4. LINEÁRNE PODPRIESTORY A LINEÁRNA NEZÁVISLOSŤ

V tejto kapitole sa opäť vrátime k štúdiu abstraktných vektorových priestorov nad všeobecným poľom. K bude v celej kapitole označovať nejaké pevné, inak ľubovoľné pole a V bude nejaký pevne zvolený vektorový priestor nad K. Čitateľ sa však nedopustí nijakej chyby, ak si pod všeobecným poľom K bude predstavovať pole $\mathbb{R}$ všetkých reálnych čísel. Zakaždým, keď sa budeme odvolávať na geometrický názor, bude to dokonca užitočné. Na druhej strane by však nemal spúšťať zo zreteľa, že naše úvahy majú podstatne širšiu platnosť – okrem vektorových priestorov nad $\mathbb{R}$ sa z nám známych príkladov vzťahujú tak na vektorové priestory nad poľom $\mathbb{C}$ všetkých komplexných čísel, poľom $\mathbb{Q}$ všetkých racionálnych čísel ako i na vektorové priestory nad konečnými poľami $\mathbb{Z}_p$.

4.1. Lineárne podpriestory vektorového priestoru

Množina $S \subseteq V$ sa nazýva *lineárny podpriestor* vektorového priestoru V, ak $S \neq \emptyset$ a pre všetky skaláry $a \in K$ a vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ platí $a\boldsymbol{x} \in S$ a $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in S$. Inak povedané, neprázdna podmnožina $S \subseteq V$ je lineárny podpriestor práve vtedy, keď je uzavretá na operácie skalárneho násobku a súčtu vektorov.

Nasledujúce tvrdenie je bezprostredným dôsledkom práve vyslovenej definície.

4.1.1. Tvrdenie. *Nech S je lineárny podpriestor vektorového priestoru V. Potom $\mathbf{0} \in S$ a S s operáciami súčtu vektorov a skalárneho násobku zúženými z V na S tvorí vektorový priestor nad poľom K.*

V každom vektorovom priestore V sú $\{\mathbf{0}\}$ a V lineárne podpriestory (v prípade, keď $V = \{\mathbf{0}\}$, dokonca splývajú, inak ide o dva rôzne podpriestory) – $\{\mathbf{0}\}$ nazývame *triválny* alebo tiež *nulový* a V *nevlastný* alebo tiež *plný* lineárny podpriestor. Teda pre *vlastný netriviálny* lineárny podpriestor $S \subseteq V$ platí $\{\mathbf{0}\} \neq S \neq V$.

Napr. vo vektorovom priestore $\mathbb{R}^3$ netriviálne vlastné podpriestory sú práve všetky priamky a roviny prechádzajúce počiatkom $\mathbf{0}$.

Nasledujúce tvrdenie charakterizuje lineárne podpriestory ako množiny uzavreté na lineárne kombinácie.

4.1.2. Tvrdenie. *Pre ľubovoľnú podmnožinu S vektorového priestoru V nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) *S je lineárny podpriestor vo V;*

(ii) *$S \neq \emptyset$ a pre všetky skaláry $a, b \in K$ a vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ platí $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} \in S$;*

(iii) *pre každé $n \in \mathbb{N}$ a pre všetky skaláry $a_1, \dots, a_n \in K$ a vektory $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n \in S$ platí $a_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{x}_n \in S$.*

Dôkaz. Postupne dokážeme implikácie (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iii) a (iii) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii): Ak S je lineárny podpriestor, tak $S \neq \emptyset$. Nech $a, b \in K$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$. Keďže S je uzavreté na skalárne násobky, platí $a\boldsymbol{x}, b\boldsymbol{y} \in S$. Z uzavretosti S na súčet vyplýva $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} \in S$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Nech platí (ii). Keďže $S \neq \emptyset$, existuje $\boldsymbol{s} \in S$. Potom $\mathbf{0} = 0\boldsymbol{s} + 0\boldsymbol{s} \in S$ a tiež $a\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{s} \in S$ pre každé $a \in K$, $\boldsymbol{x} \in S$. Teda podmienka z (iii) je splnená pre $n = 0$ (lebo prázdna lineárna kombinácia je $\mathbf{0}$) a $n = 1$; podľa (ii) je splnená tiež pre $n = 2$. Keby nebola splnená pre všetky $n \in \mathbb{N}$, označíme n najmenšie prirodzené číslo s touto vlastnosťou. Potom $n > 2$ a pre všetky $k < n$ podmienka z (iii) platí. Nech $a_1, \dots, a_n \in K$, $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n \in S$ sú také, že $a_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{x}_n \notin S$. Avšak

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{x}_n = (a_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_{n-1}\boldsymbol{x}_{n-1}) + a_n\boldsymbol{x}_n \in S,$$

keďže pre prirodzené čísla $n \Leftrightarrow 1$ a 2 podmienka z (iii) platí. To je spor.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Z platnosti (iii) pre $n = 0$ vyplýva, že $\mathbf{0} \in S$ (prázdna lineárna kombinácia je totiž $\mathbf{0}$). Teda $S \neq \emptyset$. Voľbou $n = 1$ dostávame uzavretosť S na skalárne násobky. Uzavretosť S na súčet vyplýva z voľby $n = 2$, $a_1 = a_2 = 1$.

