4. LINEÁRNÍ PODPROSTORY a LINEÁRNÍ NEZÁVISLOST

4.1. Lineární podprostory vektorového prostoru

Množina $S \subseteq V$ se nazýva *lineární podprostor* vektorového prostoru V, pokud $S \neq \emptyset$ a pro všechny skaláry $a \in K$ a vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ platí $a\mathbf{x} \in S$ a $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$.

Jinak řečeno, neprázdná podmnožina $S \subseteq V$ je lineární podprostor právě tehdy, když je uzavřená na operace skalárního násobku a součtu vektorů.

Tvrzení 1. Nechť S je lineární podprostor vektorového prostoru V. Pak $\mathbf{0} \in S$ a S s operacemi součtu vektorů a skalárního násobku zúženými z V na S tvoří vektorový prostor nad číselným tělesem K.

V každém vektorovém prostoru V jsou $\{\mathbf{0}\}$ a V lineární podprostory (v případě, když $V = \{\mathbf{0}\}$, dokonce splývají, v opačném případě jde o dva různé podprostory) – $\{\mathbf{0}\}$ nazývame *triviální* nebo též *nulový* a V *nevlastní* alebo též *plný* lineární podprostor.

Tedy pro *vlastní netriviální* lineární podprostor $S \subseteq V$ platí $\{\mathbf{0}\} \neq S \neq V$.

Např. ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ netriviální vlastní podprostory jsou právě všechny přímky a roviny procházející počátkem $\mathbf{0}$.

Následující tvrzení charakterizuje lineární podprostory jako množiny uzavřené na lineární kombinace.

Tvrzení 2. Pro libovolnou podmnožinu S vektorového prostoru V jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) S je lineární podprostor ve V;

(ii) $S \neq \emptyset$ a pro všechny skaláry $a, b \in K$ a vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ platí $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \in S$;

(iii) pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro všechny skaláry $a_1, \ldots,$ $a_n \in K$ a vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in S$ platí

$$a_1\mathbf{x}_1 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n \in S.$$

(a) Označme $K^{(X)}$ množinu všech funkí $f\,X \to K$ takových, že množina $\{x \in X;\, f(x) \neq 0\}$ je konečná. Pro libovolnou lineární kombinaci funkcí $f, g \in K^{(X)}$ platí

$$\begin{aligned}&\{x \in X;\, af(x) + bg(x) \neq 0\} \subseteq \\ &\{x \in X;\, f(x) \neq 0\} \cup \{x \in X;\, g(x) \neq 0\}.\end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že $K^{(X)}$ je lineární podprostor vektorového prostoru K^X. Je-li X je konečná, tak $K^{(X)} = K^X$, je-li X je nekonečná, tak $K^{(X)}$ je netriválni vlastní podprostor v K^X.

(b) Nechť $X \subseteq \mathbb{R}$ je libovolná množina reálných čísel. Potom $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, nebo jen stručně $\mathcal{C}(X)$ označuje množinu všech spojitých funkcí $f\,X \to \mathbb{R}$. Protože lineární kombinace spojitých funkcií je zřejmě opět spojitá funkce, $\mathcal{C}(X)$ je lineární podprostor v $\mathbb{R}^X$.

4.2. Lineární obal množiny vektorů

Množinu všech lineárních kombinací vektorů z podmnožiny X vektorového prostoru V nazýváme *lineárním obalem* množiny X a označujeme ji $[X]$. Tedy

$$\begin{aligned}[X] = \{ & a_1\mathbf{x}_1 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n;\ n \in \mathbb{N} \\ & \& \ a_1, \ldots, a_n \in K \ \& \ \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in X\}.\end{aligned}$$

Je-li $X = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ konečná množina, tak místo $[\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}]$ píšeme jen $[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$.

Zřejmě tento zápis má smysl i pro libovolou uspořádanou n-ticu (ne nutně různých) vektorů $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$, a platí

$$[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n] = \{a_1\mathbf{x}_1 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n;\ a_1, \ldots, a_n \in K\}.$$

Tvrzení 3. Nechť X je podmnožina vektorového priestoru V. Potom lineární obal $[X]$ množiny X je nejmenší lineární podprostor vektorového prostoru V takový, že $X \subseteq [X]$.

Dokázané tvrzení nás opravňuje nazývat lineární obal $[X]$ množiny $X \subseteq V$ též lineárním podprostorem *generovaným* množinou X. Pokud $[X] = S$, říkáme, že X *generuje* lineární podprostor S, případně, že X je *generující množina* nebo též *množina generátorů* lineárního podprostoru $S \subseteq V$. Je-li $S = V$, t. j. je-li $[X] = V$, h mluvíme o *generující množině*. Používá se též název *vytvářející množina*.

Kvůli přehlednosti ještě shrneme základní vlastnosti operace lineárního obalu $X \mapsto [X]$.

