LINERNA ALGEBRA A GEOMETRIA

Sylaby prednášky

Pavol Zlatoš

Zimný semester

0. Množiny a zobrazenia. Logické spojky a kvantifikátory. Formuly. Množiny. Prienik, zjednotenie, rozdiel a karteziánsky súčin množín. Konečné a nekonečné množiny. Zobrazenia (funkcie). Injektívne, surjektívne a bijektívne zobrazenia. Inverzné zobrazenie. Binárne operácie a ich základné vlastnosti. Multiplikatívne tabuľky. Permutácie.

1. Polia a vektorové priestory. Základné číselné obory $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$; pojem poľa. Polia $\mathbb{Z}_p$. Geometrická interpretácia vektorov v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, rovnobežníkové pravidlo. Vektorový priestor nad daným poľom skalárov. Príklady vektorových priestorov (riadkovo a stĺpcovo usporiadané n-tice skalárov, polynómy, rozšírenia polí, funkcie z množiny do poľa a vektorového priestoru).

2. Základy maticového počtu. Matice typu $m \times n$. Riadky a stĺpce matice. Transponovaná matica. Vektorový priestor matíc typu $m \times n$ nad daným poľom. Súčin matíc a jeho základné vlastnosti. Blokové matice. Súčin blokových matíc. Matice nad vektorovým priestorom a operácie s nimi.

3. Sústavy lineárnych rovníc. Homogénne a nehomogénne sústavy lineárnych rovníc. Maticový zápis sústavy. Matica a rozšírená matica sústavy. Elementárne riadkové a stĺpcove operácie (ERO a ESO). Gaussova eliminačná metóda, úprava matice na redukovaný stupňovitý tvar a riešenie sústavy lineárnych rovníc.

4. Podpriestory a lineárna nezávislosť. Lineárny podpriestor vektorového priestoru. Lineárna kombinácia, lineárny obal množiny vektorov. Pojem konečnorozmerného vektorového priestoru. Prienik a súčet lineárnych podpriestorov. Lineárne závislé a lineárne nezávislé usporiadané n-tice a množiny vektorov.

5. Báza a dimenzia. Steinitzova veta. Usporiadané a neusporiadané bázy. Dimenzia vektorového priestoru. Jednoznačnosť vyjadrenia vektora v (usporiadanej) báze. Súradnice vektora vzhľadom na danú bázu, vlastnosti súradnicového zobrazenia. Dimenzia prieniku a súčtu podpriestorov. Direktný súčet podpriestorov. Konečno- a nekonečnorozmerné vektorové priestory. Príklady nekonečnorozmerných priestorov.

6. Lineárne zobrazenia. Lineárne zobrazenia – definícia a príklady. Vzor a obraz podpriestoru v lineárnom zobrazení. Jadro a obraz lineárneho zobrazenia; vzťah ich dimenzií. Lineárne izomorfizmy a inverzné lineárne zobrazenia. Izomorfné vektorové priestory. Matica lineárneho zobrazenia vzhľadom na dané bázy. Kompozícia lineárnych zobrazení a násobenie matíc. Priestory lineárnych zobrazení, duál vektorového priestoru.

7. Inverzné matice a matice prechodu. Hodnosť matice. Inverzné matice a inverzné lineárne zobrazenia. Regulárne a singulárne matice. Realizácia ERO a ESO pomocou násobenia matíc. Existencia a výpočet inverznej matice. Matica prechodu medzi súradnými bázami. Vplyv zmeny báz na maticu lineárneho zobrazenia.

8. Afinné podpriestory (lineárne variety). Body a vektory. Afinné podpriestory vektorových priestorov. Afinné kombinácie. Smerový podpriestor (zameranie) afinného podpriestoru. Prienik a spojenie afinných podpriestorov. Vzájomná poloha afinných podpriestorov. Afinné zobrazenia.

9. Afinné podpriestory a sústavy lineárnych rovníc. Podpriestor riešení homogénnej sústavy a jeho báza. Podpriestor riešení nehomogénnej sústavy. Frobeniova veta a riešiteľnosť nehomogénnej sústavy. Parametrické a všeobecné rovnice afinného podpriestoru. Rovnice prieniku a spojenia podpriestorov.

10. Determinanty. Determinant ako orientovaný objem. Definujúca rovnosť pre determinant. Jednoznačnosť determinantu ako alternujúcej multilineárnej funkcie. Determinant súčinu matíc. Determinanty regulárnych a singulárnych matíc. Laplaceov rozvoj determinantu. Vplyv ERO a ESO na determinant, výpočet determinantu. Vyjadrenie inverznej matice pomocou algebraických doplnkov. Cramerovo pravidlo.

Letný semester

1. Bilineárne a kvadratické formy. Bilineárne formy. Matica bilineárnej formy vzhľadom na dané bázy. Hodnosť bilineárnej formy. Bilineárne formy a lineárne funkcionály. Symetrické bilineárne formy a symetrické matice. Kvadratické formy. Matica kvadratickej formy vzhľadom na danú bázu. Hodnosť kvadratickej formy. Vplyv zmeny bázy na maticu bilineárnej a kvadratickej formy; kongruentné matice. Diagonalizácia.

