3. SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

Abstrakt přednášky

Abstrakt

V této kapitole se seznámíme se soustavami lineárních rovnic nad obecným tělesem K a naučíme se je řešit.

Využijeme při tom zápis soustavy pomocí jisté matice. Strukturní vlastnosti množiny všech řešení dané soustavy a jejich důsledky budeme studovat až později, poté, co se blíže seznámíme se strukturou vektorových prostorů.

Obsah

3 SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

3.1 Maticový zápis soustavy lineárních rovnic

Základní pojem tohoto odstavce je pojem ***lineární rovnice***.

Maticový zápis II

Lineární rovnicí o n neznámych $x_1, \ldots, x_n$ nad číselným tělesem K rozumíme formuli tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in K$, v proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Maticový zápis III

Soustavou m ***lineárních rovnic*** o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nad číselným tělesem K rozumíme konjunkci formulí tvaru

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{21}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

Maticový zápis IV

Zde a_{ij}, b_i, pro $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, jsou skaláry z tělesa K.
Matici $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ nazýváme ***maticí soustavy***, sloupcový vektor $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T \in K^m$ nazýváme její ***pravou stranou***. ***Rozšířenou maticí soustavy*** nazýváme blokovou matici $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \in K^{m \times (n+1)}$.
Soustava sa nazývá ***homogenní***, je-li $\mathbf{b} = \mathbf{0}$; v opačném případě sa nazývá ***nehomogenní***.

Maticový zápis V

Uvedenou soustavu můžeme stručně a úsporně zapsat v ***maticovém tvaru***

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

resp., pokud jde o homogenní soustavu, v tvaru

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Řešením soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nazýváme takový vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in K^n$, jehož složky vyhovují každé z rovnic této soustavy, t. j. platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Maticový zápis VI

Vyřešit soustavu znamená najít ***všechna*** její řešení, t. j. popsat ***množinu*** všech jejích řešení.

Dvě soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$, kde $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in K^{m \times 1}$, se nazývají ***ekvivalentní***, pokud mají stejnou množinu řešení, t. j. pokud pro všechna $\mathbf{x} \in K^n$ platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě tehdy, když $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$.

Poznámka

(a) Podtrhněme, že řešením soustavy rozumíme vždy ***sloupcový vektor*** $\mathbf{x}$ a ne jeho složky.

Tak například soustava

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 12 \\ 3x - 2y &= 5 \end{aligned}$$

nad tělesem $\mathbb{R}$ má jediné řešení $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ a nikoliv dvě řešení $x = 3$, $y = 2$.

Poznámka II

Budeme pak říkat, že soustava má ***jediné*** řešení $x = 3$, $y = 2$.

(b) Všimněme si, že počet rovnic soustavy a počet neznámých se nemusí rovnat. V obvyklém případě, když rovnic je stejný počet jako neznámých, očekáváme, že soustava bude mít jediné řešení. Pokud je rovnic méně než neznámých, lzee očekávat, že soustava bude mí vícero (případně i nekonečně mnoho) řešení.

Poznámka III

Naopak, pokud je rovnic více než neznámých, může se stát, že soustava nebude mít žádné řešení. Naproti tomu, že tato očekávaní vyjadřují „převládající trend“, lehce lze najít příklady, kdy se nemusí splnit.

Poznamenejme, že homogenní soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ má (bez ohledu na počet neznámých a počet rovnic) vždy alespoň jedno řešení – je jím nulový vektor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Poznámka IV

Není důležité, jakými znaky jsou označené neznámé v soustavě $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Na její řešení nemá vliv, zda si vektor neznámých označíme $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ nebo $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ nebo nějak jinak.

To znamená, že celá informace o této soustavě, potřebná pro nalezení všech jejich řešení, je obsažená v rozšířené matici soustavy $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$, resp., pokud půjde o homogenní soustavu, jen v matici soustavy $\mathbf{A}$.

Poznámka V

Proto i metoda řešení soustav lineárních rovnic, se kterou se nyní seznámíme, bude založená jen na úpravě této matice.

