2. ZÁKLADY MATICOVÉHO POČTU

2.1. Matice nad danou množinou

2.1.1. Typy matic

Nechť X je libovolná množina a $m, n \in \mathbb{N}$. *Maticí typu* $m \times n$, nebo též $m \times n$*-rozměrnou maticí* nad množinou X rozumíme obdélníkovou tabulku

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

sestávající z prvků množiny X. Zkráceně též píšeme $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, nebo pouze $\mathbf{A} = (a_{ij})$.

Prvky $a_{ij} \in X$, kde $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, se nazývají *prvky matice* $\mathbf{A}$.

Prvek a_{ij}, který se nachází v i-tém řádku a j-tém sloupci matice $\mathbf{A}$ nazýváme též *prvek v místě* (na pozici) (i, j), resp. (i, j)-*tý prvek* matice $\mathbf{A}$. Množinu všech $m \times n$-rozměrných matic nad množinou X značíme $X^{m \times n}$ (někdy též $Mat_{m,n}(X)$). Pokud $m = n$, mluvíme o *čtvercových maticích řádu* n nad množinou X.

Poznamenejme, že v případě, když některé z čísel m, n je 0, množina $X^{m \times n}$ sestáva z jediné a to *prázdné* matice $\emptyset$. Dále se budeme vždy bavit jen o maticích kladných rozměrů $m \times n$.

Dvě matice nad množinou X považujeme za *navzájem stejné* neboli *totožné*, pokud mají stejné rozměry a stejné prvky na příslušných místech.

To znamená, že pro matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{p\times q}$ nad X klademe $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ právě tehdy, když $m = p$, $n = q$ a pro všechny $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$ platí $a_{ij} = b_{ij}$.

Množina matic typu $1\times n$ nad X splývá s množinou X^n, pokud uspořádané n-tice prvků z X zapisujeme do řádku. Podobně, pokud uspořádané m-tice prvků z X zapisujeme do sloupce, tak množina matic typu $m\times 1$ nad X splývá s množinou X^m.

2.1.2. Řádky a sloupce matice

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in X^{m\times n}$. Uspořádanou n-tici

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in X^{1\times n},$$

kde $1 \le i \le m$, nazýváme *i-tým řádkem* matice $\mathbf{A}$. Podobně, uspořádanou m-tici

$$\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

kde $1 \le j \le n$, nazýváme *j-tým sloupcem* matice $\mathbf{A}$.

Matici $\mathbf{A}$ tak můžeme ztotožnit jak se sloupcem složeným z jejích řádků tak s řádkem složeným z jejích sloupců, t. j.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \mathbf{r}_2(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix} \\
&= \left(\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \ \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \ \dots, \ \mathbf{s}_n(\mathbf{A}) \right).
\end{aligned}
$$

2.1.3. Transponovaná matice

Matici, kterou získáme z matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ záměnou jejích řádků a sloupců, nazývame *transponovanou maticí* k matici $\mathbf{A}$ a značíme ji $\mathbf{A}^T$.

Tedy

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

To znamená, že $\mathbf{A}^T \in X^{n\times m}$ a prvek na pozici (i,j) matice $\mathbf{A}^T$ je a_{ji}.

Zřejmě pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in X^{m\times n}$ platí

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}.$$

Transpozicí matic-řádků z $X^{1\times n}$ dostaneme matice-sloupce z $X^{n\times 1}$ a transpozicí matic-sloupců z $X^{m\times 1}$ matice-řádky z $X^{1\times m}$.

Na základě této poznámky lze snadno vidět, že pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in X^{m\times n}$ a $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ platí

$$\mathbf{s}_i(\mathbf{A}^T) = \mathbf{r}_i(\mathbf{A})^T, \qquad \mathbf{r}_j(\mathbf{A}^T) = \mathbf{s}_j(\mathbf{A})^T.$$

Čtvercová matice $\mathbf{A} \in X^{n\times n}$ se nazývá *symetrická*, pokud $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, t. j. pokud $a_{ij} = a_{ji}$ pro všechny indexy $i, j = 1, \ldots, n$.

Posloupnost prvků $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ nazýváme *diagonálou* čtvercové matice $\mathbf{A}$. Transponovanou matici k čtvercové matici $\mathbf{A}$ zřejmě získámé „osovou souměrností“ jejich prvků podle diagonály.

