

2. ZÁKLADY MATICOVÉHO POČTU

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

Abstrakt

V této kapitole se seznámíme s ***maticemi***, t. j. obdélníkovými tabulkami, s jejichž pomocí budeme kódovat nejrůznější důležité údaje o vektorových prostorech, a naučíme se s nimi pracovat.

Obsah

2	Základy maticového počtu	4
2.1	Matice nad danou množinou . . .	4
2.1.1	Typy matic	4
2.1.2	Řádky a sloupce matice . .	9
2.1.3	Transponovaná matice . .	13
2.1.4	Blokové matice	18
2.2	Matice nad daným číselným tělesem	25
2.2.1	Vektorový prostor matic . .	28
2.2.2	Násobení matic	31
2.2.3	Operace s blokovými maticemi	51

2 Základy maticového počtu

2.1 Matice nad danou množinou

2.1.1 Typy matic

Nechť X je libovolná množina a $m, n \in \mathbb{N}$. **Maticí typu** $m \times n$, nebo též $m \times n$ -rozměrnou maticí nad množinou X rozumíme obdélníkovou tabulku

Matice nad danou množinou II

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

sestavající z prvků množiny X . Zkráceně též píšeme $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, nebo pouze $\mathbf{A} = (a_{ij})$.

Matice nad danou množinou III

Prvky $a_{ij} \in X$, kde $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, se nazývají **prvky matice A** .

Prvek a_{ij} , který se nachází v i -tém řádku a j -tém sloupci matice A nazýváme též **prvek v místě** (na pozici) (i, j) , resp. **(i, j) -tý prvek** matice A .

Množinu všech $m \times n$ -rozměrných matic nad množinou X značíme $X^{m \times n}$ (někdy též $Mat_{m,n}(X)$). Pokud $m = n$, mluvíme o **čtvercových maticích řádu n** nad množinou X .

Matice nad danou množinou IV

Poznamenejme, že v případě, když některé z čísel m, n je 0, množina $X^{m \times n}$ sestává z jediné a to **prázdné** matice $\emptyset$. Dále se budeme vždy bavit jen o maticích kladných rozměrů $m \times n$.

Dvě matice nad množinou X považujeme za **navzájem stejné** neboli **totožné**, pokud mají stejné rozměry a stejné prvky na příslušných místech.

Matice nad danou množinou V

To znamená, že pro matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{p \times q}$ nad X klademe $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ právě tehdy, když $m = p$, $n = q$ a pro všechny $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ platí $a_{ij} = b_{ij}$. Množina matic typu $1 \times n$ nad X splývá s množinou X^n , pokud uspořádané n -tice prvků z X zapisujeme do řádku. Podobně, pokud uspořádané m -tice prvků z X zapisujeme do sloupce, tak množina matic typu $m \times 1$ nad X splývá s množinou X^m .

Matice nad danou množinou VI

2.1.2 Řádky a sloupce matice

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in X^{m \times n}$. Uspořádanou n -tici

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in X^{1 \times n},$$

kde $1 \leq i \leq m$, nazýváme ***i -tým řádkem*** matice $\mathbf{A}$.

Matice nad danou množinou VII

Podobně, uspořádanou m -tici

$$\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

kde $1 \leq j \leq n$, nazýváme **j -tým sloupcem** matice $\mathbf{A}$.

Matice nad danou množinou VIII

Matici $\mathbf{A}$ tak můžeme ztotožnit jak se sloupcem složeným z jejích řádků tak s řádkem složeným z jejích sloupců, t. j.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \mathbf{r}_2(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix}.$$

Matice nad danou množinou IX

a

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A}) \right).$$

Matice nad danou množinou X

2.1.3 Transponovaná matice

Matici, kterou získáme z matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ záměnou jejích řádků a sloupců, nazýváme ***transponovanou maticí*** k matici $\mathbf{A}$ a značíme ji $\mathbf{A}^T$.

Matice nad danou množinou XI

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{m}^n \end{pmatrix}.$$

To znamená, že $\mathbf{A}^T \in X^{n \times m}$ a prvek na pozici (i, j) matice $\mathbf{A}^T$ je a_{ji} .

