2. ZÁKLADY MATICOVÉHO POČTU

V tejto kapitole sa zoznámime s *maticami*, t. j. obdĺžnikovými tabuľkami, pomocou ktorých budeme kódovať najrôznejšie dôležité údaje o vektorových priestoroch, a naučíme sa s nimi zaobchádzať. Niektoré operácie s maticami budú zatiaľ nemotivované, ich význam vyjde najavo až neskôr. Od čitateľa tak žiadame istú dávku trpezlivosti, podobnú tej, akú musí prejaviť prváčik na základnej škole, ktorý tiež musí najprv zvládnuť jednotlivé písmenká, potom sa naučiť, ako sa z nich skladajú slová, a až potom môže začať čítať zmysluplné texty. Tento vklad sa nám zúročí neskôr, keď nám umožní hladko napredovať a nezdržiavať sa pri nepodstatných otázkach.

Pri prvom čítaní možno vynechať odstavce venované blokovým maticiam a maticiam nad vektorovými priestormi. Celkom postačí nalistovať si príslušnú časť až vo chvíli, keď sa s blokovými maticami stretneme v ďalších kapitolách.

2.1. Matice nad danou množinou

2.1.1. Typy matíc. Nech X je ľubovoľná množina a $m, n \in \mathbb{N}$. *Maticou typu* $m \times n$, alebo tiež $m \times n$*-rozmernou maticou* nad množinou X rozumieme obdĺžnikovu tabuľku

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

pozostávajúcu z prvkov množiny X. Skrátene tiež píšeme $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, alebo len $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$. Prvky $a_{ij} \in X$, kde $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, sa nazývajú *prvkami matice* $\boldsymbol{A}$. Prvok a_{ij} nachádzajúci sa v i-tom riadku a j-tom stĺpci matice $\boldsymbol{A}$ nazývame tiež *prvok v mieste* (i, j), prípadne (i, j)*-ty prvok* matice $\boldsymbol{A}$. Množinu všetkých $m \times n$-rozmerných matíc nad množinou X značíme $X^{m\times n}$. Ak $m = n$, hovoríme o *štvorcových maticiach rádu* n nad množinou X.

Poznamenajme, že v prípade, keď niektoré z čísel m, n je 0, množina $X^{m\times n}$ pozostáva z jedinej a to *prázdnej* matice $\emptyset$. Neskôr sa ukáže rozumné stotožniť túto maticu s tzv. nulovou maticou. Aby sme sa vyhli trivialitám, budeme sa vždy baviť len o maticiach kladných rozmerov $m \times n$, čitateľ by si však mal aspoň občas uvedomiť, že väčšina našich úvah si zachováva platnosť aj v prípade, keď $m = 0$ alebo $n = 0$.

Dve matice nad množinou X považujeme za *navzájom rovné* alebo *totožné*, ak majú rovnaké rozmery a rovnaké prvky na príslušných miestach. To znamená, že pre matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{p\times q}$ nad X kladieme $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ práve vtedy, keď $m = p$, $n = q$ a pre všetky $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ platí $a_{ij} = b_{ij}$.

Množina matíc typu $1 \times n$ nad X splýva s množinou X^n, ak usporiadané n-tice prvkov z X zapisujeme do riadku. Podobne, ak usporiadné m-tice prvkov z X zapisujeme do stĺpca, tak množina matíc typu $m \times 1$ nad X splýva s množinou X^m.

Pokiaľ bude z kontextu jasné, či ide o riadky alebo stĺpce, prípadne, ak na tom nebude záležať, budeme písať jednoducho X^n, X^m a pod. Podrobnejšie označenie $X^{1\times n}$, $X^{m\times 1}$ a pod. budeme používať, len ak bude treba rozlíšiť riadky a stĺpce.

2.1.2. Riadky a stĺpce matice. Nech $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in X^{m\times n}$. Usporiadanú n-ticu

$$\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A}) = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in X^{1\times n},$$

kde $1 \le i \le m$, nazývame *i-tym riadkom* matice $\boldsymbol{A}$. Podobne, usporiadnú m-ticu

$$\boldsymbol{s}_j(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

kde $1 \le j \le n$, nazývame *j-tym stĺpcom* matice $\boldsymbol{A}$. Maticu $\boldsymbol{A}$ tak možno stotožniť so stĺpcom jej riadkov ako aj s riadkom jej stĺpcov, t. j.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{A}) \\ \boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{A}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m(\boldsymbol{A}) \end{pmatrix} = (\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{s}_2(\boldsymbol{A}), \dots, \boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{A})).$$

2.1.3. Transponovaná matica. Maticu, ktorú získame z matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ zámenou jej riadkov a stĺpcov, nazývame *transponovanou maticou* k matici $\boldsymbol{A}$ a značíme ju $\boldsymbol{A}^T$. Teda trochu podrobnejšie

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

To znamená, že $\boldsymbol{A}^T \in X^{n\times m}$ a prvok v mieste (i,j) matice $\boldsymbol{A}^T$ je a_{ji}.

