7. HODNOST MATICE, INVERZNÍ MATICE A ZMĚNA BÁZE

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

Abstrakt přednášky

V této kapitole zavedeme pojem ***inverzní matice*** k dané čtvercové matici a dáme jej do souvislosti s pojmem inverzního lineárního zobrazení.

Dále se naučíme počítat inverzní matice a matice přechodu z jedné souřadné báze do druhé.

Nakonec prozkoumáme vliv změny báze na matici lineárního zobrazení.

Přednáška začne pojmem ***hodnosti matice***, který nám umožní rozhodnout o existenci inverzní matice.
V celé kapitole K označuje pevné těleso, m, n, p jsou kladná celá čísla.

Obsah

7 Hodnost matice, inverzní matice a změna báze

7.1 Hodnost matice

V této části je potřebné rozlišovat mezi vektorovými prostory řádkových resp. sloupcových vektorů. Prostor řádkových vektorů budeme značit $K^{1\times n}$ a prostor sloupcových vektorů $K^{n\times 1}$.

Hodnost matice II

$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \in K^{1\times n}$ označuje i-tý řádek a $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) \in K^{m\times 1}$ j-tý sloupec matice $\mathbf{A} = (a_i{}^j)_{m\times n}$. Tuto matici můžeme zapsat blokově jako

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \mathbf{r}_2(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = (\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})).$$

Hodnost matice III

Řádkovou hodností $h_r(\mathbf{A})$ matice $\mathbf{A}$ nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{1\times n}$ generovaného řádky matice $\mathbf{A}$.

Podobně, ***sloupcovou hodností*** $h_s(\mathbf{A})$ matice $\mathbf{A}$ nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{m\times 1}$ generovaného sloupci matice $\mathbf{A}$. Tedy

$$\begin{aligned} h_r(\mathbf{A}) &= \dim[\mathbf{r}_1(\mathbf{A}), \mathbf{r}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{r}_m(\mathbf{A})], \\ h_s(\mathbf{A}) &= \dim[\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})]. \end{aligned}$$

Hodnost matice IV

Označme $\varphi : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$ lineární zobrazení dané předpisem $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in K^{n\times 1}$.

Hodností lineárního zobrazení φ nazýváme dimenzi jeho obrazu, t. j. $h(\varphi) = \dim Im\varphi$.

Zřejmě platí $h(\varphi) = h_s(\mathbf{A})$, protože lineární podprostor $\mathrm{Im}\varphi \subseteq K^{m\times 1}$ je generovaný sloupci matice $\mathbf{A}$.

Hodnost matice V

Lemma 7.1.1 *Nechť* $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$*.*

(a) *Nechť matice* B *vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *provedením jedné elementární řádkové operace (ERO). Pak* $[\mathbf{r}_1(\mathbf{A}), \mathbf{r}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{r}_m(\mathbf{A})] = [\mathbf{r}_1(\mathbf{B}), \mathbf{r}_2(\mathbf{B}), \ldots, \mathbf{r}_m(\mathbf{B})]$*.*

(b) *Nechť matice* $\mathbf{C}$ *vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *vykonáním jedné elementární sloupcové operace (ESO). Pak* $[\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})] = [\mathbf{s}_1(\mathbf{C}), \mathbf{s}_2(\mathbf{C}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{C})]$*.*

Hodnost matice VI

Tvrzení 7.1.2 *Pro každou matici* $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ *platí* $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A})$*.*

Společnou hodnotu řádkové a sloupcové hodnosti budeme nyní značit $h(\mathbf{A})$ a nazývat ***hodností matice*** $\mathbf{A}$. Zřejmě pro $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ je $h(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.

Tvrzení 7.1.3 *Nechť* $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$*. Potom* $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T)$*.*

Hodnost matic^e VII

Tvrzení 7.1.4 *Nechť* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in K^{m\times 1}$ *jsou libovolné vektory a* $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ *je matice taková, že* $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_j$ *pro* $1 \leq j \leq n$*. Potom*

(a) $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když* $h(\mathbf{A}) = n$*;*

(b) $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] = K^{m\times 1}$ *právě tehdy, když* $h(\mathbf{A}) = m$*.*

Případ (a) může nastat tehdy, když $n \leq m$; naopak, (b) může nastat jedině za předpokladu $m \leq n$.

