10. DETERMINANTY

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

Abstrakt přednášky

V této kapitole zavedeme ***determinanty*** čtvercových matic libovolného rozměru $n \times n$ nad pevným tělesem K, řekneme si jejich základní vlastnosti a naučíme se je vypočítat včetně příkladů jejich aplikace.
V celé kapitole K označuje pevné těleso, m, n jsou přirozená čísla.

Obsah

10 Determinanty

10.0 Permutace

Nechť X je libovolná množina. ***Permutací*** množiny X rozumíme libovolné bijektivní zobrazení $\sigma : X \to X$.

Množinu všech permutací množiny X značíme $\mathcal{S}(X)$.

Permutace II

Je-li X konečná množina, tak počet prvků množiny $\mathcal{S}(X)$ je daný známým vztahem

$$\#\,\mathcal{S}(X) = (\#\,X)!\,,$$

kde $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ je ***faktoriál*** přirozeného čísla n (přitom $0! = 1! = 1$).

Permutace III

Transformace $f : X \to X$ ***konečné*** množiny X je injektivní právě tehdy, když je surjektivní.

Protože složení $\sigma \circ \tau$ dvou permutací $\sigma, \tau \in \mathcal{S}(X)$ dává opět permutaci množiny X, kompozice $\circ$ je asociativní binární operace na množině $\mathcal{S}(X)$ a id_X je její neutrální prvek.

Snadno se můžeme přesvědčit, že – mimo případ, když $\# X \leq 2$, – tato operace není komutativní.

Permutace IV

Pro $X = \{1, 2, \dots, n\}$ místo $\mathcal{S}(X)$ píšeme $\mathcal{S}_n$.

Permutaci $\sigma \in \mathcal{S}_n$ obvykle zapisujeme ve tvaru

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Permutace V

Prvky množiny $\mathcal{S}_3$, t. j. permutace množiny $\{1, 2, 3\}$, si můžeme představit jako symetrie rovnostranného trojúhelníka s vrcholy označenými čísly 1, 2, 3.

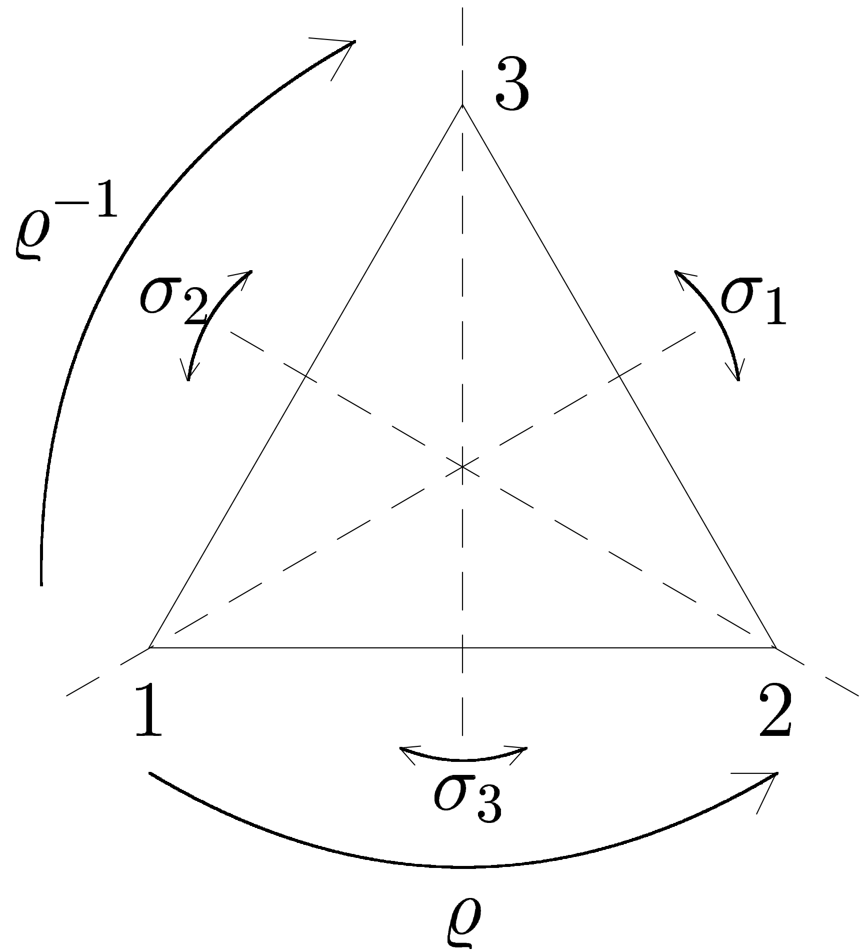
Označme si identickou permutaci této množiny jako ι, otočení kolem těžiště trojúhelníka proti směru resp. ve směru hodinových ručiček o uhel $\pi/3$ jako ϱ resp. ϱ^{-1}, a osovou souměrnost podle osy procházející i-tým vrcholem a středem protilehlé strany jako σ_i, pro $i = 1,\ 2,\ 3$.

