LINEÁRNÍ PODPROSTORY a LINEÁRNÍ NEZÁVISLOST

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

Abstrakt přednášky

Abstrakt

V této kapitole se vrátíme ke studiu abstraktních vektorových prostorů nad obecným tělesem. K tedy bude v celé kapitole označovat nějaké pevné, jinak libovolné těleso a V bude pevně zvolený vektorový prostor nad K.

Obsah přednášky

Obsah

Lineární podprostory I

4 Lineární prostory a lineární nezávislost

4.1 Lineární podprostory vektorového prostoru

Množina $S \subseteq V$ se nazýva ***lineární (vektorový) podprostor*** vektorového prostoru V, pokud $S \neq \emptyset$ a pro všechny skaláry $a \in K$ a vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ platí $a\mathbf{x} \in S$ a $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$.

Lineární podprostory II

Jinak řečeno, neprázdná podmnožina $S \subseteq V$ je lineární podprostor právě tehdy, když je uzavřená na operace skalárního násobku a součtu vektorů.

Tvrzení 4.1.1 *Nechť S je lineární podprostor vektorového prostoru V. Pak $\mathbf{0} \in S$ a S s operacemi součtu vektorů a skalárního násobku zúženými z V na S tvoří vektorový prostor nad číselným tělesem K.*

Lineární podprostory III

V každém vektorovém prostoru V jsou $\{\mathbf{0}\}$ a V lineární podprostory (v případě, když $V = \{\mathbf{0}\}$, dokonce splývají, v opačném případě jde o dva různé podprostory) – $\{\mathbf{0}\}$ nazývame ***triviální*** nebo též ***nulový*** a V ***nevlastní*** alebo též ***plný*** lineární podprostor.

Tedy pro ***vlastní netriviální*** lineární podprostor $S \subseteq V$ platí $\{\mathbf{0}\} \neq S \neq V$.

Lineární podprostory IV

Např. ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ netriviální vlastní podprostory jsou právě všechny přímky a roviny procházející počátkem $\mathbf{0}$.
To si můžeme graficky vyjádřit pomocí následujícího obrázku, který samozřejmě ukáže pouze několik z nekonečně mnoha lineárních podprostorů. Lineární podprostory jsou popsány pomocí minimálního počtu generátorů.

Lineární podprostory V

$$\left\{x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left\{x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\quad\left\{x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\quad\left\{x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\quad\cdots$$

$$\left\{x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\quad\left\{y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\quad\left\{y\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\quad\left\{y\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\quad\cdots$$

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Následující tvrzení charakterizuje lineární podprostory jako množiny uzavřené na lineární kombinace.

Lineární podprostory VI

Tvrzení 4.1.2 *Pro libovolnou podmnožinu S vektorového prostoru V jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *S je lineární podprostor ve V;*

(ii) *$S \neq \emptyset$ a pro všechny skaláry $a, b \in K$ a vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ platí $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \in S$;*

(iii) *pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro všechny skaláry $a_1, \ldots, a_n \in K$ a vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in S$ platí*

$$a_1\mathbf{x}_1 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n \in S.$$

Lineární podprostory VII

Příklad 4.1.3 *(a) Označme* $K^{(X)}$ *množinu všech funkí* $f\ X \to K$ *takových, že množina* $\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}$ *je konečná. Pro libovolnou lineární kombinaci funkcí* $f, g \in K^{(X)}$ *platí*

$$\{x \in X;\ af(x) + bg(x) \neq 0\} \subseteq \\ \{x \in X;\ f(x) \neq 0\} \cup \{x \in X;\ g(x) \neq 0\}.$$

Z toho vyplývá, že $K^{(X)}$ *je lineární podprostor vektorového prostoru* K^X*. Je-li* X *je konečná, tak* $K^{(X)} = K^X$*, je-li* X *je nekonečná, tak* $K^{(X)}$ *je netriviální vlastní podprostor v* K^X*.*

Lineární podprostory VIII

(b) Nechť** $X \subseteq \mathbb{R}$ **je libovolná množina reálných čísel. Potom** $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$**, nebo jen stručně** $\mathcal{C}(X)$ **označuje množinu všech spojitých funkcí** $f\ X \to \mathbb{R}$**. Protože lineární kombinace spojitých funkcií je zřejmě opět spojitá funkce,** $\mathcal{C}(X)$ **je lineární podprostor v** $\mathbb{R}^X$**.