Tvrzení 4. Pro libovolné podmnožiny X, Y vektorového prostoru V a $\mathbf{v} \in V$ platí:

(a) $[\emptyset] = [\mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\}$;

(b) $X \subseteq [X]$;

(c) $X \subseteq Y \Rightarrow [X] \subseteq [Y]$;

(d) X je lineární podprostor vo V právě tehdy, když $X = [X]$;

(e) $[[X]] = [X]$;

(f) $\mathbf{v} \in [X] \Leftrightarrow [X \cup \{\mathbf{v}\}] = [X]$.

4.3. Průnik a součet lineárních podprostorů

Nechť X, Y jsou libovolné podmnožiny vektorového prostoru V.

Potom množinu

$$X + Y = \{\mathbf{x} + \mathbf{y};\, \mathbf{x} \in X \;\&\; \mathbf{y} \in Y\}$$

nazýváme *součtem* množin X, Y.

Tvrzení 5. Nechť S, T jsou lineární podprostory vektorového prostoru V. Potom i $S \cap T$ a $S + T$ jsou lineární podprostory ve V. Navíc platí

$$S + T = [S \cup T],$$

t. j. $S + T$ je nejmenší lineární podprostor ve V, který obsahuje S i T.

Sjednocení dvou lineárních podprostorů S, T vektorového prostoru V nemusí být lineárním podprostorem. Přesněji, $S \cup T$ je lineární podprostor ve V právě tehdy, když $S \subseteq T$ nebo $T \subseteq S$.

Součet lineárních podprostorů S, T vektorového prostoru V nazýváme *přímý* nebo též *direktní součet*, pokud $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$; píšeme pak $S \oplus T$.

Tvrzení 6. Nechť S, T jsou lineární podprostory vektorového prostoru V. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, t.j. součet $S + T$ je direktní;

(ii) každý vektor $\mathbf{z} \in S + T$ má jednoznačné vyjádření ve tvaru $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, kde $\mathbf{x} \in S$, $\mathbf{y} \in T$.

4.4. Lineární nezávislost

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$. Říkáme, že uspořádaná n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je *lineárně závislá*, pokud existují skaláry $c_1, \ldots, c_n \in K$ tak, že $(c_1, \ldots, c_n) \neq \mathbf{0}$ a $c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$. V opačném případě říkáme, že uspořádaná n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je *lineárně nezávislá*. Pro $n = 0$ kvůli úplnosti dodávame, že uspořádanou 0-ticu (t. j. prázdnou posloupnost) vektorů považujeme za lineárně nezávislou.

Místo „lineárně (ne)závislá uspořádaná n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$“ budeme často mluvit jen o lineárně (ne)závislých vektorech $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Podle definice lineární nezávislosti jsou vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ lineárně nezávislé právě tehdy, když

$$(\forall\, c_1, \ldots, c_n \in K)(c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = \ldots = c_n = 0)$$

Čtyři jednoduchá pozorování:

(a) jediný vektor $\mathbf{u}$ je lineárně nezávislý právě tehdy, když $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$;

(b) vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z nich je násobkem druhého;

(c) je-li některý z vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ roven $\mathbf{0}$, pak jsou tyto vektory lineárně závislé;

(d) pokud se některé dva z vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ rovnají, pak jsou tyto vektory lineárně závislé.

Jinak řečeno, pouze uspořádaná n-tice nenulových a navzájem různých vektorů, z kterých žádný není násobkem druhého, může (ale stále ještě nemusí) být lineárně nezávislá.

Tvrzení 7. Pre libovolné $n \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně závislé;

(ii) některý z vektorů $\mathbf{u}_k$, $k \leq n$, je lineární kombinací předcházejících;

(ii') některý z vektorů $\mathbf{u}_k$, $k \leq n$, je lineární kombinací nasledujících;

(iii) některý z vektorov $\mathbf{u}_k$, $k \leq n$, je lineární kombinace ostatních.

Každý vektor $\mathbf{x}$ z lineárního obalu $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$$

pro nějakou n-ticu skalárů $(c_1, \ldots, c_n)$.

Věta 8. Vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když každý vektor $\mathbf{x} \in [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ můžeme vyjádřit ve tvaru $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ pro jedinou uspořádanou n-tici $(c_1, \ldots, c_n) \in K^n$.

Tvrzení 9. Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v} \in V$, přičemž vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) $\mathbf{v} \in [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$;

(ii) vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}$ jsou lineárně závislé;

(iii) $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}] = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$.

Věta 10. Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$, pričemž vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé. Potom z množiny $\{1, \ldots, m\}$ můžeme vybrat indexy $i_1 < \ldots < i_k$ tak, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$, $\mathbf{v}_{i_1}, \ldots, \mathbf{v}_{i_k}$ jsou lineárně nezávislé a generují stejný podprostor jako vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$.