Hodnost matice VIII

Tvrzení 7.1.5 *Nechť* $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n\times p}$. *Potom*

$$h(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \leq \min(h(\mathbf{A}), h(\mathbf{B})).$$

7.2 Inverzní matice a inverzní lineární zobrazení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$, t. j. $\mathbf{A}$ je ***čtvercová*** matice typu $n \times n$. ***Inverzní maticí*** k matici $\mathbf{A}$ rozumíme matici $\mathbf{B} \in K^{n\times n}$ tak, že

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Zřejmě k dané čtvercové matici $\mathbf{A}$ existuje nanejvýš jedna inverzní matice. Tuto matici (pokud existuje) budeme značit $\mathbf{A}^{-1}$.

Inverzní matice II

Věta 7.2.1 *Nechť* U, V *jsou vektorové prostory nad tělesem* K *a* $\dim U = \dim V = n$. *Nechť dále* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *jsou nějaké báze v* U, *resp. ve* V *a* $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ *je matice lineárního zobrazení* $\varphi : V \to U$ *vzhledem na báze* $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$. *Potom k matici* $\mathbf{A}$ *existuje inverzní matice* $\mathbf{A}^{-1}$ *právě tehdy, když k zobrazení* φ *existuje inverzní zobrazení* φ^{-1}. *V tomto případě* $\mathbf{A}^{-1}$ *je maticí lineárního zobrazení* $\varphi^{-1} : U \to V$ *vzhledem na báze* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, *t. j.*

$$\mathbf{A}^{-1} = ((\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})^{-1} = (\varphi^{-1})_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}}.$$

Inverzní matice III

Říkáme, že čtvercová matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ je ***regulární***, pokud k ní existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$; v opačném případě $\mathbf{A}$ je ***singulární***.

Věta 7.2.2 *Matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ je regulární právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = n$.*

Věta 7.2.3 *Pro libovolné $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n\times n}$ platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n$ právě tehdy, když $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.*

Inverzní matice IV

Tvrzení 7.2.4 *Nechť* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n\times n}$ *jsou regulární matice. Potom i matice* $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ *a* $\mathbf{A}^T$ *jsou regulární a platí:*

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}, (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}, (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T.$$

7.3 Realizace ERO a ESO pomocí násobení matic

Tvrzení 7.3.1 *Nechť* $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$.

(a) *Nechť* $\mathbf{B} \in K^{m\times n}$ *vznikne z* $\mathbf{A}$ *provedením jedné ERO. Označme* $\mathbf{E}$ *matici, která vznikne z matice* $\mathbf{I}_m$ *provedením stejné ERO. Potom* $\mathbf{B} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$.

Realizace ERO a ESO II

(b) *Nechť* $\mathbf{C} \in K^{m\times n}$ *vznikne z* $\mathbf{A}$ *provedením jedné ESO. Označme* $\mathbf{F}$ *matici, která vznikne z matice* $\mathbf{I}_n$ *provedením stejné ESO. Potom* $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}$*.*

Realizace ERO a ESO III

Čtvercové matice $\mathbf{E} \in K^{n \times n}$, které vzniknou z jednotkové matice $\mathbf{I}_n$ provedením jediné ERO nebo ESO, nazýváme ***elementární matice***.

Libovolnou ERO (ESO) na matici $\mathbf{A}$ můžeme realizovat vynásobením matice $\mathbf{A}$ vhodnou elementární maticí $\mathbf{E}$ (F) zleva (zprava).

7.4 Výpočet inverzní matice

Návod na výpočet inverzní matice k dané čtvercové matici $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$:

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{I}_n) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \,|\, \mathbf{A}^{-1}).$$

Tvrzení 7.4.1 *Nechť* $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ *a* $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_k \in K^{n\times n}$ *jsou elementární matice tak, že* $\mathbf{E}_k \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$*. Potom* $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_k \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1$*.*

Výpočet inverzní matice II

K stejnému cíli vede též postup reprezentovaný schématem:

$$\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}_n}\right) \xrightarrow{\text{ESO}} \left(\frac{\mathbf{I}_n}{\mathbf{A}^{-1}}\right).$$

Tvrzení 7.4.2 *Matice* $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$*je regulární právě tehdy, když ji můžeme rozložit na součin* $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_k$ *konečného počtu elementárních matic* $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_k \in K^{n\times n}$*.*

