# 13. EUKLIDOVSKÉ PRIESTORY

Naše štúdium vektorových priestorov sa doteraz nieslo prevažne v algebraickom duchu a bolo vedené takmer výlučne algebraickými prostriedkami. Geometria bola v tomto poňatí zredukovaná väčšinou len na otázky rovno- či rôznobežnosti a pretínania lineárnych a afinných podpriestorov, t. j. na tzv. štruktúru *incidencie*. Popri tom však geometrický názor bol pre nás dôležitým zdrojom prvotných motivácií alebo dodatočných ilustrácií mnohých pojmov. To bolo umožnené hlavne tým, že hoci sme sa zaoberali vektorovými priestormi nad ľubovoľným poľom, ako typické príklady sme si pod nimi väčšinou predstavovali vektorové priestory malej dimenzie nad poľom reálnych čísel a vektory v nich ako orientované úsečky (s počiatkom v bode $\mathbf{0}$), ktoré majú určitú dĺžku, smer a orientáciu. Inak povedané, lineárnu algebru sme často vedome a ešte častejšie podvedome zasadzovali do rámca elementárnej geometrie roviny alebo priestoru.

Prísne vzaté nám však len samotná štruktúra vektorového priestoru (ani keby sme sa obmedzili iba na prípad poľa $\mathbb{R}$) neumožňuje vôbec hovoriť o dĺžke – takýto pojem v doterajšom kontexte nemá žiadny zmysel. Pritom práve dĺžka, a spolu s ňou tiež uhol sú základnými kvantitatívnymi veličinami elementárnej euklidovskej geometrie. Naplnenie lineárnej algebry geometrickým obsahom teda v prvom rade vyžaduje dať práve týmto pojmom určitý dobre zakotvený význam, ktorý – hoci by sa neopieral len o náš geometrický názor – bol by s ním v dobrej zhode. V tejto kapitole sa o to pokúsime vo vektorových priestoroch nad poľom $\mathbb{R}$. Ukazuje sa, že celú základnú geometrickú štruktúru, vrátane dĺžok a uhlov, možno odvodiť z jedinej kladne definitnej symetrickej bilineárnej formy na takomto priestore.

## 13.1. Skalárny súčin

*Skalárnym* alebo tiež *vnútorným súčinom* na reálnom vektorovom priestore $V$ rozumieme ľubovoľnú kladne definitnú, symetrickú bilineárnu formu na $V$. Hodnotu tejto formy na vektoroch $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ budeme značiť $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$.

Nezávisle na znalosti uvedených pojmov možno skalárny súčin na $V$ definovať ako binárnu operáciu $V \times V \to \mathbb{R}$, ktorá každej dvojici $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ vektorov z $V$ priradí reálne číslo $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$, také, že pre všetky $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ a ľubovoľné $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \rangle &= \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \rangle && \text{(aditivita)}, \\ \langle c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &= c\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle && \text{(homogenita)}, \\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &= \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle && \text{(symetria)}, \\ \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \ &\Rightarrow\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0 && \text{(kladná definitnosť)}. \end{aligned}$$

Spojenie aditivity a homogenity skalárneho súčinu dáva jeho linearitu ako funkcie prvej premennej (pri pevnej druhej premennej). Vďaka symetrii z toho vyplýva aj linearita skalárneho súčinu ako funkcie druhej premennej (pri pevnej prvej premennej), t. j. rovnosti

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2\rangle &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2\rangle,\\ \langle \boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y}\rangle &= c\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle,\end{aligned}$$

pre všetky $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in V$ a $c \in \mathbb{R}$. Z (bi)linearity takisto vyplýva nasledujúci podrobnejší rozpis podmienky kladnej definitnosti

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \geq 0 \;\&\; \big(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\big)$$

pre každé $\boldsymbol{x} \in V$. Prvá časť tejto podmienky nám umožňuje definovať *normu* alebo *dĺžku vektora* $\boldsymbol{x}$ rovnosťou

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}.$$

Výraz $\|\boldsymbol{x}\|^2$ treba zatiaľ chápať len ako iné označenie pre kvadratickú formu $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle$ indukovanú skalárnym súčinom. O oprávnenosti názvu „dĺžka“ ako aj o ďalších vlastnostiach normy podrobnejšie pojednáme až v paragrafe 13.3.

*Euklidovským priestorom* nazývame ľubovoľný *konečnorozmerný* reálny vektorový priestor so skalárnym súčinom. Hoci sa v tejto kapitole hodláme sústrediť práve na euklidovské priestory, všetky pojmy a výsledky, v ktorých konečnosť dimenzie nehrá podstatnú úlohu, sa budeme snažiť formulovať tak, aby zahŕňali všetky (teda i nekonečnorozmerné) priestory so skalárnym súčinom.

