

7. INVERZNÉ MATICE A ZMENA BÁZY

V tejto kapitole zavedieme pojem *inverznej matice* k danej štvorcovej matici a dáme ho do súvisu s pojmom inverzného lineárneho zobrazenia. Ďalej sa naučíme počítať inverzné matice a matice prechodu z jednej súradnej bázy do druhej. Nakoniec preskúmate vplyv zmeny bázy na maticu lineárneho zobrazenia. Začneme však s pojmom *hodnosti matice*, ktorý nám umožní rozhodnúť o existencii inverznej matice a – ako uvidíme neskôr – bude nám ešte veľakrát užitočný.

V celej kapitole K označuje pevné pole, m, n, p sú kladné celé čísla.

7.1. Hodnosť matice

V tomto paragrafe je potrebné rozlišovať medzi vektorovými priestormi riadkových resp. stĺpcových vektorov. Nebudeme teda používať nešpecifikované označenie K^n , ale priestor riadkových vektorov budeme značiť $K^{1 \times n}$ a priestor stĺpcových vektorov $K^{n \times 1}$.

Pripomeňme, že $\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \in K^{1 \times n}$ označuje i -tý riadok a $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) \in K^{m \times 1}$ zase j -tý stĺpec matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$. Túto maticu teda môžeme zapísať v blokových tvaroch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \mathbf{r}_2(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = (\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})).$$

Riadkovou hodnosťou $h_r(\mathbf{A})$ matice \mathbf{A} nazývame dimenziu lineárneho podpriestoru vektorového priestoru $K^{1 \times n}$ generovaného riadkami matice \mathbf{A} . Podobne, *stĺpcovou hodnosťou* $h_s(\mathbf{A})$ matice \mathbf{A} nazývame dimenziu lineárneho podpriestoru vektorového priestoru $K^{m \times 1}$ generovaného stĺpcami matice \mathbf{A} . Teda

$$\begin{aligned} h_r(\mathbf{A}) &= \dim[\mathbf{r}_1(\mathbf{A}), \mathbf{r}_2(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{r}_m(\mathbf{A})], \\ h_s(\mathbf{A}) &= \dim[\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})] \end{aligned}$$

Označme $\varphi: K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}$ lineárne zobrazenie dané predpisom $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pre $\mathbf{x} \in K^{n \times 1}$. Pripomeňme, že hodnosťou lineárneho zobrazenia φ nazývame dimenziu jeho obrazu, t. j. $h(\varphi) = \dim \operatorname{Im} \varphi$. V našom prípade zrejme platí $h(\varphi) = h_s(\mathbf{A})$, keďže lineárny podpriestor $\operatorname{Im} \varphi \subseteq K^{m \times 1}$ je generovaný stĺpcami matice \mathbf{A} .

7.1.1. Lema. *Nech $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.*

- Nech matica \mathbf{B} vznikne z matice \mathbf{A} vykonaním jednej (inak ľubovoľnej) ERO. Potom $[\mathbf{r}_1(\mathbf{A}), \mathbf{r}_2(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{r}_m(\mathbf{A})] = [\mathbf{r}_1(\mathbf{B}), \mathbf{r}_2(\mathbf{B}), \dots, \mathbf{r}_m(\mathbf{B})]$.*
- Nech matica \mathbf{C} vznikne z matice \mathbf{A} vykonaním jednej (inak ľubovoľnej) ESO. Potom $[\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})] = [\mathbf{s}_1(\mathbf{C}), \mathbf{s}_2(\mathbf{C}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{C})]$.*

Dôkaz. Zrejme pre ľubovoľné vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ v každom vektorovom priestore V a ľubovoľný skalár $c \in K$ platí:

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_k] &= [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_k], \\ [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_k] &= [\mathbf{u}_1, \dots, c\mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_k] \quad (\text{ak } c \neq 0), \\ [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_k] &= [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, c\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_k]. \end{aligned}$$

7.1.2. Tvrdenie. Pre každú maticu $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ platí $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A})$.

Dôkaz. Upravme \mathbf{A} pomocou ERO na redukovaný stupňovitý tvar $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$ a označme k počet nenulových riadkov v matici \mathbf{B} . Podľa práve dokázanej lemy platí $[\mathbf{r}_1(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{r}_m(\mathbf{A})] = [\mathbf{r}_1(\mathbf{B}), \dots, \mathbf{r}_m(\mathbf{B})]$. Preto tiež $h_r(\mathbf{A}) = h_r(\mathbf{B})$. Keďže nenulové riadky matice \mathbf{B} sú zrejme lineárne nezávislé (rozmyslite si prečo), $h_r(\mathbf{B}) = k$, čo je vlastne počet stĺpcov matice \mathbf{B} , v ktorých sa nachádza vedúci prvok nejakého jej riadku. Označme $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ indexy týchto stĺpcov. Podľa tvrdenia 4.5.3 vektory $\mathbf{s}_{j_1}(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_{j_k}(\mathbf{A})$ sú lineárne nezávislé a platí $[\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})] = [\mathbf{s}_{j_1}(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_{j_k}(\mathbf{A})]$. Preto tiež $h_s(\mathbf{A}) = k = h_r(\mathbf{A})$.