Permutace VI

Množina permutací $\mathcal{S}_3$ se bude skládat z permutací

$$\begin{aligned}
\iota &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & \varrho &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \\
\varrho^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, & \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\
\sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Permutace VII



Permutace VIII

Multiplikativní tabulka binární operace $\circ$ na množině $\mathcal{S}_3$ má následující tvar:

$\circ$	ι	ϱ	ϱ^{-1}	σ_1	σ_2	σ_3
ι	ι	ϱ	ϱ^{-1}	σ_1	σ_2	σ_3
ϱ	ϱ	ϱ^{-1}	ι	σ_3	σ_1	σ_2
ϱ^{-1}	ϱ^{-1}	ι	ϱ	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	ι	ϱ	ϱ^{-1}
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	ϱ^{-1}	ι	ϱ
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	ϱ	ϱ^{-1}	ι

Permutace IX

Permutaci $\sigma \in \mathcal{S}(X)$ nazýváme ***transpozicí***, pokud existují $x, y \in X$ tak, že $x \neq y$, $\sigma(x) = y$, $\sigma(y) = x$ a $\sigma(z) = z$ pro každé $z \in X \setminus \{x, y\}$.

Jinak řečeno, transpozice je výměna dvou prvků množiny X.

Zřejmě $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathcal{S}_3$ jsou transpozice.

Z názoru je zřejmé, že každou permutaci σ konečné množiny X můžeme obdržet postupnými výměnami dvojic prvků, je tedy každá takáváto permutace je kompozicí transpozic.

Permutace X

Tento rozklad na transpozície není jednoznačný:

např. $\iota \in \mathcal{S}_3$ můžeme vyjádřit jako ι, t. j. kompozici 0 transpozic, a rovněž jakožto

$$\iota = \sigma_1 \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \sigma_2 = \sigma_3 \circ \sigma_3,$$

t. j. alespoň třemi dalšími možnostmi jakožto kompozici dvou transpozic.

Permutace XI

Délkou permutace σ konečné množiny X nazveme nejmenší počet transpozic, na jejichž kompozici můžeme σ rozložit, a označíme ji $|\sigma|$.

Samotná délka $|\sigma|$ není ve skutečnosti důležitá, význam má pouze parita tohoto čísla, t. j. vlastně výraz $\mathrm{sgn}\sigma = (-1)^{|\sigma|}$, který nazýváme ***znaménkem permutace*** σ.

Permutace XII

Permutace σ konečné množiny X sa nazývá ***sudá*** resp. ***lichá***, je-li číslo $|\sigma|$ sudé resp. liché, t. j. pokud její znak je 1 resp. -1.

Z následující věty vyplývá, že při určování znaménka permutace σ můžeme použít její ***libovolný*** rozklad na transpozice $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$ a nemusíme sa starat o to, zda tento rozklad je skutečně nejkratší – pro libovolný takovýto rozklad totiž platí

$$(-1)^{|\sigma|} = (-1)^k.$$

Permutace XIII

Věta 10.0.1 *Nechť X je konečná množina. Potom pro libovolné $\sigma, \tau \in \mathcal{S}(X)$ platí*

$$(-1)^{|\sigma\circ\tau|} = (-1)^{|\sigma|} \cdot (-1)^{|\tau|}.$$

Člen $\sigma(j) - \sigma(i)$ je záporný právě tehdy, když $i < j$ a $\sigma(i) > \sigma(j)$, – každou takovouto dvojici (i, j) nazýváme ***inverzí*** permutace σ.

10.1 Orientovaný objem a multilineární alternující funkce

Otázka: Jak vypadají vzorce pro plošný obsah rovnoběžníku v rovině v $\mathbb{R}^2$, jehož dvě sousední strany tvoří vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$?

Orientovaný objem a MAF II

Otázka: Jak vypadají vzorce pro objem rovnoběžnostěnu v prostoru $\mathbb{R}^3$, jehož tři sousední hrany tvoří vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$?

