

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

Abstrakt

V této kapitole prozkoumáme pojem ***lineárního zobrazení***, které nám umožní porovnávat struktury různých vektorových prostorů nad tímž tělesem.

Obsah

6	Lineární zobrazení	4
6.1	Lineární zobrazení	4
6.2	Jádro a obraz	18
6.3	Lineární izomorfismy	24
6.4	Matice lineárního zobrazení	30
6.5	Prostory lineárních zobrazení	49

6 Lineární zobrazení

6.1 Lineární zobrazení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K . Říkáme, že $\varphi : V \rightarrow U$ je **lineární zobrazení**, pokud φ zachovává operace vektorového součtu a skalárního násobku, t. j. pokud pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, c \in K$ platí

$$\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}),$$

$$\varphi(c\mathbf{x}) = c\varphi(\mathbf{x}).$$

Lineární zobrazení II

Lineární zobrazení zachovávají nulový vektor a opačné vektory, t. j. pro lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ a $\mathbf{x} \in V$ platí

$$\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \varphi(-\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x}).$$

Pro každý vektorový prostor V je identické zobrazení $\text{id}_V : V \rightarrow V, x \mapsto x$ lineární.

Pro libovolné vektorové prostory U, V nad tělesem K zobrazení $\mathbf{0} : V \rightarrow U$, které každému vektoru $\mathbf{x} \in V$ přiřadí nulový vektor $\mathbf{0} \in U$, je lineární.

Lineární zobrazení III

Komutativita operace součinu v tělese a jeho distributivita vzhledem na sčítání znamená, že pro libovolný pevný skalár $a \in K$ je přiřazením $x \mapsto ax$ definované lineární zobrazení $K \rightarrow K$.

Lineární zobrazení můžeme charakterizovat jako zobrazení mezi vektorovými prostory (nad tím stejným tělesem), které zachovávají lineární kombinace.

Lineární zobrazení IV

Tvrzení 6.1.1 *Necht' U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\varphi : V \rightarrow U$ je libovolné zobrazení. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (i) *φ je lineární zobrazení;*
- (ii) *pre všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, a, b \in K$ platí*
$$\varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\varphi(\mathbf{x}) + b\varphi(\mathbf{y});$$
- (iii) *pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a všechna*
 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in V, c_1, \dots, c_n \in K$ *platí*
$$\varphi(c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_n\mathbf{x}_n) = c_1\varphi(\mathbf{x}_1) + \dots + c_n\varphi(\mathbf{x}_n).$$

Lineární zobrazení V

Významné vlastnosti lineárních zobrazení jsou: kompozice (složení) lineárních zobrazení je opět lineární zobrazení a obrazy i vzory lineárních podprostorů v lineárních zobrazeních jsou též lineární podprostory.

Tvrzení 6.1.2 *Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\psi : W \rightarrow V, \varphi : V \rightarrow U$ jsou lineární zobrazení. Potom i jejich složení $\varphi \circ \psi : W \rightarrow U$ je lineární zobrazení.*

Tvrzení 6.1.3 *Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení.*

- (a) *Je-li S lineární podprostor prostoru V , tak i $\varphi(S)$ je lineární podprostor prostoru U .*
- (b) *Je-li T lineární podprostor prostoru U , tak $\varphi^{-1}(T)$ je lineární podprostor prostoru V .*

Lineární zobrazení VII

Příklad 6.1.4 *Nechť K je těleso. Distributivita součinu matic vzhledem k jejich součtu a jeho zaměnitelnosti s operací skalárního násobku říká, že pro pevn $m, n, p \in \mathbb{N}$ a libovolnou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je přiřazením $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ definované lineární zobrazení mezi vektorovými prostory matic $K^{n \times p} \rightarrow K^{m \times p}$.*

Podobně je přiřazením $\mathbf{Y} \mapsto \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}$ definované lineární zobrazení $K^{p \times m} \rightarrow K^{p \times n}$.

Lineární zobrazení VIII

Speciálně pro $p = 1$ je takto definované lineární zobrazení $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ mezi sloupcovými vektorovými prostory $K^n \rightarrow K^m$, resp. lineární zobrazení $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{y} \cdot \mathbf{A}$ mezi řádkovými vektorovými prostory $K^m \rightarrow K^n$.

