9. AFINNÍ PODPROSTORY A SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

Abstrakt přednášky

V této kapitole se budeme opět věnovat soustavám lineárních rovnic. Dokážeme, že mnnožina řešení každé lineární (homogenní) soustavy tvoří afinní (lineární) podprostor vhodného sloupcového prostoru K^n a obráceně, každý takový afinní (lineární) podprostor lze popsat jakožto množinu řešení vhodné lineární (homogenní) soustavy.
V celé kapitole K označuje pevné těleso, m, n jsou přirozená čísla.

Obsah

9 Afinní podprostory a soustavy lineárních rovnic

9.1 Podprostor řešení homogenní soustavy a jeho báze

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$. Uvažujme homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Podprostor řešení II

Dále uvažme nehomogenní soustavu s maticí $\mathbf{A}$ a pravou stranou $\mathbf{b}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Množiny jejich řešení označíme

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in K^n : \ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\},$$

resp.

$$\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in K^n : \ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}\}.$$

Podprostor řešení III

Předpisem $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ je definované lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$, přičemž $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathrm{Ker}\varphi$. Z toho okamžitě vyplývá

Tvrzení 9.1.1 *Pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ množina $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ řešení homogenní soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru K^n.*

Podprostor řešení IV

Každou bázi prostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ nazývame ***fundamentálním systémem řešení*** soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Potom každé řešení příslušné homogenní soustavy můžeme jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z fundamentálního systému řešení, a naopak, každá lineární kombinace vektorů fundamentálního systému je řešením příslušné soustavy.

Fundamentální systém řešení najdeme následujícím postupem:

Podprostor řešení V

Matici $\mathbf{A}$ upravíme pomocí ERO na redukovaný stupňovitý tvar $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$.

Množinu $\{1, \ldots, n\}$ rozdělíme na dvě podmnožiny J a J', podle toho, zda se v j-tém sloupci matice $\mathbf{B}$ nachází nebo nenachází vedoucí prvek nějakého jejího řádku.

Označme k počet prvků množiny J' a zapišme ji ve tvaru $J' = \{j_1 < j_2 < \ldots < j_k\}$.

Podprostor řešení VI

Pro každý index $j_l \in J'$ sestrojíme vektor $\mathbf{v}_l = (v_{1l}, \dots, v_{nl})^T \in K^n$ takto:

Zvolíme $v_{j_l l} = 1$ a $v_{j_i l} = 0$ pre $i \neq l$.

Pro $j \in J$ vypočítáme hodnoty v_{jl} k uvedeným hodnotám parametrů $v_{j_1 l}, \dots, v_{j_k l}$ tak, aby celý vektor $\mathbf{v}_l$ vyhovoval podmínce $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_l = \mathbf{0}$.

Potom vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ tvoří bázi podprostoru řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A})$. Přitom zřejmě platí $k = n - h(\mathbf{A})$.

Podprostor řešení VII

Příklad 9.1.2 *Předpokládejme, že jsme matici* $\mathbf{A}$ *pomocí ERO už upravili na redukovaný stupňovitý tvar*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vedoucí prvky řádků se nacházejí ve sloupcích 1, 3 a 4.

Podprostor řešení VIII

Tedy neznámé x_2 a x_5 si zvolíme za parametry a neznámé x_1, x_3 a x_4 si vyjádříme s jejich pomocí.

Naše první volba je $x_2 = 1$, $x_5 = 0$. Tomu odpovídá vektor $\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)^T$.

Druhá volba parametrů je $x_2 = 0$, $x_5 = 1$. Tomu odpovídá vektor $\mathbf{v}_2 = (1/3, 0, -1/2, 2, 1)^T$.

Potom vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ tvoří bázi podprostoru (fundamentální systém) řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B}) \subseteq \mathbb{R}^5$.

Podprostor řešení IX

Tvrzení 9.1.3 *Pro libovolnou matici* $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ *platí*

$$\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}) = n - h(\mathbf{A}).$$

Podprostor řešení NS I

Tvrzení 9.1.4 *Nechť* $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$.

