8. AFINNÍ PODPROSTORY A AFINNÍ ZOBRAZENÍ

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

Abstrakt přednášky

V této kapitole zavedeme takový pojem podprostoru, který by např. v $\mathbb{R}^3$ zahrňoval ***všechny*** přímky a roviny, tj. nejen ty procházející počátkem.
Zavedeme tedy definici pojmu ***afinního podprostoru*** nebo též ***lineární variety*** a pojmu ***afinního zobrazení*** .
Těžištěm kapitoly bude klasifikace vzájemné polohy lineárních variet ve vektorovém prostoru.
V celé kapitole K označuje pevné těleso, V označuje nějaký pevný, ale jinak libovolný, vektorový prostor nad tělesem K, m, n jsou přirozená čísla

Obsah

8 Afinní podprostory a afinní zobrazení

8.1 Body a vektory

Na vektory se díváme jako na orientované úsečky s počátkem v bodě $\mathbf{0}$. Celý prostor chápeme jako ***homogenní***, t. j. všechny body považujeme za rovnocenné a nevyčleňujeme v něm žádný privilegovaný bod za počátek.

Body a vektory II

Afinním prostorem nad tělesem K rozumíme vektorový prostor V nad tímto tělesem (prvky sa z vektorů staly opět body a počátek, t. j. nulový vektor, ztratil svoje výsadní postavení – stal se z něho bod jako každý jiný).
Přesněji:

Body a vektory III

Afinním prostorem $\mathcal{A}$ se ***zaměřením*** V rozumíme množinu P spolu se zobrazením $+ : P \times V \to P$ daným $(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{p} + \mathbf{v}$ tak, že platí.

1. $\mathbf{p} + 0 = \mathbf{p}$ pro všechny body $\mathbf{p} \in P$
2. $\mathbf{p} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{p} + \mathbf{v}) + w$ pro všechny vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $\mathbf{p} \in P$
3. pro každé dva body $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in P$ existuje právě jeden vektor $\mathbf{v} \in P$ takový, že $\mathbf{p} + \mathbf{v} = \mathbf{q}$. Značíme jej $\vec{\mathbf{pq}}$ nebo $\mathbf{q} - \mathbf{p}$.

Body a vektory IV

Běžně budeme užívat značení $\mathbf{p} \in \mathcal{A}$ místo $\mathbf{p} \in P$, tj. nebudeme rozlišovat mezi afinním prostorem a jeho nosnou množinou.
Uvědomme si, že mezi vektory z V a body z P existuje vzájemně jednoznačná korespondence, můžeme tedy bez újmy na obecnosti ztotožnit V s P.

8.2 Afinní podprostory

Písmeny $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ budeme (i s indexy) značit výlučně body, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ označují zase výlučně vektory, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ mohou podle potřeby označovat body i vektory.
Rovněž se dohodneme, že rozdíl dvou bodů budeme chápat jako vektor a součet bodu a vektoru jako bod.

Afinní podprostory II

Nechť $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$. ***Přímkou*** procházející nebo též určenou body $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ rozumíme množinu $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, kterou dostaneme tak, že do bodu $\mathbf{p}$ umístíme všechny možné skalární násobky vektoru $\mathbf{q} - \mathbf{p}$.
Typický bod přímky $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ má tedy tvar

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = (1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{q},$$

kde $t \in K$, tj.

$$\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \{s\mathbf{p} + t\mathbf{q};\ s, t \in K \ \&\ s + t = 1\} \subseteq V.$$