Keďže riadková a stĺpcová hodnota ľubovoľnej matice \mathbf{A} splývajú, túto ich spoločnú hodnotu budeme odteraz značiť jednoducho $h(\mathbf{A})$ a nazývať *hodnotou matice \mathbf{A}* . Zrejme pre $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je $h(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.

Práve vykonané úvahy majú dva bezprostredné dôsledky.

7.1.3. Tvrdenie. Nech $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$. Potom $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T)$.

7.1.4. Tvrdenie. Nech $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in K^{m \times 1}$ sú ľubovoľné vektory a $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je matica taká, že $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_j$ pre $1 \leq j \leq n$. Potom

- (a) $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ sú lineárne nezávislé práve vtedy, keď $h(\mathbf{A}) = n$;
- (b) $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n] = K^{m \times 1}$ práve vtedy, keď $h(\mathbf{A}) = m$.

Všimnite si, že prípad (a) môže nastať iba vtedy, keď $n \leq m$; naopak, (b) môže nastať jedine za predpokladu $m \leq n$.

Sami si sformulujte a premyslite analogické tvrdenia pre riadkové vektory.

Ešte si dokážeme jeden odhad hodnoty súčinu matíc pomocou hodnôt jednotlivých činiteľov.

7.1.5. Tvrdenie. Nech $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$. Potom

$$h(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \leq \min(h(\mathbf{A}), h(\mathbf{B})).$$

Dôkaz. Označme $\varphi: K^n \rightarrow K^m$, $\psi: K^p \rightarrow K^n$ lineárne zobrazenia dané predpismi $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pre $\mathbf{x} \in K^n$ resp. $\psi(\mathbf{y}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{y}$ pre $\mathbf{y} \in K^p$. Zrejme $\text{Im}(\varphi \circ \psi) \subseteq \text{Im} \varphi$, preto

$$h(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = h(\varphi \circ \psi) \leq h(\varphi) = h(\mathbf{A}).$$

S využitím toho druhý potrebný odhad už dostaneme priamym výpočtom

$$h(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = h((\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T) = h(\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T) \leq h(\mathbf{B}^T) = h(\mathbf{B}).$$

7.2. Inverzné matice a inverzné lineárne zobrazenia

Nech $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, t.j. \mathbf{A} je štvorcová matica typu $n \times n$. Inverznou maticou k matici \mathbf{A} rozumieme maticu $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$ takú, že

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Zrejme k danej štvorcovej matici \mathbf{A} existuje najviac jedna inverzná matica (rozmyslite si prečo). Túto jednoznačne určenú maticu (ak existuje) budeme značiť \mathbf{A}^{-1} .

Nasledujúca veta je bezprostredným dôsledkom súvisu medzi lineárnymi zobrazeniami a ich maticami.

7.2.1. Veta. Nech U, V sú vektorové priestory nad poľom K a $\dim U = \dim V = n$. Nech ďalej α, β sú nejaké bázy v U , resp. vo V a $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha, \beta}$ je matica lineárneho zobrazenia $\varphi: V \rightarrow U$ vzhľadom na bázy β, α . Potom k matici \mathbf{A} existuje inverzná matica \mathbf{A}^{-1} práve vtedy, keď k zobrazeniu φ existuje inverzné zobrazenie φ^{-1} . V tom prípade \mathbf{A}^{-1} je maticou lineárneho zobrazenia $\varphi^{-1}: U \rightarrow V$ vzhľadom na bázy α, β , t.j.

$$\mathbf{A}^{-1} = ((\varphi)_{\alpha, \beta})^{-1} = (\varphi^{-1})_{\beta, \alpha}.$$

Hovoríme, že štvorcová matica $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je *regulárna*, ak k nej existuje inverzná matica \mathbf{A}^{-1} ; v opačnom prípade hovoríme, že \mathbf{A} je *singulárna*.

7.2.2. Veta. Matica $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je regulárna práve vtedy, keď $h(\mathbf{A}) = n$.

Dôkaz. Označme $\varphi: K^n \rightarrow K^n$ lineárnu transformáciu danú predpisom $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pre $\mathbf{x} \in K^n$. K matici \mathbf{A} existuje inverzná matica \mathbf{A}^{-1} práve vtedy, keď k zobrazeniu φ existuje inverzné zobrazenie φ^{-1} , t.j. práve vtedy, keď φ je bijekcia. Podľa dôsledku 6.2.4 to nastane práve vtedy, keď φ je surjekcia, čiže $\text{Im } \varphi = K^n$, čo je ekvivalentné s rovnosťou $\dim \text{Im } \varphi = n$. Na dokončenie dôkazu si stačí spomenúť, že $h(\mathbf{A}) = h(\varphi) = \dim \text{Im } \varphi$.