2.1.4. Blokové matice

Někdy bude užitočné spojit dvě matice $\mathbf{A} \in X^{m\times n_1}$, $\mathbf{B} \in X^{m\times n_2}$ se stejným počtem řádků do jedné matice tak, že příslušné tabulky jednoduše napíšeme vedle sebe. Výsledná matice je typu $m \times (n_1 + n_2)$ a značíme ji $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, případně $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{B})$.

Podobně můžeme spojit dvě matice $\mathbf{A} \in X^{m_1\times n}$, $\mathbf{B} \in X^{m_2\times n}$ se stejným počtem sloupců do jedné matice tak, že příslušné tabulky napíšeme pod sebe. Výsledná matice je typu $(m_1+m_2)\times n$ a značíme ji $\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$ případně $\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}\right)$.

Právě popsané konstrukce jsou příklady tzv. *blokových matic*. Původní matice, ze kterých takto vytváříme blokovou matici, potom nazývame jejími *bloky*. Samozřejmě můžeme vedle sebe resp. pod sebe zařadit větší počet bloků než pouze dva.

Naopak, někdy může být účelné vyznačit v dané matici nějaké menší obdélníkové časti jako její bloky. Pak mluvíme o tzv. *blokovém tvaru* dané matice. Příkladom toho byl zápis matice $\mathbf{A} \in X^{m \times n}$ jako řádku složeného z jejích sloupců, případně jako sloupce složeného z jejích řádků.

Uvedená dvě schemata vytváření blokových matic „vedle sebe“ a „pod sebe“ můžeme kombinovat.

Např. z matic $\mathbf{A}_{11} \in X^{m_1 \times n_1}$, $\mathbf{A}_{12} \in X^{m_1 \times n_2}$, $\mathbf{A}_{21} \in X^{m_2 \times n_1}$, $\mathbf{A}_{22} \in X^{m_2 \times n_2}$ můžeme vytvořit blokovou matici

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

typu $(m_1 + m_2) \times (n_1 + n_2)$.

Tuto konstrukci můžeme zřejmým způsobem zevšeobecnit i na větší systémy matic a zapsat ve tvaru

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{ij})_{k\times l} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{k1} & \dots & \mathbf{A}_{kl} \end{pmatrix},$$

přičemž jednotlivé bloky $\mathbf{A}_{ij}$ jsou matice nad X rozměrů $m_i \times n_j$, kde $(m_1, \dots, m_k)$, $(n_1, \dots, n_l)$ jsou nějaké konečné posloupnosti přirozených čísel. Matici nad množinou X z této „matice matic“ dostaneme tak, že si v $\mathbf{A}$ odmyslíme vnitřní závorky oddělující její jednotlivé bloky $\mathbf{A}_{ij}$.

2.2. Matice nad daným číselným tělesem

V celém odstavci K označuje pevně zvolené, jinak však libovolné číselné těleso. V souladu s předešlým odstavcem $K^{m\times n}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$, označuje množinu všech matic typu $m \times n$ nad číselným tělesem K.

2.2.1. Vektorový prostor matic

Pre pevné $m, n \in \mathbb{N}$ budeme na množině matic $K^{m\times n}$ definovat po složkách operace součtu a skalárního násobku. Tedy pro matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}$ nad K a $c \in K$ položíme

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}, \\ c\mathbf{A} &= (ca_{ij})_{m\times n}. \end{aligned}$$

Součet matic $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ je definovaný jen pre matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ stejného typu a samotná matice $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ je téhož typu jako $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$. **Neutrálním prvkem** operace sčítání na $K^{m\times n}$ je matice typu $m \times n$, jejíž všechny prvky jsou nulové; nazýváme ji *nulová matica* typu $m\times n$ a označujeme ji $\mathbf{0}_{m,n}$, resp. $\mathbf{0}$, je-li její rozměr jasný z kontextu nebo na něm nezáleží. **Opačným prvkem k matici** $A = (a_{ij})_{m\times n}$ je zřejmě matice $-\mathbf{A} = (-a_{ij})_{m\times n}$.

Matice pevného typu $m \times n$ nad číselným tělesem K s takto definovanými operacemi součtu a skalárního násobku tvoří *vektorový prostor* nad číselným tělesem K tj. $K^{m\times n}$ bude dále označovat příslušný vektorový prostor.

2.2.2. Násobení matic

Nejprve sa naučíme násobit některé dvojice vektorů.

