1. VEKTOROVÉ PROSTORY

1.1. Základní číselné obory

$\mathbb{N}$ – množina všech přirozených čísel,

$\mathbb{Z}$ – množina všech celých čísel,

$\mathbb{Q}$ – množina všech racionálních čísel,

$\mathbb{R}$ – množina všech reálnych čísel,

$\mathbb{C}$ – množina všech komplexních čísel.

Nulu považujeme za přirozené číslo, t. j. $0 \in \mathbb{N}$.

Imaginární jednotku (která je prvkem $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) budeme značit $\imath$.

Prvky výše uvedených číselných oborů $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ nazýváme často *skaláry*. V dalším budeme předpoklad, že množina K je rovna některému z číselných oborů $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ a budeme mluvit o *číselném tělese*.

Na každé z těchto množin jsou definované dvě binárneí operace, *sčítání* $+$ a *násobení* $\cdot$ a obě tyto operace jsou asociativní a komutativní.

$$(\forall\, x, y, z \in K)(x + (y + z) = (x + y) + z)),$$
$$(\forall\, x, y \in K)(x + y = y + x).$$

Navíc, násobení je (z obou stran) *distributivní* vzhledem ke sčítání, t. j. pro všechny prvky x, y, z příslušné množiny platí

$$x(y + z) = xy + xz, \qquad (x + y)z = xz + yz.$$

Číselný obor $\mathbb{N}$ je v porovnání s obory $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ jaksi chudší – rovnice tvaru $x + a = b$ mají v oborech $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ řešení $x = b - a$ pro libovolná a, b, ale v $\mathbb{N}$ je takováto rovnice řešitelná pouze pro $a \leq b$.

Obory $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ jsou však bohatší nejen v porovnání s $\mathbb{N}$, ale i s $\mathbb{Z}$ – rovnice tvaru $ax = b$ mají v oborech $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ řešení pro libovolná $a \neq 0$ a b, ale v $\mathbb{N}$ či $\mathbb{Z}$ jsou řešitelné pouze pokud je a dělitelem b.

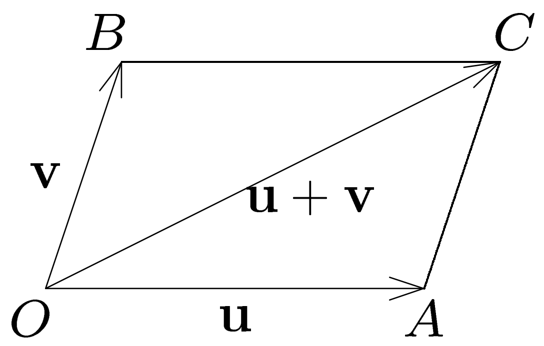
1.2. Geometrická interpretace vektorů v rovině a v třírozměrném prostoru

Vektory v rovině či v prostoru si představujeme jako orientované úsečky, t. j. úsečky, jejichž jeden krajní bod považujeme za počáteční a druhý za koncový – ten je označený obvykle šipkou.

Přitom dvě stejně dlouhé, rovnoběžné a souhlasně orientované úsečky představují ten stejný vektor – říkáme, že jsou **umístění** téhož vektoru.

Zvolíme-li si nějaký pevný bod O, pak všechny vektory v rovině či v prostoru můžeme jednoznačně reprezentovat jako orientované úsečky $\overrightarrow{OA}$ s počátkem v O, pričemž jejich koncem může být libovolný bod A roviny či prostoru, bod O nevyjímaje – orientovaná úsečka $\overrightarrow{OO}$ totiž představuje tzv. nulový vektor.

Vektory v rovině či v prostoru můžeme sčítat pomocí tzv. *vektorového rovnoběžníku*. Součet vektorů $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$ je potom znázorněný orientovanou uhlopříčkou $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \overrightarrow{OC}$ rovnoběžníka, jehož dvě přilehlé strany tvoří úsečky OA, OB.



Vektory můžeme rovněž násobit libovolnými skaláry, t. j. v našem případě reálnými čísly: pokud $c \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{v}$ je vektor, tak $c\mathbf{v}$ je vektor, t. j. orientovaná úsečka s počátkem v O, jejíž délka je $|c|$-násobkom délky úsečky $\mathbf{v}$, leží na té stejné přímce jako $\mathbf{v}$ a je orientovaná souhlasně s $\mathbf{v}$, pokud $c > 0$, resp. nesouhlasně s $\mathbf{v}$, pokud $c < 0$, (je-li $c = 0$ nebo $\mathbf{v}$ je nulový vektor, tak, samozřejmě, i $c\mathbf{v}$ je nulový vektor, takže nezáleží na jeho směru ani orientaci).

