovom priestore $\mathbb{R}^4$ sú dané vektory $\boldsymbol{x} = (1,2,3,4)^T$, $\boldsymbol{y} = (0,-3,1,-1)^T$, $\boldsymbol{z} = (1,1,0,0)^T$, $\boldsymbol{u} = (0,-2,4,3)^T$, $\boldsymbol{v} = (2,6,2,5)^T$, $\boldsymbol{w} = (0,0,1,1)^T$ a bližšie neurčené body $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$. Potom $S = [\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}]$, $T = [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]$ sú lineárne podpriestory a $M = \boldsymbol{p} + S$, $N = \boldsymbol{q} + N$ sú afinné podpriestory v $\mathbb{R}^4$. Nájdeme dimenzie lineárnych podpriestorov $S + T$, $S \cap T$ a afinných podpriestorov $M \cap N$, $M \sqcup N$ v závislosti na $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$.

Lineárny podpriestor $S + T$ je generovaný stĺpcami blokovej matice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right),$$

pričom stĺpce ľavého bloku generujú lineárny podpriestor S a stĺpce pravého bloku lineárny podpriestor T. Táto matica je riadkovo ekvivalentná s blokovou maticou

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

v stupňovitom tvare, ktorej riadky majú vedúce prvky v stĺpcoch 1, 2, 3 a 6. Hneď vidíme, že vektory $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ tvoria bázu S a vektory $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}$ bázu $S + T$. Doupravovaním pravého bloku na riadkovo ekvivalentný stupňovitý tvar

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sa možno presvedčiť, že i vektory $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ sú lineárne nezávislé, teda tvoria bázu T. Zhrnutím dostávame $\dim S = \dim T = 3$, $\dim(S + T) = 4$. Odtiaľ podľa vety 5.4.1 vyplýva $\dim(S \cap T) = 3 + 3 - 4 = 2$. Takže $S + T = \mathbb{R}^4$, a bez toho, že by sme čokoľvek ďalej počítali, z tvrdenia 8.3.2 vieme, že nezávisle na bodoch $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ platí $M \cap N \neq \emptyset$. Preto $\dim(M \cap N) = \dim(S \cap T) = 2$ podľa tvrdenia 8.3.1. S použitím tvrdenia 8.3.3 a dôsledku 8.3.4 dostávame $\dim(M \sqcup N) = \dim(S + T) = 4$.

8.4. Vzájomná poloha afinných podpriestorov

V tomto paragrafe podáme sľúbenú klasifikáciu vzájomnej polohy dvojíc netriviálnych vlastných afinných podpriestorov vo vektorovom priestore V. (Hoci to nie je z logického hľadiska nevyhnutné, aby sme sa vyhli triedeniu trivialít, body a celý priestor V z našich úvah vylučujeme.) Táto téma prirodzeným spôsobom rozširuje látku stredoškolskej geometrie, zahŕňajúcu klasifikáciu vzájomnej polohy priamok v rovine resp. priamok a rovín v (trojrozmernom) priestore.

Polohu netriviálnych vlastných lineárnych variet $M, N \subseteq V$ budeme klasifikovať na základe dvoch kritérií:

(A) Ak platí $\operatorname{Dir} M \subseteq \operatorname{Dir} N \vee \operatorname{Dir} N \subseteq \operatorname{Dir} M$, hovoríme, že M, N sú *rovnobežné* a píšeme $M \parallel N$.
V opačnom prípade, t. j. ak platí $\operatorname{Dir} M \not\subseteq \operatorname{Dir} N$ & $\operatorname{Dir} N \not\subseteq \operatorname{Dir} M$, hovoríme, že M, N *nie sú rovnobežné*, a píšeme $M \nparallel N$.