Součinem $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ *řádkového vektoru* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in K^{1\times n}$ *a sloupcového vektoru* $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T \in K^{n\times 1}$ rozumíme skalár

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} &= (x_1, \ldots, x_n)\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,. \end{aligned}$$

V tomto případě jde o běžný „skalární součin“ vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K^n$.

Pro takto definovaný součin vektorů jsou splněné dobře známé vlastnosti „skalárního součinu“. Snadno se ověří, že pre všechna $n \in \mathbb{N}$, $c \in K$ a $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in K^{1\times n}$, $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in K^{n\times 1}$ platí

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{y}') &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}', \\ (\mathbf{x} + \mathbf{x}') \cdot \mathbf{y} &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}, \\ \mathbf{x} \cdot c\mathbf{y} = c(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) &= c\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{x}^T. \end{aligned}$$

Říkáme, že násobení řádkových a sloupcových vektorů je *distributivní* (z obou stran) vzhledem ke sčítání a *komutuje*, t. j. je zaměnitelné s operací skalárního násobku. Poslední rovnost můžeme chápat jako „komutativitu“ tohoto součinu; vděčíme za ni komutativitě násobení v číselném tělese K.

Nechť $m, n, p \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\mathbf{B} = (b_{jk})_{n \times p}$.

Součinem matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ rozumíme matici

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{B}))_{m \times p}.$$

Všimněme si, že součin matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ je definovaný, pouze pokud se počet sloupců matice $\mathbf{A}$ rovná počtu řádků matice $\mathbf{B}$, t. j. práve tehdy, když řádky matice $\mathbf{A}$ a sloupce matice $\mathbf{B}$ mají stejný rozměr.

Součin matic typů $m \times n$ a $n \times p$ je matice typu $m \times p$, což si můžeme lehce zapamatovat v symbolickém tvaru

$$[m \times n] \cdot [n \times p] = [m \times p],$$

připomínajícím rozměrové vztahy ve fyzice.

Prvek na pozici (i,k) matice $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ dostaneme jako součin i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ a k-tého sloupce matice $\mathbf{B}$, tedy jako výraz

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot\mathbf{s}_k(\mathbf{B}) &= (a_1,\ldots,a_n)\cdot\begin{pmatrix} b_{1k}\\ \vdots \\ b_{nk}\end{pmatrix}\\ &= a_{i1}b_{1k}+\ldots+a_{in}b_{nk}=\textstyle\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}\,.\end{aligned}$$

Snadno pak ověříme následující rovnosti

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot\mathbf{B},\qquad \mathbf{s}_k(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{s}_k(\mathbf{B}).$$

Násobení matic je (z obou stran) *distributivní* vzhledem ke sčítání. To znamená, že pro libovolné $m,n\in\mathbb{N}$ a matice $\mathbf{A},\mathbf{A}'\in K^{m\times n}$, $\mathbf{B},\mathbf{B}'\in K^{n\times p}$ platí

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{B}') &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}',\\ (\mathbf{A}+\mathbf{A}')\cdot\mathbf{B} &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}'\cdot\mathbf{B}.\end{aligned}$$

Z distributivity součinu vektorů vzhledem k jejich součtu je totiž jasné, že (i,k)-tý prvek matice $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{B}')$ je

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot\ & \mathbf{s}_k(\mathbf{B}+\mathbf{B}')=\mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot(\mathbf{s}_k(\mathbf{B})+\mathbf{s}_k(\mathbf{B}'))\\ &=\mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot\mathbf{s}_k(\mathbf{B})+\mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot\mathbf{s}_k(\mathbf{B}'),\end{aligned}$$

tedy sa rovná (i,k)-tému prvku matice $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}'$. Podobně pro druhou rovnost.

Podobně, s využitím zaměnitelnosti součinu vektorů a skalárního násobku můžeme dokázat, že pre libovolný skalár $c\in K$ a všechny matice $\mathbf{A}\in K^{m\times n}$, $\mathbf{B}\in K^{n\times p}$ platí

$$\mathbf{A}\cdot c\mathbf{B}=c(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=c\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}.$$

Říkáme pak, že násobení matic *komutuje*, t. j. je zaměnitelné s operací skalárního násobku.

