11. EUKLIDOVSKÉ VEKTOROVÉ PROSTORY

Jan Paseka

18. prosince 2003

Abstrakt přednášky

Při našich dosavadních úvahách o vektorových prostorech jsme pomocí operací sčítání vektorů a násobení čísla s vektorem vyšetřovali pojmy jako byla lineární závislost a nezávislost vektorů, generovatelnost, souřadnice vektoru, atd. Prozatím jsme však neměli možnost ve vektorových prostorech „měřit“, tzn. zjišťovat a porovnávat délky vektorů, resp. odchylky (tj. velikosti úhlů), což jsou pojmy, které hrají podstatnou roli např. v geometrii. Jejich definice jsou založeny na pojmu skalárního součinu, který nyní zavedeme. Omezíme se přitom však pouze na vektorové prostory nad tělesem reálných čísel.

11.1. Skalární součin, velikost a odchylka vektorů

Úmluva. Všude v dalším v této kapitole budeme vektorovým prostorem rozumět *reálný vektorový prostor*, tj. (konečnědimenzionální) vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ reálných čísel.

Definice. Nechť V je vektorový prostor (nad $\mathbb{R}$) a nechť každé dvojici vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ je přiřazeno reálné číslo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ tak, že pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $r \in \mathbb{R}$ platí:

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$,

2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$,

3. $(r \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = r \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,

4. je-li $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, pak $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$.

Potom reálné číslo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ se nazývá *skalární součin* vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Vektorový prostor, v němž je definován skalární součin, se nazývá euklidovský vektorový prostor nebo krátce *euklidovský prostor*.

Poznámka. 1. Z definice plyne, že euklidovský prostor je vlastně uspořádaná dvojice $(V, \cdot)$ sestávající z vektorového prostoru V a ze skalárního součinu $\cdot$ definovaného ve V. Z důvodů stručnosti však budeme obvykle říkat pouze „euklidovský prostor V“ (tzn. zavedeme podobnou úmluvu jako u grup nebo těles, u nichž při označování vynecháváme symboly operací, pokud není nebezpečí nedorozumění).

Poznámka. 2. Z kapitoly I. víme, že každý podprostor vektorového prostoru V nad T je sám vektorovým prostorem nad T. Je-li specielně V euklidovským prostorem, tzn. je reálný s definovaným skalárním součinem, pak zřejmě axiomy skalárního součinu budou jistě splněny i v jeho libovolném (vektorovém) podprostoru. To znamená, že každý (vektorový) podprostor euklidovského prostoru V je sám euklidovským prostorem. Budeme jej stručně nazývat *podprostor euklidovského prostoru*.

Předchozí definice nic neříká o tom, zda v libovolném vektorovém prostoru (nad $\mathbb{R}$) lze definovat skalární součin, resp. kolika způsoby. Odpověď na tyto otázky nám dá následující příklad a věta.

Příklad 1.1. Nechť $V = \mathbb{R}^2$ a nechť $\mathbf{u} = (u_1, u_2), \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Pak:

1. Položíme-li $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$, jsou zřejmě splněny axiomy skalárního součinu a $\mathbb{R}^2$ s tímto skalárním součinem je euklidovským prostorem.

2. Položíme-li $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 4u_1v_1+2u_1v_2+$ $2u_2v_1 + 3u_2v_2$,
pak jsou opět splněny axiomy skalárního součinu (ověřte si sami podrobným rozepsáním!), tzn. $\mathbb{R}^2$ s tímto skalárním součinem je euklidovským prostorem.

Je vidět, že i když se v obou případech jedná o tentýž vektorový prostor $\mathbb{R}^2$, jsou definované skalární součiny různé, a tedy různé jsou pak i pomocí nich získané euklidovské prostory.

Věta 1.1. *V každém reálném vektorovém prostoru* V *lze definovat skalární součin.*

Shrneme-li naše dosavadní úvahy, můžeme říct, že z každého reálného vektorového prostoru lze utvořit euklidovský prostor, obecně však nikoliv jediným způsobem.