Z praktických dôvodov bude užitočné si uvedomiť, že na to, aby sme sa presvedčili, že matica $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$ je inverzná k matici $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, stačí overiť len jednu (a to hocktorú) z rovností $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n, \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

7.2.3. Tvrdenie. Pre ľubovoľné $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n$ práve vtedy, keď $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Dôkaz. Označme $\varphi, \psi: K^n \rightarrow K^n$ lineárne transformácie dané pre $\mathbf{x} \in K^n$ predpismi $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, resp. $\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}$. Nech $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n$. To nastane práve vtedy, keď $\varphi \circ \psi = \text{id}_{K^n}$. Z toho vyplýva, že φ je surjekcia a ψ je injekcia (pozri paragraf 0.3). Keďže φ, ψ sú lineárne transformácie konečnorozmerného vektorového priestoru, podľa dôsledku 6.2.4 to znamená, že φ aj ψ sú bijekcie, teda lineárne izomorfizmy, a $\psi = \varphi^{-1}$. Potom však $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, preto tiež $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Obrátená implikácia vyplýva zo symetrie tvrdenia.

S využitím posledného tvrdenia si ako cvičenie overte nasledujúce vzorce, z ktorých už vyplýva zvyšok tvrdenia.

7.2.4. Tvrdenie. Nech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ sú regulárne matice. Potom aj matice \mathbf{A}^{-1} , $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a \mathbf{A}^T sú regulárne a platí:

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}, \quad (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T.$$

7.3. Realizácia ERO a ESO pomocou násobenia matíc

Prakticky všetky úlohy lineárnej algebry, s ktorými sme sa doteraz stretli, sme riešili tak, že sme danú situáciu reprezentovali nejakou vhodnou maticou, tú sme ďalej pomocou ERO upravili na redukovaný stupňovitý tvar a tento výsledný tvar sme potom interpretovali v závislosti na charaktere pôvodnej úlohy. Prezradíme už vopred, že zatiaľ sme všetky úlohy, ktoré sa riešia úpravou matíc pomocou ERO prípadne ESO, zďaleka nevyčerpali. Naopak, táto metóda nás bude v lineárnej algebre neustále správdzať.

Skôr než pristúpime k ďalšiemu využitiu tejto metódy, tentoraz pri výpočte inverznej matice, však bude potrebné si uvedomiť, že ERO aj ESO možno realizovať pomocou násobenia matíc.

7.3.1. Tvrdenie. *Nech $A \in K^{m \times n}$.*

- Nech $B \in K^{m \times n}$ vznikne z A vykonaním jednej (inak ľubovoľnej) ERO. Označme E maticu, ktorá vznikne z matice I_m vykonaním tej istej ERO. Potom $B = E \cdot A$.*
- Nech $C \in K^{m \times n}$ vznikne z A vykonaním jednej (inak ľubovoľnej) ESO. Označme F maticu, ktorá vznikne z matice I_n vykonaním tej istej ESO. Potom $C = A \cdot F$.*

Dôkaz. Možno overiť priamym výpočtom pre každý jednotlivý druh ERO resp. ESO. Ako cvičenie si to skúste napr. pre maticu A typu 3×2 , resp. 3×3 .

Štvorcové matice $E \in K^{n \times n}$, ktoré vzniknú z jednotkovej matice I_n vykonaním jedinej ERO alebo ESO, nazývame *elementárne matice*. Posledná veta teda hovorí, že ľubovoľnú ERO (ESO) na matici A možno realizovať vynásobením matice A vhodnou elementárnou maticou E zľava (sprava).

7.4. Výpočet inverznej matice

Návod na výpočet inverznej matice k danej štvorcovej matici $A \in K^{n \times n}$ si možno najľahšie zapamätať v tvare nasledujúcej schémy:

$$(A | I_n) \xrightarrow{\text{ERO}} (I_n | A^{-1}).$$

Tento postup má navyše tú výhodu, že sa nemusíme vopred starať, či inverzná matica k matici A existuje alebo nie. Ak A^{-1} existuje, tak ju nakoniec vypočítame, ak neexistuje, tak to odhalíme počas nášho výpočtu a ďalej v ňom nebudeme pokračovať. Celý postup si teraz vysvetlíme trochu podrobnejšie.

Bloková matica $(A | I_n)$ vznikne tak, že matice A a I_n jednoducho napíšeme vedľa seba. Túto maticu teraz budeme upravovať pomocou ERO tak, aby sme v ľavej časti z matice A dostali jednotkovú maticu I_n . Akonáhle sa nám to podarí, matica v pravej časti výslednej blokovej matice je už hľadaná matica A^{-1} . Ak sa nám to nepodarí, t.j. matica A nie je riadkovo ekvivalentná s jednotkovou maticou (čo nastane práve vtedy, keď $h(A) < n$, a spoznáme to podľa toho, že sa nám v ľavej časti objaví nejaký nulový riadok), tak inverzná matica k matici A neexistuje.