Násobení matic je též *asociatívní*: pro $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n\times p}$, $\mathbf{C} \in K^{p\times q}$ platí

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}.$$

Pro důkaz toho si stačí uvědomit, že pro libovolné vektory $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in K^{1\times n}$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_p)^T \in K^{p\times 1}$ platí

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{y}) &= (x_1, \ldots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} b_{1k} y_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} b_{nk} y_k \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} y_k \right) \\
&= \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j b_{jk} \right) y_k \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} x_j b_{j1}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} x_j b_{jp} \right) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \\
&= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{y}.
\end{aligned}$$

Pak pro $1 \leq i \leq m$, $1 \leq l \leq q$, je i-tý prvek na pozici (i, l) matice $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_l(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{s}_l(\mathbf{C})) \\ &= (\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{s}_l(\mathbf{C}) \\ &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{s}_l(\mathbf{C}), \end{aligned}$$

tedy sa rovná (i, l)-tému prvku matice $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$.

Čtvercovou matici řádu n, která má všechny prvky na diagonále rovné 1 a mimo diagonálu 0, označujeme $\mathbf{I}_n$ a nazývame *jednotková matice* řádu n.

S použitím tzv. *Kroneckerovho symbolu*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pro } i = j, \\ 0, & \text{pro } i \neq j, \end{cases}$$

můžeme psát

$$\mathbf{I}_n = (\delta_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jednotkové matice hrají úlohu neutrálních prvků pro násobení matic. Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ platí

$$\mathbf{I}_m \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n.$$

Množina $K^{n\times n}$ všech čtvercových matic řádu n je kromě struktury vektorového prostoru vybavená asociativní operací násobení, která je (z obou stran) distributivní vzhledem ke sčítání matic, komutuje s operací skalárního násobku a jednotková matica $\mathbf{I}_n$ je její neutrální prvek. To nám, podobně jako pro prvky číselného tělesa K, umožňuje zavést i *mocniny čtvercových matic*.

Pre $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$, klademe $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$ a

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \ldots \cdot \mathbf{A}}_{k\text{-krát}},$$

pro $0 < k \in \mathbb{N}$; tedy $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, atd.

Uvědomme si, že pro $n > 1$ – naproti komutativitě násobení v číselném tělese K – násobení matic z pozičních důvodů *není komutativní* na $K^{n\times n}$. Například

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1+1 \end{pmatrix}.$$

Naproti tomu komutativita násobení v číselném tělese K má za důsledek, že pre všechna m, n, p a matice $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n\times p}$ platí rovnost

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T.$$

Totiž

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{B}) = \mathbf{s}_k(\mathbf{B})^T \cdot \mathbf{r}_i(\mathbf{A})^T = \mathbf{r}_k(\mathbf{B}^T) \cdot \mathbf{s}_i(\mathbf{A}^T).$$

2.2.3. Operace s blokovými maticemi

Operace maticového součtu a skalárního násobku můžeme na blokových maticích rozložit na jednotlivé bloky. Jsou-li $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{ij})_{k\times l}$, $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{ij})_{k\times l}$ blokové matice nad číselným tělesem K a odpovídající si si bloky $\mathbf{A}_{ij}$, $\mathbf{B}_{ij}$ se stejným typem $m_i \times n_j$, tak jejich součet je opět bloková matica

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij})_{k\times l}$$

s bloky stejných typů. S operací skalárnho násobku je to ještě jednodušší, totiž nemusíme se starat o shodnost rozměrů jednotlivých bloků.

Pre $c \in K$ dostaneme

$$c\mathbf{A} = (c\mathbf{A}_{ij})_{k\times l}.$$

Bloková struktura sa přenáší i na součin matic za podmínky, že sloupce první matice jsou ve stejném pořadí rozděleny na stejný počet stejně velkých skupin, řekněme $n_1+n_2+\ldots+n_\nu$, jako sloupce druhé matice. Tedy pokud $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{ij})_{\mu\times\nu}$, $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{jk})_{\nu\times\vartheta}$ jsou blokové matice nad K, přičemž blok $\mathbf{A}_{ij}$ je typu $m_i \times n_j$ a blok $\mathbf{B}_{jk}$ typu $n_j \times p_k$, tak jejich součin je bloková matice tvaru $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (\mathbf{C}_{ik})_{\mu\times\vartheta}$, kde blok

$$\mathbf{C}_{ik} = \mathbf{A}_{i1}\cdot\mathbf{B}_{1k} + \mathbf{A}_{i2}\cdot\mathbf{B}_{2k} + \ldots + \mathbf{A}_{in}\cdot\mathbf{B}_{nk}$$

je typu $m_i \times p_k$. Blokové matice násobíme stejně jako „obyčejné“ matice, jen s tím rozdílem, že součet resp. součin v číselném tělese K nahradíme součtem resp. součinem matic.