2. ZÁKLADY MATICOVÉHO POČTU

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

Abstrakt přednášky

Abstrakt

V této kapitole se seznámíme s ***maticemi***, t. j. obdélníkovými tabulkami, s jejichž pomocí budeme kódovat nejrůznější důležité údaje o vektorových prostorech, a naučíme se s nimi pracovat.

Obsah přednášky

Obsah

2 Základy maticového počtu **4**

2.1 Matice nad danou množinou . . . 4

2.1.1 Typy matic 4

2.1.2 Řádky a sloupce matice . . 9

2.1.3 Transponovaná matice . . 13

2.1.4 Blokové matice 18

2.2 Matice nad daným číselným tělesem 25

2.2.1 Vektorový prostor matic . . 28

2.2.2 Násobení matic 31

2.2.3 Operace s blokovými maticemi 51

Matice nad danou množinou I

2 Základy maticového počtu

2.1 Matice nad danou množinou

2.1.1 Typy matic

Nechť X je libovolná množina a $m, n \in \mathbb{N}$. ***Maticí typu*** $m \times n$, nebo též $m \times n$-rozměrnou maticí nad množinou X rozumíme obdélníkovou tabulku

Matice nad danou množinou II

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

sestávající z prvků množiny X. Zkráceně též píšeme $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, nebo pouze $\mathbf{A} = (a_{ij})$.

Matice nad danou množinou III

Prvky $a_{ij} \in X$, kde $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, se nazývají ***prvky matice*** $\mathbf{A}$.
Prvek a_{ij}, který se nachází v i-tém řádku a j-tém sloupci matice $\mathbf{A}$ nazýváme též ***prvek v místě*** (na pozici) (i, j), resp. (i, j)***-tý prvek*** matice $\mathbf{A}$.
Množinu všech $m \times n$-rozměrných matic nad množinou X značíme $X^{m \times n}$ (někdy též $Mat_{m,n}(X)$). Pokud $m = n$, mluvíme o ***čtvercových maticích řádu*** n nad množinou X.

Matice nad danou množinou IV

Poznamenejme, že v případě, když některé z čísel m, n je 0, množina $X^{m\times n}$ sestáva z jediné a to ***prázdné*** matice $\emptyset$. Dále se budeme vždy bavit jen o maticích kladných rozměrů $m \times n$.

Dvě matice nad množinou X považujeme za ***navzájem stejné*** neboli ***totožné***, pokud mají stejné rozměry a stejné prvky na příslušných místech.

Matice nad danou množinou V

To znamená, že pro matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{p\times q}$ nad X klademe $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ právě tehdy, když $m = p$, $n = q$ a pro všechny $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ platí $a_{ij} = b_{ij}$. Množina matic typu $1 \times n$ nad X splývá s množinou X^n, pokud uspořádané n-tice prvků z X zapisujeme do řádku. Podobně, pokud uspořádané m-tice prvků z X zapisujeme do sloupce, tak množina matic typu $m \times 1$ nad X splývá s množinou X^m.

Matice nad danou množinou VI

2.1.2 Řádky a sloupce matice

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in X^{m\times n}$. Uspořádanou n-tici

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in X^{1\times n},$$

kde $1 \le i \le m$, nazýváme ***i-tým řádkem*** matice $\mathbf{A}$.

Matice nad danou množinou VII

Podobně, uspořádanou m-tici

$$\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

kde $1 \le j \le n$, nazýváme ***j-tým sloupcem*** matice $\mathbf{A}$.

Matice nad danou množinou VIII

Matici $\mathbf{A}$ tak můžeme ztotožnit jak se sloupcem složeným z jejích řádků tak s řádkem složeným z jejích sloupců, t. j.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m}{}^{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \mathbf{r}_2(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix}.$$

Matice nad danou množinou IX

a

$$\mathbf{A} = \Big(\mathbf{s}_1(\mathbf{A}),\ \mathbf{s}_2(\mathbf{A}),\ \ldots,\ \mathbf{s}_n(\mathbf{A}) \Big).$$

Matice nad danou množinou X

2.1.3 Transponovaná matice

Matici, kterou získáme z matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ záměnou jejích řádků a sloupců, nazýváme ***transponovanou maticí*** k matici $\mathbf{A}$ a značíme ji $\mathbf{A}^T$.