**13.1.1. Príklad.** Náš čitateľ sa už na strednej škole v rámci analytickej geometrie, prípadne v rámci fyziky, asi stretol so skalárnym súčinom $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$ v rovine $\mathbb{R}^2$ a so skalárnym súčinom $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ v priestore $\mathbb{R}^3$. Ľahko sa možno presvedčiť, že rovnaká formulka funguje pre každé $n$, t. j. pre $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ je predpisom

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

definovaný skalárny súčin na stĺpcovom vektorovom priestore $\mathbb{R}^n$. V prípade riadkového priestoru $\mathbb{R}^n$ máme

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}^T = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

pre $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$. Takýto skalárny súčin budeme nazývať *štandardným skalárnym súčinom* na $\mathbb{R}^n$. Štandardný skalárny súčin vektorov $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ (či už ide o riadkové alebo stĺpcové vektory) sa obvykle značí $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$. Dĺžka vektora $\boldsymbol{x}$ vzhľadom na štandardný skalárny súčin je

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$$

V rámci analytickej geometrie sa pre nenulové vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ dokazuje známy vzťah

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| \cos\alpha,$$

ktorý zväzuje štandardný skalárny súčin v $\mathbb{R}^2$ či v $\mathbb{R}^3$ s dĺžkou príslušných vektorov a nimi zvieraným uhlom $\alpha$.

**13.1.2. Príklad.** Nech $V$ označuje vektorový priestor $\mathcal{C}\langle a,b\rangle$ všetkých *spojitých* reálnych funkcií definovaných na uzavretom intervale $\langle a,b\rangle$, kde $a<b$ sú reálne čísla, prípadne jeho ľubovoľný lineárny podpriestor. Pre $f,g\in V$ položme

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Z komutatívnosti násobenia v $\mathbb{R}$ a aditivity a homogenity integrálu vyplýva, že $\langle f,g\rangle$ je symetrická bilineárna forma na $V$ (podrobne si premyslite ako). Na dôkaz kladnej definitnosti si stačí uvedomiť, že pre $f\neq \mathbf{0}$ (t.j. $f$ nie identicky rovné nule), je $f^2(x)\geq 0$ pre každé $x\in\langle a,b\rangle$. Zo spojitosti funkcie $f$ (a teda tiež $f^2$) vyplýva existencia nejakého netriviálneho uzavretého podintervalu $\langle a_1,b_1\rangle\subseteq\langle a,b\rangle$ takého, že $f^2(x)>0$ pre všetky $x\in\langle a_1,b_1\rangle$. Keďže $f$ na $\langle a_1,b_1\rangle$ nadobúda minimum, máme

$$\langle f,f\rangle = \int_a^b f^2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x \geq \int_{a_1}^{b_1} f^2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x \geq (b_1-a_1)\min_{a_1\leq x\leq b_1} f(x) > 0.$$

Teda predpisom $(f,g)\mapsto\langle f,g\rangle$ je definovaný skalárny súčin na $\mathcal{C}\langle a,b\rangle$ ako aj na jeho ľubovoľnom lineárnom podpriestore, napr. na priestoroch polynómov $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}^{(n)}[x]$, $n\in\mathbb{N}$, uvažovaných ako spojité funkcie na $\langle a,b\rangle$. V prípade priestorov $\mathcal{C}\langle a,b\rangle$, či $\mathbb{R}[x]$ ide o skalárny súčin na *nekonečnorozmerných* vektorových priestoroch. Norma spojitej funkcie $f\colon\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ potom je

$$\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

### 13.2. Gramova matica a Cauchyho-Schwartzova nerovnosť

Nech $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_k)$ je ľubovoľná usporiadaná $k$-tica vektorov vo vektorovom priestore $V$ so skalárnym súčinom. Takmer všetky podstatné informácie o týchto vektoroch sú ukryté v tzv. *Gramovej matici*

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_k) = \big(\langle\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j\rangle\big)_{k\times k}$$

vektorov $\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_k$. Determinant Gramovej matice

$$\det\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha}) = |\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_k)| = \begin{vmatrix} \langle\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_1\rangle & \dots & \langle\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_k\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u}_1\rangle & \dots & \langle\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u}_k\rangle \end{vmatrix}$$

sa nazýva *Gramovým determinantom* vektorov $\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_k$.

**13.2.1. Tvrdenie.** *Nech $\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_k$ sú ľubovoľné vektory vo vektorovom priestore $V$ so skalárnym súčinom. Potom*

(a) *$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_k)$ je kladne semidefinitná symetrická matica;*
(b) *vektory $\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_k$ sú lineárne nezávislé práve vtedy, keď $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_k)$ je kladne definitná.*

*Dôkaz.* Označme $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k)$.

(a) Symetria matice $\boldsymbol{G}$ je priamym dôsledkom symetrie skalárneho súčinu. Zostáva dokázať, že pre ľubovoľný vektor $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ platí $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{c}^T \geq 0$. Položme $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \dots + c_k\boldsymbol{u}_k$. Potom z bilinearity a kladnej definitnosti skalárneho súčinu vyplýva

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{c}^T = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} c_i c_j \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \geq 0.$$

(b) Ak $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$ sú lineárne nezávislé, tak tvoria bázu lineárneho podpriestoru $S = [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k] \subseteq V$. Zúženie skalárneho súčinu $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ na podpriestor $S$ je skalárny súčin (t. j. kladne definitná symetrická bilineárna forma) na $S$. $\boldsymbol{G}$ je maticou tejto formy vzhľadom na bázu $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$, teda kladne definitná matica.