Ujasníme si vlastností takovýchto vzorců. Uvidíme, že tyto vlastnosti už jednoznačně (až na volbu jednotkového obsahu či objemu) určují hledané vzorce nejen v rovině či v třírozměrném prostoru. Zobecníme je na n-rozměrné vektorové prostory K^n nad libovolným tělesem K.

Orientovaný objem a MAF III

Označme $P(X)$ obsah rovinného útvaru X.

Zřejmě $P(X)$ je vždy nezáporné reálné číslo a pro shodné útvary X, Y platí $P(X) = P(Y)$.

Obsah je navíc ***aditivní*** funkce, t. j. pro útvary X, Y také, že $P(X \cap Y) = 0$, platí

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y).$$

Konečně, $P(X) = 0$ pro libovolnou úsečku X.

Orientovaný objem a MAF IV

Obsah rovnoběžníka $\{a\mathbf{u}+b\mathbf{v};\ a,b\in\langle 0,1\rangle\}$ určeného vektory $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$ budeme značit $P(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

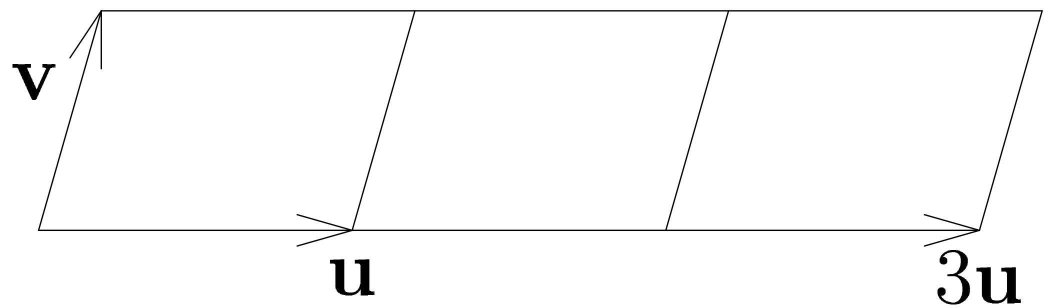
Platí pak rovnosti

$$P(\mathbf{u},\mathbf{v})=P(\mathbf{v},\mathbf{u}),\qquad P(c\mathbf{u},\mathbf{v})=|c|P(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

pro libovolné $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$, $c\in\mathbb{Z}$.

Orientovaný objem a MAF V

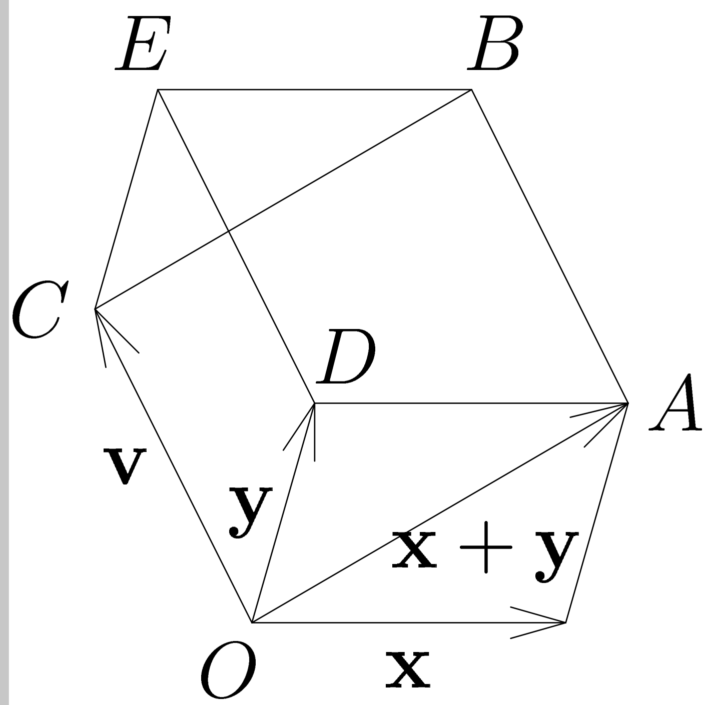
Situace pro $c = 3$ je znázorněná na následujícím obrázku.