Výpočet inverzní matice III

Tvrzení 7.4.3 *Pro libovolné* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m\times n}$ *platí:*

(a) $\mathbf{A}$ *je řádkově ekvivalentní s* $\mathbf{B}$ *právě tehdy, když existuje regulární matice* $\mathbf{P} \in K^{m\times m}$ *tak, že* $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}$*;*

(b) $\mathbf{A}$ *je sloupcově ekvivalentní s* $\mathbf{B}$ *právě tehdy, když existuje regulární matice* $\mathbf{Q} \in K^{n\times n}$ *tak, že* $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}$*.*

Výpočet inverzní matice IV

Tvrzení 7.4.4 *Nechť* $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{P} \in K^{m\times m}$, $\mathbf{Q} \in K^{n\times n}$, *přičemž* $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ *jsou regulární matice. Potom*

$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}) = h(\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}).$$

Násobení libovolné matice vhodného rozměru maticí A^{-1} (pokud existuje) zleva resp. zprava

Buď $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ regulární a $\mathrm{B} \in K^{n\times m}$, $\mathbf{C} \in K^{m\times n}$ libovolné. Pak

$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n\,|\,\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B})$$

a

$$\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{C}}\right) \xrightarrow{\text{ESO}} \left(\frac{\mathbf{I}_n}{\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}^{-1}}\right).$$

Řešení soustavy lineárních rovnic

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{B} \,|\, \mathbf{c}),$$

které má pro regulární $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ tvar

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \,|\, \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}).$$

Výpočet inverzní matice VII

Tvrzení 7.4.5 *Nechť* $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in K^{n}$. *Je-li* $\mathbf{A}$ *regulární, tak soustava* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *má jediné řešení* $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$.

7.5 Matice přechodu

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K a $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jsou jeho dvě báze.

Maticí přechodu z báze $\boldsymbol{\beta}$ do báze $\boldsymbol{\alpha}$ nazýváme matici identického zobrazení $\mathrm{id}_V : V \to V$ vzhledem na bázi $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$, kterou značíme $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$. Tedy

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = (\mathrm{id}_V)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}.$$

Matice přechodu II

Sloupce matice přechodu $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ jsou tvořeny souřadnicemi vektorů báze $\boldsymbol{\beta}$ vzhledem na bázi $\boldsymbol{\alpha}$, t. j. $\mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{v}_j)_{\boldsymbol{\alpha}}$ pro $1 \leq j \leq n$.

Tedy

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = ((\mathbf{v}_1)_{\boldsymbol{\alpha}}, (\mathbf{v}_2)_{\boldsymbol{\alpha}}, \ldots, (\mathbf{v}_n)_{\boldsymbol{\alpha}}),$$

a tato matice je jednoznačně určená podmínkou transformace souřadnic

$$(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\beta}}$$

pro libovolné $\mathbf{x} \in V$.

Matice přechodu III

Pokud do rovnosti $\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}}$ budeme za $\mathbf{x}$ postupně dosazovat vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ bázi $\boldsymbol{\beta}$, s využitím vztahu pro sloupce součinu matic dostaneme

$$\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{v}_j)_{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{s}_j(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$$

pro každé $1 \leq j \leq n$. Tedy

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}.$$

Matice přechodu IV

Tvrzení 7.5.1 *Nechť $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ jsou báze n-rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K. Potom pro libovolnou matici $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) $\mathbf{P} = (\mathrm{id}_V)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$, *t. j.* $\mathbf{P}$ *je matice přechodu z báze* $\boldsymbol{\beta}$ *do báze* $\boldsymbol{\alpha}$*;*

(ii) $(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\beta}}$ *pro každé* $\mathbf{x} \in V$*;*

(iii) $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\beta}$.

Matice přechodu V

Tvrzení 7.5.2 *Nechť $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K. Potom*

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{I}_n, \qquad \mathbf{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}^{-1},$$
$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}}.$$

Z druhé z uvedených podmínek vidíme, že matice přechodu $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ je vždy ***regulární***. Naopak, každá regulární matice $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ je maticí přechodu mezi vhodnou dvojicí bazí.