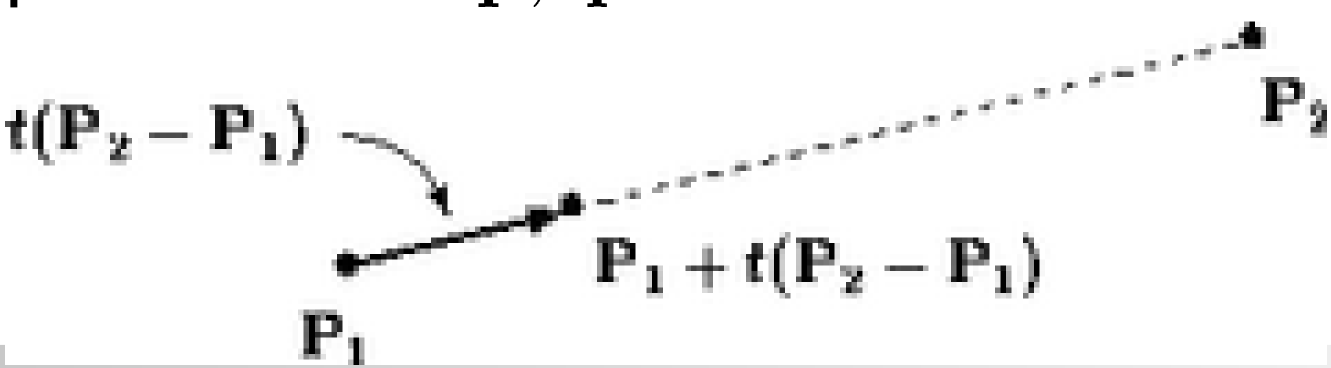
Afinní podprostory III

Tento výraz má smysl i pro $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, tehdy však nejde o přímku ale o jednobodovou množinu $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \{\mathbf{p}\}$.

Z uvedeného tvaru ihned vidíme, že

$$\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \ell(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

pro libovolné $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V$.



Afinní podprostory IV

Podmnožinu M vektorového prostoru V nazýváme jeho ***afinním podprostorem*** nebo též ***lineární varietou*** ve V, pokud $M \neq \emptyset$ a pre všechna $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in M$ platí $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \subseteq M$.

Lineární kombinaci, t. j. výraz tvaru

$$t_0\mathbf{p}_0 + t_1\mathbf{p}_1 + \ldots + t_n\mathbf{p}_n = \textstyle\sum_{i=0}^{n} t_i\mathbf{p}_i,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n \in V$, $t_0, t_1, \ldots, t_n \in K$, nazýváme ***afinní kombinací*** bodů $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$, pokud platí $t_0 + t_1 + \ldots + t_n = 1$.

Afinní podprostory V

Afinní kombinací bodů budeme chápat jako bod; jiné lineární kombinace bodů než afinní se v našich úvahách nevyskytují.
Každá afinní kombinace je neprázdná, t. j. obsahuje alespoň jeden člen.

Tvrzení 8.2.1 *Pro libovolnou neprázdnou množinu* $M \subseteq V$ *jsou následující podmínky ekvivalentní:*

Afinní podprostory VI

(i) M *je afinní podprostor ve* V*;*

(ii) *pro libovolné* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in M$*,* $s \in K$ *platí*

$$s\mathbf{p} + (1-s)\mathbf{q} \in M;$$

(iii) *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a libovolné* $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \in M$*,* $t_0, t_1 \ldots, t_n \in K$ *takové, že*

$$t_0 + t_1 + \ldots + t_n = 1, \textit{ platí}$$

$$t_0\mathbf{p}_0 + t_1\mathbf{p}_1 + \ldots + t_n\mathbf{p}_n \in M.$$

Afinní podprostory VII

Věta 8.2.2 *Nechť $M \subseteq V$. Potom M je afinní podprostor ve V právě tehdy, když existuje bod $\mathbf{p} \in V$ a lineární podprostor $S \subseteq V$ tak, že*

$$M = \mathbf{p} + S = \{\mathbf{p} + \mathbf{u};\ \mathbf{u} \in S\}.$$

V tomto případě pro všechny $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in M$, $\mathbf{u} \in S$ platí

$$\mathbf{q} - \mathbf{r} \in S, \qquad \mathbf{q} + \mathbf{u} \in M, \qquad M = \mathbf{q} + S,$$

$$S = \{\mathbf{x} - \mathbf{q};\ \mathbf{x} \in M\} = \{\mathbf{x} - \mathbf{y};\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M\}.$$