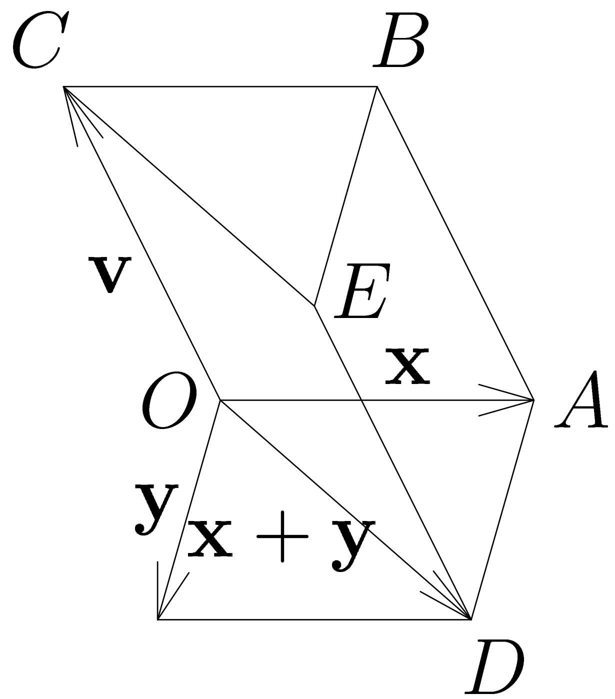


Platnost druhé rovnosti pro všechna $c \in \mathbb{Q}$ plyne z platnosti pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $m \in \mathbb{Z}$. Platnost pre všechna $c \in \mathbb{R}$ plyne ze spojitosti obsahu.

Orientovaný objem a MAF VI

Uvažme následující dva obrázky.





Orientovaný objem a MAF VII

V prvním případě určují vektory $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{v}$ rovnoběžník $OABC$, vektory $\mathbf{y}$, $\mathbf{v}$ rovnoběžník $ODEC$ a rovnoběžník vektorů $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$ je shodný s rovnoběžníkem $DABE$.

Ze shodnosti trojúhelníků OAD, CBE potom na základě uvedených vlastností obsahu vyplývá rovnost

$$P(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{v}) = P(\mathbf{x},\mathbf{v}) + P(\mathbf{y},\mathbf{v}).$$

Orientovaný objem a MAF VIII

V druhém případě určují vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$ rovnoběžník $OABC$, vektory $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{v}$ rovnoběžník $ODEC$ a rovnoběžník vektorů $\mathbf{y}$, $\mathbf{v}$ je shodný s rovnoběžníkem $DABE$.

Ze shodnosti trojúhelníků ODA, CEB vyplývá $P(\mathbf{x},\mathbf{v}) = P(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{v}) + P(\mathbf{y},\mathbf{v})$, tedy

$$P(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{v}) = P(\mathbf{x},\mathbf{v}) - P(\mathbf{y},\mathbf{v}),$$

což je nepříjemné překvapení, určitě bychome dali přednost stejnému vzorci.

Orientovaný objem a MAF IX

Všimněme si však, že kratší otočení vektoru $\mathbf{y}$ do vektoru $\mathbf{v}$ je orientované proti kratším otočením vektorů $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ do vektoru $\mathbf{v}$.

V druhém případě by sa nám proto hodilo, aby obsah rovnoběžníka určeného vektory $\mathbf{y}$, $\mathbf{v}$ měl z tohoto důvodu opačné znaménko než obsahy rovnoběžníků příslušejících vektorům $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$ resp. $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{v}$.

Orientovaný objem a MAF X

Tento cíl můžeme dosáhnou, pokud místo plošného obsahu vektorových rovnoběžníků budeme uvažovat jejich ***orientovaný plošný obsah***, který mění znaménko záměnou pořadí dvou vektorů, tedy může nabývat i záporné hodnoty.

Původní nezáporný plošný obsah potom dostaneme jako absolutní hodnotu orientovaného obsahu.

Tento přístup nám navíc umožní zbavit se absolutní hodnoty v rovnosti $P(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |c| P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Orientovaný objem a MAF XI

Pokud nahradíme reálná čísla libovolným tělesem K, provedené úvahy nás přivádí k následujícím definicím.
Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K a $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

Říkáme, že zobrazení $F : V^n \to K$ je

(a) n-***lineární*** nebo též ***multilineární***, pokud pro každé $1 \leq j \leq n$ a libovolné vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{u}_{j+1}, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$ přiřazení

$$\mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{x}, \mathbf{u}_{j+1}, \ldots, \mathbf{u}_n)$$

Orientovaný objem a MAF XII

definuje lineární zobrazení $V \to K$, t. j. pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $a, b \in K$ platí

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j-1}, a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{u}_{j+1}, \dots, \mathbf{u}_n) \\ = aF(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{x}, \mathbf{u}_{j+1}, \dots, \mathbf{u}_n) \\ + bF(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{y}, \mathbf{u}_{j+1}, \dots, \mathbf{u}_n); \end{aligned}$$