4.1.3. Príklad. Keďže s príkladmi lineárnych podpriestorov vektorových priestorov K^n sa ešte stretneme pri mnohých príležitostiach, uvedieme tu niekoľko „exotickejších" príkladov. Napospol pôjde o podpriestory priestorov K^X všetkých funkcií z nejakej množiny X do poľa K (pozri príklad 1.6.5).

(a) Označme $K^{(X)}$ množinu všetkých funkcií $f\colon X \to K$ takých, že množina $\{x \in X;\, f(x) \neq 0\}$ je konečná. Pre ľubovoľnú lineárnu kombináciu funkcií $f, g \in K^{(X)}$ platí

$$\{x \in X;\, af(x) + bg(x) \neq 0\} \subseteq \{x \in X;\, f(x) \neq 0\} \cup \{x \in X;\, g(x) \neq 0\}.$$

Z toho vyplýva, že $K^{(X)}$ je lineárny podpriestor vektorového priestoru K^X. Ak X je konečná, tak $K^{(X)} = K^X$, ak X je nekonečná, tak $K^{(X)}$ je netriválny vlastný podpriestor v K^X.

(b) Nech $X \subseteq \mathbb{R}$ je ľubovoľná množina reálnych čísel. Potom $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, alebo len stručne $\mathcal{C}(X)$ označuje množinu všetkých spojitých funkcií $f\colon X \to \mathbb{R}$. Keďže lineárne kombinácie spojitých funkcií sú zrejme opäť spojité fumkcie, $\mathcal{C}(X)$ je lineárny podpriestor v $\mathbb{R}^X$.

(c) Ak X je nejaký (ohraničený alebo neohraničený) interval reálnych čísel, tak $\mathcal{D}(X)$ označuje množinu všetkých funkcií $f\colon X \to \mathbb{R}$, ktoré majú v každom bode $x \in X$ konečnú deriváciu (v prípadných krajných bodoch intervalu X sa žiada existencia konečnej derivácie zľava alebo sprava). Keďže každá diferencovateľná funkcia je spojitá na svojom definičnom obore a lineárna kombinácia diferencovateľných funkcií je opäť diferencovateľná, $\mathcal{D}(X)$ je lineárny podpriestor vektorového priestoru $\mathcal{C}(X)$.

4.2. Lineárny obal množiny vektorov

Množinu všetkých lineárnych kombinácií vektorov z podmnožiny X vektorového priestoru V nazývame *lineárnym obalom* množiny X a označujeme ju $[X]$. Teda

$$[X] = \{a_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{x}_n;\, n \in \mathbb{N} \;\&\; a_1, \dots, a_n \in K \;\&\; \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n \in X\}.$$

Ak $X = \{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\}$ je konečná množina, tak miesto $[\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\}]$ píšeme len $[\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n]$. Zrejme tento zápis má zmysel aj pre ľubovoľnú usporiadanú n-ticu (nie nutne rôznych) vektorov $(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$, a platí

$$[\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n] = \{a_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{x}_n;\, a_1, \dots, a_n \in K\}.$$

4.2.1. Tvrdenie. *Nech X je podmnožina vektorového priestoru V. Potom lineárny obal $[X]$ množiny X je najmenší lineárny podpriestor vektorového priestoru V taký, že $X \subseteq [X]$.*

Dôkaz. Musíme dokázať dve veci:

(a) $[X]$ je lineárny podpriestor vo V;

(b) pre každý lineárny podpriestor $S \subseteq V$ platí $X \subseteq S \Rightarrow [X] \subseteq S$.

(a) Zrejme $[X]$ obsahuje $\mathbf{0}$ ako prázdnu lineárnu kombináciu, teda $[X] \neq \emptyset$. Nech $\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{x}_n$, $\boldsymbol{v} = b_1\boldsymbol{y}_1 + \ldots + b_m\boldsymbol{y}_m$ sú prvky z $[X]$, pričom $a_i, b_j \in K$, $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_j \in X$, a $c, d \in K$. Potom

$$c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v} = ca_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + ca_n\boldsymbol{x}_n + db_1\boldsymbol{y}_1 + \ldots + db_m\boldsymbol{y}_m \in [X],$$

keďže je to opäť lineárna kombinácia vektorov z X. Podľa podmienky (ii) tvrdenia 4.1.2 je $[X]$ lineárny podpriestor vo V.

(b) Nech $S \subseteq V$ je lineárny podpriestor taký, že $X \subseteq S$. Potom podľa podmienky (iii) tvrdenia 4.1.2 všetky lineárne kombinácie vektorov z S, a tým skôr vektorov z X, patria do S. Teda $[X] \subseteq S$.

Dokázané tvrdenie nás oprávňuje nazývať lineárny obal $[X]$ množiny $X \subseteq V$ tiež lineárnym podpriestorom *generovaným* množinou X. Ak $[X] = S$, hovoríme, že X *generuje* lineárny podpriestor S, prípadne že X je *generujúca množina* alebo tiež *množina generátorov* lineárneho podpriestoru $S \subseteq V$. Ak $S = V$, t. j. ak $[X] = V$, hovoríme krátko o *generujúcej množine*. Používa sa tiež názov *vytvárajúca množina.*

Kvôli prehľadnosti ešte zhrnieme základné vlastnosti operácie lineárneho obalu $X \mapsto [X]$.