Matice nad danou množinou XI

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_m^n \end{pmatrix}.$$

To znamená, že $\mathbf{A}^T \in X^{n\times m}$ a prvek na pozici (i,j) matice $\mathbf{A}^T$ je a_{ji}.

Matice nad danou množinou XI

Zřejmě pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in X^{m \times n}$ platí

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}.$$

Transpozicí matic-řádků z $X^{1 \times n}$ dostaneme matice-sloupce z $X^{n \times 1}$ a transpozicí matic-sloupců z $X^{m \times 1}$ matice-řádky z $X^{1 \times m}$.

Matice nad danou množinou XII

Na základě této poznámky lze snadno vidět, že pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in X^{m \times n}$ a $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ platí

$$\mathbf{s}_i(\mathbf{A}^T) = \mathbf{r}_i(\mathbf{A})^T, \qquad \mathbf{r}_j(\mathbf{A}^T) = \mathbf{s}_j(\mathbf{A})^T.$$

Matice nad danou množinou XIII

Čtvercová matice $\mathbf{A} \in X^{n \times n}$ se nazývá ***symetrická***, pokud $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, t. j. pokud $a_{ij} = a_{ji}$ pro všechny indexy $i, j = 1, \ldots, n$.

Posloupnost prvků $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ nazýváme ***diagonálou*** čtvercové matice $\mathbf{A}$.

Transponovanou matici k čtvercové matici $\mathbf{A}$ zřejmě získáme „osovou souměrností“ jejich prvků podle diagonály.

Matice nad danou množinou XIV

2.1.4 Blokové matice

Někdy bude užitečné spojit dvě matice $\mathbf{A} \in X^{m \times n_1}$, $\mathbf{B} \in X^{m \times n_2}$ se stejným počtem řádků do jedné matice tak, že příslušné tabulky jednoduše napíšeme vedle sebe. Výsledná matice je typu $m \times (n_1 + n_2)$ a značíme ji $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, případně $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{B})$.

Matice nad danou množinou XV

Podobně můžeme spojit dvě matice $\mathbf{A} \in X^{m_1 \times n}$, $\mathbf{B} \in X^{m_2 \times n}$ se stejným počtem sloupců do jedné matice tak, že příslušné tabulky napíšeme pod sebe. Výsledná matice je typu $(m_1 + m_2) \times n$ a značíme ji

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \text{ případně } \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

Matice nad danou množinou XVI

Právě popsané konstrukce jsou příklady tzv. ***blokových matic***. Původní matice, ze kterých takto vytváříme blokovou matici, potom nazývame jejími ***bloky***.

Samozřejmě můžeme vedle sebe resp. pod sebe zařadit větší počet bloků než pouze dva.

Naopak, někdy může být účelné vyznačit v dané matici nějaké menší obdélníkové části jako její bloky.

Matice nad danou množinou XVII

Pak mluvíme o tzv. ***blokovém tvaru*** dané matice.

Příkladem toho byl zápis matice $\mathbf{A} \in X^{m \times n}$ jako řádku složeného z jejích sloupců, případně jako sloupce složeného z jejích řádků.

Uvedená dvě schemata vytváření blokových matic „vedle sebe“ a „pod sebe“ můžeme kombinovat.

Matice nad danou množinou XVIII

Např. z matic $\mathbf{A}_{11} \in X^{m_1 \times n_1}$, $\mathbf{A}_{12} \in X^{m_1 \times n_2}$, $\mathbf{A}_{21} \in X^{m_2 \times n_1}$, $\mathbf{A}_{22} \in X^{m_2 \times n_2}$ můžeme vytvořit blokovou matici

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

typu $(m_1 + m_2) \times (n_1 + n_2)$.

Matice nad danou množinou XIX

Tuto konstrukci můžeme zřejmým způsobem zevšeobecnit i na větší systémy matic a zapsat ve tvaru

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{ij})_{k\times l} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{k1} & \dots & \mathbf{A}_{kl} \end{pmatrix},$$

Matice nad danou množinou XX

přičemž jednotlivé bloky $\mathbf{A}_{ij}$ jsou matice nad X rozměrů $m_i \times n_j$, kde $(m_1, \ldots, m_k)$, $(n_1, \ldots, n_l)$ jsou nějaké konečné posloupnosti přirozených čísel.

Matici nad množinou X z této „matice matic“ dostaneme tak, že si v $\mathbf{A}$ odmyslíme vnitřní závorky oddělující její jednotlivé bloky $\mathbf{A}_{ij}$.