Orientovaný objem a MAF XIII

(b) ***antisymetrické***, pokud pro všechna $1 \le i < j \le n$ a všechny vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$ platí

$$F(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i, \ldots, \mathbf{u}_j, \ldots, \mathbf{u}_n) =$$

$$-F(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_j, \ldots, \mathbf{u}_i, \ldots, \mathbf{u}_n).$$

Orientovaný objem a MAF XIV

(c) ***alternující***, pokud pro všechna $1 \leq i < j \leq n$ a všechny vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$ z podmínky $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j$ vyplývá

$$F(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i, \ldots, \mathbf{u}_j, \ldots, \mathbf{u}_n) = 0.$$

Orientovaný objem a MAF XV

Lemma 10.1.1 *Nechť $F : V^n \to K$ je libovolné zobrazení, K těleso, V vektorový prostor nad K.*

(a) *Je-li $\mathrm{char} K \neq 2$ a F je antisymetrické, tak F je alternující.*

(b) *Je-li F je multilineární a alternující, je F je antisymetrické.*

Orientovaný objem a MAF XVI

Lemma 10.1.2 *Nechť* $F : V^n \to K$ *je funkce,* K *těleso,* V *vektorový prostor nad* K*,* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ *a* σ *je libovolné zobrazení množiny* $\{1, \dots, n\}$ *do sebe.*

(a) *Je-li* σ *permutace a* F *je antisymetrické, tak* $F(\mathbf{u}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{u}_{\sigma(n)}) = (-1)^{|\sigma|} F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$*;*

(b) *Pokud* σ *není permutace a* F *je alternující, tak*

$$F(\mathbf{u}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{u}_{\sigma(n)}) = 0.$$

Orientovaný objem a MAF XVII

Lemma 10.1.3 *Nechť* $F : V^n \to K$ *je multilineární alternující funkce. Potom pro libovolné* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ *platí:*

(a) *Připočtením skalárního násobku nějakého z vektorů k jinému vektoru se hodnota* $F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *nezmění, t. j. pro libovolné* $c \in K$ a $i, j \le n$ *platí*

$$F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j + c\mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) \\ = F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_n).$$

Orientovaný objem a MAF XVII

(b) *Pokud jsou vektory* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *lineárně závislé, tak* $F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = 0$*.*

Jak vypadají všechny bilineární (t. j. 2-lineární) alternující funkce $F : K^2 \times K^2 \to K^2$ nad tělesem K?

Orientovaný objem a MAF XVIII

Zvolme libovolné vektory $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ z K^2. Pokud dvakrát po sebe využijeme bilinearitu a na závěr alternaci a antisymetrii F, postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{u},\mathbf{v}) =& F(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2,\ \mathbf{v}) = u_1F(\mathbf{e}_1,\mathbf{v}) + u_2F(\mathbf{e}_2,\mathbf{v}) \\
=& u_1F(\mathbf{e}_1,\ v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) + u_2F(\mathbf{e}_2,\ v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) \\
=& u_1v_1F(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) + u_1v_2F(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) \\
& + u_2v_1F(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1) + u_2v_2F(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2) \\
=& F(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)\ \cdot (u_1v_2 - u_2v_1) = F(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

Orientovaný objem a MAF XIX

kde výraz

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

je determinant matice

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}.$$

Orientovaný objem a MAF XX

Podobným způsobem můžeme odvodit tvar libovolné n-lineární alternující funkce $F : K^{n\times n} \to K$.

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ je matice se sloupci

$$\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = a_{1j}\mathbf{e}_1 + \ldots + a_{nj}\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i.$$

Orientovaný objem a MAF XXI

S využitím n-linearity F pro každý z n sloupců matice $\mathbf{A}$ můžeme výraz $F(\mathbf{A})$ postupně roznásobit, čímž dostaneme součet n^n členů tvaru

$$a_{\sigma(1)\,1} \dots a_{\sigma(n)\,n} F\big(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}\big),$$

z kterých každý odpovídá právě jednomu zobrazení σ množiny $\{1, \dots, n\}$ do sebe.

Orientovaný objem a MAF XXII

Podle lemmatu 10.1.2 sčítance příslušející zobrazením $\sigma \notin \mathcal{S}_n$ jsou všechny rovné 0 a pro $\sigma \in \mathcal{S}_n$ platí

$$F(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}) = (-1)^{|\sigma|} F(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n).$$

Na závěr tak dostáváme

$$\begin{aligned} F(\mathbf{A}) &= F(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n} \\ &= F(\mathbf{I}_n) \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n}, \end{aligned}$$

kde příslušná suma obsahuje $n!$ sčítanců, jeden pro každou permutaci $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

10.2 Definice a základní vlastnosti determinantu

Determinantem čtvercové matice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ nazýváme výraz

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \dots a_{\sigma(n)\,n} \cdot$$

Základní vlastnosti determinantu II

Pokud nehrozí záměna s absolutní hodnotou, používame též označení $|\mathbf{A}|$. Determinant čtvercové matice řádu n budeme nazývat ***determinant řádu*** n. Pro matici $(a_{ij}) \in K^{3\times 3}$ dostáváme vzorec

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23},$$

známý jako ***Sarrusovo pravidlo***.