Korektnosť uvedeného postupu vyplýva z nasledujúceho očividného tvrdenia a skutočnosti, že ERO možno reprezentovať násobením elementárnymi maticami zľava. Taktiež tu hrá úlohu fakt, že pre $B \in K^{n \times n}$ platí $B = A^{-1}$ práve vtedy, keď $B \cdot A = I_n$, uvedený v tvrdení 7.2.3.

7.4.1. Tvrdenie. Nech $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ a $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_k \in K^{n \times n}$ sú elementárne matice také, že $\mathbf{E}_k \cdot \dots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Potom $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_k \cdot \dots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1$.

Poznamenajme, že k rovnakému cieľu vedie tiež postup reprezentovaný schémou:

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{I}_n \end{array} \right) \xleftrightarrow{\text{ESO}} \left(\begin{array}{c} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{A}^{-1} \end{array} \right).$$

Rozmyslite si prečo a sformulujte príslušné tvrdenie.

Z práve vykonaných úvah vyplývajú nasledujúce tri dôsledky. Posledný z nich je čiastočným obrátením odhadu hodnoty súčinu matic za predpokladu regularity aspoň jedného z činiteľov.

7.4.2. Tvrdenie. Matica $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je regulárna práve vtedy, keď ju možno rozložiť na súčin $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \cdot \dots \cdot \mathbf{E}_k$ konečného počtu elementárnych matic $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_k \in K^{n \times n}$.

7.4.3. Tvrdenie. Pre ľubovoľné $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ platí:

- (a) \mathbf{A} je riadkovo ekvivalentná s \mathbf{B} práve vtedy, keď existuje regulárna matica $\mathbf{P} \in K^{m \times m}$ taká, že $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}$;
- (b) \mathbf{A} je stĺpcovo ekvivalentná s \mathbf{B} práve vtedy, keď existuje regulárna matica $\mathbf{Q} \in K^{n \times n}$ taká, že $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}$.

7.4.4. Tvrdenie. Nech $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{P} \in K^{m \times m}$, $\mathbf{Q} \in K^{n \times n}$, pričom \mathbf{P}, \mathbf{Q} sú regulárne matice. Potom

$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}) = h(\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}) = h(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}).$$

Trochu všeobecnejšie možno uvedené úvahy použiť na násobenie ľubovoľnej matice vhodného rozmeru maticou \mathbf{A}^{-1} (ak existuje) zľava resp. sprava. Tieto operácie možno uskutočniť pre regulárnu $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ a ľubovoľné $\mathbf{B} \in K^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in K^{m \times n}$ podľa nasledujúcich schém:

$$(\mathbf{A} | \mathbf{B}) \xleftrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n | \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}),$$

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{array} \right) \xleftrightarrow{\text{ESO}} \left(\begin{array}{c} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^{-1} \end{array} \right).$$

Ešte si všimnime, že v špeciálnom prípade sme niečo podobné vlastne robili už dávno, pri riešení sústav lineárnych rovníc úpravou na redukovaný stupňovitý tvar pomocou ERO. Aj tento postup totiž možno vyjadriť pomocou schémy

$$(\mathbf{A} | \mathbf{b}) \xleftrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{B} | \mathbf{c}),$$

ktorá má pre regulárnu $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ tvar

$$(\mathbf{A} | \mathbf{b}) \xleftrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n | \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}).$$

Ako vedľajší produkt našich úvah tak dostávame nasledujúci výsledok o riešení sústav n lineárnych rovníc o n neznámych.

7.4.5. Veta. Nech $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in K^n$. Ak \mathbf{A} je regulárna, tak sústava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má jediné riešenie $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$.

7.5. Matica prechodu

Nech V je vektorový priestor nad poľom K a $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ sú jeho dve bázy. *Maticou prechodu* z bázy β do bázy α nazývame maticu identického zobrazenia $\text{id}_V : V \rightarrow V$ vzhľadom na bázy β , α , ktorú značíme $P_{\alpha,\beta}$. Teda

$$P_{\alpha,\beta} = (\text{id}_V)_{\alpha,\beta}.$$

Podľa definície matice lineárneho zobrazenia vzhľadom na dané bázy (pozri paragraf 6.4), stĺpce matice prechodu $P_{\alpha,\beta}$ sú tvorené súradnicami vektorov bázy β vzhľadom na bázu α , t.j. $s_j(P_{\alpha,\beta}) = (\mathbf{v}_j)_\alpha$ pre $1 \leq j \leq n$. Teda

$$P_{\alpha,\beta} = ((\mathbf{v}_1)_\alpha, (\mathbf{v}_2)_\alpha, \dots, (\mathbf{v}_n)_\alpha),$$

a podľa vety 6.4.1 je táto matica jednoznačne určená podmienkou transformácie súradníc

$$(\mathbf{x})_\alpha = P_{\alpha,\beta} \cdot (\mathbf{x})_\beta$$

pre ľubovoľné $\mathbf{x} \in V$.