Matice nad danou množinou XI

Zřejmě pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in X^{m \times n}$ platí

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}.$$

Transpozicí matic-řádků z $X^{1 \times n}$ dostaneme matice-sloupce z $X^{n \times 1}$ a transpozicí matic-sloupců z $X^{m \times 1}$ matice-řádky z $X^{1 \times m}$.

Matice nad danou množinou XII

Na základě této poznámky lze snadno vidět, že pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in X^{m \times n}$ a $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ platí

$$\mathbf{s}_i(\mathbf{A}^T) = \mathbf{r}_i(\mathbf{A})^T, \quad \mathbf{r}_j(\mathbf{A}^T) = \mathbf{s}_j(\mathbf{A})^T.$$

Matice nad danou množinou XIII

Čtvercová matice $\mathbf{A} \in X^{n \times n}$ se nazývá ***symetrická***, pokud $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, t. j. pokud $a_{ij} = a_{ji}$ pro všechny indexy $i, j = 1, \dots, n$.

Posloupnost prvků $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ nazýváme ***diagonálou*** čtvercové matice $\mathbf{A}$.

Transponovanou matici k čtvercové matici $\mathbf{A}$ zřejmě získáme „osovou souměrností“ jejich prvků podle diagonály.

Matice nad danou množinou XIV

2.1.4 Blokové matice

Někdy bude užitečné spojit dvě matice $\mathbf{A} \in X^{m \times n_1}$, $\mathbf{B} \in X^{m \times n_2}$ se stejným počtem řádků do jedné matice tak, že příslušné tabulky jednoduše napíšeme vedle sebe. Výsledná matice je typu $m \times (n_1 + n_2)$ a značíme ji $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, případně $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$.

Matice nad danou množinou XV

Podobně můžeme spojit dvě matice

$\mathbf{A} \in X^{m_1 \times n}$, $\mathbf{B} \in X^{m_2 \times n}$ se stejným počtem sloupců do jedné matice tak, že příslušné tabulky napíšeme pod sebe. Výsledná matice je typu $(m_1 + m_2) \times n$ a značíme ji

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \text{ případně } \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

Matice nad danou množinou XVI

Právě popsané konstrukce jsou příklady tzv. **blokových matic**. Původní matice, ze kterých takto vytváříme blokovou matici, potom nazýváme jejími **bloky**.

Samozřejmě můžeme vedle sebe resp. pod sebe zařadit větší počet bloků než pouze dva.

Naopak, někdy může být účelné vyznačit v dané matici nějaké menší obdélníkové části jako její bloky.

Matice nad danou množinou XVII

Pak mluvíme o tzv. ***blokovém tvaru*** dané matice.

Příkladem toho byl zápis matice $\mathbf{A} \in X^{m \times n}$ jako řádku složeného z jejích sloupců, případně jako sloupce složeného z jejích řádků.

Uvedená dvě schemata vytváření blokových matic „vedle sebe“ a „pod sebe“ můžeme kombinovat.

Matice nad danou množinou XVIII

Např. z matic $\mathbf{A}_{11} \in X^{m_1 \times n_1}$, $\mathbf{A}_{12} \in X^{m_1 \times n_2}$,
 $\mathbf{A}_{21} \in X^{m_2 \times n_1}$, $\mathbf{A}_{22} \in X^{m_2 \times n_2}$ můžeme
vytvořit blokovou matici

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

typu $(m_1 + m_2) \times (n_1 + n_2)$.

Matice nad danou množinou XIX

Tuto konstrukci můžeme zřejmým způsobem
zevšeobecnit i na větší systémy matic a zapsat
ve tvaru

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{ij})_{k \times l} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{k1} & \dots & \mathbf{A}_{kl} \end{pmatrix},$$

Matice nad danou množinou X

přičemž jednotlivé bloky $\mathbf{A}_{ij}$ jsou matice nad X rozměrů $m_i \times n_j$, kde $(m_1, \dots, m_k)$, $(n_1, \dots, n_l)$ jsou nějaké konečné posloupnosti přirozených čísel.

Matici nad množinou X z této „matice matic“ dostaneme tak, že si v $\mathbf{A}$ odmyslíme vnitřní závorky oddělující její jednotlivé bloky $\mathbf{A}_{ij}$.