Základní vlastnosti determinantu III

Tvrzení 10.2.1 *Determinant transponované matice sa rovná determinantu původní matice, t. j.*

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$$

pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$*.*

Všechny výsledky o determinantech matic si zachovají svou platnost, pokud v nich každý výskyt slova „sloupec“ nahradíme slovem „řádek“ a naopak.

Základní vlastnosti determinantu IV

Tvrzení 10.2.2 *Nechť* $1 \leq m < n$ *a* $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ *je bloková matice tvaru*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{B} \in K^{m\times m}$, $\mathbf{C} \in K^{m\times(n-m)}$ *a* $\mathbf{D} \in K^{(n-m)\times(n-m)}$. *Potom*

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} \cdot \det \mathbf{D}.$$

Základní vlastnosti determinantu V

(1) Pokud $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ jsou čtvercové matice, tak

$$\det \operatorname{diag}(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k) = \det \mathbf{A}_1 \cdot \ldots \cdot \det \mathbf{A}_k.$$

(2) Matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ se nazývá ***horní (dolní) trojúhelníková matice***, pokud $a_{ij} = 0$ pro $i < j$ (resp. pre $i > j$). Pro horní i dolní trojúhelníkové matice (tedy i diagonální) platí

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \ldots a_{nn},$$

t. j. determinant takové matice je součinem jejích diagonálních prvků.

10.3 Charakterizace determinantu a regulárních matic

Věta 10.3.1 *Determinant řádu n je n-lineární alternující funkce $K^{n\times n} \to K$ sloupců matice. Navíc, pro každý skalár $c \in K$ existuje jediné multilineární alternující zobrazení $F : K^{n\times n} \to K$ sloupců matice tak, že $F(\mathbf{I}_n) = c$. Toto F je dané předpisem*

$$F(\mathbf{A}) = c \det \mathbf{A}.$$

Charakterizace determinantu II

Determinant $\det : K^{n\times n} \to K$ je jednoznačně určený ako n-lineární alternující funkce sloupců matice tak, že

$$\det \mathbf{I}_n = \det(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1.$$

Tato rovnost koresponduje s přirozenou volbou jednotky orientovaného n-rozměrného objemu v K^n – je jí orientovaný objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ (v tomto pořadí).

Charakterizace determinantu III

Věta 10.3.2 *(**Cauchy**) Pro libovolné matice* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n\times n}$ *platí*

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B};$$

t. j. determinant součinu matic se rovná součinu jejich determinantů.

Charakterizace determinantu IV

Věta 10.3.3 *Čtvercová matice* $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ *je regulární právě tehdy, když* $\det \mathbf{A} \neq 0$. *V tomto případě*

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1}.$$

10.4 Laplaceův rozvoj determinantu

Pro $n = 0, 1$ není co dokazovat. Budeme v dalším předpokládat, že $n \geq 2$.

Důkaz věty 10.3.1. Nejprve dokážeme, že determinant je alternující funkce. Nechť $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ je taková matice, že

$$\mathbf{s}_i(\mathbf{A}) = \mathbf{s}_j(\mathbf{A}))$$

pro nějaké $i < j$.

Laplaceův rozvoj determinantu II

Označme $\tau \in \mathcal{S}_n$ transpozici, která zamění prvky i a j (a ostatní prvky ponechá na místě).

Pro všechna $k, l \leq n$ platí

$$a_{kl} = a_{\tau(k)l}.$$

Množinu všech sudých permutací množiny $\{1, \ldots, n\}$ budeme označovat jako $\tau \in \mathcal{A}_n$.

Zřejmě přiřazením $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ je daná bijekce $\mathcal{A}_n \to \mathcal{S}_n$.