Lineární obal I

4.2 Lineární obal množiny vektorů

Množinu všech lineárních kombinací vektorů z podmnožiny X vektorového prostoru V nazýváme ***lineárním obalem*** množiny X a označujeme ji $[X]$. Tedy

$$\begin{aligned}[X] = \{ \; & a_1\mathbf{x}_1 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n;\, n \in \mathbb{N} \\ & \& \; a_1, \ldots, a_n \in K \;\&\; \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in X\}.\end{aligned}$$

Lineární obal II

Je-li $X = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ konečná množina, tak místo $[\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}]$ píšeme jen $[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$.

Zřejmě tento zápis má smysl i pro libovolou uspořádanou n-tici (ne nutně různých) vektorů $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$, a platí

$$[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n] = \{a_1\mathbf{x}_1 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n;\ a_1, \ldots, a_n \in K\}.$$

Lineární obal III

Tvrzení 4.2.1 *Nechť* X *je podmnožina vektorového priestoru* V*. Potom lineární obal* $[X]$ *množiny* X *je nejmenší lineární podprostor vektorového prostoru* V *takový, že* $X \subseteq [X]$*.*

Dokázané tvrzení nás opravňuje nazývat lineární obal $[X]$ množiny $X \subseteq V$ též lineárním podprostorem ***generovaným*** množinou X.

Lineární obal IV

Pokud $[X] = S$, říkáme, že X ***generuje*** lineární podprostor S, případně, že X je ***generující množina*** nebo též ***množina generátorů*** lineárního podprostoru $S \subseteq V$.

Je-li $S = V$, t. j. je-li $[X] = V$, mluvíme o ***generující množině***. Používá se též název ***vytvářející či vytvořující množina***.

Kvůli přehlednosti ještě shrneme základní vlastnosti operace lineárního obalu $X \mapsto [X]$.

Lineární obal V

Tvrzení 4.2.2 *Pro libovolné podmnožiny X, Y vektorového prostoru V a $\mathbf{v} \in V$ platí:*

(a) $[\emptyset] = [\mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\}$;

(b) $X \subseteq [X]$;

(c) $X \subseteq Y \Rightarrow [X] \subseteq [Y]$;

(d) X *je lineární podprostor vo* V *právě tehdy, když* $X = [X]$;

(e) $[[X]] = [X]$;

(f) $\mathbf{v} \in [X] \Leftrightarrow [X \cup \{\mathbf{v}\}] = [X]$.

Součet I

4.3 Průnik a součet lineárních podprostorů

Nechť X, Y jsou libovolné podmnožiny vektorového prostoru V.

Potom množinu

$$X + Y = \{\mathbf{x} + \mathbf{y};\ \mathbf{x} \in X \ \&\ \mathbf{y} \in Y\}$$

nazýváme ***součtem*** množin X, Y.

Součet II

Tvrzení 4.3.1 *Nechť S, T jsou lineární podprostory vektorového prostoru V. Potom i $S \cap T$ a $S + T$ jsou lineární podprostory ve V. Navíc platí*

$$S + T = [S \cup T],$$

t. j. $S + T$ je nejmenší lineární podprostor ve V, který obsahuje S i T.

Sjednocení dvou lineárních podprostorů S, T vektorového prostoru V nemusí být lineárním podprostorem.

Součet III

Přesněji, $S \cup T$ je lineární podprostor ve V právě tehdy, když $S \subseteq T$ nebo $T \subseteq S$.

Součet lineárních podprostorů S, T vektorového prostoru V nazýváme ***přímý*** nebo též ***direktní součet***, pokud $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$; píšeme pak $S \oplus T$.

Součet IV

Tvrzení 4.3.2 *Nechť S, T jsou lineární podprostory vektorového prostoru V. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, *t.j. součet $S + T$ je direktní;*

(ii) *každý vektor $\mathbf{z} \in S + T$ má jednoznačné vyjádření ve tvaru $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, kde $\mathbf{x} \in S$, $\mathbf{y} \in T$.*

Závislost I

4.4 Lineární nezávislost

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$. Říkáme, že uspořádaná n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je ***lineárně závislá***, pokud existují skaláry $c_1, \ldots, c_n \in K$ tak, že $(c_1, \ldots, c_n) \neq \mathbf{0}$ a $c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$.

V opačném případě říkáme, že uspořádaná n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je ***lineárně nezávislá***.

Závislost II

Pro $n = 0$ kvůli úplnosti dodáváme, že uspořádanou 0-tici (t. j. prázdnou posloupnost) vektorů považujeme za lineárně nezávislou.

