Test z lineární algebry I, listopad 2001

Část početní

1. Ve vektorovém prostoru $R_2[x]$ polynomů stupně maximálně 2 najděte souřadnice vektoru $x^2 - 3x$ v bázi $\alpha = (1, x+1, (x-2)^2)$. Jaké kořeny má polynom, který má v této bázi souřadnice $(3995, -1998, 1)$?

(2 body)

2. V R^4 najděte bázi průniku a dimenzi součtu podprostorů S a T, kde $S = [(2,1,0,1)^T, (1,-1,0,0)^T]$ a $T = [(1,3,1,1)^T, (0,1,1,0)^T]$.

(2 body)

3. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů a a b nemá soustava v $\mathbb{R}$ žádné řešení

$$\begin{aligned} ax + 3y + z &= 1 \\ x + 3ay + z &= 3 \\ x + 3y + az &= 1. \end{aligned}$$

(2 body)

Teoretická část

1. Nechť jsou vektory u_1, u_2, u_3, u_4 lineárně nezávislé ve vektorovém prostoru V a $\varphi : U \to V$ je lineární zobrazení. Napište, zda jsou následující výroky pravdivé nebo nepravdivé. Za dobrou odpověď je $+0,5$ bodu, za špatnou $-0,5$ bodu:
(a) Vektor $3u_1 + 2u_3 + u_4$ může být někdy roven 0.
(b) $u_1, u_2, u_3 + u_4$ jsou vždy lineárně nezávislé.
(c) Vektor $3\varphi(u_1) + 2\varphi(u_3) + \varphi(u_4)$ může být někdy roven 0.
(d) $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \varphi(u_3 + u_4)$ jsou vždy lineárně nezávislé.

($\pm$2 body)

2. Napište všechny axiomy reálného vektorového prostoru, které nejsou splněny v následujících případech množiny V s operacemi sčítání a násobení:
(a) $V = \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, $a(x_1, x_2) = (ax_1, x_2)$.
(b) $V = \mathbb{R}$, $x \oplus y = x + y + 1$, násobení standardní.

(2 body)

3. Pomocí parametrů napište předpis pro všechna lineární zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^2$.

(1 bod)

4. Přímo z definice najděte matici zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definovaného předpisem $\varphi(x) = Ax$, kde A je matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

v bázích $\alpha = ((1,2)^T, (1,1)^T)$ a $\beta = ((0,1,0)^T, (1,0,0)^T, (0,0,1)^T)$.

(1 bod)