Laplaceův rozvoj determinantu III

Podle definice determinantu

$$
\begin{aligned}
\det \mathbf{A} = &\ \det(\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \\
= &\ \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n} \\
= &\ \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n} - \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n - \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n} \\
= &\ \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n} - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{(\tau\circ\sigma)(1)\,1} \ldots a_{(\tau\circ\sigma)(n)\,n} \\
= &\ \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \left(a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n} - a_{(\tau\circ\sigma)(1)\,1} \ldots a_{(\tau\circ\sigma)(n)\,n} \right) \\
= &\ 0.
\end{aligned}
$$

Laplaceův rozvoj determinantu IV

Dokážeme, že $\det \mathbf{A}$ je lineární funkce j-tého sloupce $(a_{1j}, \ldots, a_{nj})^T$. Pro $i \le n$ označme $\mathcal{S}_n(i,j) = \{\sigma \in \mathcal{S}_n;\ i = \sigma(j)\}$ a položme

$$\tilde{a}_{ij} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n(i,j)} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(j-1)\,j-1} a_{\sigma(j+1)\,j+1} \ldots a_{\sigma(n)\,n}.$$

Potom zřejmě

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} a_{ij} = (\tilde{a}_{1j}, \ldots, \tilde{a}_{nj}) \cdot (a_{1j}, \ldots, a_{nj})^T,$$

což dokazuje linearitu.

Laplaceův rozvoj determinantu V

Determinant je rovněž multilineární alternující funkce řádků matice a (protože $\sigma \in \mathcal{S}_n(i,j) \;\Leftrightarrow\; \sigma^{-1} \in \mathcal{S}_n(j,i)$) pro i-tý řádek $(a_{i1},\ldots,a_{in})$ matice $\mathbf{A}$ její determinant má rozvoj

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{ij} \\ &= (a_{i1},\ldots,a_{in}) \cdot (\tilde{a}_{i1},\ldots,\tilde{a}_{in})^T.\end{aligned}$$

se stejně definovanými koeficienty $\tilde{a}_{ij}$.

Laplaceův rozvoj determinantu VI

Uvedený prvek $\tilde{a}_{ij}$ nazývame ***algebraickým doplňkem*** prvku a_{ij} v matici $\mathbf{A}$. Matici $\widetilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}_{ij})_{n\times n}$ nazýváme ***maticí algebraických doplňků*** k matici $\mathbf{A}$.

Tvrzení 10.4.1 *Nechť $\mathbf{A}_{ij}$ označuje matici řádu $n-1$, která vznikne z matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Potom*

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|.$$

Laplaceův rozvoj determinantu VII

Determinanty matic, které vzniknou vynecháním některých řádků a stejného počtu sloupců z matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, nazýváme jejími ***minory***, případně ***subdeterminanty*** determinantu $|\mathbf{A}|$.

Laplaceův rozvoj determinantu VIII

Věta 10.4.2 ***(Laplaceova)*** *Nechť* $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$*,* $1 \le k, l \le n$*. Potom*

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj}\, |\mathbf{A}_{kj}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} |\mathbf{A}_{il}|\, a_{il}.$$

Uvedené součty nazýváme ***Laplaceovými rozvoji*** determinantu $|\mathbf{A}|$ – první podle k-tého řádku, druhý podle l-tého sloupce.

10.5 Výpočet determinantu

Každý determinant je multilineární alternující funkcí jak řádků tak i sloupců matice.

Pravidla

(0) Determinant trojúhelníkové matice se rovná součinu jejích diagonálních prvků.

Výpočet determinantu II

(1) Výměnou pořadí dvou řádků nebo sloupců matice se hodnota jejího determinantu změní na opačnou.

(2) Vynásobením nějakého řádku nebo sloupce matice nenulovým skalárem $c \in K$ sa její determinant změní na c-násobek původní hodnoty.

(3) Pripočtením skalárního násobku nějakého řádku matice k jejímu jinému řádku, resp. násobku nějakého jejího sloupce k jinému sloupci se hodnota jejího determinantu nezmění.

Výpočet determinantu III

(4) Pokud matice obsahuje nulový řádek nebo sloupec, případně dva stejné řádky nebo sloupce, tak její determinant je 0.

(5) Nechť všechny prvky i-tého řádku případně j-tého sloupce matice $\mathbf{A}$ s výjimkou prvku a_{ij} jsou rovné 0. Potom

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{i+j} a_{ij} \, |\mathbf{A}_{ij}|.$$

(6) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Výpočet determinantu IV

Vypočítáme tzv. ***Vandermondův determinant*** řádu n

$$\mathrm{VD}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Výpočet determinantu V

Odečtením prvního řádku od všech ostatních řádků dostaneme

$$\mathrm{VD}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \ldots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Výpočet determinantu VI

Následným rozvojem podle prvního sloupce dostaneme

$$\mathrm{VD}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \ldots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Odečtěme nyní od každého sloupce počínaje druhým x_1-násobek předcházejícího sloupce.

