



LINEÁRNÍ PODPROSTORY a LINEÁRNÍ NEZÁVISLÝ

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

Abstrakt

V této kapitole se vrátíme ke studiu abstraktních vektorových prostorů nad obecným tělesem. K tedy bude v celé kapitole označovat nějaké pevné, jinak libovolné těleso a V bude pevně zvolený vektorový prostor nad K .

Obsah

4	Lineární prostory	4
4.1	Lineární podprostory	4
4.2	Lineární obal množiny vektorů . .	12
4.3	Průnik a součet lineárních podprostorů	17
4.4	Lineární nezávislost	21
4.5	Lineární obal v prostorech K^m . .	31
4.6	Lineárně nezávislé posloupnosti .	51

4 Lineární prostory a lineární nezávislost

4.1 Lineární podprostory vektorového prostoru

Množina $S \subseteq V$ se nazývá **lineární (vektorový) podprostor** vektorového prostoru V , pokud $S \neq \emptyset$ a pro všechny skaláry $a \in K$ a vektory $x, y \in S$ platí $ax \in S$ a $x + y \in S$.

Lineární podprostory II

Jinak řečeno, neprázdná podmnožina $S \subseteq V$ je lineární podprostor právě tehdy, když je uzavřená na operace skalárního násobku a součtu vektorů.

Tvrzení 4.1.1 *Nechť S je lineární podprostor vektorového prostoru V . Pak $0 \in S$ a S s operacemi součtu vektorů a skalárního násobku zúženými z V na S tvoří vektorový prostor nad číselným tělesem K .*

Lineární podprostory III

V každém vektorovém prostoru V jsou $\{0\}$ a V lineární podprostory (v případě, když $V = \{0\}$, dokonce splývají, v opačném případě jde o dva různé podprostory) – $\{0\}$ nazýváme **triviální** nebo též **nulový** a V **nevlastní** alebo též **plný** lineární podprostor.

Tedy pro **vlastní netriviální** lineární podprostor $S \subseteq V$ platí $\{0\} \neq S \neq V$.

Lineární podprostory IV

Např. ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 netriviální vlastní podprostory jsou právě všechny přímky a roviny procházející počátkem 0 .

To si můžeme graficky vyjádřit pomocí následujícího obrázku, který samozřejmě ukáže pouze několik z nekonečně mnoha lineárních podprostorů. Lineární podprostory jsou popsány pomocí minimálního počtu generátorů.

Lineární podprostory V

$$\left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \dots$$

$$\left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \left\{ y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \left\{ y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \dots$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Následující tvrzení charakterizuje lineární podprostory jako množiny uzavřené na lineární kombinace.

Lineární podprostory VI

Tvrzení 4.1.2 *Pro libovolnou podmnožinu S vektorového prostoru V jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- (i) *S je lineární podprostor ve V ;*
- (ii) *$S \neq \emptyset$ a pro všechny skaláry $a, b \in K$ a vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ platí $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \in S$;*
- (iii) *pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro všechny skaláry $a_1, \dots, a_n \in K$ a vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in S$ platí*

$$a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\mathbf{x}_n \in S.$$

Lineární podprostory VII

Příklad 4.1.3 (a) Označme $K^{(X)}$ množinu všech funkcí $f: X \rightarrow K$ takových, že množina $\{x \in X; f(x) \neq 0\}$ je konečná. Pro libovolnou lineární kombinaci funkcí $f, g \in K^{(X)}$ platí

$$\{x \in X; af(x) + bg(x) \neq 0\} \subseteq \{x \in X; f(x) \neq 0\} \cup \{x \in X; g(x) \neq 0\}.$$

Z toho vyplývá, že $K^{(X)}$ je lineární podprostor vektorového prostoru K^X . Je-li X je konečná, tak $K^{(X)} = K^X$, je-li X je nekonečná, tak $K^{(X)}$ je netriviální vlastní podprostor v K^X .

Lineární podprostory VIII

(b) Necht' $X \subseteq \mathbb{R}$ je libovolná množina reálných čísel. Potom $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, nebo jen stručně $\mathcal{C}(X)$ označuje množinu všech spojitých funkcí $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Protože lineární kombinace spojitých funkcí je zřejmě opět spojitá funkce, $\mathcal{C}(X)$ je lineární podprostor v \mathbb{R}^X .