(B) Ak platí $M \cap N \neq \emptyset$, hovoríme, že M, N *sa pretínajú.*
V opačnom prípade, t. j. ak $M \cap N = \emptyset$, hovoríme, že M, N *sa nepretínajú*, alebo, že sú *disjunktné.*

Celkovo teda dostávame štyri možnosti:

(1) $M \parallel N$ & $M \cap N \neq \emptyset$, čiže M, N sú rovnobežné a pretínajú sa.
Ľahko možno nahliadnuť, že v takom prípade platí $\operatorname{Dir} M \subseteq \operatorname{Dir} N \Leftrightarrow M \subseteq N$ a $\operatorname{Dir} N \subseteq \operatorname{Dir} M \Leftrightarrow N \subseteq M$. Teda $M \subseteq N$ alebo $M \subseteq N$. Hovoríme, že jedna z lineárnych variet M, N je *podvarietou* druhej, alebo, že M, N sú vo vzťahu *inklúzie.*

(2) $M \parallel N$ & $M \cap N = \emptyset$, čiže M, N sú rovnobežné a nepretínajú sa.
Tento prípad nazývame vzťahom *pravej rovnobežnosti.*

(3) $M \nparallel N$ & $M \cap N \neq \emptyset$, čiže M, N nie sú rovnobežné a pretínajú sa.
Hovoríme, že M, N sú *rôznobežné.*

(4) $M \nparallel N$ & $M \cap N = \emptyset$, čiže M, N nie sú rovnobežné a nepretínajú sa.
V tomto prípade ešte rozlišujeme dve ďalšie možnosti:
(4a) Ak $\operatorname{Dir} M \cap \operatorname{Dir} N = \{\mathbf{0}\}$, hovoríme, že M, N sú *mimobežné.*
(4b) Ak $\operatorname{Dir} M \cap \operatorname{Dir} N \neq \{\mathbf{0}\}$, hovoríme, že M, N sú *čiastočne rovnobežné.*

Prípady (1), (2), (3) sú nám dobre známe zo stredoškolskej planimetrie, s prípadom (4) sa však v rovine stretnúť nemožno – dve priamky v rovine buď splývajú alebo sú to pravé rovnobežky alebo rôznobežky. Zo stredoškolskej stereometrie, okrem prípadov (1), (2), (3), ktoré sa realizujú vo vzájomných polohách dvojíc priamok, dvojíc rovín ako i priamky a roviny v trojrozmernom priestore, poznáme aj prípad (4a) – ide o prípad mimobežných priamok. S prípadom (4b), t. j. s prípadom čiastočnej rovnobežnosti sme sa však dosiaľ nestretli a nedokážeme ho spojiť so žiadnou názornou geometrickou predstavou. Nie je to náhoda. Platí totiž nasledujúce tvrdenie.

8.4.1. Tvrdenie. *Nech M, $N \subseteq V$ sú čiastočne rovnobežné lineárne variety. Potom* $\dim M \geq 2$, $\dim N \geq 2$ a $\dim V \geq 4$.

Dôkaz. Označme $S = \operatorname{Dir} M$, $T = \operatorname{Dir} N$. Potom $S \cap T$ je netriválny vlastný lineárny podpriestor každého zo zameraní S, T. Teda $\dim(S \cap T) \geq 1$, $\dim M = \dim S \geq 2$, $\dim N = \dim T \geq 2$ a taktiež

$$\dim(S \cap T) \leq \min(\dim S, \dim T) \Leftrightarrow 1.$$

S použitím vety 5.4.1 z toho vyplýva

$$\begin{aligned}\dim(S+T) &= \dim S + \dim T \Leftrightarrow \dim(S \cap T)\\ &\geq \dim S + \dim T \Leftrightarrow \min(\dim S, \dim T) + 1\\ &= \max(\dim S, \dim T) + 1 \geq 3.\end{aligned}$$

Keďže $M \cap N = \emptyset$, podľa tvrdenia 8.3.2 je $S + T$ vlastný lineárny podpriestor vo V. Preto

$$\dim V \geq \dim(S+T) + 1 \geq 4.$$

Na druhej strane v ľubovoľnom vektorovom priestore V dimenzie ≥ 4 nie je ťažké nájsť príklady čiastočne rovnobežných lineárnych variet. Presvedčte sa, že napr.

$$M = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2], \qquad N = \boldsymbol{e}_4 + [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$$

sú čiastočne rovnobežné roviny v K^4. Skúste nájsť iné príklady.