Matice nad daným tělesem I

2.2 Matice nad daným číselným tělesem

Na množině X, nad kterou jsme vytvářeli příslušné matice, jsme doposud nepředpokládali žádnou další strukturu.

Na množinách matic $X^{m\times n}$ sa nám poměrně bohatá struktura přirozeným způsobem objevila.

Matice nad daným tělesem II

Všechny doposud zavedené maticové operace a vlastnosti však měly výlučně ***poziční charakter*** – zakládaly sa na reprezentaci každé matice jako příslušné obdélníkové tabulky.

Další maticové operace a vlastnosti, které hodláme zavést a později využívat, už budou podmíněné přítomností jisté struktury na množině X.

Matice nad daným tělesem III

Nejdůležitější a, až na pár vyjímek, vlastně jediný druh matic, jimiž se budeme zabývat, tvoří matice nad nějakým tělesem.

V celém odstavci K označuje pevně zvolené, jinak však libovolné těleso.

V souladu s předešlým odstavcem $K^{m\times n}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$, označuje množinu všech matic typu $m \times n$ nad číselným tělesem K.

Matice nad daným tělesem IV

2.2.1 Vektorový prostor matic

Pro pevné $m, n \in \mathbb{N}$ budeme na množině matic $K^{m\times n}$ definovat po složkách operace součtu a skalárního násobku. Tedy pro matice $\mathbf{A} = (a_i{}^{j})^{m\times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}$ nad K a $c \in K$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}, \\ c\mathbf{A} &= (ca_{ij})_{m\times n}. \end{aligned}$$

Matice nad daným tělesem V

Součet matic $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ je definovaný jen pro matice A, B stejného typu a samotná matice $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ je téhož typu jako A a B.

Neutrálním prvkem operace sčítání na $K^{m \times n}$ je matice typu $m \times n$, jejíž všechny prvky jsou nulové; nazýváme ji ***nulová matice*** typu $m \times n$ a označujeme ji $\mathbf{0}_{m,n}$, resp. $\mathbf{0}$, je-li její rozměr jasný z kontextu nebo na něm nezáleží.

Matice nad daným tělesem VI

Opačným prvkem k matici $A = (a_{ij})_{m\times n}$ je zřejmě matice $-\mathbf{A} = (-a_{ij})_{m\times n}$.

Matice pevného typu $m \times n$ nad tělesem K s takto definovanými operacemi součtu a skalárního násobku tvoří ***vektorový prostor*** nad tělesem K tj. $K^{m\times n}$ bude dále označovat příslušný vektorový prostor.

Matice nad daným tělesem VII

2.2.2 Násobení matic

Nejprve sa naučíme násobit některé dvojice vektorů.
Součinem $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ***řádkového vektoru*** $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in K^{1\times n}$ ***a sloupcového vektoru*** $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T \in K^{n\times 1}$ rozumíme skalár

Matice nad daným tělesem VIII

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1, \ldots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \, .$$

V tomto případě jde o běžný „***skalární součin***“ vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K^n$.

Matice nad daným tělesem VIII

Snadno se ověří, že pre všechna $n \in \mathbb{N}$, $c \in K$ a $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in K^{1\times n}$, $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in K^{n\times 1}$ platí

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{y}') &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}', \\
(\mathbf{x} + \mathbf{x}') \cdot \mathbf{y} &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}, \\
\mathbf{x} \cdot c\mathbf{y} = c(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) &= c\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \\
\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{x}^T.
\end{aligned}$$

Matice nad daným tělesem IX

Pro takto definovaný součin vektorů jsou splněné dobře známé vlastnosti „skalárního součinu“.

Říkáme, že násobení řádkových a sloupcových vektorů je ***distributivní*** (z obou stran) vzhledem ke sčítání a ***komutuje***, t. j. je zaměnitelné s operací skalárního násobku.

Poslední rovnost můžeme chápat jako „komutativitu“ tohoto součinu; vděčíme za ni komutativitě násobení v tělese K.

Matice nad daným tělesem X

Nechť $m, n, p \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B} = (b_{jk})_{n\times p}$.

Součinem matic A, B rozumíme matici

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{B}))_{m\times p}.$$

Všimněme si, že součin matic A, B je definovaný, pouze pokud se počet sloupců matice A rovná počtu řádků matice B, t. j. právě tehdy, když řádky matice A a sloupce matice B mají stejný rozměr.