Zrejme pre ľubovoľnú maticu $\boldsymbol{A} \in X^{m\times n}$ platí

$$(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}.$$

Transpozíciou matíc-riadkov z $X^{1\times n}$ dostaneme matice-stĺpce z $X^{n\times 1}$ a transpozíciou matíc-stĺpcov z $X^{m\times 1}$ matice-riadky z $X^{1\times m}$. Na základe tejto poznámky možno nahliadnuť, že pre ľubovoľnú maticu $\boldsymbol{A} \in X^{m\times n}$ a $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ platí

$$\boldsymbol{s}_i\big(\boldsymbol{A}^T\big) = \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A})^T, \qquad \boldsymbol{r}_j\big(\boldsymbol{A}^T\big) = \boldsymbol{s}_j(\boldsymbol{A})^T.$$

Štvorcová matica $\boldsymbol{A} \in X^{n\times n}$ sa nazýva *symetrická*, ak $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$, t. j. ak $a_{ij} = a_{ji}$ pre všetky $i, j = 1, \dots, n$. Postupnosť prvkov $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ nazývame *diagonálou* štvorcovej matice $\boldsymbol{A}$. Transponovanú maticu k štvorcovej matici $\boldsymbol{A}$ zrejme získame „osovou súmernosťou“ jej prvkov podľa diagonály.

2.1.4. Blokové matice. Niekedy bude užitočné spojiť dve matice $\boldsymbol{A} \in X^{m\times n_1}$, $\boldsymbol{B} \in X^{m\times n_2}$ s rovnakým počtom riadkov do jednej matice tak, že príslušné tabuľky jednoducho napíšeme vedľa seba. Výsledná matica je typu $m \times (n_1 + n_2)$ a značíme ju $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$, prípadne $(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{B})$.

Podobne možno spojiť dve matice $\boldsymbol{A} \in X^{m_1\times n}$, $\boldsymbol{B} \in X^{m_2\times n}$ s rovnakým počtom stĺpcov do jednej matice tak, že príslušné tabuľky napíšeme pod seba. Výsledná matica je typu $(m_1 + m_2) \times n$ a značíme ju $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$, prípadne $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \hline \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$.

Práve popísané konštrukcie sú príkladmi tzv. *blokových matíc*. Pôvodné matice, z ktorých takto vytvárame blokovú maticu, potom nazývame jej *blokmi*. Takisto môžeme vedľa seba resp. pod seba zoradiť väčší počet blokov, nie len dva.

Naopak, niekedy sa môže ukázať účelné vyznačiť v danej matici nejaké menšie obdĺžnikove časti ako jej bloky. Vtedy hovoríme o tzv. *blokovom tvare* danej matice. Príkladom toho bol zápis matice $\boldsymbol{A} \in X^{m\times n}$ ako riadku jej stĺpcov, prípadne ako stĺpca jej riadkov.

Uvedené dve schémy vytvárania blokových matíc „vedľa seba“ a „pod seba“ možno tiež kombinovať. Napr. z matíc $\boldsymbol{A}_{11} \in X^{m_1\times n_1}$, $\boldsymbol{A}_{12} \in X^{m_1\times n_2}$, $\boldsymbol{A}_{21} \in X^{m_2\times n_1}$, $\boldsymbol{A}_{22} \in X^{m_2\times n_2}$ možno vytvoriť blokovú maticu

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$$

typu $(m_1 + m_2) \times (n_1 + n_2)$.

Túto konštrukciu možno zrejmým spôsobom zovšeobecniť i na väčšie systémy matíc. Voľne povedané, blokové matice sú vlastne matice, ktorých prvkami sú opäť matice, pričom všetky matice v tom istom riadku blokovej matice majú rovnaký počet riadkov a všetky matice v tom istom stĺpci blokovej matice majú rovnaký počet stĺpcov. Takto chápanú blokovú maticu možno zapísať v tvare

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{ij})_{k\times l} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \dots & \boldsymbol{A}_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{k1} & \dots & \boldsymbol{A}_{kl} \end{pmatrix},$$

pričom jednotlivé bloky $\boldsymbol{A}_{ij}$ sú matice nad X rozmerov $m_i \times n_j$, kde $(m_1, \dots, m_k)$, $(n_1, \dots, n_l)$ sú nejaké konečné postupnosti prirodzených čísel. Maticu nad množinou X z tejto „matice matíc“ dostaneme tak, že si v $\boldsymbol{A}$ odmyslíme vnútorné zátvorky oddeľujúce jej jednotlivé bloky $\boldsymbol{A}_{ij}$.

2.2. Matice nad daným poľom

Na množine X, nad ktorou sme vytvárali príslušné matice, sme zatiaľ nepredpokladali nijakú ďalšiu štruktúru. Jednako na množinách matíc $X^{m\times n}$ sa nám pomerne bohatá štruktúra prirodzene vynorila. Všetky doposiaľ zavedené maticové operácie a vlastnosti však mali výlučne *pozičný charakter* – zakladali sa na reprezentácii každej matice ako príslušnej obdĺžnikovej tabuľky. Ďalšie maticové operácie a vlastnosti, ktoré hodláme zaviesť a neskôr využívať, už budú podmienené prítomnosťou istej štruktúry na množine X.

Najdôležitejší a, až na pár výnimiek, vlastne jediný druh matíc, ktorými sa budeme v tomto kurze zaoberať, tvoria matice nad nejakým poľom. Teda v celom paragrafe K označuje pevne zvolené, inak však ľubovoľné pole. V súlade s predošlým paragrafom $K^{m\times n}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$, označuje množinu všetkých matíc typu $m \times n$ nad poľom K.

2.2.1. Vektorový priestor matíc. Pre pevné $m, n \in K$ budeme na množine matíc $K^{m\times n}$ definovať po zložkách operácie súčtu a skalárneho násobku. Teda pre matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$ nad K a $c \in K$ položíme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} &= (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n},\\ c\boldsymbol{A} &= (ca_{ij})_{m\times n}.\end{aligned}$$

Podotýkame, že súčet matíc $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ je definovaný len pre matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ rovnakého typu a samotná matica $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ je toho istého typu ako $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$. Neutrálnym prvkom operácie sčítania na $K^{m\times n}$ je matica typu $m \times n$, ktorej všetky prvky sú nulové; nazývame ju *nulová matica* typu $m \times n$ a označujeme ju $\mathbf{0}_{m,n}$, prípadne len $\mathbf{0}$, keď jej rozmer je jasný z kontextu alebo na ňom nezáleží. Opačným prvkom k matici $A = (a_{ij})_{m\times n}$ je zrejme matica $-\boldsymbol{A} = (-a_{ij})_{m\times n}$.