Každé lineární zobrazení mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad K má v podstatě takovýto tvar.

Lineární zobrazení IX

Příklad 6.1.5 *Nechť K je těleso. Pro $m, n \in \mathbb{N}$ a pevné $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ jsou předpisy $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{r}_i(\mathbf{A}), \mathbf{A} \mapsto \mathbf{s}_j(\mathbf{A})$ definovaná lineární zobrazení $K^{m \times n} \rightarrow K^{1 \times n}$ resp. $K^{m \times n} \rightarrow K^{m \times 1}$.*

Rovněž $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}^T$ je lineární zobrazení $K^{m \times n} \rightarrow K^{n \times m}$.

Lineární zobrazení X

Příklad 6.1.6 *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K , X je množina a $x \in X$ je pevně zvolený prvek.*

Připomeňme, že V^X je vektorový prostor všech funkcí $f : X \rightarrow V$. Dosazení prvku x do funkce f , t. j. přiřazení $f \mapsto f(x)$, je lineární zobrazení $V^X \rightarrow V$.

Podobně, pro libovolnou podmnožinu $Y \subseteq X$ je zúžení $f \mapsto f \upharpoonright Y$ lineární zobrazení $V^X \rightarrow V^Y$.

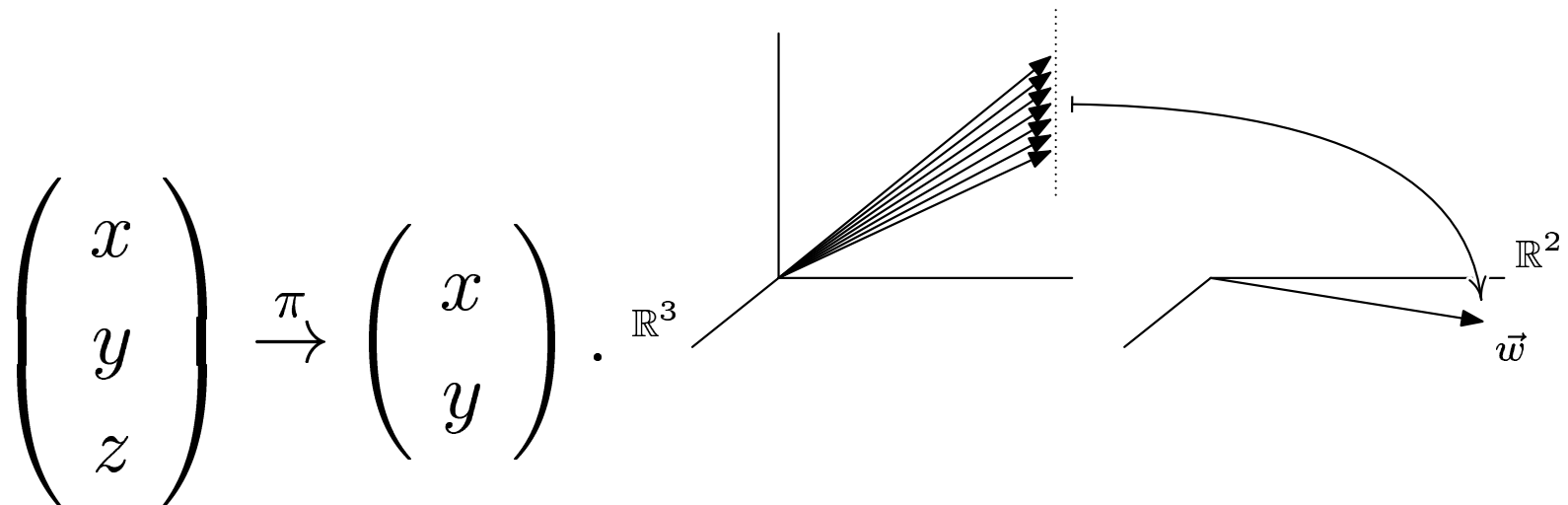
Lineární zobrazení XI

Příklad 6.1.7 Označme V množinu všech konvergentních posloupností reálných čísel. Zřejmě V je lineární podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ všech posloupností reálných čísel.