8.5. Afinné zobrazenia

Nech U, V sú vektorové priestory nad tým istým poľom K. Hovoríme, že $f\colon V \to U$ je *afinné zobrazenie*, ak pre ľubovoľné body $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \in V$ a skalár $s \in K$ platí

$$f(s\boldsymbol{p} + (1 \Leftrightarrow s)\boldsymbol{q} = sf(\boldsymbol{p}) + (1 \Leftrightarrow s)f(\boldsymbol{q}),$$
$$f(\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{p}) \Leftrightarrow f(\boldsymbol{q}) + f(\boldsymbol{r}).$$

Podobným spôsobom ako tvrdenie 8.2.1 možno dokázať, že afinné sú práve tie zobrazenia $f\colon V \to U$, ktoré zachovávajú všetky afinné kombinácie trojíc bodov, či, takisto, vôbec všetky afinné kombinácie; v prípade poľa charakteristiky $\neq 2$ stačí žiadať zachovávanie afinných kombinácií dvojíc.

8.5.1. Tvrdenie. *Nech U, V sú vektorové priestory nad poľom K. Potom pre ľubovoľné zobrazenie $f\colon V \to U$ nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) *f je afinné zobrazenie;*

(ii) *pre všetky $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \in V$, $s, t \in K$ platí*

$$f(s\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q} + (1 \Leftrightarrow s \Leftrightarrow t)\boldsymbol{r}) = sf(\boldsymbol{p}) + tf(\boldsymbol{q}) + (1 \Leftrightarrow s \Leftrightarrow t)f(\boldsymbol{r});$$

(iii) *pre každé $n \in \mathbb{N}$ a všetky body $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1 \dots, \boldsymbol{p}_n \in V$ a skaláry $t_0, t_1, \dots, t_n \in K$ také, že $t_0 + t_1 + \ldots + t_n = 1$, platí*

$$f(t_0\boldsymbol{p}_0 + t_1\boldsymbol{p}_1 + \ldots + t_n\boldsymbol{p}_n) = t_0 f(\boldsymbol{p}_0) + t_1 f(\boldsymbol{p}_1) + \ldots + t_n f(\boldsymbol{p}_n).$$

Ak char $K \neq 2$, *tak uvedené podmienky sú navyše ekvivalentné s podmienkou*

(i^-) *pre všetky $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in V$, $s \in K$ platí*

$$f(s\boldsymbol{p} + (1 \Leftrightarrow s)\boldsymbol{q}) = sf(\boldsymbol{p}) + (1 \Leftrightarrow s)f(\boldsymbol{q}).$$

Posunutím alebo *transláciou* vektorového priestoru V o vektor $\boldsymbol{u} \in V$ nazývame zobrazenie $V \to V$ dané predpisom $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}$.

Zrejme kompozíciou posunutia o vektor $\boldsymbol{u} \in V$ a posunutia o vektor $\boldsymbol{v} \in V$ je posunutie o vektor $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. Každé posunutie je bijektívne zobrazenie; inverzné zobrazenie k posunutiu o vektor $\boldsymbol{u}$ je posunutie o opačný vektor $\Leftrightarrow\boldsymbol{u}$.

Z nasledujúcej vety okrem iného vyplýva, že každé afinné zobrazenie možno dostať kompozíciou lineárneho zobrazenia a posunutia.

8.5.2. Veta. *Nech U, V sú vektorové priestory nad poľom K. Potom zobrazenie $f\colon V \to U$ je afinné práve vtedy, keď existuje vektor $\boldsymbol{u} \in U$ a lineárne zobrazenie $\varphi\colon V \to U$ také, že pre každé $\boldsymbol{x} \in V$ platí*

$$f(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}.$$

Dôkaz. Treba dokázať dve veci:

(1) Pre ľubovoľný vektor $\boldsymbol{u} \in U$ a lineárne zobrazenie $\varphi\colon V \to U$ je predpisom $f(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}$ dané afinné zobrazenie $f\colon V \to U$.

(2) Ak $f\colon V \to U$ je afinné zobrazenie, tak priradenie $\varphi(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\mathbf{0})$ definuje lineárne zobrazenie $\varphi\colon V \to U$.

V jednom i druhom prípade možno zachovávanie príslušných afinných resp. lineárnych kombinácií overiť priamymi výpočtami, ktoré prenechávame čitateľovi.

Zrejme vektor $\boldsymbol{u} \in U$ ako aj lineárne zobrazenie φ sú podmienkou vety určené jednoznačne. Zobrazenie $\varphi = f - f(\mathbf{0})$ nazývame *lineárnou časťou* a vektor $\boldsymbol{u} = f(\mathbf{0})$ *absolútnym členom* afinného zobrazenia f. Píšeme tiež $f = \varphi + \boldsymbol{u}$.