Matice nad daným tělesem I

2.2 Matice nad daným číselným tělesem

Na množině X , nad kterou jsme vytvářeli příslušné matice, jsme doposud nepředpokládali žádnou další strukturu.

Na množinách matic $X^{m \times n}$ sa nám poměrně bohatá struktura přirozeným způsobem objevila.

Matice nad daným tělesem II

Všechny doposud zavedené maticové operace a vlastnosti však měly výlučně ***poziční charakter*** – zakládaly sa na reprezentaci každé matice jako příslušné obdélníkové tabulky.

Další maticové operace a vlastnosti, které hodláme zavést a později využívat, už budou podmíněné přítomností jisté struktury na množině X .

Matice nad daným tělesem III

Nejdůležitější a, až na pár výjimek, vlastně jediný druh matic, jimiž se budeme zabývat, tvoří matice nad nějakým tělesem.

V celém odstavci K označuje pevně zvolené, jinak však libovolné těleso.

V souladu s předešlým odstavcem $K^{m \times n}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$, označuje množinu všech matic typu $m \times n$ nad číselným tělesem K .

Matice nad daným tělesem IV

2.2.1 Vektorový prostor matic

Pro pevné $m, n \in \mathbb{N}$ budeme na množině matic $K^{m \times n}$ definovat po složkách operace součtu a skalárního násobku. Tedy pro matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m \times n}$ nad K a $c \in K$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}, \\ c\mathbf{A} &= (ca_{ij})_{m \times n}.\end{aligned}$$

Matice nad daným tělesem V

Součet matic $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ je definovaný jen pro matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ stejného typu a samotná matice $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ je téhož typu jako $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$.

Neutrálním prvkem operace sčítání na $K^{m \times n}$ je matice typu $m \times n$, jejíž všechny prvky jsou nulové; nazýváme ji **nulová matice** typu $m \times n$ a označujeme ji $\mathbf{0}_{m,n}$, resp. $\mathbf{0}$, je-li její rozměr jasný z kontextu nebo na něm nezáleží.

Matice nad daným tělesem VI

Opačným prvkem k matici $A = (a_{ij})_{m \times n}$ je zřejmě matice $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$.

Matice pevného typu $m \times n$ nad tělesem K s takto definovanými operacemi součtu a skalárního násobku tvoří **vektorový prostor** nad tělesem K tj. $K^{m \times n}$ bude dále označovat příslušný vektorový prostor.

Matice nad daným tělesem VII

2.2.2 Násobení matic

Nejprve sa naučíme násobit některé dvojice vektorů.

Součinem $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ řádkového vektoru

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^{1 \times n}$ a sloupcového

vektoru $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T \in K^{n \times 1}$ rozumíme
skalár

Matice nad daným tělesem VIII

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.\end{aligned}$$

V tomto případě jde o běžný „**skalární součin**“ vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K^n$.

Matice nad daným tělesem VIII

Snadno se ověří, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $c \in K$ a $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in K^{1 \times n}$, $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in K^{n \times 1}$ platí

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{y}') = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}',$$

$$(\mathbf{x} + \mathbf{x}') \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y},$$

$$\mathbf{x} \cdot c\mathbf{y} = c(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = c\mathbf{x} \cdot \mathbf{y},$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{x}^T.$$

Matice nad daným tělesem IX

Pro takto definovaný součin vektorů jsou splněné dobře známé vlastnosti „skalárního součinu“.

Říkáme, že násobení řádkových a sloupcových vektorů je ***distributivní*** (z obou stran) vzhledem ke sčítání a ***komutuje***, t. j. je zaměnitelné s operací skalárního násobku.

Poslední rovnost můžeme chápat jako „komutativitu“ tohoto součinu; vděčíme za ni komutativitě násobení v tělese K .

Matice nad daným tělesem X

Nechť $m, n, p \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\mathbf{B} = (b_{jk})_{n \times p}$.

Součinem matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ rozumíme matici

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{B}))_{m \times p}.$$

Všimněme si, že součin matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ je definovaný, pouze pokud se počet sloupců matice $\mathbf{A}$ rovná počtu řádků matice $\mathbf{B}$, t. j. právě tehdy, když řádky matice $\mathbf{A}$ a sloupce matice $\mathbf{B}$ mají stejný rozměr.