Věta 1.2. *Nechť V je euklidovský vektorový prostor. Pak platí:*

(1) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$,

(2) $\mathbf{u} \cdot (r \cdot \mathbf{v}) = r \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,

(3) $(\sum\limits_{i=1}^{m} p_i \cdot \mathbf{u}_i) \cdot (\sum\limits_{j=1}^{n} r_j \cdot \mathbf{v}_j) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} p_i r_j \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j)$,

(4) $\mathbf{o} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{o} = 0$,

(4) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}$

pro $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j \in V$, $r, p_i, r_j \in \mathbb{R}$ *lib.*

Definice. Nechť V je euklidovský prostor, $\mathbf{u} \in V$. Pak nezáporné reálné číslo:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

se nazývá délka nebo též *velikost vektoru* $\mathbf{u}$.

Je-li $\|\mathbf{u}\| = 1$, pak říkáme, že *vektor* $\mathbf{u}$ *je normovaný*.

Věta 1.3. (Schwarzova nerovnost) *Nechť V je euklidovský prostor, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ libovolné. Pak platí:*

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|, \qquad ((1))$$

tzn. absolutní hodnota skalárního součinu dvou vektorů je menší nebo rovna součinu velikostí těchto vektorů.

Důsledek. *Ve Schwarzově nerovnosti* (1) *nastane rovnost, právě když vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně závislé.*

Poznámka. Schwarzovu nerovnost (1) často zapisujeme v ekvivalentním tvaru:

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \le \|\,\mathbf{u}\,\|^2 \cdot \|\,\mathbf{v}\,\|^2.$$

Poznamenejme ještě, že pro nerovnost (1) se v literatuře používá též pojmenování „Cauchyova nerovnost“, resp. „Cauchy-Bunjakovského nerovnost“, event. „Cauchy-Schwarzova nerovnost“.

Věta 1.4. *Nechť V je euklidovský prostor, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $r \in \mathbb{R}$. Pak platí:*

(1) $\|\mathbf{u}\| \geq 0$, *přičemž* $\|\mathbf{u}\| = 0$, *právě když* $\mathbf{u} = \mathbf{o}$,

(2) $\|r \cdot \mathbf{u}\| = |r| \cdot \|\mathbf{u}\|$,

(3) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$,

(4) *je-li* $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, *pak* $\frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \mathbf{u}$ *je normovaný vektor.*

Poznámka. 1. Nerovnost uvedená ve 3. části věty se obvykle nazývá „trojúhelníková nerovnost".

2. Použijeme-li obratu provedeného ve 4. části věty (tzn. vektor $\mathbf{u}$ násobíme číslem $\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}$), pak říkáme, že jsme vektor $\mathbf{u}$ „normovali".

Definice. Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou *nenulové* vektory z euklidovského prostoru V. Pak reálné číslo φ splňující vztahy:

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\,\mathbf{u}\,\|\cdot\|\,\mathbf{v}\,\|} \qquad \wedge \qquad 0 \le \varphi \le \pi \tag{(2)}$$

se nazývá *odchylka vektorů* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Poznámka. Je potřeba si rozmyslet, že uvedená definice odchylky je korektní, tzn. že číslo φ splňující (2) existuje, a to jediné. Ale Schwarzovu nerovnost můžeme pro nenulové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ přepsat ve tvaru:

$\frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|} \leq 1$, tzn. $\left|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|}\right| \leq 1$, odkud

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|} \leq 1.$$

Vidíme tedy (na základě našich znalostí o goniometrických funkcích), že existuje právě jedno reálné číslo φ splňující podmínky (2).

Poznamenejme ještě, že odchylka vektorů není definována pro případ, kdy některý z těchto vektorů je nulovým vektorem.

11.2. Ortogonálnost

Definice. Nechť V je euklidovský prostor a nechť:

$$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \qquad ((3))$$

je konečná posloupnost vektorů z V.
Řekneme, že:

(1) posloupnost (3) je ortogonální (nebo stručně, že *vektory* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ *jsou ortogonální*), jestliže je:

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0 \text{ pro každé } i, j = 1, \dots, k \ \wedge \ i \neq j,$$

(2) posloupnost (3) je ortonormální (nebo stručně, že *vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *jsou ortonormální*), je-li ortogonální a každý její vektor je normovaný,

(3) posloupnost (3) je *ortogonální báze* (resp. *ortonormální báze*) euklidovského prostoru V, jestliže je ortogonální (resp. ortonormální) a navíc je bází prostoru V.