Afinné zobrazenia sú tak zovšeobecnením funkcií $f\colon K \to K$ tvaru $f(x) = ax + b$, kde $a, b \in K$, ktoré (najmä v prípade $K = \mathbb{R}$) v matematickej analýze nazývame lineárnymi, na viacrozmerné vektorové priestory.

8.5.3. Dôsledok. *Nech U, V sú vektorové priestory nad poľom K. Potom*

(a) ľubovoľná translácia priestoru V je afinné zobrazenie;

(b) ľubovoľné lineárne zobrazenie $\varphi\colon V \to U$ je afinné;

(c) afinné zobrazenie $f\colon V \to U$ je lineárne práve vtedy, keď $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

8.5.4. Tvrdenie. *Nech U, V, W sú vektorové priestory nad poľom K a $g\colon W \to V$, $f\colon V \to U$ sú afinné zobrazenia. Potom aj ich kompozícia $f \circ g\colon W \to U$ je afinné zobrazenie.*

Dôkaz. Hoci priamym výpočtom možno overiť, že $f \circ g$ zachováva afinné kombinácie, podáme radšej dôkaz založený na vete 8.5.2, ktorý nám poskytne informáciu navyše.

Nech $f = \varphi + \boldsymbol{u}$, $g = \psi + \boldsymbol{v}$, kde $\varphi\colon V \to U$, $\psi\colon W \to V$ sú lineárne zobrazenia a $\boldsymbol{u} = f(\mathbf{0})$, $\boldsymbol{v} = g(\mathbf{0})$. Potom pre $\boldsymbol{z} \in W$ s využitím linearity φ dostávame

$$(f \circ g)(\boldsymbol{z}) = \varphi(\psi(\boldsymbol{z}) + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{u} = (\varphi \circ \psi)(\boldsymbol{z}) + \varphi(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{u}.$$

Teda $f \circ g$ je afinné zobrazenie zložené z lineárneho zobrazenia $\varphi \circ \psi$ a posunutia o vektor $\varphi(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{u}$.

Vzorec odvodený v našom dôkaze stojí za zaznamenanie. Pre lineárne zobrazenia $\psi\colon W \to V$, $\varphi\colon V \to U$ a vektory $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{u} \in U$ platí

$$(\varphi + \boldsymbol{u}) \circ (\psi + \boldsymbol{v}) = (\varphi \circ \psi) + (\varphi\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}).$$

8.5.5. Tvrdenie. *Nech U, V sú vektorové priestory nad poľom K, $f\colon V \to U$ je afinné zobrazenie a $M \subseteq V$, $N \subseteq U$ sú afinné podpriestory. Potom $f(M)$ je afinný podpriestor v U a $f^{-1}(N)$ je afinný podpriestor vo V alebo prázdna množina.*

Dôkaz. Nech $f = \varphi + \boldsymbol{u}$, kde φ je lineárna časť f a $\boldsymbol{u} = f(\mathbf{0})$. Nech ďalej $M = \boldsymbol{p} + S$, $N = \boldsymbol{q} + T$, kde $\boldsymbol{p} \in M$, $\boldsymbol{q} \in N$ a $S \subseteq V$, $T \subseteq U$ sú lineárne podpriestory. Potrebný záver vyplýva z tvrdení 6.1.3, 8.2.2 a nasledujúcich rovností

$$f(M) = f(\boldsymbol{p}) + \varphi(S),$$

$$f^{-1}(N) = \begin{cases} \boldsymbol{z} + \varphi^{-1}(T), & \text{kde } \boldsymbol{z} \in V \text{ je ľubovoľné také, že } \varphi(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{u}, \\ \emptyset, & \text{ak neexistuje } \boldsymbol{z} \in V \text{ také, že } \varphi(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{u}, \end{cases}$$

ktorých dôkaz prenechávame čitateľovi.

Keďže každé posunutie je bijekcia, afinné zobrazenie $f = \varphi + \boldsymbol{u}\colon V \to U$ s lineárnou časťou φ je injektívne práve vtedy, keď φ je injektívne. Podobne, f je surjektívne práve vtedy, keď φ je surjektívne. Z toho už priamo vyplývajú ďalšie tri výsledky.