4.2.2. Tvrdenie. *Pre ľubovoľné podmnožiny X, Y vektorového priestoru V a $\boldsymbol{v} \in V$ platí:*

(a) $[\emptyset] = [\mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\}$;

(b) $X \subseteq [X]$;

(c) $X \subseteq Y \Rightarrow [X] \subseteq [Y]$;

(d) X je lineárny podpriestor vo V práve vtedy, keď $X = [X]$;

(e) $[[X]] = [X]$;

(f) $\boldsymbol{v} \in [X] \Leftrightarrow [X \cup \{\boldsymbol{v}\}] = [X]$.

Dôkaz. (a), (b) a (c) sú triviálne, (d) priamo vyplýva z tvrdenia 4.2.1 a (e) je bezprostredným dôsledkom (d).

(f) Nech $\boldsymbol{v} \in [X]$. S použitím (b), (c) a (e) dostávame

$$[X \cup \{\boldsymbol{v}\}] \subseteq [[X] \cup \{v\}] = [[X]] = [X].$$

Teda $[X \cup \{v\}] = [X]$. Keďže $\boldsymbol{v} \in [X \cup \{\boldsymbol{v}\}]$, obrátená implikácia je triviálna.

4.3. Prienik a súčet lineárnych podpriestorov

Nech X, Y sú ľubovoľné podmnožiny vektorového priestoru V. Potom množinu

$$X + Y = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y};\ \boldsymbol{x} \in X \ \&\ \boldsymbol{y} \in Y\}$$

nazývame *súčtom* množín X, Y.

4.3.1. Tvrdenie. *Nech S, T sú lineárne podpriestory vektorového priestoru V. Potom aj $S \cap T$ a $S + T$ sú lineárne podpriestory vo V. Navyše platí*

$$S + T = [S \cup T],$$

t. j. $S + T$ je najmenší lineárny podpriestor vo V, ktorý obsahuje S aj T.

Dôkaz. Zrejme $\mathbf{0} \in S \cap T$. Z toho, že S aj T sú uzavreté na lineárne kombinácie, vyplýva, že aj $S \cap T$ má túto vlastnosť.

Dokážeme, že aj $S + T$ je uzavreté na lineárne kombinácie. Nech $a_1, a_2 \in K$ a $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2$ sú vektory z $S+T$, pričom $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in S$, $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in T$. Potom

$$\begin{aligned} a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 &= a_1(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1) + a_2(\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2) \\ &= (a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2) + (a_1\boldsymbol{y}_1 + a_2\boldsymbol{y}_2) \in S + T, \end{aligned}$$

lebo S, T sú lineárne podpriestory, teda $a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 \in S$ a $a_1\boldsymbol{y}_1 + a_2\boldsymbol{y}_2 \in T$.

Dokážeme poslednú rovnosť. Inklúzie $S \cup T \subseteq S + T \subseteq [S \cup T]$ sú zrejmé. Keďže $S + T$ je lineárny podpriestor vo V a $[S \cup T]$ je najmenší lineárny podpriestor vo V, ktorý obsahuje množinu $S \cup T$, platí tiež $[S \cup T] \subseteq S + T$.

Na druhej strane čitateľ iste ľahko nájde príklady na to, že zjednotenie dvoch lineárnych podpriestorov S, T vektorového priestoru V nemusí byť lineárnym podpriestorom. Presnejšie, $S \cup T$ je lineárny podpriestor vo V práve vtedy, keď $S \subseteq T$ alebo $T \subseteq S$. Porozmýšľajte prečo.

Súčet lineárnych podpriestorov S, T vektorového priestoru V nazývame *priamym* alebo tiež *direktným súčtom*, ak $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$; takýto súčet zvykneme tiež označovať $S \oplus T$.

4.3.2. Tvrdenie. *Nech S, T sú lineárne podpriestory vektorového priestoru V. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*
(i) $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, t..j. súčet $S + T$ je direktný;
(ii) každý vektor $\boldsymbol{z} \in S + T$ má jednoznačné vyjadrenie v tvare $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, kde $\boldsymbol{x} \in S$, $\boldsymbol{y} \in T$.

Dôkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Nech $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$. Predpokladajme, že vektor $\boldsymbol{z} \in S + T$ možno vyjadriť v tvaroch $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2$, kde $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in S$, $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in T$. Potom $\boldsymbol{x}_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{y}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{y}_1$. Keďže $\boldsymbol{x}_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}_2 \in S$, $\boldsymbol{y}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{y}_1 \in T$, uvedená spoločná hodnota patrí do $S \cap T$. Preto $\boldsymbol{x}_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{y}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{y}_1 = \mathbf{0}$, t. j. $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_2$. To dokazuje požadovanú jednoznačnosť.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Nech $\boldsymbol{z} \in S \cap T$. Potom $\boldsymbol{z}$ možno vyjadriť v tvare $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z} + \mathbf{0}$, kde $\boldsymbol{z} \in S$, $\mathbf{0} \in T$, ako aj v tvare $\boldsymbol{z} = \mathbf{0} + \boldsymbol{z}$, kde $\mathbf{0} \in S$, $\boldsymbol{z} \in T$. Z predpokladanej jednoznačnosti vyplýva $\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$. Teda $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$.