Poznámka. Rozebereme-li si definici ortogonálnosti pro nejjednodušší případy, pak ihned vidíme, že:

pro $k = 1$: Posloupnost sestávající z jednoho vektoru je vždy ortogonální (bez ohledu na to, zda např. daný vektor je nulový či nikoliv).

pro $k = 2$: Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jsou ortogonální, právě když $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$. V tomto případě budeme psát $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$ nebo $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_1$ (zřejmě zde nezáleží na pořadí vektorů). Dále, jsou-li oba vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ nenulové, pak zřejmě jsou ortogonální, právě když jejich odchylka je $\frac{\pi}{2}$ (plyne z definice odchylky). Na druhé straně, dva vektory, z nichž alespoň jeden je nulový, jsou vždycky ortogonální (přičemž jejich odchylka samozřejmě není definována).

Věta 2.1. *Nechť V je euklidovský prostor. Pak pro vektory z V platí:*

(1) $\mathbf{u} \perp \mathbf{u} \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}$,

(2) $\mathbf{u} \perp \mathbf{x}$ *pro každé* $\mathbf{x} \in V \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}$,

(3) $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}_i$ *pro* $i = 1, \ldots, k \Leftrightarrow \mathbf{u} \perp (\sum_{i=1}^{k} r_i \cdot \mathbf{w}_i)$ *pro každé* $r_i \in \mathbb{R}$.

Věta 2.2. *Nenulové ortogonální vektory euklidovského prostoru V jsou lineárně nezávislé.*

Poznamenejme, že předpoklad nenulovosti všech vektorů je v předchozí větě podstatný a bez něj věta neplatí. Jinak řečeno, jsou-li ortogonální vektory z V lineárně závislé, znamená to, že alespoň jeden z nich musí být nulový.

Věta 2.3. *Nechť V je euklidovský prostor, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$ libovolné. Pak existují ve V ortogonální vektory $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$, které generují tentýž podprostor jako vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$, tzn. platí:*

$$[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k] = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k].$$

$$\mathbf{e}_k = p_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + p_{k-1} \cdot \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{u}_k, \quad ((4))$$

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i = 0 = p_i \cdot (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i) + (\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{e}_i),$$

$$p_i = \begin{cases} -\frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{e}_i}{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i} & \text{je-li } \mathbf{e}_i \neq \mathbf{o} \\ \text{libovolné} & \text{je-li } \mathbf{e}_i = \mathbf{o} \end{cases}$$

Poznámka. 1. Důkaz předchozí věty byl konstruktivní a jeho algoritmus se nazývá *Gram-Schmidtův ortogonalizační proces* (používá se při řešení konkrétních příkladů!).

2. V předchozí větě se nic nepředpokládá o lineární závislosti nebo nezávislosti vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$. Proto výsledné ortogonální vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ mohou, ale nemusí být všechny nenulové.

Přesněji řečeno, je-li $\dim[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k] = r$ $(\leq k)$, pak tedy i $\dim[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k] = r$, což znamená, že právě $(k-r)$ z vektorů $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ je nulových a zbývajících r vektorů je nenulových a tvoří ortogonální bázi podprostoru $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k]$, tj. podprostoru generovaného vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.

Specielně tedy, jsou-li vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineárně nezávislé, tzn. tvoří bázi podprostoru $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k]$, pak vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ tvoří ortogonální bázi tohoto podprostoru.

Věta 2.4. *V každém nenulovém euklidovském prostoru* V *existuje ortogonální báze (resp. ortonormální báze).*

Příklad 2.2. V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ se skalárním součinem definovaným:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (y_1, y_2, y_3, y_4) =$$
$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

nalezněte ortogonální bázi podprostoru W generovaného vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. Přitom:

$$\mathbf{u}_1 = (0, 1, 2, 1), \quad \mathbf{u}_2 = (-1, 1, 1, 1),$$
$$\mathbf{u}_3 = (1, 0, 1, 0).$$

Řešení: Platí $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, tzn. použijeme Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu:

$\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 = (0, 1, 2, 1)$.