Rozšířenou matici $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b})$ soustavy $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$ budeme upravovat tak, abychom dostali nějakou jinou matici $(\mathbf{B}\,|\mathbf{c})$, která odpovídá nové soustavě $\mathbf{B}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{c}$, přičemž tato splňuje nasledující dvě podmínky:

Poznámka VI

(a) Je ekvivalentní s původní soustavou $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, t. j. má stejnou množinu řešení.

(b) Všechna její řešení můžeme přímo vyčíst z její rozšířené matice $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$.

Pak říkáme, že soustava $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ je ***vyřešená***.

3.2 Redukovaný stupňovitý tvar matice

Říkáme, že prvek a_{ij} matice $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ je ***vedoucí prvek*** i-tého řádku matice $\mathbf{A}$, pokud $a_{ij} \neq 0$, a $j = 1$ nebo $a_{il} = 0$ pro všechny $1 \leq l < j$.

Jinak řečeno, vedoucí prvek nenulového řádku je první nenulový prvek tohoto řádku. Nulový řádek nemá vedoucí prvek.

Redukovaný tvar II

Řekneme, že matice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ je v ***redukovaném stupňovitém tvaru***, pokud splňuje nasledující čtyři podmínky:

(a) Je-li $\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$ a $\mathbf{r}_k(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, pak $i < k$;
t. j. každý nenulový řádek matice $\mathbf{A}$ leží nad každým jejím nulovým řádkem.

(b) Jsou-li a_{ij}, a_{kl} vedoucí prvky i-tého resp. k-tého řádku a $i < k$, pak platí $j < l$;
t. j. vedoucí prvek vyššího řádku leží více vlevo než vedoucí prvek nižšího řádku.

Redukovaný tvar III

(c) Je-li a_{ij} vedoucí prvek i-tého řádku, pak $a_{ij} = 1$;
t. j. vedoucí prvek každého nenulového řádku je 1.

(d) Je-li a_{ij} vedoucí prvek i-tého řádku, tak $a_{kj} = 0$ pro každé $k \neq i$;
t. j. v sloupci, v kterém sa nachází vedoucí prvek nějakého řádku, jsou všechny ostatní prvky rovné 0.

Redukovaný tvar IV

Pokud matice $\mathbf{A}$ splňuje pouze podmínky (a), (b), říkáme, že je v ***stupňovitém tvaru***. Používá se též název (redukovaný) ***schodovitý tvar***.

Následující matice nejsou ve stupňovitém tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Redukovaný tvar V

Matice jsou ve stupňovitém tvaru, ale nejsou v redukovaném stupňovitém tvaru.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Redukovaný tvar VI

Matice jsou v redukovaném stupňovitém tvaru.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Redukovaný tvar VII

Jednotková a nulová matice jsou v redukovaném stupňovitém tvaru.

Příklad

$$(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

je matice v redukovaném stupňovitém tvaru nad $\mathbb{R}$.

Redukovaný tvar VIII

Tato matice odpovídá soustavě

$$\begin{aligned} x_1 \quad - 2x_3 \quad &= 3 \\ x_2 + 6x_3 \quad &= 0 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

v neznámých x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení.

Redukovaný tvar IX

Každé volbě *parametrů* $s, t \in \mathbb{R}$ zodpovídá jedno řešení

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + 2s \\ x_2 &= \quad - 6s \\ x_3 &= \qquad\quad s \\ x_4 &= 1 \\ x_5 &= \qquad\qquad\qquad t. \end{aligned}$$

Redukovaný tvar X

Přeznačení neznámých za parametry $x_3 = s$, $x_5 = t$ a jejich přesun na pravou stranu je natolik bezprostřední úprava, že soustavu příslušnou k matici $(\mathbf{B} \,|\, \mathbf{c})$ můžeme považovat za vyřešenou.

Řešení lze napsat přímo na základě matice $(\mathbf{B} \,|\, \mathbf{c})$.

Soustavu lineárních rovnic $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ nad tělesem K budeme nazývat ***vyřešenou soustavou***, pokud její rozšířená matice $(\mathbf{B} \,|\, \mathbf{c})$ je v redukovaném stupňovitém tvaru.

Redukovaný tvar XI

V případě homogenní soustavy se stačí omezit pouze na matici $\mathbf{B}$.