Prvý z nich zovšeobecňuje vetu 6.2.3 o dimenzii jadra a obrazu.

8.5.6. Veta. *Nech $f\colon V \to U$ je afinné zobrazenie, pričom V je konečnorozmerný vektorový priestor. Potom pre ľubovoľné $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Im} f$ platí*

$$\dim V = \dim f^{-1}(\boldsymbol{y}) + \dim \operatorname{Im} f.$$

Afinnou transformáciou vektorového priestoru V nazývame ľubovoľné afinné zobrazenie $f\colon V \to V$. Aj pre afinné transformácie platí obdoba dôsledku 6.2.4.

8.5.7. Dôsledok. *Nech $f\colon V \to V$ je afinná transformácia konečnorozmerného vektorového priestoru V. Potom f je injektívna práve vtedy, keď je surjektívna.*

8.5.8. Tvrdenie. *Nech $f\colon V \to U$ je afinné zobrazenie s lineárnou časťou φ a absolútnym členom $\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{0})$. Potom f je bijektívne práve vtedy, keď φ je bijektívne. V tom prípade aj inverzné zobrazenie $f^{-1}\colon U \to V$ je afinné a platí*

$$f^{-1} = \varphi^{-1} \Leftrightarrow \varphi^{-1}(\boldsymbol{u}).$$

Teda f^{-1} je kompozíciou lineárneho zobrazenia φ^{-1} a posunutia o vektor $\Leftrightarrow \varphi^{-1}(\boldsymbol{u})$.

Nech U, V sú konečnorozmerné vektorové priestory a $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ sú bázy v U resp. vo V. *Rozšírenou maticou* afinného zobrazenia $f\colon V \to U$ s lineárnou časťou φ a absolútnym členom $\boldsymbol{u}$ vzhľadom na bázy $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ nazývame blokovú maticu

$$(f)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \big((\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \,|\, (\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{\alpha}}\big).$$

Ak teda $\dim U = m$, $\dim V = n$, $\boldsymbol{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ je matica lineárneho zobrazenia φ v bázach $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$, $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{\alpha}}$ sú súradnice vektora $\boldsymbol{u}$ v báze $\boldsymbol{\alpha}$, tak rozšírenou maticou afinného zobrazenia f v bázach $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ je bloková matica

$$(f)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \big((\varphi \boldsymbol{v}_1)_{\boldsymbol{\alpha}}, \dots, (\varphi \boldsymbol{v}_n)_{\boldsymbol{\alpha}} \,|\, (\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{\alpha}}\big) = (\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{a}) \in K^{m \times (n+1)}.$$

Súradnice bodu $\boldsymbol{x} \in V$ v báze $\boldsymbol{\beta}$ a súradnice jeho obrazu $f(\boldsymbol{x}) \in U$ v báze $\boldsymbol{\alpha}$ sú tak spojené rovnosťou

$$(f\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = (\varphi)_{\alpha,\boldsymbol{\beta}} \cdot (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\beta}} + (\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{a}.$$

Samozrejme, ak f je lineárne zobrazenie, t. j. ak $f = \varphi$ a $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, nemá význam rozširovať maticu $(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ o nulový stĺpec.

Z tvrdenia 8.5.4, presnejšie z formuly odvodenej počas jeho dôkazu, a z tvrdenia 8.5.8 s použitím výsledkov paragrafov 6.4 a 7.2 vyplýva náš záverečný výsledok.

8.5.9. Tvrdenie. *Nech U, V, W sú konečnorozmerné vektorové priestory nad poľom K a $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ sú nejaké bázy priestorov U, V, resp. W.*

(a) *Ak $g\colon W \to V$, $f\colon V \to U$ sú afinné zobrazenia, ktoré majú v príslušných bázach rozšírené matice $(g)_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}} = (\boldsymbol{B} \,|\, \boldsymbol{b})$, $(f)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{a})$, tak ich kompozícia $f \circ g\colon W \to U$ má v bázach $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\alpha}$ rozšírenú maticu*

$$(f \circ g)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}} = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \,|\, \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}).$$