$\mathbf{e}_2 = p \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_2$, kde $p = -\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1} = -\frac{2}{3}$. Tedy $\mathbf{e}_2 = (-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

$\mathbf{e}_3 = p_1 \cdot \mathbf{e}_1 + p_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{u}_3$, kde $p_1 = -\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1} = -\frac{1}{3}$, $p_2 = -\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2} = 1$. Tedy $\mathbf{e}_3 = -\frac{1}{3} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{u}_3 = (0, 0, 0, 0) = \mathbf{o}$.

Výsledek: ortogonální bázi podprostoru W tvoří např. vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.

Definice. Nechť A, B jsou libovolné podmnožiny euklidovského prostoru V. Je-li:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \text{pro každé } \mathbf{a} \in A,\ \mathbf{b} \in B,$$

pak říkáme, že A, B jsou *ortogonální množiny* a píšeme $A \perp B$ nebo $B \perp A$.

Poznámka. Jinak řečeno, A, B jsou ortogonální množiny, právě když $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ jsou ortogonální vektory pro každé $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{b} \in B$.

Ve specielních případech: prázdná množina, resp. množina $\{\mathbf{o}\}$ jsou zřejmě ortogonální ke každé podmnožině ve V. Dále z definice plyne, že:

$$A \perp B \Longrightarrow A \cap B = \emptyset \text{ nebo } A \cap B = \{\mathbf{o}\}.$$

Věta 2.5. *Nechť A, B jsou podmnožiny euklidovského prostoru V. Pak platí:*

$$A \perp B \Leftrightarrow [A] \perp [B],$$

tzn. dvě množiny jsou ortogonální, právě když jsou ortogonální podprostory generované těmito množinami.

Definice. Nechť W je podmnožina (podprostor) euklidovského prostoru V. Pak množina:

$$W^{\perp} = \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = 0 \text{ pro každé } \mathbf{w} \in W\}$$

se nazývá *ortogonální doplněk podmnožiny (podprostoru)* W (ve V).

Poznámka. Zřejmě platí $W \perp W^{\perp}$ a ve specielních případech přímo z definice dostáváme, že $V^{\perp} = \{\mathbf{o}\}$, resp. $\{\mathbf{o}\}^{\perp} = V$.

Věta 2.6. *Nechť W je podmnožina euklidovského prostoru V. Pak platí:*

(1) *$W^\perp$ je podprostor ve V,*

(2) *je-li W podprostor V, máme $V = W \dot{+} W^\perp$, tzn. prostor V je přímým součtem podprostorů W a $W^\perp$.*

Poznámka. Je-li W libovolný podprostor ve V, pak (podle 2. části předchozí věty a podle definice přímého součtu podprostorů) se libovolný vektor $\mathbf{u} \in V$ dá napsat, a to jediným způsobem, ve tvaru:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y},$$

kde $\mathbf{x} \in W$, $\mathbf{y} \in W^{\perp}$.

Poznamenejme, že vektor $\mathbf{x}$ z tohoto vyjádření se nazývá *ortogonální projekce vektoru* $\mathbf{u}$ *do podprostoru* W.

Věta 2.7. *Nechť W je podprostor euklidovského prostoru V, nechť $\mathbf{x}$ (resp. $\mathbf{x}'$) je ortogonální projekce vektoru $\mathbf{u}$ (resp. $\mathbf{u}'$) do podprostoru W a nechť $r \in \mathbb{R}$ libovolné. Pak platí:*

(1) $(\mathbf{x} + \mathbf{x}')$ *je ortogonální projekce vektoru* $(\mathbf{u} + \mathbf{u}')$ *do* W,

(2) $r \cdot \mathbf{x}$ *je ortogonální projekce vektoru* $r \cdot \mathbf{u}$ *do* W.

Věta 2.8. *Nechť* W, S *jsou podprostory euklidovského prostoru* V. *Pak platí:*

(1) $(W^{\perp})^{\perp} = W$,

(2) $(W + S)^{\perp} = W^{\perp} \cap S^{\perp}$,

(3) $(W \cap S)^{\perp} = W^{\perp} + S^{\perp}$.