4.2 Lineární obal množiny vektorů

Množinu všech lineárních kombinací vektorů z podmnožiny X vektorového prostoru V nazýváme **lineárním obalem** množiny X a označujeme ji $[X]$. Tedy

$$[X] = \left\{ a_1 \mathbf{x}_1 + \dots + a_n \mathbf{x}_n; n \in \mathbb{N} \right. \\ \left. \& a_1, \dots, a_n \in K \& \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in X \right\}.$$

Lineární obal II

Je-li $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ konečná množina, tak místo $[\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}]$ píšeme jen $[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$.

Zřejmě tento zápis má smysl i pro libovolnou uspořádanou n -tici (ne nutně různých) vektorů $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, a platí

$$[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] = \{a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\mathbf{x}_n; a_1, \dots, a_n \in K\}.$$

Tvrzení 4.2.1 *Nechť X je podmnožina vektorového priestoru V . Potom lineární obal $[X]$ množiny X je nejmenší lineární podprostor vektorového prostoru V takový, že $X \subseteq [X]$.*

Dokázané tvrzení nás opravňuje nazývat lineární obal $[X]$ množiny $X \subseteq V$ též lineárním podprostorem **generovaným** množinou X .

Lineární obal IV

Pokud $[X] = S$, říkáme, že X **generuje** lineární podprostor S , případně, že X je **generující množina** nebo též **množina generátorů** lineárního podprostoru $S \subseteq V$.

Je-li $S = V$, t. j. je-li $[X] = V$, mluvíme o **generující množině**. Používá se též název **vytvářející či vytvořující množina**.

Kvůli přehlednosti ještě shrneme základní vlastnosti operace lineárního obalu $X \mapsto [X]$.

Tvrzení 4.2.2 *Pro libovolné podmnožiny X, Y vektorového prostoru V a $\mathbf{v} \in V$ platí:*

(a) $[\emptyset] = [\mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\};$

(b) $X \subseteq [X];$

(c) $X \subseteq Y \Rightarrow [X] \subseteq [Y];$

(d) *X je lineární podprostor vo V právě tehdy, když $X = [X];$*

(e) $[[X]] = [X];$

(f) $\mathbf{v} \in [X] \Leftrightarrow [X \cup \{\mathbf{v}\}] = [X].$

4.3 Průnik a součet lineárních podprostorů

Nechť X, Y jsou libovolné podmnožiny vektorového prostoru V .

Potom množinu

$$X + Y = \{\mathbf{x} + \mathbf{y}; \mathbf{x} \in X \text{ \& } \mathbf{y} \in Y\}$$

nazýváme **součtem** množin X, Y .

Tvrzení 4.3.1 *Nechť S, T jsou lineární podprostory vektorového prostoru V . Potom i $S \cap T$ a $S + T$ jsou lineární podprostory ve V . Navíc platí*

$$S + T = [S \cup T],$$

t. j. $S + T$ je nejmenší lineární podprostor ve V , který obsahuje S i T .

Sjednocení dvou lineárních podprostorů S, T vektorového prostoru V nemusí být lineárním podprostorem.

Součet III

Přesněji, $S \cup T$ je lineární podprostor ve V právě tehdy, když $S \subseteq T$ nebo $T \subseteq S$.

Součet lineárních podprostorů S, T vektorového prostoru V nazýváme **přímý** nebo též **direktní součet**, pokud $S \cap T = \{0\}$; píšeme pak $S \oplus T$.

Tvrzení 4.3.2 *Necht' S, T jsou lineární podprostory vektorového prostoru V . Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (i) *$S \cap T = \{0\}$, t.j. součet $S + T$ je direktní;*
- (ii) *každý vektor $z \in S + T$ má jednoznačné vyjádření ve tvaru $z = x + y$, kde $x \in S$, $y \in T$.*

4.4 Lineární nezávislost

Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$. Říkáme, že uspořádaná n -tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je **lineárně závislá**, pokud existují skaláry $c_1, \dots, c_n \in K$ tak, že $(c_1, \dots, c_n) \neq \mathbf{0}$ a $c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$.

V opačném případě říkáme, že uspořádaná n -tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je **lineárně nezávislá**.

Závislost II

Pro $n = 0$ kvůli úplnosti dodávame, že uspořádanou 0-tici (t. j. prázdnou posloupnost) vektorů považujeme za lineárně nezávislou.

Místo „lineárně (ne)závislé uspořádané n -tici vektorů $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ “ budeme často mluvit jen o lineárně (ne)závislých vektorech $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$.