Afinní podprostory VIII

Důsledek 8.2.3 *Každý lineární podprostor S vektorového prostoru V je jeho afinním podprostorem. Afinní podprostor M vektorového prostoru V je jeho lineárním podprostorem právě tehdy, když $\mathbf{0} \in M$.*

Zaměřením nebo též ***směrovým podprostorem*** afinního podprostoru $M \subseteq V$ nazýváme lineární podprostor

$$\mathrm{Dir} M = \{\mathbf{x} - \mathbf{y};\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M\} \subseteq V.$$

Afinní podprostory IX

$\mathrm{Dir} M$ je jediný lineární podprostor ve V takový, že $M = \mathbf{p} + \mathrm{Dir} M$ pro nějaké (pro každé) $\mathbf{p} \in M$. Pro každé $\mathbf{p} \in M$ platí

$$\mathrm{Dir} M = \{\mathbf{x} - \mathbf{p};\, \mathbf{x} \in M\}.$$

Zejména je tedy každý afinní podprostor afinním prostorem ve smyslu odstavce 1.

Afinní podprostory X

Pro libovolnou uspořádanou $(n+1)$-tici bodů $(\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n)$, vektorového prostoru V, případně pro jeho konečnou podmnožinu $\{\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n\} \neq \emptyset$, označme

$$\ell(\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n) = \{t_0\mathbf{p}_0 + \dots + t_n\mathbf{p}_n;\ t_0, \dots, t_n \in K \,\&\, t_0 + \dots + t_n = 1\}$$

množinu všech afinních kombinací bodů $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$.

Afinní podprostory XI

Z právě dokázaného tvrzení vyplývá, že $\ell(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n)$ je nejmenší afinní podprostor ve V, který obsahuje všechny body $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$; nazýváme ho ***afinní obal*** bodů nebo i afinní podprostor ***generovaný*** body $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$.

Pro každou neprázdnou množinu $X \subseteq V$ můžeme definovat její ***afinní obal*** $\ell(X)$, nazývaný též afinní podprostor ***generovaný*** množinou X, jako množinu všech (konečných) afinních kombinací bodů z X.

Afinní podprostory XII

Opět platí, že $\ell(X)$ je nejmenší afinní podprostor ve V tak, že $X \subseteq \ell(X)$.

Tvrzení 8.2.4 *Nechť* $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \in V$. *Potom*

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) &= \mathbf{p}_0 + [\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0], \\ \mathrm{Dir}\,\ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) &= [\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0]. \end{aligned}$$

Afinní podprostory XIII

Dimenzí nebo též ***rozměrem*** afinního podprostoru $M \subseteq V$, píšeme $\dim M$, nazýváme dimenzi jeho zameření, tedy

$$\dim M = \dim \mathrm{Dir} M.$$

Body $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ vektorového prostoru V nazýváme ***afinně nezávislé***, pokud vektory $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0$ jsou lineárně nezávislé.

Afinní podprostory XIV

Z následujícího očividného tvrzení vyplývá, že body $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \in V$ jsou afinně nezávislé právě tehdy, když pro nějaké (pro každé) $0 \leq k \leq n$ vektory $\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_k$, kde $0 \leq j \leq n$ a $j \neq k$, jsou lineárně nezávislé.

Tvrzení 8.2.5 *Body* $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \in V$ *jsou afinně nezávislé právě tehdy, když*

$$\dim \ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) = n.$$

Afinní podprostory XV

Zřejmě 0-rozměrné afinní podprostory ve V jsou právě všechny body $\mathbf{p} \in V$ (přesněji, všechny jednobodové podmnožiny ve V). Tyto afinní podprostory nazýváme též ***triviální***.

Jednorozměrné afinní podprostory ve V nazýváme ***přímkami***. Každá přímka má skutečně tvar $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ pro nějaké afinně nezávislé (t. j. různé) body $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V$.

Dvojrozměrné afinní podprostory ve V nazýváme ***rovinami***.