(b) *Ak $f\colon V \to U$ je afinná bijekcia s rozšírenou maticou $(f)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{a})$ v bázach $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$, tak k nej inverzné zobrazenie je afinná bijekcia $f^{-1}\colon U \to V$, ktorá má v bázach $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ rozšírenú maticu*

$$\left(f^{-1}\right)_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} = \left(\boldsymbol{A}^{-1} \,|\, \Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{a}\right).$$

Cvičenia

1. Dokážte postupne záverečné štyri podmienky z tvrdenia 8.2.2.

2. Nech V je vektorový priestor nad poľom K.
(a) Tri afinne nezávislé body $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in V$ sa nazývajú *nekolineárne*. Dokážte, že $\boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ sú *kolineárne* práve vtedy, keď ležia na jednej priamke.
(b) Podobne, štyri afinne nezávislé body $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3 \in V$ sa nazývajú *nekomplanárne*. Dokážte, že $\boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ $\boldsymbol{p}_3$ sú *komplanárne* práve vtedy, keď ležia v jednej rovine.

3. Nech V je vektorový priestor nad poľom K a $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n, \boldsymbol{q} \in V$. Dokážte postupne nasledujúce tvrdenia:
(a) Body $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ sú afinne nezávislé práve vtedy, keď pre nejaké (ľubovoľné) $i \leq n$ sú lineárne nezávislé vektory $\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_i$, kde $j \in \{0, 1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$.
(b) $\boldsymbol{q} \in \ell(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n)$ práve vtedy, keď $\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}_0 \in [\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_0, \ldots, \boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}_0]$. Odvoďte z toho obe rovnosti z tvrdenia 8.2.4.
(c) Ak body $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ sú afinne nezávislé, tak $\boldsymbol{q} \in \ell(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n)$ práve vtedy, keď vektory $\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_0, \ldots, \boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}_0$ sú lineárne závislé.

4. Vo vektorovom priestore $\mathbb{R}^4$ sú dané body $\boldsymbol{p}_0 = (1,1,2,2)^T$, $\boldsymbol{p}_1 = (0,1,0,1)^T$, $\boldsymbol{p}_2 = (1,2,0,3)^T$ a $\boldsymbol{q} = (0,2,-4,2)^T$, $\boldsymbol{r} = (-1,2,-4,1)^T$.
(a) Zistite, či platí $\boldsymbol{q} \in \ell(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$, $\boldsymbol{r} \in \ell(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$.
(b) Vypočítajte dimenzie afinných podpriestorov $\ell(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$, $\ell(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q})$, $\ell(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{r})$.
(c) Vypočítajte dimenzie afinných podpriestorov $\ell(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) \cap \ell(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$, $\ell(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) \sqcup \ell(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$ a určte vzájomnú polohu afinných podpriestorov $\ell(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$, $\ell(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$.
(d) Vypočítajte dimenzie afinných podpriestorov $\ell(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1) \cap \ell(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$, $\ell(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1) \sqcup \ell(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$ a určte vzájomnú polohu afinných podpriestorov $\ell(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1)$, $\ell(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$.

5. (a) Nájdite príklad troch priamok v $\mathbb{R}^3$ tak, aby ľubovoľné dve z nich boli mimobežné.
(b) Dokážte, že priamka a rovina v trojrozmernom vektorovom priestore nemôžu byť mimobežné.
(c) Vo vektorovom priestore $\mathbb{R}^4$ nájdite príklad mimobežnej priamky a roviny.
(d) Dokážte, že dve roviny vo štvorrozmernom vektorovom priestore nemôžu byť mimobežné.
(e) Nájdite príklad dvoch mimobežných rovín v $\mathbb{R}^5$.

6. Nech $\boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$, $\boldsymbol{p}_4$ sú ľubovoľné afinne nezávislé body vo vektorovom priestore V nad poľom K. Potom roviny $\ell(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$, $\boldsymbol{p}_4 + [\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}_0]$ sú čiastočne rovnobežné. Dokážte.