Závislost III

Podle definice lineární nezávislosti jsou vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ lineárně nezávislé právě tehdy, když

$$(\forall c_1, \dots, c_n \in K)$$

$$(c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0).$$

Pro n -tici skalárů $(c_1, \dots, c_n) = \mathbf{0}$ platí

$$c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

pro libovolnou n -tici vektorů $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, bez ohledu na to, zda je lineárně závislá nebo nezávislá.

Závislost IV

Pro některé n -tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ můžeme jako výsledek lineární kombinace

$c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n$ dostat $\mathbf{0}$ i s pomocí ***jiné*** n -tice skalárů (c_1, \dots, c_n) než jen $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ – takovéto uspořádané n -tice $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ nazýváme ***lineárne závislé***.

Pro některé uspořádané n -tice vektorů

$(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je volba $(c_1, \dots, c_n) = \mathbf{0}$ ***jediná možnost*** jak pomocí lineární kombinace

$c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n$ získáme výsledek $\mathbf{0}$ – takovéto n -tice nazýváme ***lineárně nezávislé***.

Závislost V

Platí čtyři jednoduchá pozorování:

- (a) jediný vektor u je lineárně nezávislý právě tehdy, když $u \neq 0$;
- (b) vektory u, v jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z nich je násobkem druhého;
- (c) je-li některý z vektorů u_1, \dots, u_n roven 0 , pak jsou tyto vektory lineárně závislé;
- (d) pokud se některé dva z vektorů u_1, \dots, u_n rovnají, pak jsou tyto vektory lineárně závislé.

Závislost VI

Jinak řečeno, pouze uspořádaná n -tice nenulových a navzájem různých vektorů, z kterých žádný není násobkem druhého, může (ale stále ještě nemusí) být lineárně nezávislá.

Následující tabulka shrnuje vztah lineární závislosti vzhledem k relaci inkluze.

	$S_1 \subset S$	$S_1 \supset S$
S nezávislá	S_1 bude nezávislá	S_1 může být oboje
S závislá	S_1 může být oboje	S_1 bude závislá

Tvrzení 4.4.1 *Pre libovolné $n \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- (i) *vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně závislé;*
- (ii) *některý z vektorů \mathbf{u}_k , $k \leq n$, je lineární kombinací předcházejících;*
- (ii') *některý z vektorů \mathbf{u}_k , $k \leq n$, je lineární kombinací následujících;*
- (iii) *některý z vektorů \mathbf{u}_k , $k \leq n$, je lineární kombinace ostatních.*

Závislost VIII

Každý vektor \mathbf{x} z lineárního obalu $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n$$

pro nějakou n -tici skalárů (c_1, \dots, c_n) .

Tvrzení 4.4.2 *Vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když každý vektor $\mathbf{x} \in [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$ můžeme vyjádřit ve tvaru $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n$ pro jedinou uspořádanou n -tici $(c_1, \dots, c_n) \in K^n$.*

Následující tvrzení dává do souvislosti lineární (ne)závislost s lineárním obalom.

Tvrzení 4.4.3 *Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v} \in V$, přičemž vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (i) $\mathbf{v} \in [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$;
- (ii) *vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}$ jsou lineárně závislé;*
- (iii) $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}] = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$.

Věta 4.4.4 *Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in V$, přičemž vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé. Potom z množiny $\{1, \dots, m\}$ můžeme vybrat indexy $i_1 < \dots < i_k$ tak, že vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_k}$ jsou lineárně nezávislé a generují stejný podprostor jako vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$.*

4.5 Lineární obal a lineární nezávislost v prostorech K^m

Použití téže metody úpravy matic pomocí ERO na (redukovaný) stupňovitý tvar na řešení následujících tří otázek:

- (1) rozhodnout pro dané vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y} \in K^m$ zda \mathbf{y} patří nebo nepatří do lineárního obalu $[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$;

Lineární obal v K^m II

- (2) rozhodnout pro dané vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in K^m$ zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé;
- (3) vybrat z vektorů $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in K^m$ lineárně nezávislé vektory $\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_k}$ ($j_1 < \dots < j_k$) tak, aby vektory $\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_k}$ generovaly ve V stejný lineární podprostor jako vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$.

Zavedeme dále označení, kterého sa budeme držet v celém odstavci.

Lineární obal v K^m III

Nechť $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y} \in K^m$ jsou sloupcové vektory, přičemž

$$\mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Označme $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in K^{m \times n}$ matici se sloupci $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, a $(\mathbf{X} \mid \mathbf{y}) \in K^{m \times (n+1)}$ blokovou matici složenou z matice \mathbf{X} a vektoru \mathbf{y} .