Ak do zrejmej rovnosti $\mathbf{x} = \alpha \cdot (\mathbf{x})_\alpha$ (pozri paragraf 5.3) budeme za \mathbf{x} postupne dosadzovať vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ bázy β , s využitím vzťahu pre stĺpce súčinu matic z paragrafu 2.3 dostaneme

$$\mathbf{v}_j = \alpha \cdot (\mathbf{v}_j)_\alpha = \alpha \cdot s_j(P_{\alpha,\beta}) = s_j(\alpha \cdot P_{\alpha,\beta})$$

pre každé $1 \leq j \leq n$. Tým sme dostali ďalší dôležitý vzťah, ktorý jednoznačne charakterizuje maticu prechodu $P_{\alpha,\beta}$:

$$\alpha \cdot P_{\alpha,\beta} = \beta.$$

(Podotýkame, že súčin $\alpha \cdot P_{\alpha,\beta}$ treba chápať v zmysle paragrafu 2.3.)

Zhrnutím vykonaných úvah dostávame tri ekvivalentné charakterizácie matice prechodu.

7.5.1. Tvrdenie. Nech α , β sú bázy n -rozmerného vektorového priestoru V nad poľom K . Potom pre ľubovoľnú maticu $P \in K^{n \times n}$ nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) $P = (\text{id}_V)_{\alpha,\beta}$, t.j. P je matica prechodu z bázy β do bázy α ;
- (ii) $(\mathbf{x})_\alpha = P \cdot (\mathbf{x})_\beta$ pre každé $\mathbf{x} \in V$;
- (iii) $\alpha \cdot P = \beta$.

Z definície matice prechodu a vety 6.4.2 okamžite vyplývajú nasledujúce rovnosti.

7.5.2. Tvrdenie. Nech α , β , γ sú bázy konečnorozmerného vektorového priestoru V nad poľom K . Potom

$$P_{\alpha,\alpha} = I_n, \quad P_{\beta,\alpha} = P_{\alpha,\beta}^{-1}, \quad P_{\alpha,\beta} \cdot P_{\beta,\gamma} = P_{\alpha,\gamma},$$

Z druhej z uvedených podmienok vidno, že matica prechodu $P_{\alpha,\beta}$ je vždy regulárna. Taktiež naopak, každá regulárna matica $P \in K^{n \times n}$ je maticou prechodu medzi vhodnou dvojicou báz.

7.5.3. Tvrdenie. Nech V je n -rozmerný vektorový priestor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ je ľubovoľná regulárna matica. Nech $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je nejaká báza vo V . Položme $\mathbf{v}_j = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_j$, $\mathbf{w}_j = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{u}_j$ pre $1 \leq j \leq n$, a ďalej

$$\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}, \quad \gamma = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

Potom \mathbf{P} je maticou prechodu z bázy β do bázy α a taktiež z bázy α do bázy γ , t. j.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\alpha, \beta} = \mathbf{P}_{\gamma, \alpha}.$$

Špeciálne, \mathbf{P} je maticou prechodu z bázy $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}))$ do bázy $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ v K^n a taktiež z bázy ε do bázy $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}^{-1}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}^{-1}))$.

V prípade, keď $V = K^n$ je priestor stĺpcových vektorov, možno každú jeho bázu α stotožniť s príslušnou regulárnou maticou, ktorej stĺpcami sú vektory danej bázy. Pri takomto stotožnení je návod na výpočet matice prechodu obsiahnutý v nasledujúcom tvrdení.

7.5.4. Tvrdenie. Nech $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ sú dve bázy stĺpcového vektorového priestoru K^n . Potom $\mathbf{P}_{\alpha, \beta} = \alpha^{-1} \cdot \beta$.

Dôkaz. Z podmienky $\alpha \cdot \mathbf{P}_{\alpha, \beta} = \beta$ okamžite vyplýva požadovaná rovnosť.

To nám dáva návod na výpočet matice prechodu pre bázy α , β vektorového priestoru K^n podľa už známej schémy

$$(\alpha | \beta) \xleftrightarrow{\text{ERO}} (I_n | \mathbf{P}_{\alpha, \beta}) = (\varepsilon | \alpha^{-1} \cdot \beta).$$

7.6. Matice lineárneho zobrazenia vzhľadom na rôzne bázy

V tomto článku sa budeme zaoberať vplyvom zmeny báz na maticu lineárneho zobrazenia, presnejšie, vzťahom medzi maticami daného lineárneho zobrazenia vzhľadom na rôzne dvojice báz.