Nyní ukážeme, jak můžeme k dané blokové matici $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$ v redukovaném stupňovitém tvaru najít všechna řešní soustavy $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$.

Nejprve si ujasníme, kdy je takováto soustava ***řešitelná***, t. j. má alespoň jedno řešení.

Redukovaný tvar XII

Soustava $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ má řešení právě tehdy, když se v matici $(\mathbf{B} \,|\, \mathbf{c})$ nenachází řádek tvaru

$$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n\text{-krát}} \,|\, 1).$$

Takový řádek odpovídá rovnici $0 = 1$, která očividně nemá řešení. To, že nepřítomnost takovéhoto řádku je i postačující podmínkou řešitelnosti soustavy, vyplýva z následujícího postupu, jak toto řešení najít.

Redukovaný tvar XIII

Pokud se v j-tém sloupci matice $\mathbf{B}$ nenachází vedoucí prvek žádného řádku, tak si neznámou x_j zvolíme za parametr; pokud se v j-tém sloupci nachádzí vedoucí prvek nějakého řádku, tak si vyjádříme neznámou x_j pomocí parametrů tak, že sloupce matice $\mathbf{B}$ příslušné těmto parametrům „přehodíme s opačným znaménkem na druhou stranu“.

Redukovaný tvar XIV

Příklad.

$$(\mathbf{B}\,|\,\mathbf{c}) = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/2 & 5 & \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & 0 & 2 & x \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2/5 & -2 & \end{array}\right)$$

je matice v redukovaném stupňovitém tvaru nad $\mathbb{R}$. Vidíme, že se v ní nenachází řádek tvaru $(0, 0, 0, 0\,|\,1)$, tedy soustava $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ by měla mít řešení.

Redukovaný tvar XV

Vedoucí prvky řádků matice $\mathbf{B}$ sa nacházají ve sloupcích 1, 2 a 3. Za parametry si tedy zvolíme neznámé x_4 a x_5. Řešením soustavy je každý vektor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \in \mathbb{R}$ tvaru

$$\begin{aligned}
x_1 &= 5-\tfrac{2}{3}s+\tfrac{1}{2}t \\
x_2 &= 2-\tfrac{3}{4}s \\
x_3 &= -2+4s+\tfrac{2}{5}t \\
x_4 &= s \\
x_5 &= t,
\end{aligned}$$

Redukovaný tvar XVI

Parametry $s, t \in \mathbb{R}$ mohou nabývat libovolné hodnoty. Zlomků u parametrů se můžeme zbavit. Je jedno, zda si parametrické proměnné zvolíme ve tvaru $x_4 = s$, $x_5 = t$ nebo ve tvaru $x_4 = 12s$, $x_5 = 10t$, kde $s, t \in \mathbb{R}$. Při takovéto volbě parametrů dostaneme všechna řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrrr} x_1 & = & 5- & 8s & +5t \\ x_2 & = & 2 & -9s & \\ x_3 & = & -2+ & 36s+ & 4t \\ x_4 & = & & 12s & \\ x_5 & = & & & 10t \end{array}$$

ve tvaru bez zlomků.

3.3 Elementární řádkové a sloupcové operace (ERO a ESO)

Elementární řádkovou operací (transformací), zkráceně ***ERO***, na matici $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ rozumíme

I. ***Výměnu*** dvou řádků matice $\mathbf{A}$;

II. ***Vynásobení*** některého řádku matice $\mathbf{A}$ ***nenulovým*** skalárem z číselného tělesa K;

III. ***Přičtení*** skalárního násobku některého řádku matice $\mathbf{A}$ k jejímu jinému řádku.

ERO a ESO II

Matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ sa nazývají ***řádkově ekvivalentní***, označení $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, pokud jednu z nich můžeme upravit na druhou konečným počtem elementárních řádkových operací.

Analogické pojmy – ***elementární sloupcové operace*** (ESO) a ***sloupcová ekvivalence*** matic, označení $\mathbf{A} \wr \mathbf{B}$.

ERO a ESO III

Výměnou i-tého a k-tého řádku v matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix} \quad \text{dostaneme matici} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix}.$$

ERO a ESO IV

Vynásobením i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ skalárem $c \neq 0$ dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ c\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix}.$$

Vynásobením i-tého řádku této matice skalárem $c^{-1} \neq 0$ získáme opět matici $\mathbf{A}$.