Čitateľ si iste sám ľahko overí, že matice ľubovoľného pevného typu $m \times n$ nad poľom K s takto definovanými operáciami súčtu a skalárneho násobku tvoria *vektorový priestor* nad poľom K. Odteraz teda $K^{m\times n}$ už označuje nielen množinu takýchto matíc, ale príslušný vektorový priestor. Nám už známe vektorové priestory $K^{1\times n}$ a $K^{m\times 1}$ riadkových resp. stĺpcových vektorov sú zrejme špeciálnymi prípadmi vektorových priestorov matíc.

2.2.2. Násobenie matíc. Okrem štruktúry vektorového priestoru na množine matíc pevného typu $m\times n$ budeme definovať aj operáciu násobenia matíc, ktorá spája matice rôznych, „vhodne do seba zapadajúcich“ rozmerov.

Pod vplyvom doterajšieho výkladu čitateľ po takomto nadpise asi očakáva, že i súčin matíc budeme definovať na množine $K^{m\times n}$ po zložkách. Hoci by to, samozrejme, bolo možné a na prvý pohľad sa to zdá prirodzené, násobenie matíc budeme definovať diametrálne odlišným spôsobom, ktorý sa nám zatiaľ môže zdať čudný a neprirodzený. Dôvody pre takúto definíciu budú postupne vychádzať najavo a jej prednosti budeme mať mnohokrát možnosť oceniť.

Najprv sa naučíme násobiť niektoré dvojice vektorov. Pod *súčinom* $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ *riadkového vektora* $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^{1\times n}$ *a stĺpcového vektora* $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)^T \in K^{n\times 1}$ rozumieme skalár

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = (x_1, \dots, x_n)\cdot\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i\,.$$

Teda, až na „nepochopiteľné“ miešanie riadkových a stĺpcových vektorov, ide o bežný „skalárny súčin“ vektorov $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K^n$.

Pre takto definovaný súčin vektorov sú tiež splnené dobre známe vlastnosti „skalárneho súčinu“. Ľahko možno nahliadnuť, prípadne priamym výpočtom overiť, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $c \in K$ a $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in K^{1\times n}$, $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' \in K^{n\times 1}$ platí

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}') &= \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}',\\ (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{y},\\ \boldsymbol{x}\cdot c\boldsymbol{y} &= c(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) = c\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y},\\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{y}^T\cdot\boldsymbol{x}^T.\end{aligned}$$

Hovoríme, že násobenie riadkových a stĺpcových vektorov je *distributívne* (z oboch strán) vzhľadom na sčítanie a *komutuje*, t. j. je zameniteľné s operáciou skalárneho násobku. Poslednú rovnosť možno chápať ako svojho druhu *„komutatívnosť"* tohto súčinu; vďačíme za ňu komutatívnosti násobenia v poli K.

Nech $m, n, p \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{jk})_{n\times p}$. Pod *súčinom matíc* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ rozumieme maticu

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{s}_k(\boldsymbol{B}))_{m\times p}.$$

Všimnime si, že súčin matíc $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ je definovaný, len ak sa počet stĺpcov matice $\boldsymbol{A}$ rovná počtu riadkov matice $\boldsymbol{B}$, t. j. práve vtedy, keď riadky matice $\boldsymbol{A}$ a stĺpce matice $\boldsymbol{B}$ majú rovnaký rozmer. Ďalej, súčin matíc typov $m\times n$ a $n\times p$ je matica typu $m\times p$, čo si možno ľahko zapamätať v symbolickom tvare

$$[m\times n]\cdot[n\times p] = [m\times p],$$

pripomínajúcom rozmerové vzťahy vo fyzike. Špeciálne, súčin dvoch štvorcových matíc typu $n\times n$ je opäť matica typu $n\times n$. Konečne, prvok na mieste (i,k) matice $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ dostaneme ako súčin i-teho riadku matice $\boldsymbol{A}$ a k-teho stĺpca matice $\boldsymbol{B}$, teda ako výraz

$$\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{s}_k(\boldsymbol{B}) = (a_{i1},\dots,a_{in})\cdot\begin{pmatrix} b_{1k}\\ \vdots\\ b_{nk}\end{pmatrix} = a_{i1}b_{1k}+\dots+a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\,.$$

Na základe toho možno ľahko nahliadnuť (prípadne priamym výpočtom overiť) nasledujúce rovnosti

$$\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{s}_k(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{s}_k(\boldsymbol{B}).$$

Násobenie matíc je (z oboch strán) *distributívne* vzhľadom na sčítanie. To znamená že pre ľubovoľné $m, n \in \mathbb{N}$ a matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}' \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}' \in K^{n\times p}$ platí

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}') &= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}',\\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}')\cdot\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

Vďaka distributívnosti súčinu vektorov voči ich súčtu je totiž jasné, že (i,k)-ty prvok matice $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}')$ je

$$\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{s}_k(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}') = \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{s}_k(\boldsymbol{B})+\boldsymbol{s}_k(\boldsymbol{B}')) = \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{s}_k(\boldsymbol{B})+\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{s}_k(\boldsymbol{B}'),$$

teda sa rovná (i,k)-temu prvku matice $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}'$. Rovnako pre druhú rovnosť.