Afinní podprostory XVI

Samotný prostor V je svým ***nevlastním*** afinním podprostorem.

Pokud $\dim V = n$, tak $(n-1)$-rozměrné afinní podprostory ve V nazýváme ***nadrovinami***.

Pojmy „bod“, „přímka“ a „rovina“ jsou absolutní v tom smyslu, že závisí jen na dimenzi příslušného afinního podprostoru.

Pojem nadroviny je relativní, protože závisí na vztahu dimenzí afinního podprostoru a celého prostoru.

Afinní podprostory XVII

Pokud $\dim V = 1$ (t. j. pokud samotné V je přímka), tak každý bod ve V je zároveň nadrovinou.

Nadrovinami v dvojrozměrném prostoru (t. j. v rovině) jsou zase všechny přímky.

V trojrozměrném prostoru V pojmy roviny a nadroviny splývají.

V čtyřrozměrném prostoru jsou nadrovinami trojrozměrné podprostory; atd.

V 0-rozměrném (t. j. jednobodovém) prostoru V nejsou přímky, roviny ani nadroviny.

8.3 Průnik a spojení afinních podprostorů

Tvrzení 8.3.1 *Nechť M, $N \subseteq V$ jsou afinní podprostory. Potom $M \cap N$ je afinní podprostor ve V právě tehdy, když $M \cap N \neq \emptyset$. V tomto případě*

$$\mathrm{Dir}(M \cap N) = \mathrm{Dir}M \cap \mathrm{Dir}N.$$

Neprázdnost průniku $M \cap N$ můžeme zaručit za předpokladu, že lineární prostor $\mathrm{Dir}M + \mathrm{Dir}N$ je dostatečně velký.

Průnik a spojení AP II

Tvrzení 8.3.2 *Nechť* M, $N \subseteq V$ *jsou afinní podprostory. Potom*

$$\mathrm{Dir} M + \mathrm{Dir} N = V \;\Rightarrow\; M \cap N \neq \emptyset.$$

Spojením afinních podprostorů M, $N \subseteq V$, píšeme $M \sqcup N$, nazýváme afinní obal jejich sjednocení. Tedy

$$M \sqcup N = \ell(M \cup N).$$

Průnik a spojení AP III

Zřejmě $M \sqcup N$ je nejmenší afinní podprostor ve V, který obsahuje M i N, a pro lineární podprostory $S, T \subseteq V$ platí $S \sqcup T = S + T$.

Průnik a spojení AP IV

Tvrzení 8.3.3 *Nechť M, $N \subseteq V$ jsou afinní podprostory.*

(a) Pokud $M \cap N \neq \emptyset$, tak

$$\mathrm{Dir}(M \sqcup N) = \mathrm{Dir}M + \mathrm{Dir}N,$$

$$M \sqcup N = M + \mathrm{Dir}N = N + \mathrm{Dir}M.$$

(b) Pokud $M \cap N = \emptyset$, tak pro $\mathbf{p} \in M$, $\mathbf{q} \in N$ platí

$$\mathrm{Dir}(M \sqcup N) = [\mathbf{q} - \mathbf{p}] + \mathrm{Dir}M + \mathrm{Dir}N,$$

$$M \sqcup N = M + ([\mathbf{q} - \mathbf{p}] + \mathrm{Dir}N) = N + ([\mathbf{q} - \mathbf{p}] + \mathrm{Dir}M).$$

Průnik a spojení AP V

Poznámka Obě rovnosti z (b) jsou splněné i za předpokladu $M \cap N \neq \emptyset$.

V tomto případě však pro libovolné $\mathbf{r} \in M \cap N$ platí

$$\mathbf{q} - \mathbf{p} = (\mathbf{r} - \mathbf{p}) + (\mathbf{q} - \mathbf{r}) \in \mathrm{Dir} M + \mathrm{Dir} N,$$

takže vektor $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ můžeme vynechat.