Matice nad daným tělesem XI

Součin matic typů $m \times n$ a $n \times p$ je matice typu $m \times p$, což si můžeme lehce zapamatovat v symbolickém tvaru

$$[m \times n] \cdot [n \times p] = [m \times p],$$

připomínajícím rozměrové vztahy ve fyzice.

Součin dvou čtvercových matic typu $n \times n$ je tedy opět matice typu $n \times n$.

Matice nad daným tělesem XII

Prvek na pozici (i, k) matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ dostaneme jako součin i -tého řádku matice $\mathbf{A}$ a k -tého sloupce matice $\mathbf{B}$, tedy jako výraz

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{B}) &= (a_{i1}, \dots, a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} \\ &= a_{i1}b_{1k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}. \end{aligned}$$

Matice nad daným tělesem XIII

Snadno pak ověříme následující rovnosti

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{s}_k(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{B}).$$

Matice nad daným tělesem XIV

Násobení matic je (z obou stran) ***distributivní*** vzhledem ke sčítání. To znamená, že pro libovolné $m, n \in \mathbb{N}$ a matice $\mathbf{A}, \mathbf{A}' \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B}, \mathbf{B}' \in K^{n \times p}$ platí

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{B}') = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}',$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{A}') \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}.$$

Matice nad daným tělesem XV

Z distributivity součinu vektorů vzhledem k jejich součtu je totiž jasné, že (i, k) -tý prvek matice $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{B}')$ je

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{B} + \mathbf{B}') &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{s}_k(\mathbf{B}) + \mathbf{s}_k(\mathbf{B}')) \\ &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{B}) + \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{B}'),\end{aligned}$$

tedy sa rovná (i, k) -tému prvku matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}'$. Podobně pro druhou rovnost.

Matice nad daným tělesem XVI

Podobně, s využitím zaměnitelnosti součinu vektorů a skalárního násobku můžeme dokázat, že pro libovolný skalár $c \in K$ a všechny matice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$ platí

$$\mathbf{A} \cdot c\mathbf{B} = c(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = c\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Říkáme pak, že násobení matic ***komutuje***, t. j. je zaměnitelné s operací skalárního násobku.

Matice nad daným tělesem XVII

Násobení matic je též **asociativní**: pro

$m, n, p, q \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$, $\mathbf{C} \in K^{p \times q}$

platí

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}.$$

Pro důkaz toho si stačí uvědomit, že pro libovolné vektory $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^{1 \times n}$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_p)^T \in K^{p \times 1}$ platí:

Matice nad daným tělesem XVIII

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{y}) &= (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^p b_{1k} y_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^p b_{nk} y_k \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{k=1}^p b_{jk} y_k \right) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n x_j b_{jk} \right) y_k = \\ &= \left(\sum_{j=1}^n x_j b_{j1}, \dots, \sum_{j=1}^n x_j b_{jp} \right) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{y}\end{aligned}$$

Matice nad daným tělesem XIX

Pak pro $1 \leq i \leq m$, $1 \leq l \leq q$, je i -tý prvek na pozici (i, l) matice $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_l(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{s}_l(\mathbf{C})) \\ &= (\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{s}_l(\mathbf{C}) \\ &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{s}_l(\mathbf{C}),\end{aligned}$$

tedy se rovná (i, l) -tému prvku matice $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$.

Matice nad daným tělesem $\mathbb{X}$

Čtvercovou matici řádu n , která má všechny prvky na diagonále rovné 1 a mimo diagonálu 0, označujeme $\mathbf{I}_n$ a nazýváme **jednotková matice** řádu n .

S použitím tzv. **Kroneckerova symbolu**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pro } i = j, \\ 0, & \text{pro } i \neq j, \end{cases}$$

Matice nad daným tělesem XXI

můžeme psát

$$\mathbf{I}_n = (\delta_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice nad daným tělesem XXII

Jednotkové matice hrají úlohu neutrálních prvků pro násobení matic. Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ platí

$$\mathbf{I}_m \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n.$$

Množina $K^{n \times n}$ všech čtvercových matic řádu n je kromě struktury vektorového prostoru vybavená asociativní operací násobení, která je (z obou stran) distributivní vzhledem ke sčítání matic, komutuje s operací skalárního násobku a jednotková matice $\mathbf{I}_n$ je její neutrální prvek.