Ak $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$ sú lineárne závislé, tak v $\mathbb{R}^n$ existuje vektor $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_k) \neq \boldsymbol{0}$ taký, že $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \dots + c_k\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{0}$. Potom podľa (a)

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{c}^T = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0} \rangle = 0,$$

teda $\boldsymbol{G}$ nie je kladne definitná.

Práve dokázané tvrdenie má spolu s vetou 12.2.4 nasledujúci dôsledok.

**13.2.2. Dôsledok.** *Pre ľubovoľné $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k \in V$ platí*

$$|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k)| \geq 0.$$

*Pritom $|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k)| = 0$ práve vtedy, keď vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$ sú lineárne závislé.*

Špeciálne pre ľubovoľné dva vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ platí

$$|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle & \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \\ \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle & \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \end{vmatrix} = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle = \|\boldsymbol{u}\|^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle^2 \geq 0,$$

pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sú lineárne závislé. Tým sme dokázali nasledujúci vzťah, známy ako *Cauchyho-Schwartzova nerovnosť*.

**13.2.3. Tvrdenie.** *Pre ľubovoľné vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ v priestore $V$ so skalárnym súčinom platí*

$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| \leq \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\| \, ,$$

*pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sú lineárne závislé.*

## 13.3. Dĺžka vektora a uhol dvoch vektorov

*Normou* na reálnom vektorovom priestore $V$ rozumieme ľubovoľné zobrazenie $V \to \mathbb{R}$, ktoré vektoru $\boldsymbol{x} \in V$ priradí reálne číslo $\|\boldsymbol{x}\|$, nazývané *normou* alebo tiež *dĺžkou vektora* $\boldsymbol{x}$, také, že pre všetky $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ a ľubovoľné $c \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| &\leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\| && \text{(trojuholníková nerovnosť)}, \\ \|c\boldsymbol{x}\| &= |c| \, \|\boldsymbol{x}\| && \text{(pozitívna homogenita)}, \\ \|\boldsymbol{x}\| = 0 &\Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} && \text{(oddeliteľnosť)}. \end{aligned}$$

Z uvedených podmienok vyplýva nezápornosť normy, t. j. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ pre každé $\boldsymbol{x} \in V$. Keďže vďaka pozitívnej homogenite platí $\|\mathbf{0}\| = 0$ a $\|-\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$, s použitím trojuholníkovej nerovnosti naozaj dostávame

$$\|\boldsymbol{x}\| = \frac{1}{2}\big(\|\boldsymbol{x}\| + \|-\boldsymbol{x}\|\big) \geq \frac{1}{2}\,\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}\| = \frac{1}{2}\,\|\mathbf{0}\| = 0.$$

Navyše, vďaka oddeliteľnosti máme $\|\boldsymbol{x}\| > 0$ pre každé $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x} \in V$; inak povedané, každý nenulový vektor môžeme pomocou jeho normy „oddeliť" od nulového vektora.

Reálny vektorový priestor s normou nazývame *normovaný priestor.* Intuitívne sa na normovaný priestor dívame ako na vektorový priestor, v ktorom možno merať dĺžky vektorov. Tri definujúce podmienky pre normu zaručujú, že takéto meranie dĺžok, t. j. priradenie $\boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}\|$, má rozumné vlastnosti, aké od dĺžok očakávame.

*Vzdialenosťou bodov* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ vo vektorovom priestore $V$ s normou $\|\cdot\|$ nazývame dĺžku vektora $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$, t. j. číslo $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$. Pomocou vzdialeností bodov možno trojuholníkovú nerovnosť vyjadriť iným, ekvivalentným spôsobom, ktorý vari ešte názornejšie osvetľuje jej názov:

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\| \geq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\|$$

pre všetky $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$.

Všeobecnou problematikou normovaných priestorov sa v tomto kurze nebudeme zaoberať. Obmedzíme sa len na normy, ktoré pochádzajú od skalárnych súčinov.

**13.3.1. Tvrdenie.** *Nech $V$ je reálny vektorový priestor so skalárnym súčinom. Potom rovnosťou*

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$$

*je definovaná norma na $V$.*

*Dôkaz.* Zvoľme $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$. S použitím bilinearity a symetrie skalárneho súčinu a Cauchyho-Schwartzovej nerovnosti dostávame

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 &= \langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \|\boldsymbol{y}\|^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\,\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \big(\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|\big)^2.
\end{aligned}$$

To dokazuje trojuholníkovú nerovnosť. Jednoduchý dôkaz ďalších dvoch podmienok prenechávame čitateľovi.