7. *Repér* vo vektorovom priestore sa zvykne definovať ako usporiadaná $(n+1)$-tica afinne nezávislých bodov $\boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n) \in V^{n+1}$, taká, že $\ell(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n) = V$, prípadne ako usporiadaná $(n+1)$-tica $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \in V^{n+1}$, pozostávajúca z ľubovoľného bodu $\boldsymbol{r} \in V$ a bázy $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ vektorového priestoru V. Dokážte nasledujúce dve tvrdenia:
(a) Nech $\boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n)$ je usporiadná $(n+1)$-tica bodov z V. Potom $\boldsymbol{\rho}$ je repér vo V v zmysle prvej definície, práve vtedy, keď $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \ldots, \boldsymbol{r}_n - \boldsymbol{r}_0)$ je báza vektorového priestoru V, t. j. práve vtedy, keď $(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{\beta})$ je repér v zmysle druhej definície.
(b) Nech $\boldsymbol{r}$ je bod z V a $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ je usporiadaná n-tica vektorov z V. Potom $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\beta})$ je repér v zmysle druhej definície práve vtedy, keď $\boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_n)$ je repér v zmysle prvej definície.
Z toho dôvodu nie je potrebné rozlišovať medzi repérmi v zmysle jednej či druhej definície.

8. Nech $\boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\beta})$ je repér vo vektorovom priestore V nad poľom K. *Afinnými súradnicami bodu* $\boldsymbol{x} \in V$ *vzhľadom na repér* $\boldsymbol{\rho}$ nazývame súradnice vektora $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}$ vzhľadom na bázu $\boldsymbol{\beta}$, čiže $(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\rho}} = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r})_{\boldsymbol{\beta}}$. Ak je repér $\boldsymbol{\rho}$ známy z kontextu, hovoríme len o *afinných súradniciach bodu* $\boldsymbol{x}$. Dokážte postupne nasledujúce tvrdenia:
(a) $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\varepsilon})$, kde $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ je kanonická báza, je repér v K^n a pre každé $\boldsymbol{x} \in K^n$ platí $(\boldsymbol{x})_{(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\varepsilon})} = \boldsymbol{x}$.
(b) Body repéru $\boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n)$ majú vzhľadom na tento repér afinné súradnice $(\boldsymbol{r}_0)_{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{0}$, $(\boldsymbol{r}_1)_{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{e}_1$, …, $(\boldsymbol{r}_n)_{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{e}_n$.
(c) Ak $\dim V = n$ a $\boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\beta})$ je repér vo V, tak predpisom $\boldsymbol{x} \mapsto (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\rho}}$ je definované bijektívne afinné zobrazenie $V \to K^n$ a pre každé $\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in K^n$ platí

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\beta} \cdot (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\rho}}, \qquad\qquad (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{c})_{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{c}.$$

9. V $\mathbb{R}^3$ sú dané body $\boldsymbol{r}_0 = (5,2,1)^T$, $\boldsymbol{r}_1 = (0,2,1)^5$, $\boldsymbol{r}_2 = (5,0,2)^T$, $\boldsymbol{r}_3 = (5,2,0)^T$.
(a) Dokážte, že $\boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)$ je repér v $\mathbb{R}^3$.
(b) Nájdite afinné súradnice bodov $\boldsymbol{x} = (4,4,-3)^T$, $\boldsymbol{y} = (-5,-2,-1)^T$, $\boldsymbol{z} = (0,0,0)^T$ vzhľadom na repér $\boldsymbol{\rho}$.
(c) Nájdite body $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$, ak poznáte ich afinné súradnice $(\boldsymbol{p})_{\boldsymbol{\rho}} = (0,2,1)^T$, $(\boldsymbol{q})_{\boldsymbol{\rho}} = (-1,1,-1)^T$, $(\boldsymbol{r})_{\boldsymbol{\rho}} = (0,0,0)^T$.

10. Nech $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\beta})$ sú dva repéry vo vektorovom priestore V nad poľom K. Potom afinné súradnice ľubovoľného bodu $\boldsymbol{x} \in V$ vzhľadom na tieto repéry sú zviazané vzťahom

$$(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})_{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot \big((\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\rho}} - (\boldsymbol{p})_{\boldsymbol{\rho}}\big),$$

kde $\boldsymbol{P}_{\alpha,\boldsymbol{\beta}}$ je matica prechodu z bázy $\boldsymbol{\beta}$ do bázy $\boldsymbol{\alpha}$. Dokážte.