Matice nad daným tělesem XXIII

To nám, podobně jako pro prvky tělesa K , umožňuje zavést i ***mocniny čtvercových matic***.

Pre $A \in K^{n \times n}$, klademe $A^0 = I_n$ a

$$A^k = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{k\text{-krát}},$$

pro $0 < k \in \mathbb{N}$; tedy $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A$,
 $A^3 = A \cdot A \cdot A$, atd.

Matice nad daným tělesem XXIV

Uvědomme si, že pro $n > 1$ – naproti komutativitě násobení v tělese K – násobení matic z pozičních důvodů *není komutativní* na $K^{n \times n}$. Například

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1+1 \end{pmatrix}.$$

Matice nad daným tělesem XXV

Naproti tomu komutativita násobení v tělese K má za důsledek, že pro všechna m, n, p a matice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$ platí rovnost

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T.$$

Totiž

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{B}) = \mathbf{s}_k(\mathbf{B})^T \cdot \mathbf{r}_i(\mathbf{A})^T = \mathbf{r}_k(\mathbf{B}^T) \cdot \mathbf{s}_i(\mathbf{A}^T).$$

Matice nad daným tělesem XXVI

2.2.3 Operace s blokovými maticemi

Operace maticového součtu a skalárního násobku můžeme na blokových maticích rozložit na jednotlivé bloky. Jsou-li $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{ij})_{k \times l}$, $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{ij})_{k \times l}$ blokové matice nad číselným tělesem K a odpovídající si si bloky $\mathbf{A}_{ij}$, $\mathbf{B}_{ij}$ se stejným typem $m_i \times n_j$, tak jejich součet je opět

Matice nad daným tělesem XXVII

bloková matice

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij})_{k \times l}$$

s bloky stejných typů. S operací skalárního násobku je to ještě jednodušší, totiž nemusíme se starat o shodnost rozměrů jednotlivých bloků.

$$c\mathbf{A} = (c\mathbf{A}_{ij})_{k \times l}.$$

Matice nad daným tělesem XXVIII

Bloková struktura se přenáší i na součin matic za podmínky, že sloupce první matice jsou ve stejném pořadí rozděleny na stejný počet stejně velkých skupin, řekněme $n_1 + n_2 + \dots + n_\nu$, jako sloupce druhé matice. Tedy pokud $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{ij})_{\mu \times \nu}$, $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{jk})_{\nu \times \vartheta}$ jsou blokové matice nad K , přičemž blok $\mathbf{A}_{ij}$ je typu $m_i \times n_j$ a blok $\mathbf{B}_{jk}$ typu $n_j \times p_k$, tak jejich součin je bloková matice tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{C}_{ik})_{\mu \times \vartheta}$, kde blok

$$\mathbf{C}_{ik} = \mathbf{A}_{i1} \cdot \mathbf{B}_{1k} + \mathbf{A}_{i2} \cdot \mathbf{B}_{2k} + \dots + \mathbf{A}_{i\nu} \cdot \mathbf{B}_{\nu k}$$

je typu $m_i \times p_k$.

Matice nad daným tělesem XXIX

Blokové matice násobíme stejně jako „obyčejné“ matice, jen s tím rozdílem, že součet resp. součin v číselném tělese K nahradíme součtem resp. součinem matic.

Jednotkové matice I_n jsou příkladem tzv. diagonálních matic. Čtvercovou matici $A = (a_{ij})_{n \times n}$ nazýváme **diagonální**, pokud $a_{ij} = 0$ pro všechny $i \neq j$, t. j. pokud všechny její prvky mimo diagonálu jsou nuly.

Matice nad daným tělesem XXX

Diagonální matici, která má na diagonále postupně prvky $d_1, d_2, \dots, d_n \in K$ značíme $\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Tedy např.

$$\mathbf{I}_n = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n\text{-krát}}).$$

Podobně můžeme definovat i tzv. blokově diagonální matice.

