3. SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

3.1. Maticový zápis soustavy lineárních rovnic

Lineární rovnicí o n neznámych $x_1, \ldots, x_n$ nad číselným tělesem K rozumíme formuli tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in K$, v proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nad číselným tělesem K rozumíme konjunkci formulí tvaru

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{21}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

kde a_{ij}, b_i, pro $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, jsou skaláry z tělesa K.

Matici $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ nazýváme *maticí soustavy*, sloupcový vektor $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T \in K^m$ nazýváme její *pravou stranou*. *Rozšířenou maticí soustavy* nazýváme blokovou matici $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) \in K^{m\times(n+1)}$. Soustava sa nazývá *homogenní*, je-li $\mathbf{b} = \mathbf{0}$; v opačném případě sa nazývá *nehomogenní*.

Uvedenou soustavu můžeme stručně a úsporně zapsat v *maticovém tvaru*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

resp., pokud jde o homogenní soustavu, v tvaru

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Řešením soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nazýváme libovolný vektor-sloupec $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in K^n$, jehož složky vyhovují každé z rovnic této soustavy, t. j. platí pro ni $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. *Vyřešit soustavu* znamená najít *všechna* její řešení, t. j. popsat *množinu* všech jejích řešení.

Dvě sestavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$, kde $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in K^{m \times 1}$, se nazývají *ekvivalentní*, pokud mají stejnou množinu řešení, t. j. pokud pro všechna $\mathbf{x} \in K^n$ platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě tehdy, když $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$.

Metoda řešení

Rozšířenou matici $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b})$ soustavy $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ budeme upravovat tak, abychom dostali nějakou inou matici $(\mathbf{B}\,|\mathbf{c})$, která odpovídá nové soustavě $\mathbf{B}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{c}$, přičemž tato splňuje nasledujúcí dvě podmínky:

(a) Je ekvivalentní s původní soustavou $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$, t. j. má stejnou množinu řešení.

(b) Všechna její řešení můžeme přímo vyčíst z její rozšířené matice $(\mathbf{B}\,|\,\mathbf{c})$.

Pak říkáme, že soustava $\mathbf{B}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{c}$ je *vyřešená*.

3.2. Redukovaný stupňovitý tvar matice

Říkáme, že prvek a_{ij} matice $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ je *vedoucí prvek* i-tého řádku matice $\mathbf{A}$, pokud $a_{ij} \neq 0$, a $j = 1$ nebo $a_{il} = 0$ pre všechny $1 \leq l < j$.

Jinak řečeno, vedoucí prvek nenulového řádku je první nenulový prvek tohoto řádku. Nulový řádek nemá vedoucí prvek.

Řekneme, že matice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ je v *redukovaném stupňovitém tvaru*, pokud splňuje nasledující čtyři podmínky:

(a) Je-li $\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$ a $\mathbf{r}_k(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, pak $i < k$;

t. j. každý nenulový řádek matice $\mathbf{A}$ leží nad každým jejím nulovým řádkem.

(b) Jsou-li a_{ij}, a_{kl} vedoucí prvky i-tého resp. k-tého řádku a $i < k$, pak platí $j < l$;

t. j. vedoucí prvek vyššího řádku leží více vlevo než vedoucí prvek nižšího řádku.

(c) Je-li a_{ij} vedoucí prvek i-tého řádku, pak $a_{ij} = 1$;

t. j. vedoucí prvek každého nenulového řádku je 1.

(d) Je-li a_{ij} vedoucí prvek i-tého řádku, tak $a_{kj} = 0$ pro každé $k \neq i$;

t. j. v sloupci, v kterém sa nachází vedoucí prvek nějakého řádku, jsou všechny ostatní prvky rovné 0.

Pokud matice $\mathbf{A}$ splňuje pouze podmínky (a), (b), říkáme, že je v *stupňovitém tvaru*. Používá se též název (redukovaný) *schodovitý tvar*.