Podobne, s využitím zameniteľnosti súčinu vektorov a skalárneho násobku možno dokázať, že pre ľubovoľný skalár $c\in K$ a všetky matice $\boldsymbol{A}\in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}\in K^{n\times p}$ platí

$$\boldsymbol{A}\cdot c\boldsymbol{B} = c(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = c\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}.$$

Hovoríme, že násobenie matíc *komutuje*, t. j. je zameniteľné s operáciou skalárneho násobku.

Násobenie matíc je tiež *asociatívne* v nasledujúcom zmysle: súčin matíc $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$ je definovaný práve vtedy, keď je definovaný súčin $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$, a v takom prípade sa obe matice rovnajú. Teda podrobnejšie, pre $m,n,p,q\in\mathbb{N}$ a $\boldsymbol{A}\in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}\in K^{n\times p}$, $\boldsymbol{C}\in K^{p\times q}$ platí

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}.$$

Na dôkaz toho si stačí uvedomiť, že pre ľubovoľné vektory $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)\in K^{1\times n}$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_p)^T\in K^{p\times 1}$ platí

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{y})&=(x_1,\dots,x_n)\cdot\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^p b_{1k}y_k\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^p b_{nk}y_k\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^n x_j\Big(\sum_{k=1}^p b_{jk}y_k\Big)\\ &=\sum_{k=1}^p\Big(\sum_{j=1}^n x_jb_{jk}\Big)y_k=\Big(\sum_{j=1}^n x_jb_{j1},\dots,\sum_{j=1}^n x_jb_{jp}\Big)\cdot\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_p\end{pmatrix}=(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{y}.\end{aligned}$$

Potom pre $1\le i\le m$, $1\le l\le q$, prvok na mieste (i,l) matice $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$ je

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{s}_l(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})&=\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{s}_l(\boldsymbol{C}))\\ &=(\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{s}_l(\boldsymbol{C})=\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{s}_l(\boldsymbol{C}),\end{aligned}$$

teda sa rovná (i,l)-tému prvku matice $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$.

Štvorcovú maticu rádu n, ktorá má všetky prvky na diagonále rovné 1 a mimo diagonály 0, označujeme $\boldsymbol{I}_n$ a nazývame *jednotkovou maticou* rádu n. S použitím tzv. *Kroneckerovho symbolu*

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{ak } i=j,\\ 0, & \text{ak } i\neq j,\end{cases}$$

môžeme písať

$$\boldsymbol{I}_n=(\delta_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0&0\\ 0&1&\dots&0&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&\dots&1&0\\ 0&0&\dots&0&1\end{pmatrix}.$$

Jednotkové matice hrajú úlohu neutrálnych prvkov pre násobenie matíc. Presnejšie, pre ľubovoľnú maticu $\boldsymbol{A}\in K^{m\times n}$ platí

$$\boldsymbol{I}_m\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{I}_n.$$

Rozmyslite si prečo.

Špeciálne, množina $K^{n\times n}$ všetkých štvorcových matíc rádu n je tak popri štruktúre vektorového priestoru navyše vybavená asociatívnou operáciou násobenia, ktorá je (z oboch strán) distributívna vzhľadom na sčítanie matíc, komutuje s operáciou skalárneho násobku a jednotková matica $\boldsymbol{I}_n$ je jej neutrálny prvok. To nám, podobne ako pre prvky poľa K, umožňuje zaviesť i *mocniny štvorcových matíc*. Pre $\boldsymbol{A}\in K^{n\times n}$, kladieme

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}_n \quad \text{a} \quad \boldsymbol{A}^k = \underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{A}}_{k\text{-krát}},$$

ak $0 < k \in \mathbb{N}$; teda $\boldsymbol{A}^1 = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}$, atď.

Na druhej strane si treba uvedomiť, že pre $n > 1$ – napriek komutatívnosti násobenia v poli K – násobenie matíc z pozičných dôvodov *nie je komutatívne* na $K^{n\times n}$. Napríklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1+1 \end{pmatrix}.$$

(Uvedomte si, že na to, aby oba súčiny $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ boli definované a mali rovnaké rozmery, teda, aby vôbec malo zmysel uvažovať o komutatívnosti súčinu, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ musia byť štvorcové matice rovnakého typu.)

Napriek tomu komutatívnosť násobenia v poli K má za dôsledok, že pre všetky m, n, p a matice $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in K^{n\times p}$ platí rovnosť

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}^T.$$

Naozaj, $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^T$ aj $\boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}^T$ sú matice typu $p \times m$ a pre $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq p$, (k,i)-ty prvok matice $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^T$ je (i,k)-ty prvok matice $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, t. j.

$$\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{s}_k(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{s}_k(\boldsymbol{B})^T \cdot \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A})^T = \boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{B}^T) \cdot \boldsymbol{s}_i(\boldsymbol{A}^T),$$

čo je (k,i)-ty prvok matice $\boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}^T$. Pritom sme využili už spomínanú „komutatívnosť“ $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T \cdot \boldsymbol{x}^T$ súčinu vektorov.

Na margo poslednej rovnosti ešte podotknime, že pre $\boldsymbol{x} \in K^{1\times n}$, $\boldsymbol{y} \in K^{m\times 1}$ je taktiež definovaný súčin $\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$. Nie je to však skalár, ale matica typu $m \times n$:

$$\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} = (y_i x_j)_{m\times n} = \begin{pmatrix} y_1x_1 & \ldots & y_1x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_mx_1 & \ldots & y_mx_n \end{pmatrix}.$$

Teda, okrem prípadu $m = n = 1$, rovnosť $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$ nemôže nastať už z rozmerových dôvodov.