(a) *Pokud* $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b})$, *pak* $\mathbf{y} - \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

(b) *Pokud* $\mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$, *pak* $\mathbf{z} + \mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b})$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) &= \mathbf{z} + \mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{z} + \mathbf{x};\ \mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})\} \\
&= \mathbf{z} + [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n] \\
&= \{\mathbf{z} + c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k;\ c_1, \ldots, c_k \in K\}.
\end{aligned}$$

Podprostor řešení NS II

Tvrzení 9.1.5 *Nechť* $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$. *Pokud soustava* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *má aspoň jedno řešení, tak* $\mathcal{R}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b})$ *je afinní podprostor v* K^n *se zaměřením* $\mathcal{R}(\mathbf{A})$. *To znamená, že*

$$\mathrm{Dir}\mathcal{R}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{A})$$

a

$$\dim\mathcal{R}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = \dim\mathcal{R}(\mathbf{A}) = n - h(\mathbf{A}).$$

9.2 Frobeniova věta a řešení nehomogenní soustavy

Věta 9.2.1 (Frobenius) *Nechť* $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$. *Potom nehomogenní soustava* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *má řešení právě tehdy, když* $h(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = h(\mathbf{A})$.

Frobeniova věta II

Soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má alespoň jedno řešení $\mathbf{z} \in K^n$ právě tehdy, když $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}\varphi$ (kde $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$). Pak $\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = \mathbf{z} + \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

Frobeniova věta říká: nehomogenní soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nemá řešení právě tehdy, když se při úpravě její rozšířené matice $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$ na redukovaný stupňovitý tvar objeví nějaký řádek tvaru $(0, \ldots, 0 \,|\, d) \in K^{n+1}$, kde $0 \neq d \in K$. Takovýto řádek totiž zodpovídá rovnici $0 = d$.

Frobeniova věta III

Pokud upravíme pomocí ERO rozšířenou matici $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b})$ na redukovaný stupňovitý tvar $(\mathbf{B}\,|\,\mathbf{c})$, kde $\mathbf{B} \in K^{m\times n}$ a $\mathbf{c} \in K^m$, tak $\mathbf{B}$ je též v redukovaném stupňovitém tvaru.

Potom $\mathcal{R}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{B}\,|\,\mathbf{c}) \neq \emptyset$ právě tehdy, když se žádný vedoucí prvek nějakého řádku matice $(\mathbf{B}\,|\,\mathbf{c})$ nenachází v posledním, t. j. $n+1$-ním sloupci.

Frobeniova věta IV

Bázi prostoru řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$ najdeme postupem popsaným v paragrafu 9.1.

Nech J, J' a k mají dříve uvedený význam. Jedno řešení $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^T$ nehomogenní soustavy dostaneme volbou parametrů $z_{j_1} = \dots = z_{j_k} = 0$ pro $j_l \in J'$. Zbývající hodnoty z_j potom vypočítáme tak, aby $\mathbf{z}$ vyhovovalo podmínce $\mathbf{B} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{c}$, t. j. $z_j = c_j$ pre $j \in J$.

Frobeniova věta V

Příklad 9.2.2 *Předpokládejme, že jsme matici* $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ *pomocí ERO už upravili na redukovaný stupňovitý tvar*

$$(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 1/4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 & 6 & -2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Frobeniova věta VI

Vidíme, že $h(\mathbf{B} \,|\, \mathbf{c}) = h(\mathbf{B}) = 3$, tedy $\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{B} \,|\, \mathbf{c}) \neq \emptyset$.

Vedoucí prvky řádků se nacházejí ve sloupcích 1, 2 a 3.

Tedy neznámé x_4, x_5 a x_6 si zvolíme za parametry a neznámé x_1, x_2 a x_3 si vyjádříme pomocí nich.

První volbě $x_4 = 1$, $x_5 = x_6 = 0$ odpovídá vektor $\mathbf{v}_1 = (-3, -4, -1, 1, 0, 0)^T$.

Frobeniova věta VII

Druhá volba $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$ nám dá vektor $\mathbf{v}_2 = (-1/4, -2, 5, 0, 1, 0)^T$.

Třetí volbou $x_4 = x_5 = 0$, $x_6 = 1$ získáme vektor $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -6, 0, 0, 1)^T$.

Potom vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ tvoří bázi podprostoru řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B}) \subseteq \mathbb{R}^6$ přislušní homogenní soustavy.