Pokud si mimo počátku O zvolíme v rovině či priostoru ještě dvě resp. tři souřadné osy, t. j. navzájem kolmé přímky procházející počátkem, a na každé z nich jeden bod ve stejné jednotkové vzdálenosti od počátku, dostaneme pravouhlý souřadnicový systém v rovině či v prostoru. Každý bod roviny či prostoru je potom jednoznačně určený uspořádanou dvojicí, resp. trojicí svých souřadnic a naopak, každá dvojice resp. trojice souřadnic jednoznačně určuje nějaký bod roviny či prostoru.

Rovněž každý vektor v rovině či v prostoru je potom jednoznačně určený souřadnicemi svého koncového bodu a naopak libovolná uspořádaná dvojice resp. trojice souřadnic jednoznačně určuje nějaký vektor v rovině či prostoru. Při pevném souřadnicovém systému tak můžeme množinu všech vektorů v rovině ztotožnit s množinou $\mathbb{R}^2$ a množinu všech vektorů v prostoru s množinou $\mathbb{R}^3$.

Jsou-li (při takovémto ztotožnění) $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ dva vektory v rovině, tak snadno ověříme, že pro jejich součet $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, daný vektorovým rovnoběžníkem, platí

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_1, u_2)+(v_1, v_2) = (u_1+v_1, u_2+v_2).$$

Je-li $c \in \mathbb{R}$, pak pro skalární násobek $c\mathbf{u}$ dostáváme

$$c\mathbf{u} = c(u_1, u_2) = (cu_1, cu_2).$$

Podobně to můžeme ověřit pro vektory v prostoru, t. j. uspořádané trojice reálných čísel.

Navíc si všimněme, že předpoklady kolmosti souřadných os a rovnosti jednotkových délek v jednotlivých směrech nehrály v našich úvahách žádnou roli. Stačí, aby systém souřadných os tvořily dvě různoběžné přímky (v rovině) resp. tři přímky neležící v rovině (v priestore) protínající se v počátku O. Za jednotkové délky ve směrech jednotlivých souřadných os můžeme zvolit délky libovolných (ne nutně stejně dlouhých) úseček.

1.3. Vektorové prostory

Buď K číselné těleso. *Vektorovým* nebo též *lineárním prostorem* nad K nazývame množinu V s význačným prvkem $\mathbf{0}$ a dvěma binárními operacemi – *sčítáním* $+ : V \times V \to V$ a *násobením* $\cdot : K \times V \to V$ – takovými, že platí

$$\begin{aligned}
&(\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V)(\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z})),\\
&(\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}),\\
&(\forall\, \mathbf{x} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}),\\
&(\forall\, \mathbf{x} \in V)(\exists\, \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}),\\
&(\forall\, a, b \in K)(\forall\, \mathbf{x} \in V)(a \cdot (b \cdot \mathbf{x}) = (ab) \cdot \mathbf{x}),\\
&(\forall\, \mathbf{x} \in V)(1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}),\\
&(\forall\, a \in K)(\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(a \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (a \cdot \mathbf{x}) + (a \cdot \mathbf{y})),\\
&(\forall\, a, b \in K)(\forall\, \mathbf{x} \in V)((a + b) \cdot \mathbf{x} = (a \cdot \mathbf{x}) + (b \cdot \mathbf{x})).
\end{aligned}$$

Skaláry značíme „obyčejnými“ malými latinskými písmeny a vektory tučnými malými latinskými písmeny.

Poznámka. I když sčítání skalárů v číselném tělese K a sčítání vektorů značíme stejným znakem $+$, jde o různé operácie. Podobně násobení v číselném tělese a násobení vektoru skalárem jsou různé operace, ačkoliv obě značíme $\cdot$. Později tento přístup dovedeme ještě dále, když budeme stejně značit příslušné operace a nuly v různých vektorových prostorech.

Z formálního hlediska připomínají axiómy vektorového prostoru vlastnosti číselného tělesa K: sčítání vektorů je opět asociativní a komutativní binární operace na V s neutrálním prvkem $\mathbf{0} \in V$, operace násobení vektoru skalárem splňuje jakousi podmínku „asociativnosti", $1 \in K$ je její „neutrální prvek" a platí dva „distributívní zákony".

Jeden podstatný rozdíl – násobení v číselném tělese K je binární operací na množině K, t. j. zobrazením $\cdot : K \times K \to K$, násobení ve vektorovém prostoru V nad číselným tělesem K není binární operace na V, ale binární operace $\cdot : K \times V \to V$.

To nám však nebrání zavést obdobné dohody jako pro operace v číselném tělese: násobení má přednost před sčítáním a znak násobení budeme většinou vynechávat, t. j. budeme např. psát $a\mathbf{x}+\mathbf{y}$ namísto $\big(a\cdot\mathbf{x}\big)+\mathbf{y}$. Rovněž budeme vynechávat závorky, jejichž umístění neovlivní výslednou hodnotu výrazů jako např. v $ab\mathbf{x}$ nebo $a_1\mathbf{x}_1 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n$. Poslední výraz budeme taktéž značit

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{x}_i$$

a nazývat *lineární kombinací* vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ s koeficienty $a_1, \ldots, a_n$.