4.4. Lineárna nezávislosť

Nech $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in V$. Hovoríme, že usporiadaná n-tica vektorov $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ je *lineárne závislá*, ak existujú skaláry $c_1, \ldots, c_n \in K$ také, že $(c_1, \ldots, c_n) \neq \mathbf{0}$ a $c_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0}$. V opačnom prípade hovoríme, že usporiadaná n-tica vektorov $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ je *lineárne nezávislá*. Pre $n = 0$ kvôli úplnosti dodávame, že usporiadanú 0-ticu (t. j. prázdnu postupnosť) vektorov považujeme za lineárne nezávislú.

Miesto „lineárne (ne)závislá usporiadaná n-tica vektorov $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$" budeme často hovoriť len o lineárne (ne)závislých vektoroch $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$.

Rozmeňme si teraz „na drobné", čo znamená ono „v opačnom prípade" v definícii lineárnej nezávislosti. Podľa tejto definície vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ sú lineárne nezávislé práve vtedy, keď

$$(\forall\, c_1, \dots, c_n \in K)(c_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = \ldots = c_n = 0).$$

Vidíme, že logická štruktúra pojmu lineárnej nezávislosti je trochu zložitejšia, než sme boli doteraz zvyknutí. Keďže ide o kľúčový pojem, je potrebné sa pri ňom na chvíľu pristaviť.

Uvedomme si, že pre n-ticu skalárov $(c_1, \dots, c_n) = \mathbf{0}$ platí $c_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0}$ *pre ľubovoľnú* n-ticu vektorov $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$, bez ohľadu na to, či je lineárne závislá alebo nezávislá. Avšak pre niektoré n-tice vektorov $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ môžeme ako výsledok lineárnej kombinácie $c_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{u}_n$ dostať $\mathbf{0}$ aj pomocou *inej* n-tice skalárov $(c_1, \dots, c_n)$ než len $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ – takéto usporiadané n-tice $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ nazývame *lineárne závislé*. Pre niektoré usporiadané n-tice vektorov $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ je voľba $(c_1, \dots, c_n) = \mathbf{0}$ *jediná možnosť* ako lineárnou kombináciou $c_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{u}_n$ získať výsledok $\mathbf{0}$ – takéto usporiadané n-tice nazývame *lineárne nezávislé.*

Na precvičenie práve definovaných pojmov čitateľovi odporúčame, aby si dokázal štyri jednoduché no užitočné pozorovania:

(a) jediný vektor $\boldsymbol{u}$ je lineárne nezávislý práve vtedy, keď $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$;
(b) vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď jeden z nich je násobkom druhého;
(c) ak niektorý z vektorov $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ je $\mathbf{0}$, tak tieto vektory sú lineárne závislé;
(d) ak sa niektoré dva z vektorov $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ rovnajú, tak tieto vektory sú lineárne závislé.

Inak povedané, len usporiadaná n-tica nenulových a navzájom rôznych vektorov, z ktorých žiaden nie je násobkom druhého, môže (no stále ešte nemusí) byť lineárne nezávislá.

Nasledujúce tvrdenie asi vysvetľuje názov „lineárna závislosť" lepšie než samotná definícia.

4.4.1. Tvrdenie. *Pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n \in V$ nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ sú lineárne závislé;
(ii) niektorý z vektorov $\boldsymbol{u}_k$, $k \le n$, je lineárnou kombináciou predchádzajúcich;
(ii') niektorý z vektorov $\boldsymbol{u}_k$, $k \le n$, je lineárnou kombináciou nasledujúcich;
(iii) niektorý z vektorov $\boldsymbol{u}_k$, $k \le n$, je lineárnou kombináciou ostatných.

Dôkaz. Dokážeme implikácie (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) a (iii) $\Rightarrow$ (i). Rovnako by bolo možné dokázať aj implikácie (i) $\Rightarrow$ (ii') $\Rightarrow$ (iii).

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nech $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ sú lineárne závislé vektory a $c_1, \dots, c_n$ sú skaláry, nie všetky rovné 0, také, že $c_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0}$. Nech k je najväčší z indexov $1, \dots, n$ taký, že $c_k \neq 0$. Potom $c_i = 0$ pre $k < i \le n$, teda $c_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_k\boldsymbol{u}_k = \sum_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{u}_i = \mathbf{0}$. Z toho dostávame

$$\boldsymbol{u}_k = c_k^{-1}(c_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_{k-1}\boldsymbol{u}_{k-1}),$$

t. j. $\boldsymbol{u}_k$ je lineárnou kombináciou predchádzajúcich vektorov.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) platí triválne.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Ak $\boldsymbol{u}_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} c_i \boldsymbol{u}_i$ je lineárnou kombináciou ostatných vektorov, položme $c_k = \Leftrightarrow 1$. Potom pre n-ticu skalárov $(c_1, \dots, c_n) \neq \boldsymbol{0}$ platí $c_1 \boldsymbol{u}_1 + \dots + c_n \boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}$, teda vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ sú lineárne závislé.