Pak zobrazení $V \rightarrow \mathbb{R}$, které posloupnosti $\mathbf{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty} \in V$ přiřadí její limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, je lineární.

Lineární zobrazení XII

Příklad 6.1.8 Uvažujme projekci $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$



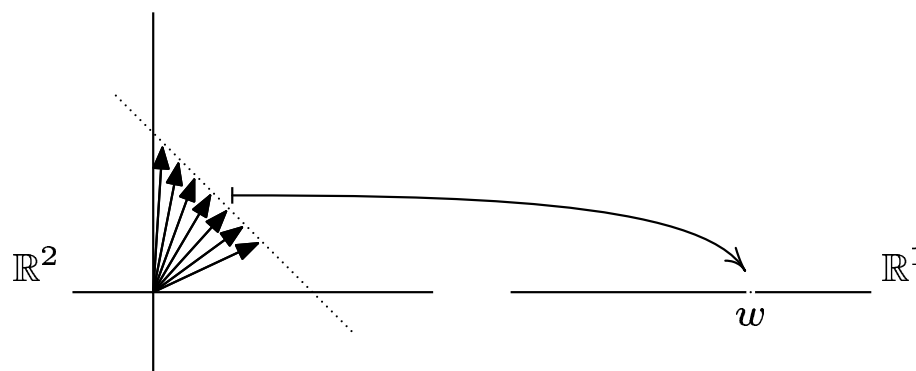
Tato projekce je lineární zobrazení, které není prosté a je surjektivní. Totiž vektor nějakého vektoru $v \in \mathbb{R}^2$ je vertikální přímka vektorů z \mathbb{R}^3 .

Lineární zobrazení XIII

Příklad 6.1.9 *Následující lineární zobrazení*

$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ *dané předpisem* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{h} x + y$ *není*

rovněž prosté. Pro pevné $w \in \mathbb{R}^1$ je totiž jeho
vzor $h^{-1}(w)$ množina všech vektorů v rovině,

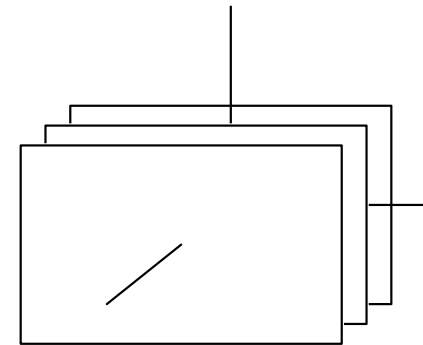


jejichž souřadnice po sečtení dávají právě w .

Lineární zobrazení XIV

Příklad 6.1.10 *Vzory mohou samozřejmě být jiné struktury než výše použité přímky. Pro lineární zobrazení $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix},$$



jsou příslušné vzory roviny $x = 0$, $x = 1$, atd., kolmé k ose x .

6.2 Jádro a obraz lineárního zobrazení

Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K . Jeho ***jádro*** nazýváme množinu

$$\text{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in V; \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Obrazem lineárního zobrazení φ nazýváme množinu

$$\text{Im}\varphi = \varphi(V) = \{\varphi(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in V\}$$

Jádro a obraz II

Výše zavedené označení pochází z anglických slov ***kernel*** a ***image***. Protože $\{0\}$ je lineární podprostor prostoru U a V je lineární podprostor prostoru V , jako speciální případ tvrzení 6.1.3 dostáváme následující výsledek.

Tvrzení 6.2.1 *Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K . Potom $\text{Ker}\varphi$ je lineární podprostor prostoru V a $\text{Im}\varphi$ je lineární podprostor prostoru U .*

Jádro a obraz III

Pomocí pojmů jádra a obrazu můžeme charakterizovat injektivní resp. surjektivní lineární zobrazení.