Z Cauchyho-Schwartzovej nerovnosti vyplýva, že pre ľubovoľné *nenulové* vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ vo vektorovom priestore so skalárnym súčinom platí

$$-1 \leq \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|} \leq 1.$$

Preto existuje jediné reálne číslo $\alpha$ také, že $0 \leq \alpha \leq \pi$ a

$$\cos \alpha = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|}.$$

Číslo $\alpha$ nazývame *uhlom* alebo tiež *odchýlkou vektorov* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ a značíme ho $\alpha = \sphericalangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Zo symetrie skalárneho súčinu vyplýva $\sphericalangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sphericalangle(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, to znamená, že ide o *neorientovaný uhol.*

Pri takejto definícii uhla dvoch nenulových vektorov zostáva vzťah

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\| \cos \sphericalangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

platný pre štandardný skalárny súčin v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, zachovaný v ľubovoľnom priestore so skalárnym súčinom. Treba si však uvedomiť, že z logického hľadiska postupujeme obrátene ako v stredoškolskej analytickej geometrii. Tam totiž vopred vieme (či aspoň sa tak tvárime), čo sú to dĺžky a uhly vektorov, a pomocou nich definujeme skalárny súčin uvedeným vzťahom, prípadne rovnosťou $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum x_i y_i$, kedy musíme uvedený vzťah dokázať. Pri našom postupe vychádzame z pojmu skalárneho súčinu a pomocou neho definujeme dĺžky a uhly vektorov tak, že platnosť klasických poučiek analytickej geometrie zostáva zachovaná, ba dokonca ju rozširujeme na vektorové priestory ľubovoľnej konečnej i nekonečnej dimenzie vybavené skalárnym súčinom.

Hovoríme, že vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ sú (navzájom) *kolmé* alebo tiež *ortogonálne*, označenie $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, ak $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$.

Teraz uvedieme niekoľko bezprostredných dôsledkov našich definícií. Ich jednoduché dôkazy prenechávame ako cvičenie čitateľovi.

**13.3.2. Tvrdenie.** *Nech $V$ je vektorový priestor so skalárnym súčinom. Potom pre ľubovoľné nenulové vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ platí:*
(a) $\sphericalangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \;\Leftrightarrow\; (\exists\, c \in \mathbb{R})(c > 0 \;\&\; \boldsymbol{x} = c\boldsymbol{y})$;
(b) $\sphericalangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \pi \;\Leftrightarrow\; (\exists\, c \in \mathbb{R})(c < 0 \;\&\; \boldsymbol{x} = c\boldsymbol{y})$;
(c) $\sphericalangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \pi/2 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$;
(d) $\sphericalangle(-\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y}) = \sphericalangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \quad \sphericalangle(-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sphericalangle(\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y}) = \pi - \sphericalangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Pokračujeme štyrmi poučkami klasickej analytickej geometrie.

**13.3.3. Tvrdenie.** *Nech $V$ je vektorový priestor so skalárnym súčinom. Potom pre ľubovoľné nenulové vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ platí:*
(a) *(kosinová veta)*
$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\,\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| \cos \sphericalangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$,
$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 - 2\,\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| \cos \sphericalangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$;
(b) *(Pytagorova veta)*
$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y} \;\Rightarrow\; \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2$;
(c) *(pravidlo rovnobežníka)*
$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = 2\big(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2\big)$;
(d) *(uhlopriečky kosoštvorca sú na seba kolmé)*
$\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\| \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$.

(Samozrejme, tvrdenia (b), (c), (d) platia aj bez predpokladu nenulovosti vektorov $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ – vidno to i z nášho dôkazu.)

*Dôkaz.* (a) Ako sme ukázali v dôkaze tvrdenia 13.3.1, pre ľubovoľné $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ máme

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle.$$

Z toho už okamžite vyplýva prvá podoba kosinovej vety; jej druhú podobu dostaneme z prvej na základe 13.3.2 (d).

(b) Pytagorova veta je zvláštnym prípadom kosinovej vety.

(c) Pravidlo rovnobežníka dostaneme sčítaním oboch verzií kosinovej vety.

(d) priamo vyplýva z identity $\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \rangle = \|\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2$.

## 13.4. Ortogonálne a ortonormálne bázy

Usporiadaná $k$-tica $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k)$ vektorov z vektorového priestoru so skalárnym súčinom $V$, sa nazýva *ortogonálna*, ak $\boldsymbol{u}_i \perp \boldsymbol{u}_j$ pre všetky $1 \le i < j \le k$. Voľne tiež hovoríme, že *vektory* $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$ sú (navzájom) *ortogonálne* alebo *kolmé*. Usporiadaná $k$-tica $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k)$ sa nazýva *ortonormálna*, ak je ortogonálna a $\|\boldsymbol{u}_i\| = 1$ pre všetky $i \le k$. Taktiež hovoríme, že vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$ tvoria *ortonormálny systém*. Podobne možno definovať pojmy ortogonálnosti a ortonormálnosti aj pre nekonečné postupnosti $(\boldsymbol{u}_k)_{k=0}^{\infty}$ vektorov z $V$, prípadne pre množiny $X \subseteq V$.