Matice nad daným tělesem XI

Součin matic typů $m \times n$ a $n \times p$ je matice typu $m \times p$, což si můžeme lehce zapamatovat v symbolickém tvaru

$$[m \times n] \cdot [n \times p] = [m \times p],$$

připomínajícím rozměrové vztahy ve fyzice.

Součin dvou čtvercových matic typu $n \times n$ je tedy opět matice typu $n \times n$.

Matice nad daným tělesem XII

Prvek na pozici (i,k) matice $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ dostaneme jako součin i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ a k-tého sloupce matice $\mathbf{B}$, tedy jako výraz

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot\mathbf{s}_k(\mathbf{B}) = (a_{i1},\ldots,a_{in})\cdot\begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}$$
$$= a_{i1}b_{1k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\,.$$

Matice nad daným tělesem XIII

Snadno pak ověříme následující rovnosti

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}, \qquad \mathbf{s}_k(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{s}_k(\mathbf{B}).$$

Matice nad daným tělesem XIV

Násobení matic je (z obou stran) ***distributivní*** vzhledem ke sčítání. To znamená, že pro libovolné $m, n \in \mathbb{N}$ a matice $\mathbf{A}, \mathbf{A}' \in K^{m\times n}$, $\mathbf{B}, \mathbf{B}' \in K^{n\times p}$ platí

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{B}') &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}', \\ (\mathbf{A}+\mathbf{A}')\cdot\mathbf{B} &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}'\cdot\mathbf{B}. \end{aligned}$$

Matice nad daným tělesem XV

Z distributivity součinu vektorů vzhledem k jejich součtu je totiž jasné, že (i,k)-tý prvek matice $\mathrm{A}\cdot(\mathrm{B}+\mathrm{B}')$ je

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot\mathbf{s}_k(\mathbf{B}+\mathbf{B}') &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot(\mathbf{s}_k(\mathbf{B})+\mathbf{s}_k(\mathbf{B}')) \\ &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot\mathbf{s}_k(\mathbf{B})+\mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot\mathbf{s}_k(\mathbf{B}'),\end{aligned}$$

tedy sa rovná (i,k)-tému prvku matice $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}+\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}'$. Podobně pro druhou rovnost.

Matice nad daným tělesem XVI

Podobně, s využitím zaměnitelnosti součinu vektorů a skalárního násobku můžeme dokázat, že pre libovolný skalár $c \in K$ a všechny matice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$ platí

$$\mathbf{A} \cdot c\mathbf{B} = c(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = c\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Říkáme pak, že násobení matic ***komutuje***, t. j. je zaměnitelné s operací skalárního násobku.

Matice nad daným tělesem XVII

Násobení matic je též ***asociativní***: pro $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n\times p}$, $\mathbf{C} \in K^{p\times q}$ platí

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}.$$

Pro důkaz toho si stačí uvědomit, že pro libovolné vektory $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in K^{1\times n}$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_p)^T \in K^{p\times 1}$ platí:

Matice nad daným tělesem XVIII

$$\mathbf{x}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{y}) = (x_1,\dots,x_n)\cdot\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{p} b_{1k}y_k\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{p} b_{nk}y_k\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}y_k\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j b_{jk}\right) y_k =$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j b_{j1},\dots,\sum_{j=1}^{n} x_j b_{jp}\right)\cdot\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_p\end{pmatrix} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{y}$$

Matice nad daným tělesem XIX

Pak pro $1 \leq i \leq m$, $1 \leq l \leq q$, je i-tý prvek na pozici (i, l) matice $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_l(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{s}_l(\mathbf{C})) \\ &= (\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{s}_l(\mathbf{C}) \\ &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{s}_l(\mathbf{C}), \end{aligned}$$

tedy sa rovná (i, l)-tému prvku matice $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$.

Matice nad daným tělesem XX

Čtvercovou matici řádu n, která má všechny prvky na diagonále rovné 1 a mimo diagonálu 0, označujeme I_n a nazýváme ***jednotková matice*** řádu n.