Matice přechodu VI

Tvrzení 7.5.3 *Nechť V je n-rozměrný vektorový prostor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ je libovolná regulární matice. Nechť $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je nějaká báze ve V. Položme $\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P})$, $\mathbf{w}_j = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}^{-1})$ pro $1 \leq j \leq n$, a dále*

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{P},\ \boldsymbol{\gamma} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) = \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{P}^{-1}.$$

Potom $\mathbf{P}$ je maticí přechodu z báze $\boldsymbol{\beta}$ do báze $\boldsymbol{\alpha}$ a zároveň z báze $\boldsymbol{\alpha}$ do báze $\boldsymbol{\gamma}$, t. j.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}.$$

Matice přechodu VII

Speciálně, P *je maticí přechodu z báze* $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}))$ *do báze* $\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ *v* K^n *a taktéž z báze* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *do báze* $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}^{-1}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}^{-1}))$*.*

Tvrzení 7.5.4 *Nechť* $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$*,* $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *jsou dvě báze sloupcového vektorového prostoru* K^n*. Potom* $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta}$*.*

Matice přechodu VIII

Návod na výpočet matice přechodu pro báze α, β vektorového prostoru K^n

$$(\boldsymbol{\alpha} \,|\, \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{\textbf{ERO}} (\mathbf{I}_n \,|\, \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = (\boldsymbol{\varepsilon} \,|\, \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta}).$$

7.6 Matice lineárního zobrazení vzhledem na různé báze

Věta 7.6.1 *Nechť V_1, V_2 jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K, $\varphi : V_1 \to V_2$ je lineární zobrazení, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_1$ jsou dvě báze prostoru V_1 a $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2$ jsou dvě báze prostoru V_2. Potom*

$$(\varphi)_{\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2} \cdot (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1}.$$

MLZ vzhledem na různé báze II

Výše uvedenou transformační formuli si můžeme zapamatovat pomocí následujícího diagramu:

$$
\begin{tikzcd}
(V_1, \boldsymbol{\alpha}_1) \arrow[r, "\mathbf{A}"] & (V_2, \boldsymbol{\alpha}_2) \arrow[d, "\mathbf{P}_{\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2}"] \\
(V_1, \boldsymbol{\beta}_1) \arrow[u, "\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1}"'] \arrow[r, "\mathbf{B}"] & (V_2, \boldsymbol{\beta}_2)
\end{tikzcd}
$$

MLZ vzhledem na různé báze III

Příklad 7.6.2 *Nechť* $\varphi : K^n \to K^m$ *je lineární zobrazení a* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *jsou nějaké báze prostorů* K^m *resp.* K^n. *Označme* $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$, $\mathbf{M} = (\varphi)_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)},\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}}$ *matice zobrazení* φ *vzhledem k bazím* $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ *resp. vzhledem ke kanonickým bazím* $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$. *Pak platí:*

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)},\boldsymbol{\beta}}$$

a

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)},\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}}.$$

MLZ vzhledem na různé báze III

Pokud ztotožníme každou bázi s regulární maticí, jejíž sloupce jsou vektory této báze, tak výše uvedené rovnosti získají tvar

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \mathbf{I}_m \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{I}_n^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\beta},$$

a

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}_m^{-1} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\beta}^{-1} \cdot \mathbf{I}_n = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\beta}^{-1}.$$

MLZ vzhledem na různé báze IV

Věta 7.6.3 *Nechť U je m-rozměrný a V je n-rozměrný vektorový prostor nad tělesem K. Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m\times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *jsou matice toho stejného lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ vzhledem na nějaké dvě dvojice bazí prostorů U, V;*

(ii) *existují regulární matice $\mathbf{P} \in K^{m\times m}$, $\mathbf{Q} \in K^{n\times n}$ tak, že $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$;*

(iii) $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$.

MLZ vzhledem na různé báze V

Věta 7.6.4 *Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad tělesem K můžeme zvolit bázi $\boldsymbol{\beta}$ prostoru V a bázi $\boldsymbol{\alpha}$ prostoru U tak, že φ má vzhledem k bazím $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ matici v blokovém tvaru*

$$(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_h & \mathbf{0}_{h,n-h} \\ \mathbf{0}_{m-h,h} & \mathbf{0}_{m-h,n-h} \end{pmatrix},$$

kde $n = \dim V$, $m = \dim U$ *a* $h = h(\varphi)$.