Nasledujúce tvrdenie je bezprostredným dôsledkom našich definícií.

**13.4.1. Tvrdenie.** *Nech $V$ je vektorový priestor so skalárnym súčinom. Potom pre ľubovoľnú $k$-ticu $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k) \in V^k$ platí:*

*(a) $\boldsymbol{\alpha}$ je ortogonálna práve vtedy, keď jej Gramova matica $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha})$ je diagonálna;*

*(b) $\boldsymbol{\alpha}$ je ortonormálna práve vtedy, keď $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{I}_k$.*

Z posledného tvrdenia a dôsledku 13.2.2 priamo vyplýva

**13.4.2. Dôsledok.** *Ak $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k \in V$ sú navzájom kolmé nenulové vektory, špeciálne, ak $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$ tvoria ortonormálny systém, tak sú lineárne nezávislé.*

V priestore $\mathbb{R}^n$ so štandardným skalárnym súčinom kanonická báza $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ je zrejme ortonormálna a v zhode s posledným dôsledkom možno ľahko nahliadnuť rovnosť $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{I}_n$. Ortogonálne a ortonormálne bázy však existujú v ľubovoľných euklidovských priestoroch.

**13.4.3. Veta.** *Každý euklidovský priestor má ortonormálnu bázu.*

*Dôkaz.* Nech $V$ je euklidovský priestor. Keďže skalárny súčin je kladne definitná, symetrická bilineárna forma na konečnorozmernom reálnom priestore $V$, na základe vety 11.3.5, dôsledku 12.1.3 a tvrdenia 12.2.1 existuje taká báza $\boldsymbol{\beta}$ priestoru $V$, vzhľadom na ktorú má tento súčin jednotkovú maticu. Inak povedané, $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{I}_n$, čiže $\boldsymbol{\beta}$ je ortonormálna báza.

Nasledujúce tvrdenie zhŕňa niekoľko užitočných vlastností ortonormálnych báz v euklidovskom priestore. Podmienka (c), rovnako ako istý jej nekonečnorozmerný variant, sa nazýva *Parsevalova rovnosť*.

**13.4.4. Tvrdenie.** *Nech $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ je ortonormálna báza euklidovského priestoru $V$. Potom pre ľubovoné vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ platí:*

*(a) $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_i \rangle \boldsymbol{u}_i$, t.j. $(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = \big(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_1 \rangle, \dots, \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_n \rangle\big)^T$;*

*(b) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_i \rangle \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{y} \rangle$;*

*(c) $\|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_i \rangle^2$.*

*Dôkaz.* (a) Keďže $\boldsymbol{\alpha}$ je báza, $\boldsymbol{x}$ možno vyjadriť v tvare $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{u}_i$ pre jednoznačne určené koeficienty $c_1, \dots, c_n$. Z ortonormálnosti vektorov $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ vyplýva

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \rangle = c_i$$

pre každé $1 \le j \le n$.

(b) Ak $\boldsymbol{\alpha}$ je ortonormálna báza, tak matica skalárneho súčinu vzhľadom na bázu $\boldsymbol{\alpha}$ je $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{I}_n$. Preto $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}}^T \cdot (\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\alpha}}$ pre všetky $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$. Potrebný záver vyplýva z (a).

(c) je špeciálnym prípadom (b).

Pre istotu ešte si ešte raz zopakujme, čo vyplýva z tvrdenia 13.4.1, vety 13.4.3 a tvrdenia 13.4.4: V ľubovoľnom $n$-rozmernom euklidovskom priestore $V$ skalárny súčin vektorov $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ splýva so štandardným skalárnym súčinom v $\mathbb{R}^n$

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}} \cdot (\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\alpha}}$$

ich súradníc $(x)_{\boldsymbol{\alpha}} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $(\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\alpha}} = (y_1, \dots, y_n)^T$ vzhľadom na ľubovoľnú ortonormálnu bázu $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ priestoru $V$. Podmienka (a) posledného tvrdenia nám navyše udáva explicitný tvar týchto súradníc: $x_i = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_i \rangle$, $y_i = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}_i \rangle$.

Teraz popíšeme algoritmus, ktorý umožňuje zostrojiť ortonormálne bázy, známy ako *Gramov-Schmidtov ortogonalizačný proces.*

Nech $V$ je vektorový priestor so skalárnym súčinom a $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n \in V$ sú lineárne nezávisle vektory. Chceme zostrojiť ortogonálne vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ tak, aby pre každé $k \leq n$ platilo

$$[\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k] = [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k].$$

Ak položíme $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1$, tak samozrejme $[\boldsymbol{v}_1] = [\boldsymbol{u}_1]$. Vektor $\boldsymbol{v}_2 \in [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_2]$ budeme hľadať v tvare $\boldsymbol{v}_2 = a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{u}_2$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Ak má však platiť $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2]$, musí byť $b \neq 0$. To najjednoduchšie dosiahneme voľbou $b = 1$. Navyše vektor $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 + a\boldsymbol{v}_1$ má byť kolmý na vektor $\boldsymbol{v}_1$, t. j.