Výpočet determinantu VII

V determinantu, který získáme, je na místě (i, k), kde $1 \le i \le n-1$, $1 \le k \le n-1$, prvek

$$(x_{i+1}^k - x_1^k) - x_1(x_{i+1}^{k-1} - x_1^{k-1}) = x_{i+1}^{k-1}(x_{i+1} - x_1).$$

Pokud vytkneme z i-tého řádku činitel $x_{i+1} - x_i$, postupně nám vyjde

$$\mathrm{VD}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix},$$

Výpočet determinantu VIII

$$
\begin{aligned}
\mathrm{VD}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1)\, \mathrm{VD}_{n-1}(x_2, \dots, x_n).
\end{aligned}
$$

Podobně

$$
\mathrm{VD}_{n-1}(x_2, \dots, x_n) = (x_3 - x_2) \dots (x_n - x_2)\, \mathrm{VD}_{n-2}(x_3, \dots, x_n),
$$

atd.

Výpočet determinantu IX

Protože zejména $\mathrm{VD}_1(x_n) = 1$, dostaneme výsledek

$$\mathrm{VD}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i),$$

kde symbolom $\prod$ označujeme součin príslušných činitelů.

10.6 Inverzní matice a Cramerovo pravidlo

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ a $1 \leq i, k \leq n$ jsou různé indexy. Označme B matici, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ nahrazením jejího k-tého řádku i-tým řádkem.

Potom matice B má (aspoň) dva řádky stejné, a to i-tý a k-tý, proto $|\mathbf{B}| = 0$.

Na druhé straně se matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ liší nanejvýš v k-tém řádku, proto $\mathbf{A}_{kj} = \mathbf{B}_{kj}$ pro každé $1 \leq j \leq n$.

Inverzní matice a Cramerovo prav. II

Z tohoto důvodu jsou algebraické doplňky odpovídajících si prvků k-tých řádků obou matic stejné:

$$\tilde{b}_{kj} = (-1)^{k+j}|\mathbf{B}_{kj}| = (-1)^{k+j}|\mathbf{A}_{kj}| = \tilde{a}_{kj}.$$

Rozvineme-li determinant matice $\mathbf{B}$ podle jejího k-tého řádku, dostaneme

$$\det \mathbf{B} = \sum_{j=1}^{n} b_{kj}\tilde{b}_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{kj} = 0.$$

Inverzní matice a Cramerovo prav. III

Spojení této rovnosti s Laplaceovým rozvojem determinantu matice $\mathbf{A}$ podle k-tého řádku dává

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{kj} &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{r}_k(\widetilde{\mathbf{A}})^T \\ &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_k(\widetilde{\mathbf{A}}^T) = \begin{cases} |\mathbf{A}|, & \text{pro } i = k, \\ 0, & \text{pro } i \neq k. \end{cases}\end{aligned}$$

Jinak řečeno,

$$\mathbf{A} \cdot \widetilde{\mathbf{A}}^T = |\mathbf{A}|\,\mathbf{I}_n.$$

Inverzní matice a Cramerovo prav. IV

Inverzní matici k regulární čtvercové matici $\mathbf{A}$ potom dostaneme tak, že transponovanou matici jejich algebraických doplňků vydělíme determinantem $|\mathbf{A}|$.

Věta 10.6.1 *Nechť* $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ *je regulární matice. Potom*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\,\widetilde{\mathbf{A}}^T.$$

Příklad 10.6.2 *Najděme inverzní matici k reálné matici*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Její determinant a matici algebraických doplňků vypočteme snadno:

$$|\mathbf{A}| = 1\cdot(-3) - 5\cdot(-2) = 7, \qquad \widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice a Cramerovo prav. VI

Proto

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Věta 10.6.3 ***(Cramerovo pravidlo)*** *Nechť* $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ *je regulární matice,* $\mathbf{b} \in K^n$ *a pro* $1 \leq j \leq n$ *nechť* $\mathbf{A}_j^{\mathbf{b}}$ *označuje matici, která vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *nahrazením jejího* j*-tého sloupce sloupcovým vektorem* $\mathbf{b}$*. Potom soustava* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *má jediné řešení*

$$\mathbf{x} = \left(\frac{|\mathbf{A}_1^{\mathbf{b}}|}{|\mathbf{A}|}, \frac{|\mathbf{A}_2^{\mathbf{b}}|}{|\mathbf{A}|}, \ldots, \frac{|\mathbf{A}_n^{\mathbf{b}}|}{|\mathbf{A}|} \right)^T .$$