Poznámka. Všimnite si, že dôkaz implikácie (i) $\Rightarrow$ (ii) pokrýva aj prípad $k = 1$. Vtedy $c_1 \neq 0$ a $c_1 \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{0}$, preto tiež $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{0}$. Teda $\boldsymbol{u}_1$ je naozaj lineárnou kombináciou predchádzajúcich (t. j. prázdnej postupnosti) vektorov.

Každý vektor $\boldsymbol{x}$ z lineárneho obalu $[\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n]$ možno vyjadriť v tvare

$$\boldsymbol{x} = c_1 \boldsymbol{u}_1 + \dots + c_n \boldsymbol{u}_n$$

pre nejakú n-ticu skalárov $(c_1, \dots, c_n)$. Nasledujúce tvrdenie ukazuje, že lineárna nezávislosť vektorov $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ je ekvivalentná s jednoznačnosťou tohto vyjadrenia.

4.4.2. Veta. *Vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ sú lineárne nezávislé práve vtedy, keď každý vektor $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n]$ možno vyjadriť v tvare $\boldsymbol{x} = c_1 \boldsymbol{u}_1 + \dots + c_n \boldsymbol{u}_n$ pre jedinú usporiadanú n-ticu $(c_1, \dots, c_n) \in K^n$.*

Dôkaz. Nech $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ sú lineárne nezávislé vektory. Predpokladajme, že vektor $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n]$ možno vyjadriť v tvaroch

$$\boldsymbol{x} = c_1 \boldsymbol{u}_1 + \dots + c_n \boldsymbol{u}_n = d_1 \boldsymbol{u}_1 + \dots + d_n \boldsymbol{u}_n,$$

kde $(c_1, \dots, c_n), (d_1, \dots, d_n) \in K^n$. Potom

$$(c_1 \Leftrightarrow d_1) \boldsymbol{u}_1 + \dots + (c_n \Leftrightarrow d_n) \boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}.$$

Z lineárnej nezávislosti vektorov $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ vyplýva $c_1 \Leftrightarrow d_1 = \dots = c_n \Leftrightarrow d_n = 0$, čiže $(c_1, \dots, c_n) = (d_1, \dots, d_n)$. Teda vyjadrenie vektora $\boldsymbol{x}$ v tvare lineárnej kombinácie vektorov $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ je jednoznačné.

Predpokladajme teraz, že každý vektor $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n]$ má jednoznačné vyjadrenie v tvare lineárnej kombinácie vektorov $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$. Špeciálne to platí aj pre vektor $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, ktorý má vyjadrenie $\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{u}_1 + \dots + 0\boldsymbol{u}_n$. Z jednoznačnosti tohto vyjadrenia vyplýva

$$c_1 \boldsymbol{u}_1 + \dots + c_n \boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; c_1 = \dots = c_n = 0$$

pre ľubovoľnú n-ticu skalárov $(c_1, \dots, c_n)$. Teda vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ sú lineárne nezávislé.

Nasledujúce tvrdenie dáva do súvislosti lineárnu (ne)závislosť s lineárnym obalom.

4.4.3. Tvrdenie. *Nech $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v} \in V$ pričom vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ sú lineárne nezávislé. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) $\boldsymbol{v} \in [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n]$;

(ii) vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}$ *sú lineárne závislé;*

(iii) $[\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n]$.

Dôkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Ak $\boldsymbol{v} \in [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n]$ tak vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}$ sú lineárne závislé podľa tvrdenia 4.4.1.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Nech vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}$ sú lineárne závislé. Potom niektorý z nich je lineárnou kombináciou predchádzajúcich. Keďže vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ sú lineárne nezávislé, môže to byť len vektor $\boldsymbol{v}$. Teda $\boldsymbol{v} \in [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n]$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) je obsiahnuté v bode (f) tvrdenia 4.2.2.

4.4.4. Veta. *Nech* $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in V$, *pričom vektory* $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ *sú lineárne nezávislé. Potom z množiny* $\{1, \ldots, m\}$ *možno vybrať indexy* $i_1 < \ldots < i_k$ *tak, že vektory* $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_k}$ *sú lineárne nezávislé a generujú rovnaký podpriestor ako vektory* $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$.

Dôkaz. Označme $X = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$. Vektory $\boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_k}$ vyberieme z množiny X nasledujúcim spôsobom. Ak $X \subseteq [\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n]$, položme $k = 0$, t. j. nevyberieme žiaden z nich. V opačnom prípade nech $\boldsymbol{v}_{i_1}$ je prvý z vektorov množiny X, ktorý neleží v podpriestore $[\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n]$. Ak $X \subseteq [\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_{i_1}]$, tak $k = 1$ a $\boldsymbol{v}_{i_1}$ je jediný vybraný vektor. Podľa predchádzajúceho tvrdenia sú vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_{i_1}$ lineárne nezávislé. Ak $X \nsubseteq [\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_{i_1}]$, označíme $\boldsymbol{v}_{i_2}$ prvý vektor množiny X, ktorý neleží v $[\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_{i_1}]$ (zrejme $i_1 < i_2$, teda $\boldsymbol{v}_{i_1} \neq \boldsymbol{v}_{i_2}$). Vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}$ sú podľa tvrdenia 4.4.3 opäť lineárne nezávislé. Podľa potreby pokračujeme rovnakým spôsobom, až kým pre takto získané lineárne nezávislé vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_k}$ neplatí inklúzia $X \subseteq [\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_k}]$, kedy sa zastavíme. (V krajnom prípade dostaneme $k = m$, t. j. vyberieme všetky vektory z množiny X.) Z uvedenej inklúzie okamžite vyplýva rovnosť

$$[\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m] = [\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_k}],$$

keďže každý z generátorov podpriestoru na ľavej strane je prvkom podpriestoru na pravej strane.