$$0 = \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle + a\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle.$$

Odtiaľ dostávame

$$a = -\frac{\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle}.$$

Predpokladajme, že $2 \leq k \leq n$ a už sme zostrojili ortogonálne vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{k-1}$ také, že pre každé $1 \leq i \leq k-1$ platí $[\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_i] = [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_i]$. Poučení prípadom $k = 2$ budeme vektor $\boldsymbol{v}_k \in [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_{k-1}, \boldsymbol{u}_k] = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{k-1}, \boldsymbol{u}_k]$ hľadať v tvare $\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{u}_k + a_1\boldsymbol{v}_1 + \dots + a_{k-1}\boldsymbol{v}_{k-1}$, kde $a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$. Navyše vektor $\boldsymbol{v}_k$ musí byť kolmý na každý z vektorov $\boldsymbol{v}_i$ pre $1 \leq i \leq k-1$, čiže

$$0 = \langle \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_i \rangle = \langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_i \rangle + \sum_{j=1}^{k-1} a_j \langle \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i \rangle = \langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_i \rangle + a_i \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i \rangle,$$

lebo podľa nášho predpokladu $\langle \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i \rangle = 0$ pre $j \neq i$. Z toho dôvodu

$$a_i = -\frac{\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_i \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i \rangle}.$$

Tým sme dokázali nasledujúcu vetu.

**13.4.5. Veta.** *Nech $V$ je vektorový priestor so skalárnym súčinom a $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n \in V$ sú lineárne nezávisle vektory. Vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \in V$ definujeme rekurziou:*

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{u}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_i \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i \rangle} \boldsymbol{v}_i,$$

*pre $1 < k \le n$. Potom $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ sú ortogonálne vektory a pre každé $1 \le k \le n$ platí*

$$[\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k] = [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k].$$

*Špeciálne, ak $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ je báza priestoru $V$, tak $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ je ortogonálna báza priestoru $V$; potom vektory $\|\boldsymbol{v}_1\|^{-1}\boldsymbol{v}_1, \dots, \|\boldsymbol{v}_n\|^{-1}\boldsymbol{v}_n$ tvoria ortonormálnu bázu priestoru $V$.*

*Poznámka.* Gramov-Schmidtov ortogonalizačný proces funguje aj pre nekonečné postupnosti $(\boldsymbol{u}_k)_{k=0}^{\infty}$ lineárne nezávislých vektorov v nekonečnorozmernom vektorovom priestore so skalárnym súčinom $V$. Rekurziou cez množinu všetkých prirodzených čísel

$$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{u}_0 \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{u}_k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_i \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i \rangle} \boldsymbol{v}_i,$$

pre $k > 0$, je i v tomto prípade definovaná ortogonálna postupnosť $(\boldsymbol{v}_k)_{k=0}^{\infty}$ taká, že

$$[\boldsymbol{v}_0, \dots, \boldsymbol{v}_k] = [\boldsymbol{u}_0, \dots, \boldsymbol{u}_k]$$

pre každé $k \in \mathbb{N}$. Z toho už vyplýva lineárna nezávislosť postupnosti $(\boldsymbol{v}_k)_{k=0}^{\infty}$. Ak $(\boldsymbol{u}_k)_{k=0}^{\infty}$ bola bázou $V$, tak $(\boldsymbol{v}_k)_{k=0}^{\infty}$ je ortogonálna a $\left(\|\boldsymbol{v}_k\|^{-1}\boldsymbol{v}_k\right)_{k=0}^{\infty}$ ortonormálna báza vo $V$.

**13.4.6. Príklad.** Na základe Sylvestrovho kritéria (veta 12.2.4) ľahko nahliadneme, že symetrická matica

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

je kladne definitná. To znamená, že predpisom

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{y}$$

je definovaný skalárny súčin na (stĺpcovom) priestore $\mathbb{R}^3$. Aplikáciou Gramovho-Schmidtovho ortogonalizačného procesu na kanonickú bázu $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ zostrojíme ortogonálnu bázu $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ priestoru $\mathbb{R}^3$ s uvedeným skalárnym súčinom:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)^T, \\
\boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{e}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_1 = (-1/2, 1, 0)^T, \\
\boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{e}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle} \boldsymbol{v}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{v}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 \rangle} \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_3 + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_1 - \frac{1}{3}\boldsymbol{v}_2 = (2/3, -1/3, 1)^T,
\end{aligned}$$

keďže $\langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle = 1$, $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle = 2$, $\langle \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{v}_1 \rangle = -1$, $\langle \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{v}_2 \rangle = 1/2$ a $\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 \rangle = 3/2$. Ak ešte dopočítame $\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_3 \rangle = 7/3$, dostaneme dĺžky jednotlivých vektorov $\|\boldsymbol{v}_1\| = \sqrt{2}$, $\|\boldsymbol{v}_2\| = \sqrt{3/2}$, $\|\boldsymbol{v}_3\| = \sqrt{7/3}$. Príslušná ortonormálna báza je potom tvorená vektormi