Speciálně pro $n = 1$ to znamená $\sum_{i=1}^{1} a_i\mathbf{x}_i = a_1\mathbf{x}_1$; kvůli úplnosti pro $n = 0$ ještě klademe prázdnou lineární kombinaci $\sum_{i=1}^{0} a_i\mathbf{x}_i$ rovnou $\mathbf{0}$.

Tvrzení 1. Nechť V je vektorový prostor nad číselným tělesem K. Pak pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $a, b, a_1, \ldots, a_n \in K$ a $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$ platí

(a) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z}$,

(b) $(a\mathbf{x} = a\mathbf{y} \ \& \ a \neq 0) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$,
$(a\mathbf{x} = b\mathbf{x} \ \& \ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \Rightarrow a = b$,

(c) $a\mathbf{0} = \mathbf{0} = 0\mathbf{x}$,

(d) $a\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow (a = 0 \vee \mathbf{x} = \mathbf{0})$,

(e) $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$,

(f) $a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = a\mathbf{x} - a\mathbf{y}$,
$(a - b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} - b\mathbf{x}$,

(g) $a(\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_n) = a\mathbf{x}_1 + \ldots + a\mathbf{x}_n$,
$(a_1 + \ldots + a_n)\mathbf{x} = a_1\mathbf{x} + \ldots + a_n\mathbf{x}$.

Prvek $\mathbf{y} \in V$ takový, že $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$, je k danému $\mathbf{x} \in V$ určený jednoznačně – značíme ho $-\mathbf{x}$ a nazývame *opačný vektor* k $\mathbf{x}$.

1.4. Příklady vektorových prostorů

1. **Číselná tělesa**

Zřejmě každé číselné těleso K můžeme považovat za vektorový prostor nad sebou samým.

2. **$\mathbf{n}$-rozměrné řádkové a sloupcové vektory nad daným číselným tělesem K**

Pro libovolné číselné těleso K a $n \in \mathbb{N}$ množina

$$K^n = \{(x_1, \dots, x_n);\ x_1, \dots, x_n \in K\}$$

všech uspořádaných n-tic prvků z K spolu s operacemi

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ c\mathbf{x} &= c(x_1, \dots, x_n) = (cx_1, \dots, cx_n), \end{aligned}$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in K^n$ a $c \in K$, tvoří vektorový prostor nad číselným tělesem K.

Zřejmě uspořádaná n-tice $\mathbf{0}_n = (0, \dots, 0)$ hraje úlohu nulového vektoru v K^n. Pokud bude potřebné rozlišit nulové vektory v prostorech K^n pro různá přirozená čísla n, budeme pro nulový vektor v K^n používat označení $\mathbf{0}_n$. Opačný prvok k $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ je zřejmě

$$-\mathbf{x} = -(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n)$$

Říkáme, že operace na K^n jsou definovány *po souřadnicích*. Prvky tohoto vektorového prostoru nazývame *n-rozměrné řádkové vektory* nad číselným tělesem K. Kvůli úplnosti poznamenejme, že vektorový prostor K^0 se skládá z jediného prvku $\emptyset$, představujícího „uspořádanou nulatici“, jež je nutně nulou v K^0.

Někdy je výhodnější pracovat s n-*rozměrnými sloupcovými vektory* nad číselným tělesem K, t. j. s vektory tvaru

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

kde $x_1, \ldots, x_n \in K$. Definice příslušných operací je opět po souřadnicích. I tento priestor budeme označovat K^n.

3. **Polynomy nad daným číselným tělesem**

Polynomem nebo též *mnohočlenem* f *stupně* n, kde $-1 \leq n \in \mathbb{Z}$, v proměnné x nad číselným tělesem K rozumíme formální výraz tvaru

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in$ jsou skaláry, nazývané *koeficienty* polynomu f, a $a_n \neq 0$; nulu $0 \in K$ považujeme za polynom stupně -1 a nenulové skaláry $a \in K$ za polynomy stupně 0. Množinu všech polynomů v proměnné x nad K *stupně nanejvýš* n, kde $-1 \leq n \in \mathbb{Z}$, budeme značit $K^{(n)}[x]$; množinu *všech polynomů* v proměnné x nad K značíme $K[x]$. Libovolný polynom $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \in K[x]$ stupně $m < n$ můžeme psat ve tvaru

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m + 0x^{m+1} + \ldots + 0x^n,$$

t. j. ve tvaru $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, kde $b_i = 0$ pro $m < i \leq n$.

S použitím této konvence můžeme definovat součet $f+g$ polynomů $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ z $K[x]$ předpisem

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i + b_i) x^i.$$

Pro $c \in K$ klademe

$$(cf)(x) = cf(x) = \sum_{i=0}^{n} c a_i x^i.$$