Matice nad daným tělesem XXXI

Pokud $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k$ jsou čtvercové matice řádů $n_1, n_2, \dots, n_k$, tak ***blokově diagonální maticí*** s bloky $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k$ nazýváme čtvercovou blokovou maticí

$$\text{diag}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_k \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{0}$ nacházející se na pozici (i, j) označuje nulovou matici $\mathbf{0}_{n_i n_j}$.

Matice nad daným tělesem XXXII

Pravidlo o součinu blokových matic se redukuje na zvlášť jednoduchý tvar pro blokově diagonální matice – násobení funguje ***diagonálně po složkách***. Pokud $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_k)$, $B = \text{diag}(B_1, \dots, B_k)$ jsou blokově diagonální matice, přičemž odpovídající si bloky A_i, B_i jsou čtvercové matice stejného řádu n_i , jejich součin je blokově diagonální matice tvaru

$$A \cdot B = \text{diag}(A_1 \cdot B_1, \dots, A_k \cdot B_k)$$

s čtvercovými bloky řádů $n_1, \dots, n_k$.

Matice nad daným tělesem XXXIII

Speciálně, pro „obyčejné“ diagonální matice platí

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \cdot \text{diag}(b_1, \dots, b_n) = \\ \text{diag}(a_1 b_1, \dots, a_n b_n).$$

Platí analogická pravidla pro součet a skalární násobek (blokově) diagonálních matic.

Matice nad daným tělesem XXXIV

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \text{diag}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{A}_k + \mathbf{B}_k)$$

$$c\mathbf{A} = \text{diag}(c\mathbf{A}_1, \dots, c\mathbf{A}_k)$$

Matice nad vektorovým prostorem I

2.3 Matice nad vektorovým prostorem

Matice typu $m \times n$ nad tělesem K jsou speciálním druhem blokových matic.

Matici $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ můžeme považovat jednak za blokovou matici s bloky a_{ij} typu 1×1 , jednak se na ni můžeme dívat jako na řádek jejích sloupců resp. jako na sloupec jejích řádků.

Matice nad vekt. prostorem II

A pak chápeme jako matici typu $m \times 1$ nad vektorovým prostorem $K^{1 \times n}$, resp. jako matici typu $1 \times n$ nad vektorovým prostorem $K^{m \times 1}$.

Pro libovolné $m, n \in \mathbb{N}$ a libovolný (abstraktní) vektorový prostor V máme definovanou množinu $V^{m \times n}$ všech matic nad množinou V .

Na množině $V^{m \times n}$ můžeme zavést operace součtu a skalárního násobku po složkách. $V^{m \times n}$ s těmito operacemi tvoří vektorový prostor nad tělesem K .

Matice nad vekt. prostorem III

Zobecníme nyní operaci skalárního násobku $K \times V \rightarrow V$ na operaci součinu mezi maticemi vhodných typů nad K a nad V .

Pro matice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$,

$\alpha = (\mathbf{u}_{jk}) \in \mathbf{V}^{n \times p}$ klademe

$\mathbf{A} \cdot \alpha = (\mathbf{v}_{ik}) \in \mathbf{V}^{m \times p}$, kde

$$\mathbf{v}_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{u}_{jk} .$$

Matice nad vekt. prostorem IV

Tedy součin $A \cdot \alpha$ definujeme z formálního hlediska stejně jako součin matic nad tělesem K , jen s tím rozdílem že operace součtu v K je nahrazená operací součtu ve V a operace součinu v K je nahrazená operací skalárního násobku $K \times V \rightarrow V$.

Pro násobení matic nad V maticemi nad K platí distributivita (z obou stran) vzhledem ke sčítání, zaměnitelnost s operací skalárního násobku, asociativita a postavení jednotkových matic jako neutrálních prvků.