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \sqrt{\frac{2}{3}}\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \sqrt{\frac{3}{7}}\boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**13.4.7. Príklad.** Na vektorovom priestore $\mathbb{R}[x]$ všetkých reálnych polynómov v premennej $x$ je daný skalárny súčin $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ (pozri príklad 13.1.2). Postupnosť $(x^n)_{n=0}^{\infty}$ všetkých mocnín premennej $x$ tvorí bázu v $\mathbb{R}[x]$. Gramovou-Schmidtovou metódou z nej zostrojíme ortogonálnu bázu $\big(L_n(x)\big)_{n=0}^{\infty}$ priestoru $\mathbb{R}[x]$ – jej prvky sa niekedy nazývajú *Legendreove polynómy.* Ak si uvedomíme, že

$$\langle x^m, x^n\rangle = \int_{-1}^{1} x^m x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}\right]_{-1}^{1} = \begin{cases} \frac{2}{m+n+1}, & \text{ak } m+n \text{ je párne,}\\ 0, & \text{ak } m+n \text{ je nepárne,}\end{cases}$$

postupne dostaneme

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= 1,\\
L_1(x) &= x - \frac{\langle x, L_0\rangle}{\langle L_0, L_0\rangle}\,L_0(x) = x,\\
L_2(x) &= x^2 - \frac{\langle x^2, L_0\rangle}{\langle L_0, L_0\rangle}\,L_0(x) - \frac{\langle x^2, L_1\rangle}{\langle L_1, L_1\rangle}\,L_1(x) = x^2 - \frac{1}{3},\\
L_3(x) &= x^3 - \frac{\langle x^3, L_0\rangle}{\langle L_0, L_0\rangle}\,L_0(x) - \frac{\langle x^3, L_1\rangle}{\langle L_1, L_1\rangle}\,L_1(x) - \frac{\langle x^3, L_2\rangle}{\langle L_2, L_2\rangle}\,L_2(x) = x^3 - \frac{3}{5}\,x,
\end{aligned}$$

atď. Vidíme, že $L_n(x) = x^n - \dots$ je polynóm $n$-tého stupňa, ktorý pre párne $n$ obsahuje len párne mocniny premennej $x$ a pre nepárne $n$ len nepárne mocniny $x$. S trochou námahy možno odvodiť explicitné vyjadrenie

$$L_n(x) = \frac{n!}{(2n)!}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\,(x^2-1)^n.$$

V literatúre sa *Legendreovými polynómami* zvyčajne nazývajú násobky

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n} L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\,(x^2-1)^n$$

polynómov $L_n(x)$, normované tak, aby pre každé $n$ platilo $P_n(1) = 1$.

Gramovu-Schmidtovu ortogonalizáciu možno alternatívne vykonať len vhodnými úpravami istých matíc. Ak $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_n)$ je lineárne nezávislá $n$-tica vektorov v priestore so skalárnym súčinom $V$, tak podľa tvrdenia 13.2.1 (b) jej Gramova matica $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha})$ je kladne definitná a je to matica skalárneho súčinu zúženého na lineárny podpriestor $S = [\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_n] \subseteq V$ v báze $\boldsymbol{\alpha}$. Podľa vety 12.2.3 ju možno výlučne úpravami typu $(1^+)$ upraviť na diagonálny tvar $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(d_1,\dots,d_n)$ s kladnými prvkami na diagonále. Elementárne stĺpcové operácie zodpovedajúce týmto úpravám postupne vykonané na matici $\boldsymbol{I}_n$ nás privedú k hornej trojuholníkovej matici $\boldsymbol{P} = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s jednotkami na diagonále, t.j. $p_{ii} = 1$ a $p_{ij} = 0$ pre každé $i \le n$ a $j < i$. Ak položíme

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n),$$

tak $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$, t.j. $\boldsymbol{P}$ je maticou prechodu z bázy $\boldsymbol{\beta}$ do bázy $\boldsymbol{\alpha}$ (pozri paragraf 7.5). Potom $\boldsymbol{D}$ je maticou skalárneho súčinu zúženého na podpriestor $S$ v báze $\boldsymbol{\beta}$, teda $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{D}$, takže $\boldsymbol{\beta}$ je ortogonálna báza $S$. Navyše, vzhľadom na tvar matice $\boldsymbol{P}$, platí

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{u}_k + \sum_{i=1}^{k-1} p_{ik}\boldsymbol{u}_i,$$

pre $1 < k \leq n$, z čoho možno ľahko nahliadnuť rovnosti

$$[\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k] = [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k]$$

pre všetky $k \leq n$. Taktiež normy vektorov $\boldsymbol{v}_k$ si možno prečítať priamo z matice $\boldsymbol{D}$. Platí totiž $d_k = \|\boldsymbol{v}_k\|^2$ pre každé $k \leq n$. Teda príslušná ortonormálna báza je tvorená vektormi $(1/\sqrt{d_1})\boldsymbol{v}_1, \dots, (1/\sqrt{d_n})\boldsymbol{v}_n$. Tento posledný krok možno samozrejme realizovať úpravami typu (4) matice $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\beta})$ a príslušnými ESO na matici $\boldsymbol{P}$ (pozri paragraf 11.3).