S použitím tzv. ***Kroneckerova symbolu***

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pro } i = j, \\ 0, & \text{pro } i \neq j, \end{cases}$$

Matice nad daným tělesem XXI

můžeme psát

$$\mathbf{I}_n = (\delta_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice nad daným tělesem XXII

Jednotkové matice hrají úlohu neutrálních prvků pro násobení matic. Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ platí

$$\mathbf{I}_m \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n.$$

Množina $K^{n\times n}$ všech čtvercových matic řádu n je kromě struktury vektorového prostoru vybavená asociativní operací násobení, která je (z obou stran) distributivní vzhledem ke sčítání matic, komutuje s operací skalárního násobku a jednotková matice $\mathbf{I}_n$ je její neutrální prvek.

Matice nad daným tělesem XXIII

To nám, podobně jako pro prvky tělesa K, umožňuje zavést i ***mocniny čtvercových matic***.

Pre $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$, klademe $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$ a

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \ldots \cdot \mathbf{A}}_{k\text{-krát}},$$

pro $0 < k \in \mathbb{N}$; tedy $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, atd.

Matice nad daným tělesem XXIV

Uvědomme si, že pro $n > 1$ – naproti komutativitě násobení v tělese K – násobení matic z pozičních důvodů *není komutativní* na $K^{n\times n}$. Například

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1+1 \end{pmatrix}.$$

Matice nad daným tělesem XXV

Naproti tomu komutativita násobení v tělese K má za důsledek, že pre všechna m, n, p a matice $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n\times p}$ platí rovnost

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T.$$

Totiž

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{B}) = \mathbf{s}_k(\mathbf{B})^T \cdot \mathbf{r}_i(\mathbf{A})^T = \mathbf{r}_k(\mathbf{B}^T) \cdot \mathbf{s}_i(\mathbf{A}^T).$$

Matice nad daným tělesem XXVI

2.2.3 Operace s blokovými maticemi

Operace maticového součtu a skalárního násobku můžeme na blokových maticích rozložit na jednotlivé bloky. Jsou-li $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{ij})_{k \times l}$, $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{ij})_{k \times l}$ blokové matice nad číselným tělesem K a odpovídající si si bloky $\mathbf{A}_{ij}$, $\mathbf{B}_{ij}$ se stejným typem $m_i \times n_j$, tak jejich součet je opět

Matice nad daným tělesem XXVII

bloková matice

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij})_{k \times l}$$

s bloky stejných typů. S operací skalárního násobku je to ještě jednodušší, totiž nemusíme se starat o shodnost rozměrů jednotlivých bloků.

$$c\mathbf{A} = (c\mathbf{A}_{ij})_{k \times l}.$$

Matice nad daným tělesem XXVIII

Bloková struktura sa přenáší i na součin matic za podmínky, že sloupce první matice jsou ve stejném pořadí rozděleny na stejný počet stejně velkých skupin, řekněme $n_1 + n_2 + \ldots + n_\nu$, jako sloupce druhé matice. Tedy pokud $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{ij})_{\mu \times \nu}$, $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{jk})_{\nu \times \vartheta}$ jsou blokové matice nad K, přičemž blok $\mathbf{A}_{ij}$ je typu $m_i \times n_j$ a blok $\mathbf{B}_{jk}$ typu $n_j \times p_k$, tak jejich součin je bloková matice tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{C}_{ik})_{\mu \times \vartheta}$, kde blok

$$\mathbf{C}_{ik} = \mathbf{A}_{i1} \cdot \mathbf{B}_{1k} + \mathbf{A}_{i2} \cdot \mathbf{B}_{2k} + \ldots + \mathbf{A}_{in} \cdot \mathbf{B}_{nk}$$

je typu $m_i \times p_k$.

Matice nad daným tělesem XXIX

Blokové matice násobíme stejně jako „obyčejné“ matice, jen s tím rozdílem, že součet resp. součin v číselném tělese K nahradíme součtem resp. součinem matic.

Jednotkové matice $\mathbf{I}_n$ jsou příkladem tzv. diagonálních matic. Čtvercovou matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ nazýváme ***diagonální***, pokud $a_{ij} = 0$ pro všechny $i \neq j$, t. j. pokud všechny její prvky mimo diagonálu jsou nuly.

Matice nad daným tělesem XXX

Diagonální matici, která má na diagonále postupně prvky $d_1, d_2, \ldots, d_n \in K$ značíme $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Tedy např.

$$\mathbf{I}_n = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n\text{-krát}}).$$

Podobně můžeme definovat i tzv. blokově diagonální matice.