2.2.3. Operácie s blokovými maticami. Operácie maticového súčtu a skalárneho násobku, vďaka tomu, že boli definované po zložkách, možno na blokových maticiach rozložiť na jednotlivé bloky. Ak $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{ij})_{k\times l}$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}_{ij})_{k\times l}$ sú blokové matice nad poľom K, pričom zodpovedajúce si bloky $\boldsymbol{A}_{ij}$, $\boldsymbol{B}_{ij}$ majú rovnaký typ $m_i \times n_j$, tak ich súčet je opäť bloková matica

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}_{ij} + \boldsymbol{B}_{ij})_{k\times l}$$

s blokmi rovnakých typov. S operáciou skalárneho násobku je to ešte jednoduchšie, lebo sa nemusíme starať o zhodnosť rozmerov jednotlivých blokov. Pre $c \in K$ jednoducho dostávame

$$c\boldsymbol{A} = (c\boldsymbol{A}_{ij})_{k\times l}.$$

Bloková štruktúra sa prenáša aj na súčin matíc za podmienky, že stĺpce prvej matice sú v rovnakom poradí rozdelené na rovnaký počet rovnako veľkých skupín, povedzme $n_1 + n_2 + \ldots + n_\nu$, ako riadky druhej matice. Teda ak $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{ij})_{\mu\times\nu}$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}_{jk})_{\nu\times\vartheta}$ sú blokové matice nad K, pričom blok $\boldsymbol{A}_{ij}$ je typu $m_i \times n_j$ a blok $\boldsymbol{B}_{jk}$ typu $n_j \times p_k$, tak aj ich súčin je bloková matica tvaru $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{C}_{ik})_{\mu\times\vartheta}$, kde blok

$$\boldsymbol{C}_{ik} = \boldsymbol{A}_{i1}\cdot\boldsymbol{B}_{1k} + \boldsymbol{A}_{i2}\cdot\boldsymbol{B}_{2k} + \ldots + \boldsymbol{A}_{i\nu}\cdot\boldsymbol{B}_{\nu k}$$

je typu $m_i \times p_k$. Inak povedané, blokové matice násobíme tak ako „obyčajné“ matice, len s tým rozdielom, že súčet resp. súčin v poli K nahradíme súčtom resp. súčinom matíc. Vo výsledku, ak chceme, si nakoniec môžeme odmysliet' zátvorky oddeľujúce jednotlivé bloky a matica, ktorú takto dostaneme, sa rovná matici, ktorú by sme dostali, keby sme „normálne“ vynásobili „odblokované“ matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$.

Jednotkové matice $\boldsymbol{I}_n$ sú príkladom tzv. diagonálnych matíc. Štvorcovú maticu $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ nazývame *diagonálnou*, ak $a_{ij} = 0$ pre všetky $i \neq j$, t. j. ak všetky jej prvky mimo diagonály sú nuly.

Diagonálnu maticu, ktorá má na diagonále postupne prvky $d_1, d_2, \ldots, d_n \in K$ značíme $\operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Teda napr.

$$\boldsymbol{I}_n = \operatorname{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{n\text{-krát}}).$$

Podobne možno definovať aj tzv. blokovo diagonálne matice. Ak $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_k$ sú štvorcové matice rádov $n_1, n_2, \ldots, n_k$, tak *blokovo diagonálnou maticou* s blokmi $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_k$ nazývame štvorcovú blokovú maticu

$$\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_k) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_2 & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \boldsymbol{A}_k \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{0}$ nachádzajúca sa na mieste (i,j) označuje nulovú maticu $\mathbf{0}_{n_i n_j}$.

Pred chvíľou uvedené pravidlo o súčine blokových matíc sa redukuje na obzvlášť jednoduchý tvar pre blokovo diagonálne matíce – ich násobenie totiž funguje *diagonálne po zložkách*. Ak $\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_k)$, $\boldsymbol{B} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_k)$ sú blokovo diagonálne matice, pričom zodpovedajúce si bloky $\boldsymbol{A}_i$, $\boldsymbol{B}_i$ sú štvorcové matice rovnakého rádu n_i, tak aj ich súčin je blokovo diagonálna matica tvaru

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_k\cdot\boldsymbol{B}_k)$$

so štvorcovými blokmi rádov $n_1, \ldots, n_k$. Špeciálne, pre „obyčajné“ diagonálne matice platí

$$\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)\cdot\operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n) = \operatorname{diag}(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n).$$

Formuláciu analogických pravidiel pre súčet a skalárny násobok (blokovo) diagonálnych matíc prenechávame čitateľovi.

2.3. Matice nad vektorovým priestorom

Matice nad typu $m \times n$ nad poľom K sú špeciálnym druhom blokových matíc. Maticu $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ môžeme považovať jednak za blokovú maticu s blokmi a_{ij} typu 1×1, jednak, ako sme už neraz naznačili, môžeme sa na ňu dívať ako na riadok jej stĺpcov resp. ako na stĺpec jej riadkov. V takom prípade $\boldsymbol{A}$ chápeme ako maticu typu $m \times 1$ nad vektorovým priestorom $K^{1\times n}$, resp. ako maticu typu $1 \times n$ nad vektorovým priestorom $K^{m\times 1}$. Konkrétna podoba týchto vektorových priestorov je však teraz pre nás nepodstatná – pre ľubovoľné $m, n \in \mathbb{N}$ a ľubovoľný (abstraktný) vektorový priestor V máme totiž definovanú množinu $V^{m\times n}$ všetkých matíc nad množinou V.