Věta 6.2.2 *Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení. Potom*

- (a) *φ je injektivní právě tehdy, když $\text{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$;*
- (b) *φ je surjektivní právě tehdy, když $\text{Im}\varphi = U$.*

Věta 6.2.3 *Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení, přičemž vektorový prostor V je konečně rozměrný. Potom i $\text{Ker}\varphi$ a $\text{Im}\varphi$ jsou konečně rozměrné prostory a platí*

$$\dim V = \dim \text{Ker}\varphi + \dim \text{Im}\varphi.$$

Dimenzi obrazu $\text{Im}\varphi$ nazýváme **hodností** lineárního zobrazení φ a značíme ji

$$h(\varphi) = \dim \text{Im}\varphi.$$

Lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow V$ vektorového prostoru V do sebe nazýváme **lineárním operátorem** neboli **lineární transformací**.

Důsledek 6.2.4 *Nechť $\varphi : V \rightarrow V$ je lineární transformace konečně rozměrného vektorového prostoru V . Potom φ je injektivní právě tehdy, když je surjektivní.*

6.3 Lineární izomorfismy

Bijektivní lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ mezi vektorovými prostory V, U nad tímž tělesem K nazýváme **lineární izomorfismus**. Říkáme, že vektorové prostory V, U jsou **lineárně izomorfní** nebo jen krátce **izomorfní** a píšeme $V \cong U$, pokud existuje nějaký lineární izomorfismus $\varphi : V \rightarrow U$.

Lineární izomorfismy II

Tvrzení 6.3.1 *Necht' U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K .*

- (a) *$\text{id}_V : V \rightarrow V$ je lineární izomorfismus.*
- (b) *Je-li $\varphi : V \rightarrow U$ lineární izomorfismus, pak i $\varphi^{-1} : U \rightarrow V$ je lineární izomorfismus.*
- (c) *Jsou-li $\psi : W \rightarrow V, \varphi : V \rightarrow U$ lineární izomorfismy, pak i $\varphi \circ \psi : W \rightarrow U$ je lineární izomorfismus.*

Lineární izomorfismy III

Z právě dokázaného tvrzení okamžitě vyplývá následující důsledek.

Důsledek 6.3.2 *Pro libovolné vektorové prostory U, V, W nad tímž tělesem K platí:*

(a) $V \cong V$;

(b) $V \cong U \Rightarrow U \cong V$;

(c) $W \cong V \ \& \ V \cong U \Rightarrow W \cong U$.

Lineární izomorfismy IV

Říkáme, že vztah izomorfnosti \cong je **reflexivní**, **symetrický** a **tranzitivní**, t. j. je vztahem **ekvivalence**. Z formálního hlediska s ním můžeme pracovat podobně jako se vztahem rovnosti $=$.

Příklad 6.3.3 *Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor nad tělesem K , $\dim V = n$ a $\beta = (v_1, \dots, v_n)$ je nějaká jeho báze. Potom souřadnicové zobrazení $x \mapsto (x)_\beta$ je lineární izomorfismus $V \rightarrow K^n$.*

Lineární izomorfismy V

Platí, že typ izomorfismu daného konečně rozměrného prostoru je jednoznačně určený jeho dimenzí.

Věta 6.3.4 *Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K . Potom*

$$V \cong U \iff \dim V = \dim U.$$

Lineární izomorfismy VI

Tedy konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní se sloupcovým (řádkovým) vektorovým prostorem K^n právě tehdy, když $n = \dim V$.

Přitom každá báze β prostoru V určuje jeden takovýto izomorfismus $V \rightarrow K^n$ – je jím souřadnicové zobrazení $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\beta$.

6.4 Matice lineárního zobrazení

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : K^n \rightarrow K^m$.