Matice nad daným tělesem XXXI

Pokud $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$ jsou čtvercové matice řádů $n_1, n_2, \ldots, n_k$, tak ***blokově diagonální maticí*** s bloky $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$ nazýváme čtvercovou blokovou matici

$$\mathrm{diag}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{A}_k \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{0}$ nacházející se na pozici (i, j) označuje nulovou matici $\mathbf{0}_{n_i n_j}$.

Matice nad daným tělesem XXXII

Pravidlo o součinu blokových matic se redukuje na zvlášť jednoduchý tvar pro blokově diagonální matice – násobení funguje ***diagonálně po složkách***. Pokud $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k)$, $\mathbf{B} = \mathrm{diag}(\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_k)$ jsou blokově diagonální matice, přičemž odpovídající si bloky $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_i$ jsou čtvercové matice stejného řádu n_i, jejich součin je blokově diagonální matice tvaru

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathrm{diag}(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{B}_k)$$

s čtvercovými bloky řádů $n_1, \ldots, n_k$.

Matice nad daným tělesem XXXIII

Speciálně, pro „obyčejné“ diagonální matice platí

$$\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \cdot \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n) =$$
$$\operatorname{diag}(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n).$$

Platí analogická pravidla pro součet a skalární násobek (blokově) diagonálních matic.

Matice nad daným tělesem XXXIV

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \operatorname{diag}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{A}_k + \mathbf{B}_k) \\ c\mathbf{A} &= \operatorname{diag}(c\mathbf{A}_1, \ldots, c\mathbf{A}_k) \end{aligned}$$

Matice nad vektorovým prostorem I

2.3 Matice nad vektorovým prostorem

Matice typu $m \times n$ nad tělesem K jsou speciálním druhem blokových matic.
Matici $\mathbf{A} = (a_i{}^j) \in K^{m \times n}$ můžeme považovat jednak za blokovou matici s bloky a_{ij} typu 1×1, jednak se na ni můžeme dívat jako na řádek jejich sloupců resp. jako na sloupec jejích řádků.

Matice nad vekt. prostorem II

$\mathbf{A}$ pak chápeme jako matici typu $m \times 1$ nad vektorovým prostorem $K^{1\times n}$, resp. jako matici typu $1 \times n$ nad vektorovým prostorom $K^{m\times 1}$.

Pro libovolné $m, n \in \mathbb{N}$ a libovolný (abstraktní) vektorový prostor V máme definovanou množinu $V^{m\times n}$ všech matic nad množinou V.

Na množině $V^{m\times n}$ můžeme zavést operace součtu a skalárního násobku po složkách. $V^{m\times n}$ s těmito operacemi tvoří vektorový prostor nad tělesem K.

Matice nad vekt. prostorem III

Zobecníme nyní operaci skalárního násobku $K \times V \to V$ na operaci součinu mezi maticemi vhodných typů nad K a nad V.

Pro matice $\mathbf{A} = \left(a_i{}^j\right) \in K^{m \times n}$,

$\alpha = \left(\mathbf{u_{jk}}\right) \in \mathbf{V^{n \times p}}$ klademe

$\mathbf{A} \cdot \alpha = \left(\mathbf{v_{ik}}\right) \in \mathbf{V^{m \times p}}$, kde

$$\mathbf{v}_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathbf{u}_{jk} \, .$$

Matice nad vekt. prostorem IV

Tedy součin $\mathbf{A} \cdot \alpha$ definujeme z formálního hlediska stejně jako součin matic nad tělesem K, jen s tím rozdílem že operace součtu v K je nahrazená operací součtu ve V a operace součinu v K je nahrazená operací skalárního násobku $K \times V \to V$.

Pro násobení matic nad V maticemi nad K platí distributivita (z obou stran) vzhledem ke sčítání, zaměnitelnost s operací skalárního násobku, asociativita a postavení jednotkových matic jako neutrálních prvků.

Matice nad vekt. prostorem V

To znamená, že pro všechna $l, m, n, p \in \mathbb{N}$, $c \in K$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{C} \in K^{l\times m}$ α, $\beta \in \mathbf{V^{n\times p}}$ platí:

$$\mathbf{A}\cdot(\alpha+\beta) = \mathbf{A}\cdot\alpha + \mathbf{A}\cdot\beta,$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\alpha = \mathbf{A}\cdot\alpha + \mathbf{B}\cdot\alpha,$$

$$\mathbf{A}\cdot(c\alpha) = \mathbf{c}(\mathbf{A}\cdot\alpha) = (\mathbf{cA})\cdot\alpha,$$