Příklad

Matice nejsou ve stupňovitém tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice jsou ve stupňovitém tvaru, ale nejsou v redukovaném stupňovitém tvaru.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice jsou v redukovaném stupňovitém tvaru.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jednotková a nulová matice jsou v redukovaném stupňovitém tvaru.

Příklad

$$(\mathbf{B}\,|\,\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

je matice v redukovaném stupňovitém tvaru nad $\mathbb{R}$. Tato matica odpovídá soustavě

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 2x_3 \qquad\quad &= 3 \\ x_2 + 6x_3 \qquad\quad &= 0 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

v neznámých x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Tato soustava má nekonečně mnoho řešení. Každé volbě *parametrů* $s, t \in \mathbb{R}$ zodpovídá jedno řešení

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + 2s \\ x_2 &= \quad - 6s \\ x_3 &= \qquad\ s \\ x_4 &= 1 \\ x_5 &= \qquad\qquad t. \end{aligned}$$

3.3. Elementární řádkové a sloupcové operace (ERO a ESO)

Elementární řádkovou operací (transformací), zkráceně **ERO**, na matici $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ rozumíme

I. Výměnu dvou řádků matice $\mathbf{A}$;

II. Vynásobení některého řádku matice $\mathbf{A}$ *nenulovým* skalárem z číselného tělesa K;

III. přičtení skalárního násobku některého řádku matice $\mathbf{A}$ k jejímu jinému řádku.

Matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m\times n}$ sa nazývají *řádkově ekvivalentní*, označení $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, pokud jednu z nich můžeme upravit na druhou konečným počtem elementárních řádkových operací.

Analogické pojmy – *elementární sloupcové operace* (ESO) a *sloupcová ekvivalence* matic, označení $\mathbf{A} \wr \mathbf{B}$.

Výměna i-tého a k-tého řádku v matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix}$$

dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix}$$

Vynásobením i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ skalárem $c \neq 0$ dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ c\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix}.$$

Přičtením c-násobku i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ k jejímu k-tému řádku z ní dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k(\mathbf{A}) + c\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix}.$$

Je-li $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ soustava s rozšířenou maticí $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$ a bloková matica $(\mathbf{A}' \,|\, \mathbf{b}')$ vznikne z $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$ provedením jedné (nezáleží které) ERO, pak soustava $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}'$ je ekvivalentní s původní soustavou $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Elementární řádkové operace na matici $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$ totiž odpovídají postupné záměně pořadí dvou rovnic soustavy, vynásobením některé rovnice nenulovým skalárem a přičtením nějakého násobku jedné rovnice k jiné rovnici (přesněji nahrazením dvojice rovnic

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = b_i, \mathbf{r}_k(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = b_k$$

dvojicí rovnic

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = b_i, (\mathbf{r}_k(\mathbf{A}) + c\mathbf{r}_i(\mathbf{A})) \cdot \mathbf{x} = b_k + cb_i).$$

Jde o ekvivalentní úpravy, kterými se množina řešení soustavy nezmění – od nové soustavy $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}'$ se můžeme vhodnou ERO vykonanou na její rozšířené matici opět vrátit k původní soustavě $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Tvrzení 1. Nechť K je číselné těleso, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in K^m$. Jsou-li blokové matice $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$, $(\mathbf{B} \,|\, \mathbf{c})$ řádkově ekvivalentní, pak jsou i soustavy lineárních rovnic $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{B}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{c}$ ekvivalentní.

Věta 2. Každá matice nad číselným tělesem K je řádkově ekvivalentní s nějakou maticí v redukovaném stupňovitém tvaru.

Tvrzení 3. Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$ a $m < n$, t. j. soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ obsahují méně rovnic než neznámých. Potom

(a) homogenní soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ má s řešením $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ alespoň jedno řešení $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;

(b) pokud existuje aspoň jedno řešení soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, pak má tato soustava více než jedno řešení.