V prostoru K^n máme kanonickou bázi

$\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Protože obrazy $\varphi(\mathbf{e}_j)$ vektorů této báze jsou sloupcové vektory z prostoru K^m , můžeme vytvořit matici

$$\mathbf{A} = (\varphi(\mathbf{e}_1), \dots, \varphi(\mathbf{e}_n)) \in K^{m \times n},$$

jejímiž sloupci jsou právě tyto vektory, t. j. platí

$$\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{e}_j) \text{ pro } 1 \leq j \leq n.$$

Maticice lineárního zobrazení II

Ukážeme, jak můžeme obraz $\varphi(\mathbf{x})$ libovolného vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$ vypočítat pouze ze znalosti této matice. Uvědomme si, že $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$, a počítejme

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n\varphi(\mathbf{e}_n) \\ &= (\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \cdot (x_1, \dots, x_n)^T \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\end{aligned}$$

Maticice lineárního zobrazení III

Tedy **každé** lineární zobrazení $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ má tvar $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro vhodnou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

Protože každý konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní s prostorem K^n pro $n = \dim V$, při volbě pevných bazí v konečně rozměrných prostorech U, V , bude možné libovolné lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ zakódovat pomocí vhodné matice \mathbf{A} .

Matice lineárního zobrazení IV

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K , $\dim U = m$, $\dim V = n$ a $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$, $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jsou báze v U , resp. ve V .

Maticí lineárního zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ vzhledem k bazím β, α nazýváme matici

$$\mathbf{A} = ((\varphi(\mathbf{v}_1))_\alpha, \dots, (\varphi(\mathbf{v}_n))_\alpha) \in K^{m \times n},$$

jejíž sloupce jsou tvořeny souřadnicemi obrazů $\varphi(\mathbf{v}_j)$ vektorů báze β vzhledem k bázi α , t. j. platí $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = (\varphi(\mathbf{v}_j))_\alpha$ pro $1 \leq j \leq n$.

Maticе lineárního zobrazení V

Tuto matici značíme též

$$A = (\varphi)_{\alpha, \beta}.$$

(Všimněme si obrácené pořadí znaků bází vůči pořadí vektorových prostorů v označení zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$.)

Matici A ze začátku tohoto paragrafu můžeme nazvat ***maticí lineárního zobrazení***

$\varphi : K^n \rightarrow K^m$ ***vzhledem na kanonickou bázi***
 $\epsilon^{(n)}, \epsilon^{(m)}$.

Matice lineárního zobrazení VI

Pokud neřekneme jinak, budeme pod maticí lineárního zobrazení $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ mezi sloupcovými vektorovými prostory vždy rozumět matici $(\varphi)_{\varepsilon^{(m)}, \varepsilon^{(n)}}$ zobrazení φ vzhledem ke kanonickým bazím.

Maticí lineární transformace $\varphi : V \rightarrow V$ vzhledem k bázi α prostoru V tedy rozumíme matici $(\varphi)_{\alpha, \alpha}$.

Matice lineárního zobrazení VII

Přitom platí $(\mathbf{v}_j)_\beta = \mathbf{e}_j^{(n)}$ pro libovolný vektor \mathbf{v}_j báze $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru V .

Z toho je zřejmé, že pro každou bázi β n -rozměrného vektorového prostoru V platí

$$(\text{id}_V)_{\beta,\beta} = (\mathbf{e}_j^{(n)})_{j=1}^n = \mathbf{I}_n.$$

Matice lineárního zobrazení VIII

Věta 6.4.1 *Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad číselným tělesem K , $\dim V = n$, $\dim U = m$ a α, β jsou báze prostorů U resp. V . Potom pro všechna $\mathbf{x} \in V$ platí*

$$(\varphi(\mathbf{x}))_{\alpha} = (\varphi)_{\alpha, \beta} \cdot (\mathbf{x})_{\beta}$$

a $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha, \beta}$ je jediná matice touto vlastností.

Matice lineárního zobrazení IX

Skládání lineárních zobrazení zodpovídá násobení matic.

Věta 6.4.2 *Nechť U, V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K , α je báze U , β je báze V a γ je báze W . Potom pro libovolné lineární zobrazení $\psi : W \rightarrow V$, $\varphi : V \rightarrow U$ platí*

$$(\varphi \circ \psi)_{\alpha, \gamma} = (\varphi)_{\alpha, \beta} \cdot (\psi)_{\beta, \gamma}.$$

Matice lineárního zobrazení X

Příklad 6.4.3 *Otočení roviny okolo počátku o úhel $\alpha \in \mathbb{R}$ je lineární zobrazení $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.*

Matici tohoto lineárního zobrazení vzhledem na kanonickou bázi ε budeme značit rovněž \mathbf{R}_α , tedy pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ budeme psát $\mathbf{R}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}$.