Průnik a spojení AP VI

Důsledek 8.3.4 *Nechť* $M,\ N \subseteq V$ *jsou konečně rozměrné afinní podprostory. Potom*

$$\dim(M \sqcup N) = \begin{cases} \dim M + \dim N - \dim(M \cap N), & \text{pro } M \cap N \neq \emptyset, \\ \dim M + \dim N - \dim(\mathrm{Dir} M \cap \mathrm{Dir} N) + 1, & \text{pro } M \cap N = \emptyset. \end{cases}$$

Příklad 8.3.5 *Ve vektorovém prostoru V uvažujme konečně rozměrné afinní podprostory*

$$M = \mathbf{p} + [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m], \qquad N = \mathbf{q} + [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n].$$

Potom

$$M \sqcup N = \begin{cases} \mathbf{p} + [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n], \\ \textit{pro } M \cap N \neq \emptyset, \\ \mathbf{p} + [\mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n], \\ \textit{pro } M \cap N = \emptyset, \end{cases}$$

Průnik a spojení AP VIII

$$\dim(M \sqcup N) = \begin{cases} \dim[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n], \\ \text{pro } M \cap N \neq \emptyset, \\ \dim[\mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n], \\ \text{pro } M \cap N = \emptyset. \end{cases}$$

Průnik a spojení AP IX

Pokud předpokládáme, že jak vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ tak vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ jsou lineárně nezávislé, pak

$$\dim(M \sqcup N) = \begin{cases} m + n - k, & \text{pro } M \cap N \neq \emptyset, \\ m + n - k + 1, & \text{pro } M \cap N = \emptyset, \end{cases}$$

kde $k = \dim([\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m] \cap [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n])$.

Průnik a spojení AP X

Příklad 8.3.6 *V sloupcovém prostoru* $\mathbb{R}^4$ *jsou dané vektory* $\mathbf{x} = (1,2,3,4)^T$, $\mathbf{y} = (0,-3,1,-1)^T$, $\mathbf{z} = (1,1,0,0)^T$, $\mathbf{u} = (0,-2,4,3)^T$, $\mathbf{v} = (2,6,2,5)^T$, $\mathbf{w} = (0,0,1,1)^T$ *a blíže neurčené body* $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$.

Potom $S = [\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}]$, $T = [\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]$ *jsou lineární podprostory a* $M = \mathbf{p} + S$, $N = \mathbf{q} + N$ *jsou afinní podprostory v* $\mathbb{R}^4$.

Najdeme dimenze lineárních podprostorů $S + T$, $S \cap T$ *a afinních podprostorů* $M \cap N$, $M \sqcup N$ *v závislosti na* $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$.

Průnik a spojení AP XI

Lineární podprostor $S + T$ je generovaný sloupci blokové matice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right),$$

přičemž sloupce levého bloku generují lineární podprostor S a sloupce pravého bloku lineární podprostor T.

Průnik a spojení AP XII

Tato matice je řádkově ekvivalentní s následující blokovou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ve stupňovitém tvaru, jejíž řádky mají vedoucí prvky ve sloupcích 1, 2, 3 a 6.

Průnik a spojení AP XIII

Vidíme, že vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ tvoří bázi S a vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}$ bázi $S + T$. Doupravením pravého bloku na řádkově ekvivalentní stupňovitý tvar

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se můžeme přesvědčit, že i vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou lineárně nezávislé, tedy tvoří bázi T.

Průnik a spojení AP XIV

Celkem $\dim S = \dim T = 3$, $\dim(S+T) = 4$.

Odtud dle věty o dimenzi součtu a průniku vyplývá $\dim(S \cap T) = 3 + 3 - 4 = 2$.

Tedy $S + T = \mathbb{R}^4$. Odtud pak $M \cap N \neq \emptyset$.

Proto $\dim(M \cap N) = \dim(S \cap T) = 2$. Odtud $\dim(M \sqcup N) = \dim(S+T) = 4$.