4.5. Lineárny obal a lineárna nezávislosť v priestoroch $\boldsymbol{K}^m$

V tomto paragrafe si ukážeme, ako možno na základe našich doterajších znalostí o sústavách lineárnych rovníc tou istou metódou úpravy matíc pomocou ERO na (redukovaný) stupňovitý tvar riešiť pre vektory z priestoru K^m nasledujúce tri otázky:

(1) rozhodnúť pre dané vektory $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y} \in K^m$ či $\boldsymbol{y}$ patrí alebo nepatrí do lineárneho obalu $[\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n]$;

(2) rozhodnúť pre dané vektory $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in K^m$ či sú lineárne závislé alebo nezávislé;

(3) vybrať z vektorov $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in K^m$ lineárne nezávislé vektory $\boldsymbol{x}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{j_k}$ ($j_1 < \ldots < j_k$) tak, aby vektory $\boldsymbol{x}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{j_k}$ generovali vo V ten istý lineárny podpriestor ako vektory $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$.

Hoci všetky tri otázky možno riešiť naraz jednotným spôsobom, z metodických dôvodov začneme jednoduchšími otázkami (1) a (2), a až potom pristúpime k trochu zložitejšej otázke (3). Navyše pri tom zavedieme označenie, ktorého sa budeme držať v celom paragrafe.

Nech $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y} \in K^m$ sú stĺpcové vektory, pričom

$$\boldsymbol{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Označme $\boldsymbol{X} = (x_{ij}) \in K^{m \times n}$ maticu so stĺpcami $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, a $(\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{y}) \in K^{m \times (n+1)}$ blokovú maticu zloženú z matice $\boldsymbol{X}$ a vektora $\boldsymbol{y}$. Potom pre $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in K^n$ platí:

(1) $c_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{y} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}$;
(2) $c_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$.

Inak povedané:

(1) $\boldsymbol{y} \in [\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n]$ práve vtedy, keď sústava $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}$ s rozšírenou maticou $(\boldsymbol{X}\,|\,\boldsymbol{y})$ má aspoň jedno riešenie;
(2) vektory $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ sú lineárne nezávislé práve vtedy, keď homogénna sústava $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ má jediné riešenie $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$; ak táto sústava má aj nejaké nenulové riešenie, tak vektory $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ sú lineárne závislé.

(Nedajte sa spliesť atypickým označením: x_{ij} sú teraz koeficienty sústavy, y_i sú zložky pravej strany a c_j sú neznáme.)

Otázku (1) už vieme riešiť. Stačí pomocou ERO upraviť maticu $(\boldsymbol{X}\,|\,\boldsymbol{y})$ na stupňovitý tvar. Ak výsledná matica obsahuje riadok tvaru $(0, \ldots, 0\,|\,z)$, kde $z \neq 0$, tak sústava $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}$ nemá riešenie a $\boldsymbol{y} \notin [\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n]$. Ak sa taký riadok vo výslednej matici nenachádza, tak sústava má aspoň jedno riešenie a $\boldsymbol{y} \in [\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n]$.

Podobne je to s otázkou (2). Opäť stačí pomocou ERO upraviť maticu $\boldsymbol{X}$ na stupňovitý tvar a pozrieť sa, či v každom stĺpci leží vedúci prvok nejakého riadku. Ak je to tak, niet čo voliť za parametre, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ je jediným riešením sústavy $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ a vektory $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ sú lineárne nezávislé. V opačnom prípade máme možnosť voľby aspoň jedného parametra, sústava má aj nejaké nenulové riešenie a vektory $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ sú lineárne závislé.

Ešte si všimnime úzku súvislosť oboch otázok. Vedúcim prvkom riadku $(0, \ldots, 0\,|\,z)$, kde $z \neq 0$, je práve v $(n+1)$-om stĺpci ležiaci prvok z. Teda matica v stupňovitom tvare riadkovo ekvivalentná s $(\boldsymbol{X}\,|\,\boldsymbol{y})$ neobsahuje taký riadok práve vtedy, keď v jej poslednom stĺpci neleží vedúci prvok žiadneho riadku.

4.5.1. Príklad. Uvažujme stĺpcové vektory $\boldsymbol{x}_1 = (1, 1, -1, -1)^T$, $\boldsymbol{x}_2 = (0, 1, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{x}_3 = (3, 1, -3, -5)^T$, $\boldsymbol{x}_4 = (0, 0, 1, 2)^T$, $\boldsymbol{y} = (3, 5, -2, 1)^T$, $\boldsymbol{z} = (1, 1, 1, 1)^T$ v priestore $\mathbb{R}^4$. Máme rozhodnúť, či vektory $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ patria do lineárneho obalu $[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4]$. Označme si nasledujúce matice

$$(\boldsymbol{X}\,|\,\boldsymbol{y}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right), \qquad (\boldsymbol{X}\,|\,\boldsymbol{z}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Matice $(\boldsymbol{X}\,|\,\boldsymbol{y})$, $(\boldsymbol{X}\,|\,\boldsymbol{z})$ sú riadkovo ekvivalentné s maticami

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{resp.} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Okamžite vidíme, že platí $\boldsymbol{y} \in [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4]$ a $\boldsymbol{z} \notin [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4]$.