Její sloupce získáme otočením vektorů $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$ o úhel α .

Matice lineárního zobrazení XI

Z definice goniometrických funkcí sinus a cosinus pomocí jednotkové kružnice dostáváme

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \\ \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Matice lineárního zobrazení XII

To znamená, že

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

a obrazem libovolného vektoru $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ v otočení \mathbf{R}_α je vektor

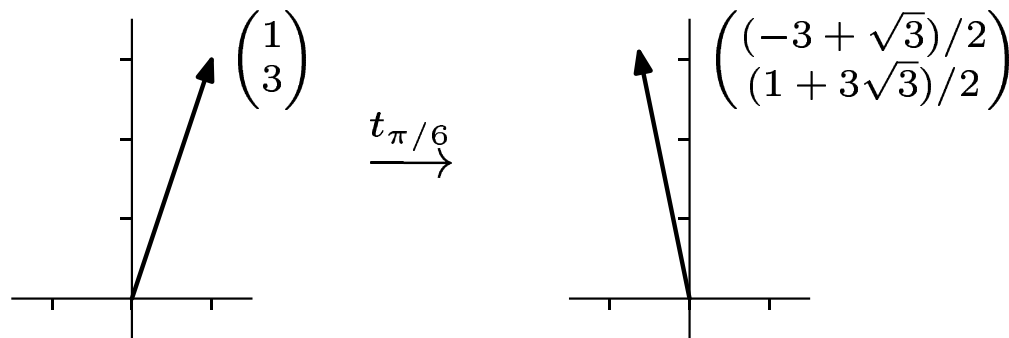
$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Matice lineárního zobrazení XIII

Matice

$$\mathbf{R}_{\pi/6} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

reprezentuje vzhledem ke standardní bázi transformaci $\mathbf{R}_{\pi/6} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, která otočí vektory o $\pi/6$ radiánů proti směru hodinových ručiček.



Příklad 6.4.4 *Osová souměrnost roviny podle libovolné přímky procházející počátkem definuje zobrazení $S_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je úhel, který svírá osa souměrnosti s osou x .*

Pomocí obdobné úvahy jako v případě otočení můžeme ověřit, že i S_α je lineární zobrazení. Jeho matici vzhledem ke kanonické bázi ε budeme značit stejně tj. S_α .

Matice lineárního zobrazení XV

Zřejmě matice souměrnosti podle osy x je

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a osovou souměrnost \mathbf{S}_α můžeme obdržet jako složení otočení $\mathbf{R}_{-\alpha}$, osové souměrnosti \mathbf{S}_0 a otočení \mathbf{R}_α , t. j.

$$\mathbf{S}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{R}_{-\alpha}.$$

Matice lineárního zobrazení XV

Po vynásobení příslušných matic z toho s využitím trigonometrických vzorců dostaneme

$$\mathbf{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Tedy osová souměrnost \mathbf{S}_α zobrazí vektor $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ na vektor

$$\mathbf{S}_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha \\ x \sin 2\alpha - y \cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Maticice lineárního zobrazení XVI

Příklad 6.4.5 Stejnolehlost neboli též homotetie se středem v počátku a s koeficientem podobnosti $0 \neq c \in \mathbb{R}$ je opět lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ s maticí $c\mathbf{I}_2 = \text{diag}(c, c)$.

Tento příklad můžeme evidentním způsobem zevšeobecnit na libovolnou dimenzi n .

Příklad 6.4.6 Zkosení (*kroucení, stříh*) způsobuje deformace tvarů.

Výsledek transformace vyvolává dojem, jako kdyby objekty byly složeny z mnoha vrstev, které jsou po sobě posouvány.

Dvě základní transformace jsou zkosení ve směru x a zkosení ve směru y .