8.4 Vzájemná poloha afinních podprostorů

Polohu netriviálních vlastních afinních podprostorů (lineárních variet) $M, N \subseteq V$ budeme klasifikovat na základě dvou kritérií:

Vzájemná poloha AP II

(A) Pokud platí $\mathrm{Dir} M \subseteq \mathrm{Dir} N \vee \mathrm{Dir} N \subseteq \mathrm{Dir} M$, říkáme, že M, N jsou ***rovnoběžné*** a píšeme $M \parallel N$.
V opačném případě, t. j. pokud platí $\mathrm{Dir} M \not\subseteq \mathrm{Dir} N \,\&\, \mathrm{Dir} N \not\subseteq \mathrm{Dir} M$, říkáme, že M, N ***nejsou rovnoběžné***, a píšeme $M \nparallel N$.

Vzájemná poloha AP III

(B) Pokud platí $M \cap N \neq \emptyset$, říkáme, že M, N ***se protínají***.
V opačném případě, t. j. pokud $M \cap N = \emptyset$, říkáme, že M, N ***se neprotínají***, neboli, že jsou ***disjunktní***.

Vzájemná poloha AP IV

Celkově tedy dostáváme čtyři možnosti:

(1) $M \parallel N$ & $M \cap N \neq \emptyset$, tj. M, N jsou rovnoběžné a protínají se.
V tomto případě platí
$\mathrm{Dir} M \subseteq \mathrm{Dir} N \;\Leftrightarrow\; M \subseteq N$ a
$\mathrm{Dir} N \subseteq \mathrm{Dir} M \;\Leftrightarrow\; N \subseteq M$.
Tedy $M \subseteq N$ nebo $M \subseteq N$. Říkáme, že jedna z lineárních variet M, N je ***podvarietou*** druhé, neboli, že M, N jsou ve vztahu ***inkluze***.

Vzájemná poloha AP V

(2) $M \parallel N \;\&\; M \cap N = \emptyset$, tj. M, N jsou rovnoběžné a neprotínají se.
Tento případ nazýváme vztahem ***pravé rovnoběžnosti***.

Vzájemná poloha AP VI

(3) $M \not\parallel N \;\&\; M \cap N \neq \emptyset$, tj. M, N nejsou rovnoběžné a protínají se.

Říkáme, že M, N jsou ***různoběžné***.

Vzájemná poloha AP VII

(4) $M \nparallel N$ & $M \cap N = \emptyset$, tj. M, N nejsou rovnoběžné a neprotínají se.
V tomto případě ještě rozlišujeme dvě další možnosti:

(4a) Ak $\mathrm{Dir} M \cap \mathrm{Dir} N = \{\mathbf{0}\}$, říkáme, že M, N jsou ***mimoběžné***.

(4b) Pokud $\mathrm{Dir} M \cap \mathrm{Dir} N \neq \{\mathbf{0}\}$, říkáme, že M, N jsou ***částečně rovnoběžné***.

Vzájemná poloha AP VIII

Tvrzení 8.4.1 *Nechť* M, $N \subseteq V$ *jsou částečně rovnoběžné lineární variety. Potom* $\dim M \geq 2$, $\dim N \geq 2$ *a* $\dim V \geq 4$.

Na druhé straně v libovolném vektorovém prostoru V dimenze ≥ 4 není těžké najít příklady částečne rovnobežných lineárních variet. Např.

$$M = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], \qquad N = \mathbf{e}_4 + [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$$

jsou částečně rovnoběžné roviny v K^4.

8.5 Afinní zobrazení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tímž tělesem K.
Říkáme, že $f\ V \to U$ je ***afinní zobrazení***, pokud pro libovolné body $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V$ a skalár $s \in V$ platí

$$f(s\mathbf{p} + (1-s)\mathbf{q}) = sf(\mathbf{p}) + (1-s)f(\mathbf{q}).$$

Afinní zobrazení II

Tvrzení 8.5.1 *Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K. Potom zobrazení $f\, V \to U$ je afinní právě tehdy, když pro každé $n \in \mathbb{N}$, všechny body $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n \in V$ a skaláry $t_0, \ldots, t_n \in K$ takové, že $t_0 + \ldots + t_n = 1$, platí*

$$f(t_0\mathbf{p}_0 + \ldots + t_n\mathbf{p}_n) = t_0 f(\mathbf{p}_0) + \ldots + t_n f(\mathbf{p}_n).$$