$$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\cdot\alpha) = (\mathbf{C}\cdot\mathbf{A})\cdot\alpha,$$

$$\mathbf{I}_n\cdot\alpha = \alpha.$$

Matice nad vekt. prostorem VI

Dle úmluvy, že $\mathbf{x}c = c\mathbf{x}$ pro $c \in K$, $\mathbf{x} \in V$, můžeme definovat i součin matic $\beta = (\mathbf{v_{ij}}) \in \mathbf{V^{m\times n}}$, $\mathrm{B} = (\mathbf{b}_{jk}) \in K^{n\times p}$ v obráceném pořadí jako matici $\beta \cdot \mathrm{B} = (\mathbf{w_{ik}}) \in \mathbf{V^{m\times p}}$ takovou, že

$$\mathbf{w}_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{v}_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \mathbf{v}_{ij} \,.$$

Matice nad vekt. prostorem VII

S využitím poslední definice můžeme pro $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$, $\alpha \in \mathbf{V^{n\times p}}$, $\beta \in \mathbf{V^{m\times n}}$, $\mathbf{B} \in K^{n\times p}$ dokázat rovnosti

$$(\mathbf{A}\cdot\alpha)^{\mathbf{T}} = \alpha^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{A}^{\mathbf{T}}, \qquad (\beta\cdot\mathbf{B})^{\mathbf{T}} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\cdot\beta^{\mathbf{T}}.$$

Tedy i pro násobení matic nad K maticemi nad V platí distributivita (z obou stran) vzhledem ke sčítání, zaměnitelnost s operací skalárního násobku, asociativita a postavení jednotkových matic jako neutrálních prvků.

Matice nad vekt. prostorem VIII

To znamená, že pre všechna $m, n, p, q \in \mathbb{N}$, $c \in K$, α, $\beta \in \mathbf{K^{m\times n}}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in V^{n\times p}$, $\mathbf{C} \in K^{p\times q}$ platí:

$$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{A} = \alpha \cdot \mathbf{A} + \beta \cdot \mathbf{A},$$

$$\alpha \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha \cdot \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{B},$$

$$\alpha \cdot (\mathbf{cA}) = \mathbf{c}(\alpha \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{c}\alpha) \cdot \mathbf{A},$$

$$\alpha \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) = (\alpha \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C},$$

$$\alpha \cdot \mathbf{I_n} = \alpha.$$

Matice nad vekt. prostorem IX

Vztahy pro řádky a sloupce součinu z odstavce 2.2.2 zůstávají zachované pre oba typu součinů matic nad K a V, t. j.

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}\cdot\alpha) = \mathbf{r_i}(\mathbf{A})\cdot\alpha, \qquad \mathbf{s_k}(\mathbf{A}\cdot\alpha) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{s_k}(\alpha)$$

$$\mathbf{r}_i(\beta\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{r_i}(\beta)\cdot\mathbf{B}, \qquad \mathbf{s_k}(\beta\cdot\mathbf{B}) = \beta\cdot\mathbf{s_k}(\mathbf{B})$$

pre všechny $\mathbf{A}\in K^{m\times n}$, $\alpha\in\mathbf{V^{n\times p}}$ $\beta\in\mathbf{V^{m\times n}}$, $\mathbf{B}\in K^{n\times p}$.

Matice nad vekt. prostorem X

Definice součinů $\mathbf{A} \cdot \alpha$, $\beta \cdot \mathbf{B}$ jsou ve shodě s původním násobením matic.
Chápeme-li matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ jakožto řádek, t. j. jakožto matici typu $1 \times n$ nad prostorem sloupcových vektorů K^m, tak pro $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$ splývá matice $(\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \cdot \mathbf{B}$ vypočítaná podle „nové“ definice s blokovým tvarem $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_1(\mathbf{B}), \ldots, \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_p(\mathbf{B}))$ matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

Matice nad vekt. prostorem XI

Podobně, chápeme-li B jako sloupec, t. j. jako matici typu $n \times 1$ nad prostorem řádkových vektorů K^p, tak

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{B}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n(\mathbf{B}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Matice nad vekt. prostorem XII

Speciálně, lineární kombinaci $a_1\mathbf{x}_1 + \ldots a_n\mathbf{x}_n$ vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$ s koeficienty $a_1, \ldots, a_n \in K$ můžeme s využitím vektorových matic zapsat ve tvaru součinů

$$(a_1, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$