Na množine $V^{m\times n}$ možno zaviesť operácie súčtu a skalárneho násobku po zložkách. $V^{m\times n}$ s týmito operáciami opäť tvorí vektorový priestor nad poľom K. Čitateľovi prenechávame, aby si sám doplnil a premyslel potrebné detaily.

My sa teraz sústredíme na zovšeobecnenie operácie skalárneho násobku $K \times V \to V$ na operácie súčinu medzi maticami vhodných typov nad K a nad V. Pre matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_{jk}) \in V^{n\times p}$ kladieme $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{v}_{ik}) \in V^{m\times p}$, kde

$$\boldsymbol{v}_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{u}_{jk}\,.$$

Teda súčin $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\alpha}$ definujeme z formálneho hľadiska rovnako ako súčin matíc nad poľom K, len s tým rozdielom že operácia súčtu v K je nahradená operáciou súčtu vo V a operácia súčinu v K operáciou skalárneho násobku $K \times V \to V$.

Celkom obdobne ako v odstavci 2.2.2 aj pre násobenie matíc nad V maticami nad K možno overiť distributívnosť (z oboch strán) vzhľadom na sčítanie, zameniteľnosť s operáciou skalárneho násobku, asociatívnosť a postavenie jednotkových matíc ako neutrálnych prvkov. To znamená, že pre všetky $l, m, n, p \in \mathbb{N}$, $c \in K$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{C} \in K^{l\times m}$ $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \in V^{n\times p}$ platí:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\beta},\\
(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\alpha},\\
\boldsymbol{A}\cdot(c\boldsymbol{\alpha}) = c(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\alpha}) = (c\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{\alpha},\\
\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{\alpha},\\
\boldsymbol{I}_n\cdot\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}.
\end{gathered}$$

Vzhľadom na našu dohodu, podľa ktorej $\boldsymbol{x}c = c\boldsymbol{x}$ pre $c \in K$, $\boldsymbol{x} \in V$, môžeme definovať aj súčin matíc $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{v}_{ij}) \in V^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_{jk}) \in K^{n\times p}$ v obrátenom poradí ako maticu $\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{w}_{ik}) \in V^{m\times p}$ takú, že

$$\boldsymbol{w}_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{v}_{ij}b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\boldsymbol{v}_{ij}\,.$$

S využitím poslednej definície možno pre $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{\alpha} \in V^{n\times p}$, $\boldsymbol{\beta} \in V^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in K^{n\times p}$ dokázať tiež rovnosti

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\alpha})^T = \boldsymbol{\alpha}^T\cdot\boldsymbol{A}^T, \qquad (\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T\cdot\boldsymbol{\beta}^T.$$

Aplikáciou týchto vzťahov na predchádzjúci zoznam rovností (no taktiež priamo) možno aj pre súčin matíc tvaru $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{B}$, kde $\boldsymbol{\beta} \in V^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in K^{n\times p}$, overiť jeho distributívnosť (z oboch strán) vzhľadom na sčítanie, zameniteľnosť s operáciou skalárneho násobku, asociatívnosť a postavenie jednotkových matíc ako neutrálnych prvkov. To znamená, že pre všetky $m, n, p, q \in \mathbb{N}$, $c \in K$, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in V^{n\times p}$, $\boldsymbol{C} \in K^{p\times q}$ platí:

$$
\begin{gathered}
(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{A},\\
\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{B},\\
\boldsymbol{\alpha} \cdot (c\boldsymbol{A}) = c(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{A}) = (c\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{A},\\
\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{\alpha} \cdot A) \cdot \boldsymbol{C},\\
\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{\alpha}.
\end{gathered}
$$

Taktiež vzťahy pre riadky a stĺpce súčinu z odseku 2.2.2 zostávajú zachované pre oba typu súčinov matíc nad K a V, t. j.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\alpha}) &= \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{\alpha}, & \boldsymbol{s}_k(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\alpha}) &= \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{s}_k(\boldsymbol{\alpha})\\
\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{B}, & \boldsymbol{s}_k(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{s}_k(\boldsymbol{B})
\end{aligned}
$$

pre všetky $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{\alpha} \in V^{n\times p}$ $\boldsymbol{\beta} \in V^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in K^{n\times p}$.

Napokon si ešte uvedomme, že definície súčinov $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{B}$ sú v zhode s pôvodným násobením matíc. Ak totiž maticu $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$ chápame ako riadok, t. j. ako maticu typu $1 \times n$ nad priestorom stĺpcových vektorov K^m, tak pre $\boldsymbol{B} \in K^{n\times p}$ splýva matica $(\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{A}), \dots, \boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{A})) \cdot \boldsymbol{B}$ vypočítaná podľa „novej“ definície s blokovým tvarom $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{B}), \dots, \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{s}_p(\boldsymbol{B}))$ matice $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$. Podobne, ak $\boldsymbol{B}$ chápeme ako stĺpec, t. j. ako maticu typu $n \times 1$ nad priestorom riadkových vektorov K^p, tak

$$
\boldsymbol{A} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{B}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_n(\boldsymbol{B}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}.
$$

(Doplňte si vynechané podrobnosti – pozri cvičenie 6.)

Špeciálne, lineárnu kombináciu $a_1\boldsymbol{x}_1 + \dots a_n\boldsymbol{x}_n$ vektorov $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n \in V$ s koeficientmi $a_1, \dots, a_n \in K$ môžeme s využitím vektorových matíc zapísať v tvare súčinov

$$
a_1\boldsymbol{x}_1 + \dots + a_n\boldsymbol{x}_n = (a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.
$$

Cvičenia

1. Nech $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 9 & 3 \\ 10 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ sú matice nad $\mathbb{R}$. Vypočítatjte matice $\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^T - 3\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$, $(3\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}^2$, $\boldsymbol{C}^2 \cdot \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} - \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$ a $\boldsymbol{C}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}$.