Konečně volbou parametrů $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ získáme jedno řešení $\mathbf{z} = (2, -1, -2/7, 0, 0, 0)^T$ nehomogenní soustavy.

Frobeniova věta VIII

Výsledek můžeme zapsat do tabulky:

	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{z}$
x_1	-3	$-1/4$	0	2
x_2	-4	-2	1	-1
x_3	-1	5	-6	$-2/7$
x_4	1	0	0	0
x_5	0	1	0	0
x_6	0	0	1	0

9.3 Parametrické a všeobecné rovnice afinních podprostorů

Každý afinní podprostor $M \subseteq K^n$ má tvar

$$M = \mathbf{p} + [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k] = \mathbf{p} + [\boldsymbol{\alpha}]$$

pro nějaký bod $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^T \in M$ a vhodnou uspořádanou k-tici $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ vektorů z K^n, kde $\mathbf{u}_j = (u_{1j}, \dots, u_{nj})^T$.

Parametrické a všeobecné rovnice II

To znamená, že pro libovolné $\mathbf{x} \in K^n$ platí $\mathbf{x} \in M$ právě tehdy, když existuje $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k)^T \in K^k$ tak, že

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{t},$$

kde jsme uspořádanou k-tici $\boldsymbol{\alpha}$ jako obyčejně ztotožnili s maticí $(u_{ij}) \in K^{n \times k}$ se sloupci $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.

Parametrické a všeobecné rovnice III

Rovnost $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{t}$ je maticovým zápisem ***parametrických rovnic*** afinního podprostoru $M \subseteq K^n$.

Vektor $\mathbf{t} \in K^n$ nazýváme ***vektorem parametrů*** a jeho složky $t_1, \ldots, t_k \in K$ ***parametry***.

Parametrické a všeobecné rovnice IV

Po rozepsání do složek

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + u_{11}t_1 + u_{12}t_2 + \ldots + u_{1k}t_k \\ x_2 &= p_2 + u_{21}t_1 + u_{22}t_2 + \ldots + u_{2k}t_k \\ \\ x_n &= p_n + u_{n1}t_1 + u_{n2}t_n + \ldots + u_{nk}t_k \end{aligned}$$

dostaneme obvyklejší tvar, se kterým jsme sa v dimenzi $n = 2$ resp. $n = 3$ už potkali v středoškolské analytické geometrii.

Parametrické a všeobecné rovnice V

Jsou-li navíc vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineárně nezávislé, což můžeme vždy dosáhnout vynecháním „nadbytečných vektorů“, pak parametrické rovnice podprostoru M nám přímo ukáží jeho dimenzi: $\dim M = k$.

Parametrické a všeobecné rovnice VI

Zápis afinního podprostoru $M \subseteq K^n$ ve tvaru $M = \mathbf{p} + [\boldsymbol{\alpha}]$, kde $\mathbf{p} \in M$ a $\boldsymbol{\alpha}$ je nejaká uspořádaná k-tice, která generuje jeho zaměření $\mathrm{Dir} M$ (můžeme si dovolit předpokládat, že $\boldsymbol{\alpha}$ je dokonce báze v $\mathrm{Dir} M$), budeme nazývat jeho ***parametrickým vyjádřením***.

Parametrické vyjádření $M = \mathbf{p} + [\boldsymbol{\alpha}]$ afinního podprostoru můžeme přímo přepsat do jeho parametrických rovnic $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{t}$, $(\mathbf{t} \in K^k)$. Naopak, z jeho parametrických rovnic můžeme okamžitě získat jeho parametrické vyjádření.

Parametrické a všeobecné rovnice VII

Každá soustava lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ s rozšířenou maticí $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \in K^{m \times (n+1)}$ (pokud má řešení), popisuje afinní podprostor $\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \subseteq K^n$.

Vyřešit soustavu lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ znamená vlastne najít nějaké pěkné parametrické rovnice afinního podprostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$.

Parametrické a všeobecné rovnice VIII

Nechť tedy $M = \mathbf{p} + [\boldsymbol{\alpha}]$ je afinní podprostor v K^n, daný bodom $\mathbf{p} \in K^n$ a uspořádanou k-ticí $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ vektorů z K^n, kterou ztotožníme s maticí $\boldsymbol{\alpha} = (u_{ij}) \in K^{n\times k}$ se sloupci $\mathbf{u}_j$.