Místo „lineárně (ne)závislé uspořádané n-tici vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$“ budeme často mluvit jen o lineárně (ne)závislých vektorech $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Závislost III

Podle definice lineární nezávislosti jsou vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ lineárně nezávislé právě tehdy, když

$$(\forall\, c_1, \ldots, c_n \in K)$$
$$(c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; c_1 = \ldots = c_n = 0).$$

Pro n-tici skalárů $(c_1, \ldots, c_n) = \mathbf{0}$ platí

$$c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

pro libovolnou n-tici vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$, bez ohledu na to, zda je lineárně závislá nebo nezávislá.

Závislost IV

Pro některé n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ můžeme jako výsledek lineární kombinace $c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ dostat $\mathbf{0}$ i s pomocí ***jiné*** n-tice skalárů $(c_1, \ldots, c_n)$ než jen $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ – takovéto uspořádané n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ nazýváme ***lineárne závislé***.

Pro některé uspořádané n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je volba $(c_1, \ldots, c_n) = \mathbf{0}$ ***jediná možnost*** jak pomocí lineární kombinace $c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ získáme výsledek $\mathbf{0}$ – takovéto n-tice nazýváme ***lineárně nezávislé***.

Závislost V

Platí čtyři jednoduchá pozorování:

(a) jediný vektor $\mathbf{u}$ je lineárně nezávislý právě tehdy, když $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$;

(b) vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z nich je násobkem druhého;

(c) je-li některý z vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ roven $\mathbf{0}$, pak jsou tyto vektory lineárně závislé;

(d) pokud se některé dva z vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ rovnají, pak jsou tyto vektory lineárně závislé.

Závislost VI

Jinak řečeno, pouze uspořádaná n-tice nenulových a navzájem různých vektorů, z kterých žádný není násobkem druhého, může (ale stále ještě nemusí) být lineárně nezávislá.

Následující tabulka shrnuje vztah lineární závislosti vzhledem k relaci inkluze.

	$S_1 \subset S$	$S_1 \supset S$
S *nezávislá*	S_1 **bude nezávislá**	S_1 **může být oboje**
S *závislá*	S_1 **může být oboje**	S_1 **bude závislá**

Závislost VII

Tvrzení 4.4.1 *Pre libovolné* $n \in \mathbb{N}$ *a* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$ *jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *jsou lineárně závislé;*

(ii) *některý z vektorů* $\mathbf{u}_k$, $k \leq n$, *je lineární kombinací předcházejících;*

(ii') *některý z vektorů* $\mathbf{u}_k$, $k \leq n$, *je lineární kombinací nasledujících;*

(iii) *některý z vektorů* $\mathbf{u}_k$, $k \leq n$, *je lineární kombinace ostatních.*

Závislost VIII

Každý vektor $\mathbf{x}$ z lineárního obalu $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$$

pro nějakou n-tici skalárů $(c_1, \ldots, c_n)$.

Tvrzení 4.4.2 *Vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když každý vektor* $\mathbf{x} \in [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ *můžeme vyjádřit ve tvaru* $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ *pro jedinou uspořádanou* n*-tici* $(c_1, \ldots, c_n) \in K^n$*.*

Závislost IX

Nasledující tvrzení dává do souvislosti lineární (ne)závislost s lineárním obalom.

Tvrzení 4.4.3 *Nechť* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v} \in V$*, přičemž vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *jsou lineárně nezávislé. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $\mathbf{v} \in [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$*;*

(ii) *vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}$ *jsou lineárně závislé;*

(iii) $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}] = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$*.*

Závislost X

Věta 4.4.4 *Nechť* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$, *přičemž vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *jsou lineárně nezávislé. Potom z množiny* $\{1, \ldots, m\}$ *můžeme vybrat indexy* $i_1 < \ldots < i_k$ *tak, že vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_{i_1}, \ldots, \mathbf{v}_{i_k}$ *jsou lineárně nezávislé a generují stejný podprostor jako vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$.

Lineární obal v K^m I

4.5 Lineární obal a lineární nezávislost v prostorech K^m

Použití téže metody úpravy matic pomocí ERO na (redukovaný) stupňovitý tvar na řešení následujících tří otázek:

(1) rozhodnout pre dané vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y} \in K^m$ zda $\mathbf{y}$ patří nebo nepatří do lineárního obalu $[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$;

Lineární obal v K^m II

(2) rozhodnout pro dané vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in K^m$ zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé;

(3) vybrat z vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in K^m$ lineárně nezávislé vektory $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}$ $(j_1 < \ldots < j_k)$ tak, aby vektory $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}$ generovaly ve V stejný lineární podprostor jako vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Zavedeme dále označení, kterého sa budeme držet v celém odstavci.