7.6.1. Veta. Nech V_1, V_2 sú konečnorozmerné vektorové priestory nad poľom K , $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ je lineárne zobrazenie, α_1, β_1 sú dve bázy priestoru V_1 a α_2, β_2 sú dve bázy priestoru V_2 . Potom

$$(\varphi)_{\beta_2, \beta_1} = \mathbf{P}_{\beta_2, \alpha_2} \cdot (\varphi)_{\alpha_2, \alpha_1} \cdot \mathbf{P}_{\alpha_1, \beta_1}.$$

Dôkaz. Označme $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha_2, \alpha_1}$, $\mathbf{B} = (\varphi)_{\beta_2, \beta_1}$ matice lineárneho zobrazenia φ vzhľadom na bázy α_1, α_2 , resp. bázy β_1, β_2 . Pre ľubovoľné $\mathbf{x} \in V_1$ platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{x})_{\beta_1} &= (\varphi \mathbf{x})_{\beta_2} = \mathbf{P}_{\beta_2, \alpha_2} \cdot (\varphi \mathbf{x})_{\alpha_2} \\ &= \mathbf{P}_{\beta_2, \alpha_2} \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x})_{\alpha_1} = \mathbf{P}_{\beta_2, \alpha_2} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{\alpha_1, \beta_1} \cdot (\mathbf{x})_{\beta_1}. \end{aligned}$$

Na základe vety 6.4.1 z toho okamžite vyplýva dokazovaná rovnosť

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}_{\beta_2, \alpha_2} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{\alpha_1, \beta_1}.$$

Poslednú transformačnú formulkú si možno najľahšie zapamätať pomocou nasledujúceho diagramu:

$$\begin{array}{ccc} (V_1, \alpha_1) & \overset{\mathbf{A}}{\rightleftarrows} & (V_2, \alpha_2) \\ P_{\alpha_1, \beta_1} \uparrow & & \downarrow P_{\beta_2, \alpha_2} \\ (V_1, \beta_1) & \underset{\mathbf{B}}{\rightleftarrows} & (V_2, \beta_2) \end{array}$$

Nezabudnite, že zobrazenia skladáme „v obrátenom poradí“, a tomu musí zodpovedať aj „obrátené poradie“ násobenia matíc!

7.6.2. Príklad. Nech $\varphi: K^n \rightarrow K^m$ je lineárne zobrazenie a α, β sú nejaké bázy priestorov K^m resp. K^n . Označme $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha, \beta}$, $\mathbf{M} = (\varphi)_{\varepsilon^{(m)}, \varepsilon^{(n)}}$ matice zobrazenia φ vzhľadom na bázy β, α resp. vzhľadom na kanonické bázy $\varepsilon^{(n)}, \varepsilon^{(m)}$. Podľa poslednej vety platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= P_{\alpha, \varepsilon^{(m)}} \cdot \mathbf{M} \cdot P_{\varepsilon^{(n)}, \beta}, \\ \mathbf{M} &= P_{\varepsilon^{(m)}, \alpha} \cdot \mathbf{A} \cdot P_{\beta, \varepsilon^{(n)}}. \end{aligned}$$

Ak stotožníme každú bázu s regulárnou maticou, ktorej stĺpce sú vektory tejto bázy, tak uvedené rovnosti nadobudnú tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \alpha^{-1} \cdot I_m \cdot \mathbf{M} \cdot I_n^{-1} \cdot \beta = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \beta, \\ \mathbf{M} &= I_m^{-1} \cdot \alpha \cdot \mathbf{A} \cdot \beta^{-1} \cdot I_n = \alpha \cdot \mathbf{A} \cdot \beta^{-1}, \end{aligned}$$

umožňujúci priamy výpočet jednej z matíc \mathbf{A} , \mathbf{M} na základe znalosti báz α, β a druhej z nich.

Položme si teraz obrátenú otázku. Za akých podmienok sú matice \mathbf{A} , $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$ maticami toho istého lineárneho zobrazenia $\varphi: V \rightarrow U$ vzhľadom na nejaké dve (možno no nie nutne rôzne) dvojice báz konečnorozmerných vektorových priestorov U, V ? Odpoveď na ňu dáva nasledujúca veta.

7.6.3. Veta. Nech U je m -rozmerný a V je n -rozmerný vektorový priestor nad poľom K . Potom pre ľubovoľné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) \mathbf{A}, \mathbf{B} sú maticami toho istého lineárneho zobrazenia $\varphi: V \rightarrow U$ vzhľadom na nejaké dve (možno no nie nutne rôzne) dvojice báz priestorov U, V ;
- (ii) existujú regulárne matice $\mathbf{P} \in K^{m \times m}$, $\mathbf{Q} \in K^{n \times n}$ také, že $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$;
- (iii) $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$.

Dôkaz. Ekvivalencia (i) \Leftrightarrow (ii) je priamym dôsledkom vety 7.6.1 a tvrdenia 7.5.3. Implikácia (ii) \Rightarrow (iii) vyplýva z tvrdenia 7.4.4.