4.5.2. Príklad. Zistíme, či stĺpce reálnej matice

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

sú lineárne závislé alebo nezávislé. Táto matica je riadkovo ekvivalentná s maticou

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že stĺpce matice $\boldsymbol{X}$ sú lineárne nezávislé. Na druhej strane, ako matica nad poľom $\mathbb{Z}_5$ je $\boldsymbol{X}$ riadkovo ekvivalentná s maticou

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teda stĺpce matice $\boldsymbol{X}$, chápané ako vektory z vektorového priestoru $\mathbb{Z}_5^4$, sú lineárne závislé.

Kľúčom k odpovedi na otázku (3) je nasledujúce tvrdenie.

4.5.3. Tvrdenie. *Nech $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in K^{m\times n}$ sú riadkovo ekvivalentné matice, pričom matica $\boldsymbol{Y}$ je v stupňovitom tvare. Pre $1 \le j \le n$ označme $\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{s}_j(\boldsymbol{X})$ j-ty stĺpec matice $\boldsymbol{X}$. Nech $j_1 < \ldots < j_k$ sú indexy všetkých stĺpcov matice $\boldsymbol{Y}$, v ktorých ležia vedúce prvky jej riadkov. Potom platí:*

(a) *vektory $\boldsymbol{x}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{j_k}$ sú lineárne nezávislé;*

(b) *ak v j-tom stĺpci matice $\boldsymbol{Y}$ neleží vedúci prvok žiadneho jej riadku (t. j. $1 \le j \le n$ a $j \ne j_1, \ldots, j_k$), tak vektor $\boldsymbol{x}_j$ je lineárnou kombináciou vektorov $\boldsymbol{x}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{j_l}$, kde $l \le k$ je najväčší index, pre ktorý platí $j_l < j$;*

(c) *$[\boldsymbol{x}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{j_k}] = [\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n]$.*

Dôkaz. (a) Označme $\boldsymbol{X}'$, $\boldsymbol{Y}'$ matice, ktoré pozostávajú len zo stĺpcov s indexmi $j_1, \ldots, j_k$ matíc $\boldsymbol{X}$ resp. $\boldsymbol{Y}$ (ostatné stĺpce vynecháme). Potom postupnosťou tých istých ERO, ktorými sme $\boldsymbol{X}$ upravili na $\boldsymbol{Y}$, dostaneme z $\boldsymbol{X}'$ maticu $\boldsymbol{Y}'$, teda $\boldsymbol{X}' \sim \boldsymbol{Y}'$. Matica $\boldsymbol{Y}'$ je však v stupňovitom tvare a má v každom stĺpci vedúci prvok nejakého svojho riadku. Preto homogénna sústava $\boldsymbol{X}' \cdot \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ má jediné riešenie $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0} \in K^k$, čo znamená, že stĺpce matice $\boldsymbol{X}'$, t. j. vektory $\boldsymbol{x}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{j_k}$, sú lineárne nezávislé.

(b) Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že matica $\boldsymbol{Y}$ je dokonca v redukovanom stupňovitom tvare. Poloha vedúcich prvkov riadkov v jednotlivých stĺpcoch bude stále rovnaká. Nech $j \ne j_1, \ldots, j_k$. Pri voľbe parametra $c_j = 1$ a voľbou 0 za hodnotu všetkých ostatných parametrov (ak nejaké zostali) dostaneme jedno riešenie $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \ne \boldsymbol{0}$ sústavy $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$. Nech $l \le k$ je najväčší index taký, že $j_l < j$. Pre naše riešenie $\boldsymbol{c}$ navyše platí $c_p = 0$, ak $j \le p \le n$. Ak je totiž c_p parameter, tak je to dôsledok našej voľby, a vo vyjadrení neznámych c_{j_t} pre $l < t \le k$ sa (jediný nenulový) parameter c_j nevyskytuje. Označme $\boldsymbol{X}''$ maticu, ktorá pozostáva len zo stĺpcov matice $\boldsymbol{X}$ s indexmi $j_1, \ldots, j_l$ a j. Z uvedených dôvodov je vektor $\boldsymbol{c}'' = (c_{j_1}, \ldots, c_{j_l}, 1)^T$ riešením sústavy $\boldsymbol{X}'' \cdot \boldsymbol{c}'' = \boldsymbol{0}$. To znamená, že

$$\boldsymbol{x}_j = -(c_{j_1}\boldsymbol{x}_{j_1} + \ldots + c_{j_l}\boldsymbol{x}_{j_l}) \in [\boldsymbol{x}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{j_l}].$$

(c) je bezprostredným dôsledkom (b) a tvrdenia 4.4.3.