Lineární obal v K^m III

Nechť $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y} \in K^m$ jsou sloupcové vektory, přičemž

$$\mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Označme $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in K^{m \times n}$ matici se sloupci $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, a $(\mathbf{X} \,|\, \mathbf{y}) \in K^{m \times (n+1)}$ blokovou matici složenou z matice $\mathbf{X}$ a vektoru $\mathbf{y}$.

Lineární obal v K^m IV

Potom pro $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in K^n$ platí:

(1) $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}$;

(2) $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Jinak řečeno:

(1) $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$ právě tehdy, když soustava $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}$ s rozšírenou maticí $(\mathbf{X} \,|\, \mathbf{y})$ má alespoň jedno řešení;

Lineární obal v K^m V

(2) vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když homogenní soustava $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$ má jediné řešení $\mathbf{c} = \mathbf{0}$; pokud tato soustava má i nějaké nenulové řešení, tak vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně závislé.

Otázku (1) umíme řešit. Stačí pomocí ERO upravit matici $(\mathbf{X} \,|\, \mathbf{y})$ na stupňovitý tvar. Pokud výsledná matice obsahuje řádek tvaru $(0, \ldots, 0 \,|\, z)$, kde $z \neq 0$, tak soustava $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}$ nemá řešení a $\mathbf{y} \notin [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$.

Lineární obal v K^m VI

Pokud sa takovýto řádek ve výsledné matici nenachází, tak soustava má alespoň jedno řešení a $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$.

Podobně je tomu s otázkou (2). Opět stačí pomocí ERO upravit matici $\mathbf{X}$ na stupňovitý tvar a podívat se, zda v každém sloupci leží vedoucí prvek nějakého řádku.

Pokud tento případ nastane, nemáme možnost zvolit parametry, $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ je jediným řešením soustavy $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$ a vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně nezávislé.

Lineární obal v K^m VII

V opačném případě máme možnost volby alespoň jednoho parametru, soustava má tedy nějaké nenulové řešení a vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně závislé.

Vedoucím prvkem řádku $(0, \ldots, 0 \,|\, z)$, kde $z \neq 0$, je právě v $(n+1)$-ním sloupci ležící prvek z.

Tedy matice v stupňovitém tvaru, která je řádkově ekvivalentní s $(\mathbf{X} \,|\, \mathbf{y})$ neobsahuje takový řádek právě tehdy, když v jejím posledním sloupci neleží vedoucí prvek žádného řádku.

Lineární obal v K^m VIII

Příklad 4.5.1 *Uvažme sloupcové vektory* $\mathbf{x}_1 = (1, 1, -1, -1)^T$, $\mathbf{x}_2 = (0, 1, 0, 1)^T$, $\mathbf{x}_3 = (3, 1, -3, -5)^T$, $\mathbf{x}_4 = (0, 0, 1, 2)^T$, $\mathbf{y} = (3, 5, -2, 1)^T$, $\mathbf{z} = (1, 1, 1, 1)^T$ *v prostoru* $\mathbb{R}^4$.

Máme rozhodnout, zda vektory $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ *leží v lineárním obalu* $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4]$.

Lineární obal v K^m IX

Označme si nasledující matice

$$(\mathbf{X} \mid \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right), \ (\mathbf{X} \mid \mathbf{z}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Lineární obal v K^m **X**

Matice $(\mathbf{X}\,|\,\mathbf{y})$, $(\mathbf{X}\,|\,\mathbf{z})$ jsou řádkově ekvivalentní s maticemi

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \textbf{resp.} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Okamžitě vidíme, že platí $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4]$ a $\mathbf{z} \notin [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4]$.

Lineární obal v K^m XI

Příklad 4.5.2 *Zjistíme, zda sloupce reálné matice*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

jsou lineárně závislé nebo nezávislé.

Lineární obal v K^m XII

Tato matice je řádkově ekvivalentní s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že slouce matice $\mathbf{X}$ jsou lineárně nezávislé.

Lineární obal v K^m XIII

Z druhé strany, $\mathbf{X}$ jakožto matice nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ je řádkově ekvivalentní s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy sloupce matice $\mathbf{X}$, chápané jakožto vektory z vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^4$, jsou lineárně závislé.

Lineární obal v K^m XIV

Tvrzení 4.5.3 *Nechť* $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in K^{m\times n}$ *jsou řádkově ekvivalentní matice, přičemž matice* $\mathbf{Y}$ *je ve stupňovitém tvaru. Pro* $1 \leq j \leq n$ *označme* $\mathbf{x}_j = \mathbf{s}_j(\mathbf{X})$ j*-tý sloupec matice* $\mathbf{X}$*. Nechť* $j_1 < \ldots < j_k$ *jsou indexy všech sloupců matice* $\mathbf{Y}$*, ve kterých leží vedoucí prvky jejich řádků. Potom platí:*

Lineární obal v K^m XV

(a) vektory $\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_k}$ jsou lineárně nezávislé;

(b) pokud v j-tém sloupci matice $\mathbf{Y}$ neleží vedoucí prvek žádného jejího řádku (t. j. $1 \leq j \leq n$ a $j \neq j_1, \dots, j_k$), tak vektor $\mathbf{x}_j$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_l}$, kde $l \leq k$ je největší index, pro který platí $j_l < j$;

(c) $[\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_k}] = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$.