2. Vypočítajte súčin $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ komplexných matíc $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+\mathrm{i} & -2 & -\mathrm{i}\\ 1-\mathrm{i} & \mathrm{i} & 2+3\mathrm{i}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3\mathrm{i} & 2+\mathrm{i}\\ -4 & 1-2\mathrm{i}\\ 0 & 4\mathrm{i}\end{pmatrix}$.

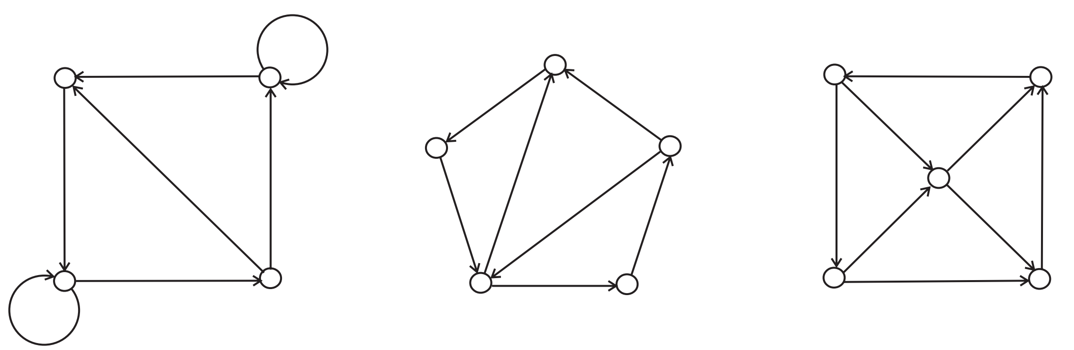
3. Nájdite matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{Q}^{2\times 2}$ také, že $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$.

4. Uvažujte matice $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3\\3&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\4&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}4&3\\4&0\end{pmatrix}$ nad poľom (a) $\mathbb{Z}_5$, (b) $\mathbb{Z}_7$, (c) $\mathbb{Z}_{11}$, (d) $\mathbb{Q}$. V každom z uvedených prípadov vypočítajte maticu $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$. Skúste riešiť úlohy (a)–(d) v optimálnom poradí.

5. Sú dané reálne blokové matice $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}&\boldsymbol{B}_{13}\\\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{B}_{22}&\boldsymbol{B}_{23}\end{pmatrix}$, kde $\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_{21}=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_{22}=\begin{pmatrix}2&2\\0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}_{11}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}_{12}=\boldsymbol{B}_{13}=\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}_{21}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}_{22}=\boldsymbol{B}_{23}=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$. Vynásobte $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ ako blokové matice aj ako matice, v ktorých ste zabudli na rozdelenie do blokov, a oba výsledky porovnajte.

6. Maticu $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ nad ľubovoľným poľom K uvažujte ako riadok jej stĺpcov, t. j. ako blokovú maticu $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_n)$, kde $\boldsymbol{u}_j=\boldsymbol{s}_j(\boldsymbol{A})$ pre $j\leq n$. Nech $\boldsymbol{c}=(c_1,\dots,c_n)^T\in K^n$ je stĺpcový vektor. Ukážte, že lineárna kombinácia $c_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+c_n\boldsymbol{u}_n$ splýva s „obyčajným“ maticovým súčinom $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{c}$. Vysvetlite tento fakt pomocou násobenia blokových matíc.

7. Nech X je konečná množina. Ľubovoľná množina $H\subseteq X^2$ určuje *orientovaný graf* (X,H) s množinou *vrcholov* X a s množinou *orientovaných hrán* H: vrcholy (t. j. prvky množiny X) si znázorníme krúžkami v rovine a z vrcholu x vedieme orientovanú hranu (t. j. šípku) do vrcholu y práve vtedy, keď $(x,y)\in H$ (pozri obr. 2.1). Konečnú postupnosť $(z_0,z_1,\dots,z_k)$ prvkov množiny X takú, že pre každé $1\leq i\leq k$ platí $(z_{i-1},z_i)\in H$, nazývame *cestou* dĺžky *k v orientovanom grafe* (X,H). Predpokladajme, že $X=\{x_1,\dots,x_n\}$ má práve n prvkov. Maticu $\boldsymbol{H}=(h_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ takú, že $h_{ij}=1$, ak $(x_i,x_j)\in H$, a $h_{ij}=0$, ak $(x_i,x_j)\notin H$, nazývame *incidenčnou maticou orientovaného grafu* (X,H). Prvky k-tej mocniny incidenčnej matice $\boldsymbol{H}$ označme $h_{ij}^{(k)}$, t. j. $\boldsymbol{H}^k=\big(h_{ij}^{(k)}\big)$. Potom číslo $h_{ij}^{(k)}$ udáva počet ciest dĺžky k z vrcholu x_i do vrcholu x_j v orientovanom grafe (X,H). Dokážte (napr. matematickou indukciou).



Obr. 2.1. Príklady orientovaných grafov

8. Očíslujte vrcholy orientovaných grafov z obrázku 2.1. Pre každý graf napíšte jeho incidenčnú maticu a pre každú dvojicu (x_i,x_j) jeho vrcholov určte počet ciest dĺžky 2, 3, 4 a 5 z x_i do x_j.