Matice nad vekt. prostorem V

To znamená, že pro všechna $l, m, n, p \in \mathbb{N}$,
 $c \in K$, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{C} \in K^{l \times m}$ $\alpha, \beta \in V^{n \times p}$
platí:

$$\mathbf{A} \cdot (\alpha + \beta) = \mathbf{A} \cdot \alpha + \mathbf{A} \cdot \beta,$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \alpha = \mathbf{A} \cdot \alpha + \mathbf{B} \cdot \alpha,$$

$$\mathbf{A} \cdot (c\alpha) = c(\mathbf{A} \cdot \alpha) = (c\mathbf{A}) \cdot \alpha,$$

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \cdot \alpha) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \cdot \alpha,$$

$$\mathbf{I}_n \cdot \alpha = \alpha.$$

Matice nad vekt. prostorem VI

Dle úmluvy, že $\mathbf{x}c = c\mathbf{x}$ pro $c \in K$, $\mathbf{x} \in V$,
můžeme definovat i součin matic

$$\beta = (\mathbf{v}_{ij}) \in V^{m \times n}, \mathbf{B} = (\mathbf{b}_{jk}) \in K^{n \times p}$$

v obráceném pořadí jako matici

$$\beta \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{w}_{ik}) \in V^{m \times p} \text{ takovou, že}$$

$$\mathbf{w}_{ik} = \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^n b_{jk} \mathbf{v}_{ij} .$$

Matice nad vekt. prostorem VII

S využitím poslední definice můžeme pro $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\alpha \in V^{n \times p}$, $\beta \in V^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$ dokázat rovnosti

$$(\mathbf{A} \cdot \alpha)^T = \alpha^T \cdot \mathbf{A}^T, \quad (\beta \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \beta^T.$$

Tedy i pro násobení matic nad K maticemi nad V platí distributivita (z obou stran) vzhledem ke sčítání, zaměnitelnost s operací skalárního násobku, asociativita a postavení jednotkových matic jako neutrálních prvků.

Matice nad vekt. prostorem VIII

To znamená, že pro všechna $m, n, p, q \in \mathbb{N}$,
 $c \in K$, $\alpha, \beta \in \mathbf{K}^{m \times n}$, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in V^{n \times p}$, $\mathbf{C} \in K^{p \times q}$
platí:

$$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{A} = \alpha \cdot \mathbf{A} + \beta \cdot \mathbf{A},$$

$$\alpha \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha \cdot \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{B},$$

$$\alpha \cdot (\mathbf{cA}) = \mathbf{c}(\alpha \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{c}\alpha) \cdot \mathbf{A},$$

$$\alpha \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) = (\alpha \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C},$$

$$\alpha \cdot \mathbf{I}_n = \alpha.$$

Matice nad vekt. prostorem IX

Vztahy pro řádky a sloupce součinu z odstavce 2.2.2 zůstávají zachované pro oba typy součinů matic nad K a V , t. j.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i(\mathbf{A} \cdot \alpha) &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \alpha, & \mathbf{s}_k(\mathbf{A} \cdot \alpha) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_k(\alpha) \\ \mathbf{r}_i(\beta \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{r}_i(\beta) \cdot \mathbf{B}, & \mathbf{s}_k(\beta \cdot \mathbf{B}) &= \beta \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{B}) \end{aligned}$$

pre všechny $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\alpha \in V^{n \times p}$ $\beta \in V^{m \times n}$,
 $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$.

Matice nad vekt. prostorem X

Definice součinů $\mathbf{A} \cdot \alpha$, $\beta \cdot \mathbf{B}$ jsou ve shodě s původním násobením matic.

Chápeme-li matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ jakožto řádek, t. j. jakožto matici typu $1 \times n$ nad prostorem sloupcových vektorů K^m , tak pro $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$ splývá matice $(\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \cdot \mathbf{B}$ vypočítaná podle „nové“ definice s blokovým tvarem $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_1(\mathbf{B}), \dots, \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_p(\mathbf{B}))$ matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

Matice nad vekt. prostorem XI

Podobně, chápeme-li $\mathbf{B}$ jako sloupec, t. j. jako matici typu $n \times 1$ nad prostorem řádkových vektorů K^p , tak

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{B}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n(\mathbf{B}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Matice nad vekt. prostorem XII

Speciálně, lineární kombinaci $a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\mathbf{x}_n$ vektorů $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in V$ s koeficienty $a_1, \dots, a_n \in K$ můžeme s využitím vektorových matic zapsat ve tvaru součinů

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} .$$