Parametrické a všeobecné rovnice IX

Parametrické rovnice $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{t}$ podprostoru M, kde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, \mathbf{x}_n)^T \in K^n$ je vektor neznámých a $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k)^T \in K^k$ je vektor parametrů, můžeme přepsat do tvaru

$$\mathbf{I}_n \cdot \mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{p},$$

který lze reprezentovat pomocí blokové matice

$$(\mathbf{I}_n \,|\, \boldsymbol{\alpha} \,|\, \mathbf{p}).$$

Parametrické a všeobecné rovnice X

Naše metoda bude založená na ***eliminaci parametrů*** $t_1, \ldots, t_k$ úpravou této matice pomocí ERO.

Matici $(\mathbf{I}_n \,|\, \boldsymbol{\alpha} \,|\, \mathbf{p})$ budeme upravovat na řádkově ekvivalentní matici tak, aby prostřední blok vo výsledné matici byl ve stupňovitém tvaru. Mohou pak nastat dvě možnosti

Parametrické a všeobecné rovnice XI

(1) $h(\boldsymbol{\alpha}) = n$, což poznáme podle toho, že všechny řádky prostředního bloku výsledné matice jsou nenulové. V tomto případě $M = V$ a všeobecné rovnice tohoto podprostoru tvoří prázdná soustava (t. j. soustava, která neobsahuje žádnou rovnici).

Parametrické a všeobecné rovnice XII

(2) $h(\boldsymbol{\alpha}) < n$. Pak můžeme prostřední blok výsledné matice rozdělit do dvou pod sebou umístěných bloků $\left(\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{0}}\right)$, kde horní blok $\mathbf{D}$ je stupňovitá matice typu $h(\boldsymbol{\alpha}) \times k$, která má všechny řádky nenulové, tedy dolní nulový blok má rozměr $(n - h(\boldsymbol{\alpha})) \times k$.

Parametrické a všeobecné rovnice XIII

Toto rozdělení prostředního bloku indukuje rozdělení celé výsledné matice do bloků

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array}\right).$$

Potom $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ jsou všeobecné rovnice afinního podprostoru M, t. j. platí $M = \mathbf{p} + [\boldsymbol{\alpha}] = \mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$.

Parametrické a všeobecné rovnice XIV

Popsaný algoritmus můžeme stručně shrnout do následujícího schématu

$$(\mathbf{I}_n \,|\, \boldsymbol{\alpha} \,|\, \mathbf{p}) \xrightarrow{ERO} \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array} \right),$$

kde $\mathbf{D}$ je matice v stupňovitém tvaru s nenulovými řádky (jejichž počet je tedy nutně $h(\mathbf{D}) = h(\boldsymbol{\alpha})$).

Parametrické a všeobecné rovnice XV

Z k-tice $\boldsymbol{\alpha}$ můžeme vybrat bázi zaměření $\mathrm{Dir} M = [\boldsymbol{\alpha}]$: je tvořená vektory $\mathbf{u}_{j_1}, \ldots, \mathbf{u}_{j_l}$, kde $1 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq k$ jsou indexy těch sloupců matice $\mathbf{D}$, ve kterých se nacházejí vedoucí prvky jejich řádků.

Parametrické a všeobecné rovnice XVI

Tvrzení 9.3.1 *Nechť* $\mathbf{B} \in K^{n\times m}$, $\mathbf{C} \in K^{n\times k}$ *a* $\mathbf{p} \in K^n$. *Pokud bloková matice* $(\mathbf{B} \,|\, \mathbf{C} \,|\, \mathbf{p})$ *je řádkově ekvivalentní s blokovou maticí*

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array}\right).$$

kde $\mathbf{D}$ *je matice v stupňovitém tvaru s nenulovými řádky, tak*

$$\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in K^m;\ (\exists\, \mathbf{t} \in K^k)(\mathbf{B}{\cdot}\mathbf{x} = \mathbf{C}{\cdot}\mathbf{t} + \mathbf{p})\}.$$