ERO a ESO V

Přičtením c-násobku i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ k jejímu k-tému řádku z ní dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k(\mathbf{A}) + c\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix}.$$

ERO a ESO VI

Všimněme si, že i-tý řádek při této úpravě zůstává nezměněný. Matici $\mathbf{A}$ z této matice získáme přičtením $(-c)$-násobku jejího i-tého řáddku k jejímu k-tému řádku.

Poznamenejme, že, v případě výměny opětovnou výměnou i-tého a k-tého řádku v matici vzniklé výměnou i-tého a k-tého řádku, získame zase matici $\mathbf{A}$.

ERO a ESO VII

Je-li $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ soustava s rozšířenou maticí $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$ a bloková matica $(\mathbf{A}' \,|\, \mathbf{b}')$ vznikne z $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$ provedením jedné (nezáleží které) ERO, pak soustava $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}'$ ***je ekvivalentní*** s původní soustavou $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

ERO a ESO VIII

Elementární řádkové operace na matici $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ totiž odpovídají postupné záměně pořadí dvou rovnic soustavy, vynásobením některé rovnice nenulovým skalárem a přičtením nějakého násobku jedné rovnice k jiné rovnici.

ERO a ESO IX

Přesněji nahrazením dvojice rovnic

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = b_i, \mathbf{r}_k(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = b_k$$

dvojicí rovnic

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = b_i, (\mathbf{r}_k(\mathbf{A}) + c\mathbf{r}_i(\mathbf{A})) \cdot \mathbf{x} = b_k + cb_i.$$

ERO a ESO X

Je-li $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ soustava s rozšířenou maticí $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ a $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$ rozšířená matice nové ekvivalentní soustavy $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}'$, můžeme se od nové soustavy vhodnou ERO provedenou na její rozšířené matici opět vrátit k původní soustavě $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

ERO a ESO XI

Tvrzení 1 *Nechť* K *je těleso,* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$*,* $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in K^m$*. Jsou-li blokové matice* $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$*,* $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$ *řádkově ekvivalentní, pak jsou i soustavy lineárních rovnic* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$*,* $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ *ekvivalentní.*

ERO a ESO XII

Věta 2 *Každá matice nad číselným tělesem K je řádkově ekvivalentní s nějakou (právě jednou) maticí v redukovaném stupňovitém tvaru.*

Poznámka. Uvedený redukovaný stupňovitý tvar dané matice je jednoznačně určený.

ERO a ESO XIII

Příklad 3 *Je daná soustava*

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +3x_2 & & -\ x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & +2x_2 & +4x_3 & -2x_4 & = & 0 \\ x_1 & -\ x_2 & +4x_3 & -\ x_4 & = & 2 \end{array}$$

třech rovnic o čtyřech neznámých nad tělesem $\mathbb{R}$*.*

ERO a ESO XIV

Její rozšířená matice je

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Při její úpravě na redukovaný stupňovitý tvar budeme vynechávat některé mezikroky a zaznamenáme jen některé výsledky vícero provedených ERO.

ERO a ESO XV

Poslední řádek matice dáme na první místo, potom jeho (-2)-násobek přičteme k původnímu prvnímu řádku, který posuneme na druhé místo, a (-3)-násobek původního posledního řádku přičteme k původnímu druhému řádku, který posuneme na třetí místo. Dostaneme tak matici

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \end{array}\right).$$

ERO a ESO XVI

Přičtením (-1)-násobku druhého řádku k třetímu řádku dostaneme matici

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Z tohoto tvaru vidíme, že soustava odpovídající poslední matici nemá řešení – obsahuje totiž rovnici $0 = -3$. Tedy ani původní soustava nemá řešení.