Zostáva dokázať (iii) \Rightarrow (ii). Označme $h = h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$. Pomocou ERO upravíme \mathbf{A} aj \mathbf{B} na redukovaný trojuholníkový tvar $\mathbf{A}' = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{A}$, resp. $\mathbf{B}' = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{B}$, kde $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ sú regulárne matice. Zrejme \mathbf{A}', \mathbf{B}' majú rovnaký počet nenulových riadkov rovný h . \mathbf{A}' aj \mathbf{B}' možno ďalej pomocou ESO upraviť na blokový tvar

$$\mathbf{A}'' = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_h & \mathbf{0}_{h, n-h} \\ \mathbf{0}_{m-h, h} & \mathbf{0}_{m-h, n-h} \end{pmatrix} = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{Q}_2 = \mathbf{B}'',$$

kde Q_1, Q_2 sú regulárne matice. Stačí pomocou vedúcich prvkov jednotlivých riadkov vynulovať prípadné ďalšie nenulové prvky týchto riadkov a, ak treba, vymeniť poradie niektorých stĺpcov. Potom $P_1 \cdot A \cdot Q_1 = P_2 \cdot B \cdot Q_2$, teda $B = P_2^{-1} \cdot P_1 \cdot A \cdot Q_1 \cdot Q_2^{-1}$ a matice $P = P_2^{-1} \cdot P_1$, $Q = Q_1 \cdot Q_2^{-1}$ sú zrejme regulárne.

Na základe dôkazu tejto vety okamžite dostávame záverečný výsledok.

7.6.4. Veta. Pre každé lineárne zobrazenie $\varphi: V \rightarrow U$ medzi konečnorozmernými vektorovými priestormi nad poľom K možno zvoliť bázu β priestoru V a bázu α priestoru U tak, že φ má vzhľadom na bázy β, α maticu v blokovom tvare

$$(\varphi)_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} I_h & \mathbf{0}_{h, n-h} \\ \mathbf{0}_{m-h, h} & \mathbf{0}_{m-h, n-h} \end{pmatrix},$$

kde $n = \dim V$, $m = \dim U$ a $h = h(\varphi)$.

Skúste si túto vetu dokázať priamo a bližšie špecifikovať bázy β a α . (Návod: Spomeňte si na dôkaz vety 6.2.3 o dimenzii jadra a obrazu.)

CVIČENIA

- Nech U, V sú vektorové priestory nad poľom K a $\varphi: V \rightarrow U$ je lineárne zobrazenie. Potom pre ľubovoľné vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ platí $\varphi[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] = [\varphi(\mathbf{v}_1), \dots, \varphi(\mathbf{v}_n)]$. Dokážte. Odvodte z toho, že ak $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ generujú V , tak $\varphi(\mathbf{v}_1), \dots, \varphi(\mathbf{v}_n)$ generujú $\text{Im } \varphi$. Špeciálne, stĺpce matice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ generujú lineárny podpriestor $\text{Im } \varphi \subseteq K^m$, kde $\varphi: K^n \rightarrow K^m$ je dané predpisom $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$.
- Určte hodnotu matice \mathbf{A} nad poľom K :
 - $K = \mathbb{R}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
 - $K = \mathbb{C}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+i & 1+3i & 2 \\ 3+i & 5+5i & 4-2i \end{pmatrix}$;
 - $K = \mathbb{Z}_7$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;
 - $K = \mathbb{Z}_{17}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.
- Dokážte vzorce z tvrdenia 7.2.4.
 - Dokážte, že pre ľubovoľnú maticu $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ a $k, l \in \mathbb{N}$ platí $\mathbf{A}^k \cdot \mathbf{A}^l = \mathbf{A}^{k+l}$ a $(\mathbf{A}^k)^l = \mathbf{A}^{kl}$.
 - Pre regulárnu maticu $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ rozšírte definíciu jej mocniny \mathbf{A}^k na ľubovoľný celočíselný exponent k a dokážte rovnosti $\mathbf{A}^k \cdot \mathbf{A}^l = \mathbf{A}^{k+l}$, $(\mathbf{A}^k)^l = \mathbf{A}^{kl}$ pre všetky $k, l \in \mathbb{Z}$ (porovnaj s cvičením 2.13).
 - Za akých okolností platí pre matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ rovnosť $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^k = \mathbf{A}^k \cdot \mathbf{B}^k$ pre ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$?
 - Za akých okolností platí pre regulárne matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ rovnosť $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^k = \mathbf{B}^k \cdot \mathbf{A}^k$ pre ľubovoľné $k \in \mathbb{Z}$?
 - Nájdite príklad regulárnych matíc $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ takých, že všetky štyri matice $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-2}$, $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})^{-2}$, $\mathbf{A}^{-2} \cdot \mathbf{B}^{-2}$, $\mathbf{B}^{-2} \cdot \mathbf{A}^{-2}$ sú rôzne. Dá sa táto úloha riešiť aj bez počítania inverzných matíc?
- Nech $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ je regulárna matica. Potom pre ľubovoľné matice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times q}$ platí $h(\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}) = h(\mathbf{A})$, $h(\mathbf{P} \cdot \mathbf{B}) = h(\mathbf{B})$. Dokážte.
- Zistite, či uvedená matica \mathbf{A} nad poľom K je regulárna; v tom prípade vypočítajte k nej inverznú maticu \mathbf{A}^{-1} :
 - $K = \mathbb{Q}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
 - $K = \mathbb{R}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
 - $K = \mathbb{C}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+2i & 1-i \\ i-2 & 1 \end{pmatrix}$;
 - $K = \mathbb{C}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+2i & 1-i \\ i-2 & 1+i \end{pmatrix}$;
 - $K = \mathbb{Z}_2$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
 - $K = \mathbb{Z}_3$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Pre matice \mathbf{A} , \mathbf{B} nad poľom \mathbb{R} vypočítajte maticu $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$ (ak \mathbf{A} je regulárna):

$$(a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}; \quad (b) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ako skúšku správnosti vypočítajte maticu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ – mali by ste dostať \mathbf{B} .