9. Nech K je komutatívny okruh s jednotkou (pozri cvičenie 1.7). Presvedčte sa, že pre ľubovoľné $m,n\in\mathbb{N}$ možno na množine matíc $K^{m\times n}$ definovať operácie súčtu $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ a skalárneho násobku $c\boldsymbol{A}$ rovnako ako v odstavci 2.2.1. Taktiež možno pre $\boldsymbol{A}\in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}\in K^{n\times p}$ definovať súčin $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\in K^{m\times p}$ rovnako ako v odstavci 2.2.2. Ukážte, že všetky vlastnosti maticových operácií uvedené v kapitole 2 zostávajú v platnosti aj v tomto všeobecnejšom prípade.

10. Vynechajme z definície poľa, popri nerovnosti $0\neq 1$ a požiadavke existencie inverzného prvku ku každému nenulovému $a\in K$, aj podmienku komutatívnosti násobenia, namiesto ktorej pridajme ešte jeden distributívny zákon $(\forall\, a,b,c\in K)((a+b)c=ac+bc)$. Množina K s význačnými prvkami 0 a 1, vybavená operáciami sčítania a násobenia, ktoré vyhovujú uvedeným podmienkam, sa nazýva *okruh s jednotkou*.[1]

[1] Občas sa v literatúre takáto štruktúra nazýva len okruh.

(a) Okruh s jednotkou K sa nazýva *netriviálny*, ak v ňom platí $0 \neq 1$. Dokážte, že okruh s jednotkou K je netriviálny práve vtedy, keď obsahuje aspoň dva rôzne prvky.
(b) Nech K je okruh s jednotkou. Presvedčte sa, že pre matice nad K možno zaviesť operácie súčtu, skalárneho násobku a súčinu rovnako ako pre matice nad poľom. Ukážte, že všetky vlastnosti týchto operácií uvedené v kapitole 2, s výnimkou rovností $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^T = \boldsymbol{y}^T \cdot \boldsymbol{x}^T$, $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}^T$ a možnosti zapisovať „lineárne kombinácie" v tvare $c_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots c_n\boldsymbol{u}_n = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n) \cdot (c_1, \ldots, c_n)^T$, zostávajú v platnosti.

11. Nech K je okruh s jednotkou a $n \in \mathbb{N}$. Dokážte postupne nasledujúce tvrdenia:
(a) Množina $K^{n\times n}$ so sčítaním a násobením matíc tvorí okruh s jednotkou.
(b) Okruh s jednotkou $K^{n\times n}$ je triviálny práve vtedy, keď K je triviálny alebo $n = 0$.
(c) Okruh s jednotkou $K^{n\times n}$ je komutatívny práve vtedy, keď $n = 0$, alebo $n = 1$ a K je komutatívny.

12. (a) Rovnako ako v prípade poľa zadefinujte *charakteristiku* ľubovoľného *okruhu s jednotkou.*
(b) Dokážte, že okruh s jednotkou K je triviálny práve vtedy, keď $\operatorname{char} K = 1$.
(c) Nech K je ľubovoľný okruh a $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Potom $\operatorname{char} K^{n\times n} = \operatorname{char} K$. Dokážte.
(d) Pre každé $2 \leq m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ uveďte príklad *nekomutatívneho* okruhu s jednotkou charakteristiky m.

13. Nech K je okruh s jednotkou.
(a) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ zadefinujte mocniny a^n prvku $a \in K$ rovnako ako v poli a dokážte, že pre $m, n \in \mathbb{N}$ platí $a^m a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$. Čo bráni definícii mocnín a^n pre záporné exponenty $n \in \mathbb{Z}$?
(b) Prvok $a \in K$ sa nazýva *invertovateľný*, ak k nemu existuje (obostranný, teda nutne jediný) inverzný prvok a^{-1} vzhľadom na násobenie. Pre invertovateľné prvky $a \in K$ rozšírte definíciu mocnín a^n na všetky $n \in \mathbb{Z}$ a dokážte rovnosti z (a) pre ľubovoľné $m, n \in \mathbb{Z}$.
(c) Nech $a, b \in K$. Čo je prekážkou všeobecnej platnosti rovnosti $(ab)^n = a^n b^n$ pre $n \geq 2$? Dokážte, že ak a, b *komutujú*, t. j. $ab = ba$, tak uvedená rovnosť platí pre všetky $n \in \mathbb{N}$.
(d) Pre $K = \mathbb{R}^{2\times 2}$ nájdite príklad matíc $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in K$ takých, že $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^2 \neq \boldsymbol{A}^2 \cdot \boldsymbol{B}^2$.
(e) Nech $a, b \in K$ sú invertovateľné. Dokážte, že potom aj prvok ab je invertovateľný a platí $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. Čo je prekážkou všeobecnej platnosti rovnosti $(ab)^{-n} = b^{-n}a^{-n}$ pre $n \geq 2$?

14. (a) Rovnako ako v príklade 1.6.3 a v cvičení 1.12 zadefinujte množinu $K[x]$ všetkých polynómov v premennej x nad ľubovoľným okruhom s jednotkou K a na nej operácie súčtu a súčinu. Dokážte, že $K[x]$ s takto definovanými operáciami je opäť okruh s jednotkou a platí $\operatorname{char} K[x] = \operatorname{char} K$.
(b) Dokážte, že $K[x]$ je komutatívny práve vtedy, keď K je komutatívny.
(c) Dokážte, že polynóm $f(x)$ je invertovateľný prvok okruhu $K[x]$ práve vtedy, keď $f(x) = a$ je konštantný polynóm, pričom a je invertovateľný prvok okruhu K.