11. Dokážte tvrdenie 8.5.1. (*Návod*: Modifikujte dôkaz tvrdenia 8.2.1.)

12. Dokážte podmienky (1), (2) z dôkazu tvrdenia 8.5.2.

13. Doplňte vynechané dôkazy oboch rovností z dôkazu tvrdenia 8.5.5.

14. Na základe tvrdenia 8.5.5 doplňte dôkazy vety 8.5.6, dôsledku 8.5.7 a tvrdenia 8.5.8.

15. Predpokladajme, že dvaja pozorovatelia P a P' popisujú udalosti v čase a v trojrozmernom priestore vzhľadom na po dvoch rovnobežné a rovnako orientované súradné osi x, y, z, resp. x', y', z', pričom počiatok súradnej sústavy pozorovateľa P' má z hľadiska pozorovateľa P v čase $t = t_0$, zodpovedajúcom času $t' = 0$ pozorovateľa P', súradnice $(x_0, y_0, z_0)^T$. Nech navyše pozorovateľ P' sa vzhľadom na pozorovateľa P pohybuje rovnomerne priamočiaro rýchlosťou $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ (pozri príklad 6.4.7 a cvičenie 6.14).
(a) Odvoďte tvar *Galileovej transformácie*, ktorou sú za týchto okolností v klasickej (t. j. v nerelativistickej) fyzike zviazané časopriestorové súradnice bodových udalostí z hľadiska pozorovateľov P resp. P':

$$t' = t - t_0, \qquad x' = x - x_0 - v_x t, \qquad y' = y - y_0 - v_y t, \qquad z' = z - z_0 - v_z t.$$

Nahliadnite, že ide o afinnú transformáciu s rozšírenou maticou $(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v}} \mid -\boldsymbol{s}_0)$, kde $\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v}}$ je matica Galileovej transformácie z cvičenia 6.14 a $\boldsymbol{s}_0 = (t_0, x_0, y_0, z_0)^T$.
(b) Nech $f, g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sú Galileove transformácie s rozšírenými maticami $(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v}} \mid -\boldsymbol{s}_0)$ resp. $(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{w}} \mid -\boldsymbol{s}_1)$, kde $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{s}_0, \boldsymbol{s}_1 \in \mathbb{R}^4$. Nájdite rozšírenú maticu kompozície afinných zobrazení $f \circ g$ a rozšírenú maticu inverzného zobrazenia f^{-1}. Dokážte, že ide opäť o Galileove transformácie uvedeného typu a vysvetlite fyzikálny význam získaných výsledkov.

16. Nech U, V sú vektorové priestory nad poľom K. Označme $\mathcal{A}(V,U)$ množinu všetkých *afinných* zobrazení $f\colon V \to U$. Dokážte postupne nasledujúce tvrdenia:
(a) $\mathcal{A}(V,U)$ s operáciami súčtu a skalárneho násobku definovanými po zložkách tvorí *lineárny* podpriestor vektorového priestoru U^V. $\mathcal{A}(V,U)$ navyše obsahuje vektorový priestor $\mathcal{L}(V,U)$ všetkých lineárnych zobrazení $\varphi\colon V \to U$ ako svoj lineárny podpriestor. (Pozri príklad 1.6.5 a tvrdenie 6.5.1.)
(b) Priradením $f \mapsto (f - f(\mathbf{0}), f(\mathbf{0}))$ je definovaný lineárny izomorfizmus vektorových priestorov $\mathcal{A}(V,U) \to \mathcal{L}(V,U) \times U$ (pozri príklad 1.6.4).
(c) Nech $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ sú nejaké bázy priestorov U resp. V. Potom priradením $f \mapsto (f)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ je daný lineárny izomorfizmus vektorových priestorov $\mathcal{A}(V,U) \to K^{m\times(n+1)}$.
(d) Predpokladajme, že U, V sú konečnorozmerné a $\dim U = m$, $\dim V = n$. Odvoďte, či už z (b) alebo z (c), že potom aj $\mathcal{A}(V,U)$ je konečnorozmerný a $\dim \mathcal{A}(V,U) = m(n+1)$.
(e) Ak V je konečnorozmerný, tak jeho duál $V^* = \mathcal{L}(V,K)$ tvorí nadrovinu v $\mathcal{A}(V,K)$ (pozri text tesne pred tvrdením 6.5.3).