Afinní zobrazení III

Posunutím neboli ***translací*** vektorového prostoru V o vektor $\mathbf{u} \in V$ nazýváme zobrazení $V \to V$ dané předpisem $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{u}$.
Zřejmě kompozicí posunutí o vektor $\mathbf{u} \in V$ a posunutí o vektor $\mathbf{v} \in V$ je posunutí o vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Každé posunutí je bijektivní zobrazení; inverzní zobrazení k posunutí o vektor $\mathbf{u}$ je posunutí o opačný vektor $-\mathbf{u}$.

Afinní zobrazení IV

Věta 8.5.2 *Nechť* U, V *jsou vektorové prostory nad tělesem* K. *Potom zobrazení* $f : V \to U$ *je afinní právě tehdy, když existuje vektor* $\mathbf{u} \in U$ *a lineární zobrazení* $\varphi : V \to U$ *takové, že pro každé* $\mathbf{x} \in V$ *platí*

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{u}.$$

Důsledek 8.5.3 *Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K. Potom*

(a) *Libovolná translace prostoru V je afinní zobrazení;*

(b) *libovolné lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ je afinní;*

(c) *afinní zobrazení $f : V \to U$ je lineární právě tehdy, když $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.*

Afinní zobrazení VI

Zřejmě vektor $\mathbf{u} \in U$ a lineární zobrazení φ jsou podmínkou věty určené jednoznačně. Zobrazení $\varphi = f - f(\mathbf{0})$ nazýváme ***lineární částí*** a vektor $\mathbf{u} = f(\mathbf{0})$ ***absolutním členem*** afinního zobrazení f.

Píšeme též $f = \varphi + \mathbf{u}$.

Afinní zobrazení jsou zevšeobecněním funkcí $f : K \to K$ tvaru $f(x) = ax + b$, kde $a, b \in K$, které (v případě $K = \mathbb{R}$) v matematické analýze nazýváme lineárními.

Afinní zobrazení VII

Tvrzení 8.5.4 *Nechť* U, V, W *jsou vektorové prostory nad tělesem* K *a* $g : W \to V$, $f : V \to U$ *jsou afinní zobrazení. Potom i jejich kompozice* $f \circ g : W \to U$ *je afinní zobrazení.*

$$(f \circ g)(\mathbf{z}) = \varphi(\psi(\mathbf{z}) + \mathbf{v}) + \mathbf{u} = (\varphi \circ \psi)(\mathbf{z}) + \varphi(\mathbf{v}) + \mathbf{u}.$$

Pro lineární zobrazení $\psi : W \to V$, $\varphi : V \to U$ a vektory $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{u} \in U$ platí

$$(\varphi + \mathbf{u}) \circ (\psi + \mathbf{v}) = (\varphi \circ \psi) + (\varphi(\mathbf{v}) + \mathbf{u}).$$

Afinní zobrazení VIII

Tvrzení 8.5.5 *Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K, $f : V \to U$ je afinní zobrazení a $M \subseteq V$, $N \subseteq U$ jsou afinní podprostory. Potom $f(M)$ je afinní podprostor v U a $f^{-1}(N)$ je afinní podprostor ve V nebo prázdná množina.*

Protože každé posunutí je bijekce, afinní zobrazení $f = \varphi + \mathbf{u} : V \to U$ s lineární částí φ je injektivní právě tehdy, když φ je injektivní. Podobně, f je surjektivní právě tehdy, když φ je surjektivní.

Věta 8.5.6 *Nechť* $f : V \to U$ *je afinní zobrazení, přičemž* V *je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom pro libovolné* $\mathbf{y} \in \mathrm{Im} f$ *platí*

$$\dim V = \dim f^{-1}(\mathbf{y}) + \dim \mathrm{Im} f.$$

Afinní transformací vektorového prostoru V nazýváme libovolné afinní zobrazení $f : V \to V$.