ERO a ESO XVII

Dokončíme úpravu na redukovaný stupňovitý tvar, který dostaneme vynásobením třetího řádku skalárem $-1/3$, přičtením (-2)-násobku resp. 3-násobku tohoto nového řádku k prvnímu resp. druhému řádku a, konečně, vynásobením druhého řádku skalárem $1/5$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 12/5 & 6/5 & 0 \\ 0 & 1 & -8/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

ERO a ESO XVIII

Tvrzení 4 *Nechť* $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$ *a* $m < n$, *t. j. soustavy* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *obsahují méně rovnic než neznámých. Potom*

(a) *homogenní soustava* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ *má s řešením* $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ *alespoň jedno řešení* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;

(b) *pokud existuje alespoň jedno řešení soustavy* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, *pak má tato soustava více než jedno řešení.*

3.4 Gaussova eliminační metoda

Dále uvedeme tzv. ***Gaussovu eliminační metodu*** řešení soustav lineárních rovnic. Rozšířenou matici soustavy upravíme jen na ***stupňovitý*** (tedy ne nutně redukovaný stupňovitý) tvar.

Gaussova EM II

Z tohoto tvaru můžeme snadno určit, zda má soustava nějaké řešení (příslušná matice nesmí obsahovat řádek tvaru $(0, \ldots, 0 \,|\, d)$, kde $0 \neq d \in K$). V tomto případě můžeme všechna řešení soustavy získat volbou parametrů (opět si za ně volíme neznámé x_j takové, že v j-tém sloupci se nevyskytuje vedoucí prvek žádného řádku) a zpětným dosazováním, t. j. ***eliminací*** neznámých pomocí parametrů.

Gaussova EM III

Příklad 5 *Předpokládejme, že rozšířenou matici nějaké soustavy nad $\mathbb{R}$ jsme si pomocí ERO upravili na stupňovitý tvar*

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Gaussova EM IV

Tato matice odpovídá soustavě

$$\begin{array}{rrrrrrl} 2x_2 & +3x_3 & & - & x_5 & +4x_6 & = & 1 \\ & & -2x_4 & +5x_5 & & +4x_6 & = & 0 \\ & & & & 3x_5 & + \ x_6 & = & 4. \end{array}$$

Za parametry si zvolíme proměnné x_1, x_3 a x_6.

Gaussova EM V

Zpětným dosazováním postupně dostaneme všechna řešení v parametrickém tvaru

$$\begin{aligned}
x_6 &= t \\
x_5 &= \tfrac{1}{3}(4 - x_6) = \tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{3}t \\
x_4 &= \tfrac{1}{2}(5x_5 + 4x_6) = \tfrac{10}{3} - \tfrac{7}{6}t \\
x_3 &= s \\
x_2 &= \tfrac{1}{2}(1 - 3x_3 + x_5 - 4x_6) = \tfrac{7}{6} - \tfrac{3}{2}s - \tfrac{13}{6}t \\
x_1 &= r,
\end{aligned}$$

kde $r, s, t \in \mathbb{R}$.

Gaussova EM VI

Případně, po trochu „vhodnější“ volbě parametrů, bude řešení v tvaru

$$\begin{aligned}
x_6 &= 6t, \\
x_5 &= \tfrac{4}{3} - 2t, \\
x_4 &= \tfrac{10}{3} - 7t, \\
x_3 &= 2s, \\
x_2 &= \tfrac{7}{6} - 3s + 13t, \\
x_1 &= r.
\end{aligned}$$

Gaussova EM VII

Zpětné dosazování můžeme nahradit další úpravou rozšířené matice soustavy pomocí ERO na ***redukovaný*** stupňovitý tvar.

Stačí totiž vynásobit nenulové řádky převrácenými hodnotami jejich vedoucích prvků a přičtením vhodných násobků těchto řádků vynulovat zbývající nenulové prvky ve sloupcích obsahujících vedoucí prvky jednotlivých řádků.

Gaussova EM VIII

Gaussova eliminačná metóda je užitečná zejména tehdy, pokud nám nejde ani tak o explicitní tvar řešení, ale spíše o samotnou otázku řešitelnosti soustavy, případně o počet parametrů, které se v nich vyskytují.
Toto vše je možné zjistit už na základě nějaké matice ve stupňovitém tvaru, která je řádkově ekvivalentní s původní rozšířenou maticí soustavy. V tomto případě si tedy můžeme odpustit další úpravu na redukovaný stupňovitý tvar i zpětné dosazování.