Lineární obal v K^m IV

Potom pro $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in K^n$ platí:

$$(1) \quad c_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_n \mathbf{x}_n = \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y};$$

$$(2) \quad c_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Jinak řečeno:

(1) $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ právě tehdy, když soustava $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}$ s rozšířenou maticí $(\mathbf{X} | \mathbf{y})$ má alespoň jedno řešení;

Lineární obal v K^m V

(2) vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když homogenní soustava $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$ má jediné řešení $\mathbf{c} = \mathbf{0}$; pokud tato soustava má i nějaké nenulové řešení, tak vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně závislé.

Otázku (1) umíme řešit. Stačí pomocí ERO upravit matici $(\mathbf{X} | \mathbf{y})$ na stupňovitý tvar. Pokud výsledná matice obsahuje řádek tvaru $(0, \dots, 0 | z)$, kde $z \neq 0$, tak soustava $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}$ nemá řešení a $\mathbf{y} \notin [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$.

Lineární obal v K^m VI

Pokud sa takovýto řádek ve výsledné matici nenachází, tak soustava má alespoň jedno řešení a $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$.

Podobně je tomu s otázkou (2). Opět stačí pomocí ERO upravit matici \mathbf{X} na stupňovitý tvar a podívat se, zda v každém sloupci leží vedoucí prvek nějakého řádku.

Pokud tento případ nastane, nemáme možnost zvolit parametry, $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ je jediným řešením soustavy $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$ a vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně nezávislé.

Lineární obal v K^m VII

V opačném případě máme možnost volby alespoň jednoho parametru, soustava má tedy nějaké nenulové řešení a vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně závislé.

Vedoucím prvkem řádku $(0, \dots, 0 \mid z)$, kde $z \neq 0$, je právě v $(n + 1)$ -ním sloupci ležící prvek z .

Tedy matice v stupňovitém tvaru, která je řádkově ekvivalentní s $(\mathbf{X} \mid \mathbf{y})$ neobsahuje takový řádek právě tehdy, když v jejím posledním sloupci neleží vedoucí prvek žádného řádku.

Příklad 4.5.1 *Uvažme sloupcové vektory*

$$\mathbf{x}_1 = (1, 1, -1, -1)^T, \mathbf{x}_2 = (0, 1, 0, 1)^T,$$

$$\mathbf{x}_3 = (3, 1, -3, -5)^T, \mathbf{x}_4 = (0, 0, 1, 2)^T,$$

$$\mathbf{y} = (3, 5, -2, 1)^T, \mathbf{z} = (1, 1, 1, 1)^T \text{ v prostoru } \mathbb{R}^4.$$

Máme rozhodnout, zda vektory \mathbf{y} , \mathbf{z} leží v lineárním obalu $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4]$.

Lineární obal v K^m IX

Označme si následující matice

$$(\mathbf{X} | \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right), \quad (\mathbf{X} | \mathbf{z}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Lineární obal v K^m X

Matice $(\mathbf{X} \mid \mathbf{y})$, $(\mathbf{X} \mid \mathbf{z})$ jsou řádkově ekvivalentní s maticemi

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ resp. } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right).$$

Okamžitě vidíme, že platí $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4]$ a $\mathbf{z} \notin [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4]$.

Příklad 4.5.2 *Zjistíme, zda sloupce reálné matice*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

jsou lineárně závislé nebo nezávislé.

Lineární obal v K^m XII

Tato matice je řádkově ekvivalentní s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že slouce matice X jsou lineárně nezávislé.

Lineární obal v K^m XIII

Z druhé strany, X jakožto matice nad tělesem \mathbb{Z}_5 je řádkově ekvivalentní s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy sloupce matice X , chápané jakožto vektory z vektorového prostoru \mathbb{Z}_5^4 , jsou lineárně závislé.