Afinní zobrazení X

Důsledek 8.5.7 *Nechť $f : V \to V$ je afinní transformace konečně rozměrného vektorového prostoru V. Potom f je injektívní právě tehdy, když je surjektivní.*

Tvrzení 8.5.8 *Nechť $f : V \to U$ je afinní zobrazení s lineární částí φ a $\mathbf{u} = f(\mathbf{0})$. Potom f je bijektivní právě tehdy, když φ je bijektívní.*
V tomto případě i inverzní zobrazení $f^{-1} : U \to V$ je afinní a platí $f^{-1} = \varphi^{-1} - \varphi^{-1}(\mathbf{u})$.

Tedy f^{-1} je kompozicí lineárního zobrazení φ^{-1} a posunutí o vektor $-\varphi^{-1}(\mathbf{u})$.

Afinní zobrazení XI

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory a $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ jsou báze v U resp. ve V. ***Rozšířenou maticí*** afinního zobrazení $f : V \to U$ s lineární částí φ a absolutním členem $\mathbf{u}$ vzhledem na báze $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ nazýváme blokovou matici

$$(f)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = ((\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \,|\, (\mathbf{u})_{\boldsymbol{\alpha}}).$$

Afinní zobrazení XII

Pokud $\dim U = m$, $\dim V = n$, $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ je matice lineárního zobrazení φ v bazích $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$, $\boldsymbol{\alpha}$ a $\mathbf{a} = (\mathbf{u})_{\boldsymbol{\alpha}}$ je vektor souřadnic vektoru $\mathbf{u}$ v bázi $\boldsymbol{\alpha}$, tak rozšířenou maticí afinního zobrazení f v bazích $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ je bloková matice

$$(f)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = ((\varphi(\mathbf{v}_1))_{\boldsymbol{\alpha}}, \ldots, (\varphi(\mathbf{v}_n))_{\boldsymbol{\alpha}} \,|\, (\mathbf{u})_{\boldsymbol{\alpha}}) = (\mathbf{A} \,|\, \mathbf{a}).$$

Afinní zobrazení XIII

Souřadnice bodu $\mathbf{x} \in V$ v bázi β a souřadnice jeho obrazu $f(\mathbf{x}) \in U$ v bázi $\boldsymbol{\alpha}$ jsou tak spojené rovností

$$(f(\mathbf{x}))_{\boldsymbol{\alpha}} = (\varphi)_{\alpha,\boldsymbol{\beta}} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\beta}} + (\mathbf{u})_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{a}.$$

Je-li f lineární zobrazení, t. j. pokud $f = \varphi$ a $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, nemá význam rozšiřovat matici $(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ o nulový sloupec.

Afinní zobrazení XIV

Tvrzení 8.5.9 *Nechť U, V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K a $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ jsou nějaké báze prostorů U, V, resp. W.*

(a) *Jsou-li $g : W \to V$, $f : V \to U$ afinní zobrazení, které mají v příslušných bazích rozšířené matice $(g)_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}} = (\mathbf{B} \,|\, \mathbf{b})$, $(f)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{A} \,|\, \mathbf{a})$, tak jejich kompozice $f \circ g : W \to U$ má v bazích $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\alpha}$ rozšířenou matici*

$$(f \circ g)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \,|\, \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}).$$

Afinní zobrazení XV

(b) *Je-li* $f : V \to U$ *afinní bijekce s rozšířenou maticí* $(f)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{A} \,|\, \mathbf{a})$ *v bazích* $\boldsymbol{\beta}$*,* $\boldsymbol{\alpha}$*, tak k ní inverzní zobrazení je afinní bijekce* $f^{-1} : U \to V$*, která má v bazích* $\boldsymbol{\alpha}$*,* $\boldsymbol{\beta}$ *rozšířenou matici*

$$(f^{-1})_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} = (\mathbf{A}^{-1} \,|\, -\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{a}).$$