Matice lineárního zobrazení XVIII

Pro zkosení ve směru x s parametrem $a \in K$ se používá transformační matice určená předpisem:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ ax + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Je tak definovaná lineární transformace roviny, která posouvá její každou „vodorovnou vrstvu“ $\{(x, y); y = s\}$, $s \in K$, o vektor ase_1 .

Analogické lineární transformace fungují i ve vícerozměrných prostorech K^n .

6.5 Prostory lineárních zobrazení

Nechť U , V jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K . Uvažme vektorový prostor U^V **všech** zobrazení $f : V \rightarrow U$ s operacemi součtu a skalárního násobku definovanými po složkách.

Pak pro množinu $\mathcal{L}(V, U)$ všech **lineárních** zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ platí $\mathcal{L}(V, U) \subseteq U^V$.

Prostory lineárních zobrazení II

Tvrzení 6.5.1 *Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K . Potom $\mathcal{L}(V, U)$ je lineární podprostor vektorového prostoru U^V . Tedy $\mathcal{L}(V, U)$ je vektorový prostor nad K .*

Tvrzení 6.5.2 *Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = m, \dim V = n$. Potom*

$$\mathcal{L}(V, U) \cong K^{m \times n},$$

tedy $\dim \mathcal{L}(V, U) = mn$.

Prostory lineárních zobrazení III

Zvolme bázi α v prostoru U a β v prostoru V . Na matici $(\varphi)_{\alpha,\beta}$ se můžeme dívat jako na souřadnice vektoru $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ v prostoru $K^{m \times n}$, vzhledem na dvojici bazí β, α .

Lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow K$ z vektorového prostoru V do tělesa K se nazývá **lineární funkcionál** nebo též **lineární forma** na V .

Vektorový prostor $\mathcal{L}(V, K)$ všech lineárních forem na V se nazývá **duální prostor** nebo jen krátce **duál** vektorového prostoru V .

Budeme používat označení $\mathcal{L}(V, K) = V^*$.

Prostory lineárních zobrazení IV

Pokud v tělese K budeme vždy uvažovat pouze kanonickou bázi sestávající z jediného vektoru $1 \in K$, libovolná báze β v konečně rozměrném prostoru V určuje lineární izomorfismus $V^* \rightarrow V$ daný předpisem $\varphi \mapsto (\varphi)_{1,\beta}$. Platí tedy

Tvrzení 6.5.3 *Pro libovolný konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K platí $V^* \cong V$.*

Prostory lineárních zobrazení V

Matice $(\varphi)_{1,\beta}$ lineárního funkcionálu $\varphi : V \rightarrow K$ je řádkový vektor z prostoru $K^{1 \times n}$.

Při volbě kanonické báze ε v sloupcovém prostoru $K^{n \times 1}$ můžeme řádkový prostor $K^{1 \times n}$ ztotožnit s duálem $(K^{n \times 1})^*$ sloupcového prostoru $K^{n \times 1}$.

Izomorfismus konečně rozměrného prostoru V a jeho duálu V^* závisí od výběru báze ve V .

Prostory lineárních zobrazení VI

Pro libovolný vektorový prostor V můžeme definovat kanonické, t. j. od výběru báze nezávislé zobrazení z prostoru V do jeho **druhého duálu** V^{**} dané předpisem $\mathbf{x} \mapsto \hat{\mathbf{x}}$, kde

$$\hat{\mathbf{x}}(\varphi) = \varphi(\mathbf{x})$$

pro $\mathbf{x} \in V$, $\varphi \in V^*$.

Prostory lineárních zobrazení VII

Tvrzení 6.5.4 *Nech V je vektorový prostor nad tělesem K . Potom*

- (a) $x \mapsto \hat{x}$ je injektivní lineární zobrazení $V \rightarrow V^{**}$;
- (b) *pokud je V konečně rozměrný, pak $x \mapsto \hat{x}$ je lineární izomorfismus $V \rightarrow V^{**}$.*

Prostory lineárních zobrazení VIII

Každý vektor $x \in V$ definuje lineární funkcionál \hat{x} na duálním prostoru V^* .

Konečně rozměrný vektorový priestor V můžeme přiřazením $x \mapsto \hat{x}$ **přirozeně** ztotožnit s duálem prostoru V^* .