Lineární obal v K^m XVI

Výše uvedené tvrzení nám dáva přímý návod na řešení otázky (3).

Stačí pomocí ERO upravit matici $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ na matici $\mathbf{Y}$ v stupňovitém tvaru a zjistit v ní indexy $j_1 < \dots < j_k$ všech sloupců, ve kterých leží vedoucí prvky jejich řádků.

Potom $\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_k}$ jsou hledané lineární nezávislé vektory, které generují lineární podprostor $[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$.

Lineární obal v K^m XVII

Příklad 4.5.4 *Ze sloupců reálné matice*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

je třeba vybrat lineární nezávislé sloupce, které generují lineární obal všech sloupců matice $\mathbf{X}$*.*

Lineární obal v K^m XVIII

Matice $\mathbf{X}$ je řádkově ekvivalentní s maticí

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve stupňovitém tvaru.

Lineární obal v K^m XIX

Vedoucí prvky řádků matice $\mathbf{Y}$ se nachází ve sloupcích 1, 2 a 4. Hledané vektory jsou tedy sloupce 1, 2 a 4 matice $\mathbf{X}$. Zapsané vedle sebe pak tvoří matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lineární obal v K^m XX

Poznámka. Výše uvedený postup řešení otázek (1), (2) a (3) pro prostory sloupcových vektorů K^m lze modifikovat na prostory řádkových vektorů K^m – např. transponováním příslušných matic řádkových vektorů nebo nahrazením elementárních řádkových operací sloupcovými.

Lineárně nezávislé posloupnosti I

4.6 Lineárně nezávislé posloupnosti a množiny

Nekonečnou posloupnost $(\mathbf{u}_k)_{k=0}^{\infty} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \ldots)$ vektorů z prostoru V nazýváme ***lineárně nezávislou***, pokud každá její konečná podposloupnost $(\mathbf{u}_{k_1}, \ldots, \mathbf{u}_{k_n})$, kde $0 \le k_1 < \ldots < k_n$, je lineárně nezávislá.

Lineárně nezávislé posloupnosti II

Tvrzení 4.6.1 *Nekonečná posloupnost* $(\mathbf{u}_k)_{k=0}^{\infty}$ *vektorů z* V *je lineárně nezávislá právě tehdy, když pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je její počáteční úsek* $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ *lineárně nezávislý.*

Například posloupnost $(1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots)$ všech mocnin x je lineárně nezávislá posloupnost ve vektorovém prostoru $K[x]$ všech polynomů v proměnné x nad tělesem K. Polynom $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ je (definitoricky) nulový právě tehdy, když $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Lineárně nezávislé posloupnosti III

Množina $X \subseteq V$ sa nazývá ***lineárně nezávislá***, pokud pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ každá uspořádaná n-tice ***navzájem různých*** vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ z množiny X je lineárně nezávislá.
Kdyby totiž $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ nebyly navzájem různé vektory, nemohly by být lineárně nezávislé.
Lineární závislost či nezávislost uspořádané n-tice vektorů nezávisí na jejich pořadí.

Lineárně nezávislé posloupnosti IV

Zřejmě uspořádaná n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když je lineárně nezávislá uspořádaná n-tice $(\mathbf{u}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{u}_{\sigma(n)})$, kde σ je libovolná permutace množiny $\{1, \ldots, n\}$.

Tedy, lineární (ne)závislost uspořádané n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ navzájem různých vektorů je vlastností množiny $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$.

Lineárně nezávislé posloupnosti V

Tvrzení 4.6.2 *Uspořádaná n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ navzájem různých vektorů z V je lineárně nezávislá právě tehdy, když množina $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subseteq V$ je lineárně nezávislá.*

Lineárně nezávislé posloupnosti VI

Tvrzení 4.6.3 *Nechť $X \subseteq V$ je lineárně nezávislá množina a $\mathbf{v} \in V$. Potom nasledující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $\mathbf{v} \in [X]$;

(ii) *množina $X \cup \{\mathbf{v}\}$ je lineárně závislá;*

(iii) $[X \cup \{\mathbf{v}\}] = [X]$.