7. Pre matice \mathbf{A} , \mathbf{B} nad poľom \mathbb{R} vypočítajte maticu $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1}$ (ak \mathbf{B} je regulárna):

$$(a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (b) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ako skúšku správnosti vypočítajte maticu $\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$ – mali by ste dostať \mathbf{A} .

8. Ná základe skúseností nadobudnutých v cvičeniach 5, 6 a 7 dokážte tvrdenie 7.3.1.

9. Nájdite inverzné matice k maticiam \mathbf{R}_α , \mathbf{S}_α z príkladov 6.4.3, 6.4.4. Vysvetlite geometrický význam získaných výsledkov.

10. Bázy α , β vektorového priestoru \mathbb{R}^3 sú tvorené stĺpcami matíc $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Nájdite matice prechodu $\mathbf{P}_{\varepsilon, \alpha}$, $\mathbf{P}_{\beta, \varepsilon}$, $\mathbf{P}_{\alpha, \beta}$ a $\mathbf{P}_{\beta, \alpha}$.

(b) Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ má vzhľadom na bázu β súradnice $(2, 7, 1)^T$. Nájdite vektor \mathbf{x} ako aj jeho súradnice vzhľadom na bázu α .

11. Báza α vektorového priestoru \mathbb{R}^3 je tvorená stĺpcami matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Nájdite bázy β , γ

priestoru \mathbb{R}^3 , ak poznáte matice prechodu $\mathbf{P}_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{P}_{\gamma, \alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vypočítajte matice prechodu $\mathbf{P}_{\beta, \gamma}$ a $\mathbf{P}_{\gamma, \beta}$.

12. Lineárne zobrazenie $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ je dané predpisom $\varphi(x, y, z)^T = (x + y, x - y, 3x + y + z, z)^T$.

(a) Nájdite maticu zobrazenia φ vzhľadom na bázu β priestoru \mathbb{R}^3 a α priestoru \mathbb{R}^4 tvorené stĺpcami matíc $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Nech $\mathbf{x} = (1, -4, 3)^T \in \mathbb{R}^3$. Nájdite súradnice vektora $\varphi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4$ vzhľadom na bázu α .

(c) Vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ má vzhľadom na bázu β súradnice $(1, 1, 1)^T$. Nájdite vektor $\varphi(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^4$.

(d) Každú z úloh (b), (c) možno riešiť dvoma spôsobmi – vysvetlite ako.

(e) Určte hodnotu h zobrazenia ψ a nájdite nejaké bázy priestorov \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^4 , vzhľadom na ktoré má matica φ blokový tvar $\begin{pmatrix} I_h & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Napíšte explicitne túto maticu.

13. Lineárne zobrazenie $\psi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ má vzhľadom na bázu β priestoru \mathbb{R}^4 a α priestoru \mathbb{R}^3 tvorené

stĺpcami matíc $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ maticu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Nájdite maticu zobrazenia ψ vzhľadom na kanonické bázy $\varepsilon^{(4)}$, $\varepsilon^{(3)}$.

(b) Nech $\mathbf{u} = (2, 1, 0, -1)^T \in \mathbb{R}^4$. Nájdite súradnice vektora $\psi(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^3$ vzhľadom na bázu α .

(c) Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ má vzhľadom na bázu β súradnice $(1, -1, 1, -1)^T$. Nájdite vektor $\psi(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3$.

(d) Každú z úloh (b), (c) možno riešiť dvoma spôsobmi – vysvetlite ako.

(e) Určte hodnotu h zobrazenia ψ a nájdite nejaké bázy priestorov \mathbb{R}^4 , \mathbb{R}^3 , vzhľadom na ktoré má matica ψ blokový tvar $\begin{pmatrix} I_h & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Napíšte explicitne túto maticu.

14. Dokážte, že $\zeta = \zeta^{(n)} = (1, 1 + x, (1 + x)^2, \dots, (1 + x)^n)$ je bázou vektorového priestoru $\mathbb{R}^{(n)}[x]$ a nájdite matice prechodu $\mathbf{P}_{\xi, \zeta}$, $\mathbf{P}_{\zeta, \xi}$, kde $\xi = \xi^{(n)} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ je kanonická báza priestoru $\mathbb{R}^{(n)}[x]$.