Tvrzení 4.5.3 *Nechť $X, Y \in K^{m \times n}$ jsou řádkově ekvivalentní matice, přičemž matice Y je ve stupňovitém tvaru. Pro $1 \leq j \leq n$ označme $x_j = s_j(X)$ j -tý sloupec matice X . Necht' $j_1 < \dots < j_k$ jsou indexy všech sloupců matice Y , ve kterých leží vedoucí prvky jejich řádků. Potom platí:*

Lineární obal v K^m XV

- (a) vektory $\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_k}$ jsou lineárně nezávislé;
- (b) pokud v j -tém sloupci matice Y neleží vedoucí prvek žádného jejího řádku (t. j. $1 \leq j \leq n$ a $j \neq j_1, \dots, j_k$), tak vektor \mathbf{x}_j je lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_l}$, kde $l \leq k$ je největší index, pro který platí $j_l < j$;
- (c) $[\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_k}] = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$.

Lineární obal v K^m XVI

Výše uvedené tvrzení nám dáva přímý návod na řešení otázky (3).

Stačí pomocí ERO upravit matici $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ na matici \mathbf{Y} v stupňovitém tvaru a zjistit v ní indexy $j_1 < \dots < j_k$ všech sloupců, ve kterých leží vedoucí prvky jejich řádků.

Potom $\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_k}$ jsou hledané lineární nezávislé vektory, které generují lineární podprostor $[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$.

Příklad 4.5.4 *Ze sloupců reálné matice*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

je třeba vybrat lineární nezávislé sloupce, které generují lineární obal všech sloupců matice \mathbf{X} .

Lineární obal v K^m XVIII

Matice X je řádkově ekvivalentní s maticí

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve stupňovitém tvaru.

Lineární obal v K^m XIX

Vedoucí prvky řádků matice Y se nachází ve sloupcích 1, 2 a 4. Hledané vektory jsou tedy sloupce 1, 2 a 4 matice X . Zapsané vedle sebe pak tvoří matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Výše uvedený postup řešení otázek (1), (2) a (3) pro prostory sloupcových vektorů K^m lze modifikovat na prostory řádkových vektorů K^m – např. transponováním příslušných matic řádkových vektorů nebo nahrazením elementárních řádkových operací sloupcovými.

4.6 Lineárně nezávislé posloupnosti a množiny

Nekonečnou posloupnost

$(\mathbf{u}_k)_{k=0}^{\infty} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \dots)$ vektorů z prostoru V nazýváme ***lineárně nezávislou***, pokud každá její konečná podposloupnost $(\mathbf{u}_{k_1}, \dots, \mathbf{u}_{k_n})$, kde $0 \leq k_1 < \dots < k_n$, je lineárně nezávislá.

Lineárně nezávislé posloupnosti II

Tvrzení 4.6.1 *Nekonečná posloupnost $(\mathbf{u}_k)_{k=0}^{\infty}$ vektorů z V je lineárně nezávislá právě tehdy, když pro každé $n \in \mathbb{N}$ je její počáteční úsek $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ lineárně nezávislý.*

Například posloupnost $(1, x, x^2, \dots, x^k, \dots)$ všech mocnin x je lineárně nezávislá posloupnost ve vektorovém prostoru $K[x]$ všech polynomů v proměnné x nad tělesem K . Polynom $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ je (definitornicky) nulový právě tehdy, když $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$.

Lineárně nezávislé posloupnosti III

Množina $X \subseteq V$ sa nazýva **lineárně nezávislá**, pokud pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ každá uspořádaná n -tice **navzájem různých** vektorů $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ z množiny X je lineárně nezávislá.

Kdyby totiž $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ nebyly navzájem různé vektory, nemohly by být lineárně nezávislé.

Lineární závislost či nezávislost uspořádané n -tice vektorů nezávisí na jejich pořadí.

Lineárně nezávislé posloupnosti IV

Zřejmě uspořádaná n -tice $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když je lineárně nezávislá uspořádaná n -tice $(\mathbf{u}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{u}_{\sigma(n)})$, kde σ je libovolná permutace množiny $\{1, \dots, n\}$.

Tedy, lineární (ne)závislost uspořádané n -tice $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ navzájem různých vektorů je vlastností množiny $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$.

Lineárně nezávislé posloupnosti V

Tvrzení 4.6.2 *Uspořádaná n -tice $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ navzájem různých vektorů z V je lineárně nezávislá právě tehdy, když množina $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subseteq V$ je lineárně nezávislá.*

Lineárně nezávislé posloupnosti VI

Tvrzení 4.6.3 *Necht' $X \subseteq V$ je lineárně nezávislá množina a $\mathbf{v} \in V$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (i) $\mathbf{v} \in [X]$;
- (ii) množina $X \cup \{\mathbf{v}\}$ je lineárně závislá;
- (iii) $[X \cup \{\mathbf{v}\}] = [X]$.