Ak $V = \mathbb{R}^m$ s akýmkoľvek (t. j. nie nutne štandardným skalárnym súčinom), tak po stotožnení bázy $\boldsymbol{\alpha}$ s maticou, ktorej stĺpce sú vektory tejto bázy, možno k báze $\boldsymbol{\beta}$ dospieť priamo (t. j. bez matice $\boldsymbol{P}$), vykonaním príslušných ESO na matici $\boldsymbol{\alpha}$.

**13.4.8. Príklad.** Prepočítajme si ešte raz príklad 13.4.6 práve opísanou metódou. Uvedená matica $\boldsymbol{A}$ je zároveň Gramovou maticou $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\varepsilon})$. Najprv pomocou prvku na mieste $(1,1)$ vynulujeme ostatné prvky prvého riadku i stĺpca. Potom pomocou prvku na mieste $(2,2)$ vynulujeme prvky na miestach $(2,3)$ a $(3,2)$:

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 5/2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\beta}).$$

Zrejme šlo o úpravy typu $(1^+)$. Vykonaním príslušných ESO na jednotkovej matici dostaneme

$$\boldsymbol{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wr \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wr \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\beta}.$$

Čitateľ by si mal samostatne premyslieť detaily výpočtu. Vidíme, že výsledné matice sa presne zhodujú s výsledkom príkladu 13.4.6.

**13.4.9. Príklad.** Vráťme sa ešte k príkladu 13.4.7. Bez podrobnejšieho komentára zortogonalizujeme systém $(1, x, x^2, x^3)$ prvých štyroch mocnín $x$ v $\mathbb{R}[x]$. Postupnými úpravami typu $(1^+)$ Gramovej matice $\boldsymbol{G}(1, x, x^2, x^3)$ dostaneme

$$\boldsymbol{G}(1, x, x^2, x^3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 2/5 \\ 2/3 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 2/7 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 8/45 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 2/7 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8/45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8/175 \end{pmatrix} = \boldsymbol{G}(L_0, L_1, L_2, L_3).$$

Príslušné ESO vykonané na jednotkovej matici dávajú

$$\boldsymbol{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wr \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wr \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}.$$

Potom

$$(L_0, L_1, L_2, L_3) = (1, x, x^2, x^3) \cdot \boldsymbol{P} = \left(1,\ x,\ -\frac{1}{3} + x^2,\ -\frac{3}{5}\,x + x^3\right),$$

rovnako ako v príklade 13.4.7. Pohľad na maticu $\boldsymbol{G}(L_0, L_1, L_2, L_3)$ nám navyše prezradí normy polynómov $L_n(x)$ pre $n \leq 3$:

$$\|L_0\| = \sqrt{2}, \qquad \|L_1\| = \sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad \|L_2\| = \sqrt{\frac{8}{45}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}, \qquad \|L_3\| = \sqrt{\frac{8}{175}} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{7}}.$$

Pre normy Legendreových polynómov $P_n(x)$, $n \leq 3$, z toho vyplýva

$$\|P_0\| = \sqrt{2}, \qquad \|P_1\| = \sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad \|P_2\| = \sqrt{\frac{2}{5}}, \qquad \|P_3\| = \sqrt{\frac{2}{7}}.$$

**13.4.10. Príklad.** V euklidovskom priestore $\mathbb{R}^4$ so štandardným skalárnym súčinom je daný lineárny podpriestor $S$ generovaný stĺpcami matice

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nájdeme nejakú ortonormálnu bázu podpriestoru $S$. Zrejme stĺpce matice $\boldsymbol{\alpha}$ sú lineárne nezávislé, teda $\boldsymbol{\alpha}$ je bázou $S$. Jej Gramovu maticu $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \boldsymbol{\alpha}$ upravíme pomocou úprav typu $(1^+)$ na s ňou kongruentný diagonálny tvar

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 11/3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11/3 & 0 \\ 0 & 0 & 40/11 \end{pmatrix} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\beta}).$$

Príslušnými ESO na matici $\boldsymbol{\alpha}$ dostaneme

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \wr \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2/3 & 4/3 \\ -1 & 4/3 & 2/3 \\ 1 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \wr \begin{pmatrix} 0 & 1 & -12/11 \\ 1 & 2/3 & 14/11 \\ -1 & 4/3 & 6/11 \\ 1 & 2/3 & -8/11 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\beta}.$$

Ortonormálna báza podpriestoru $S$ je potom tvorená stĺpcami matice $\boldsymbol{\beta}$ vynásobenými prevrátenými hodnotami druhých odmocnín príslušných diagonálnych prvkov matice $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\beta})$, teda vektormi

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\frac{3}{11}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{33}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\frac{11}{40}}\begin{pmatrix} -12/11 \\ 14/11 \\ 6/11 \\ -8/11 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{110}}\begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$