Práve dokázané tvrdenie nám dáva priamy návod na riešenie otázky (3). Stačí pomocou ERO upraviť maticu $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ na maticu $\boldsymbol{Y}$ v stupňovitom tvare a zistiť v nej indexy $j_1 < \dots < j_k$ všetkých stĺpcov, v ktorých ležia vedúce prvky jej riadkov. Potom $\boldsymbol{x}_{j_1}, \dots, \boldsymbol{x}_{j_k}$ sú hľadané lineárne nezávislé vektory, ktoré generujú lineárny podpriestor $[\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n]$.

4.5.4. Príklad. Zo stĺpcov reálnej matice

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

treba vybrať lineárne nezávislé stĺpce, ktoré generujú lineárny obal všetkých stĺpcov matice $\boldsymbol{X}$. Matica $\boldsymbol{X}$ je riadkovo ekvivalentná s maticou

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

v stupňovitom tvare. Vedúce prvky riadkov matice $\boldsymbol{Y}$ sa nachádzajú v stĺpcoch 1, 2 a 4. Hľadané vektory sú teda stĺpce 1, 2 a 4 matice $\boldsymbol{X}$. Zapísané vedľa seba tvoria maticu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I keď sme celý postup riešenia otázok (1), (2) a (3) vyložili len pre priestory stĺpcových vektorov K^m a týchto priestorov sa týkali aj všetky príklady, čitateľovi by už nemalo robiť ťažkosti modifikovať popísanú metódu aj na priestory riadkových vektorov K^m – či už transponovaním, príslušných matíc riadkových vektorov alebo nahradením elementárnych riadkových operácií stĺpcovými.

4.6. Lineárne nezávislé postupnosti a množiny

V tomto paragrafe stručne doplníme pojmy lineárnej závislosti a nezávislosti spôsobom, ktorý umožňuje ich použitie i v prípade nekonečných postupností a ľubovoľných (t. j. konečných aj nekonečných) množín vektorov. Nakoľko však tieto otázky zostávajú na okraji nášho záujmu, popri príslušných definíciách sa obmedzíme len na niekoľko jednoduchých zovšeobecnení výsledkov o lineárnej (ne)závislosti usporiadaných n-tíc.

Nekonečnú postupnosť $(\boldsymbol{u}_k)_{k=0}^{\infty} = (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k, \dots)$ vektorov z priestoru V nazývame *lineárne nezávislou*, ak každá jej konečná podpostupnosť $(\boldsymbol{u}_{k_1}, \dots, \boldsymbol{u}_{k_n})$, kde $0 \le k_1 < \dots < k_n$, je lineárne nezávislá.

Dôkaz nasledujúceho jednoduchého tvrdenia prenechávame čitateľovi.

4.6.1. Tvrdenie. *Nekonečná postupnosť* $(\boldsymbol{u}_k)_{k=0}^{\infty}$ *vektorov z* V *je lineárne nezávislá práve vtedy, keď pre každé* $n \in \mathbb{N}$ *jej počiatočný úsek* $(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ *je lineárne nezávislý.*

Napríklad postupnosť $(1, x, x^2, \dots, x^k, \dots)$ všetkých mocnín x je lineárne nezávislá postupnosť vo vektorovom priestore $K[x]$ všetkých polynómov v premennej x nad poľom K. Polynóm $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ je totiž (definitoricky) nulový práve vtedy, keď $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Množina $X \subseteq V$ sa nazýva *lineárne nezávislá*, ak pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ každá usporiadaná n-tica *navzájom rôznych* vektorov $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ z množiny X je lineárne nezávislá.

Ešte raz podčiarkujeme ono „navzájom rôznych“ – keby totiž $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ neboli navzájom rôzne vektory, nemohli by byť lineárne nezávislé.

Lineárna závislosť či nezávislosť usporiadanej n-tice vektorov nezávisí od ich poradia – zrejme usporiadaná n-tica $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ je lineárne nezávislá práve vtedy, keď je lineárne nezávislá usporiadaná n-tica $(\boldsymbol{u}_{\sigma(1)}, \dots, \boldsymbol{u}_{\sigma(n)})$, kde σ je ľubovoľná permutácia množiny $\{1, \dots, n\}$. Inak povedané, lineárna (ne)závislosť usporiadanej n-tice $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ navzájom rôznych vektorov je vlastnosťou množiny $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$. Čitateľ už iste ľahko nahliadne platnosť nasledujúceho očividného tvrdenia.

4.6.2. Tvrdenie. *Usporiadaná* n*-tica* $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ *navzájom rôznych vektorov z* V *je lineárne nezávislá práve vtedy, keď množina* $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\} \subseteq V$ *je lineárne nezávislá.*

Naše záverečné tvrdenie, ktoré dáva do súvisu lineárnu (ne)závislosť množiny s jej lineárnym obalom, je obdobou tvrdenia 4.4.3. Taktiež jeho dôkaz možno získať malou obmenou dôkazu spomínaného tvrdenia.

4.6.3. Tvrdenie. *Nech* $X \subseteq V$ *je lineárne nezávislá množina a* $\boldsymbol{v} \in V$. *Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) $\boldsymbol{v} \in [X]$;
(ii) *množina* $X \cup \{\boldsymbol{v}\}$ *je lineárne závislá;*
(iii) $[X \cup \{\boldsymbol{v}\}] = [X]$.