2. Bilineárne a kvadratické formy nad $\mathbb{R}$. Signatúra a jej invariantnosť – Sylvestrov zákon zotrvačnosti. Diagonalizácia bilineárnych a kvadratických foriem nad $\mathbb{R}$. Definitnosť. Jacobiho veta a Sylvestrova podmienka. Extrémy funkcií viac premenných.

3. Euklidovské priestory. Skalárny súčin. Štandardný skalárny súčin a jeho geometrický význam. Ďalšie príklady skalárnych súčinov. Gramova matica a Gramov determinant. Cauchyho-Schwartzova nerovnosť. Norma (dĺžka) vektora. Odchýlka (uhol) dvoch vektorov. Ortogonálnosť. Kosinová a Pytagorova veta. Ortogonálne a ortonormálne bázy. Gramov-Schmidtov ortogonalizačný proces.

4. Ortogonálne projekcie. Ortogonálny doplnok (ortokomplement) množiny. Kolmý priemet vektora do lineárneho podpriestoru. Vzdialenosť a odchýlka dvoch afinných podpriestorov. Riešenie neriešiteľných sústav; lineárna regresia. Minimálne riešenia. Geometria pravdepodobnosti. Objem, orientovaný objem a vektorový súčin.

5. Úvod do špeciálnej teórie relativity. Pseudoskalárny súčin a pseudoeuklidovské priestory. Minkowského časopriestor. Inerciálne svetočiary. Obrátená Cauchyho-Schwartzova nerovnosť. Paradox dvojčiat. Relativistická dilatácia času. Lorentzova transformácia. Relativistická kontrakcia dĺžky.

6. Unitárne priestory. Poldruhalineárne formy nad $\mathbb{C}$. Matica poldruhalineárnej formy vzhľadom na danú bázu. Hermitovské (komplexne symetrické) poldruhalineárne formy a matice. Kladná definitnosť. Komplexný skalárny súčin. Prenos pojmov a výsledkov z euklidovských priestorov na unitárne priestory. Stavové priestory v kvantovej mechanike

7. Lineárne operátory. Matica lineárneho operátora vzhľadom na danú bázu. Vplyv zmeny bázy na maticu lineárneho operátora, podobnosť matíc. Invariantne podpriestory lineárnych operátorov. Vlastné čísla a vlastné vektory lineárneho operátora a matice. Charakteristický polynóm a charakteristická rovnica. Invariantnosť charakteristického polynómu.

8. Spektrum lineárneho operátora. Algebraicky uzavreté polia. Význam poľa komplexných čísel – základná veta algebry. Algebraická a geometrická násobnosť. Spektrum lineárneho operátora. Podmienka diagonalizovateľnosti. Príklady nediagonalizovateľných operátorov a matíc. Geometrický význam reálnych a komplexných vlastných čísel vo vektorovom priestore nad $\mathbb{R}$.

9. Jordanov kanonický tvar. Motivácia: autonómne systémy lineárnych diferenciálnych rovníc. Exponenciála matice. Jordanov kanonický tvar matice. Výpočet Jordanovho kanonického tvaru a príslušnej bázy (matice prechodu).

10. Spektrálny rozklad. Lineárne operátory v euklidovských a unitárnych priestoroch. Adjungované (združené) operátory a vzťah ich matíc. Samoadjungované operátory a symetrické resp. hermitovské matice. Vlastné čísla a vlastné vektory samoadjungovaných operátorov. Projektory. Spektrálny rozklad samoadjungovaného operátora a hermitovskej matice.

11. Veta o hlavných osiach. Dôsledky spektrálneho rozkladu symetrických matíc pre bilineárne a kvadratické formy nad $\mathbb{R}$. Ortogonálna podobnosť matíc a veta o hlavných osiach. Metrická klasifikácia kvadrík v dvoj- a trojrozmernom euklidovskom priestore.

12. Grupy. Abstraktný pojem grupy. Komutatívne (abelovské) a nekomutatívne grupy. Príklady grúp. Grupy transformácií. Podgrupy danej grupy. Homomorfizmy grúp. Jadro a obraz homomorfizmu. Izomorfizmus grúp a izomorfné grupy. Príklady podgrúp a homomorfizmov. Cyklické grupy. Grupa automorfizmov danej grupy. Priamy a polopriamy súčin grúp. Cayleyho veta o reprezentácii.

13. Lineárne a afinné grupy. Všeobecná lineárna grupa $\mathrm{GL}(n,K)$ a špeciálna lineárna grupa $\mathrm{SL}(n,K)$. Bilineárne a kvadratické formy ako invarianty. Ortogonálna grupa $\mathrm{O}(n)$, špeciálna ortogonálna grupa $\mathrm{SO}(n)$ a ich geometrický význam. Unitárna grupa $\mathrm{U}(n)$ a špeciálna unitárna grupa $\mathrm{SU}(n)$. Grupa posunutí a afinné rozšírenia lineárnych grúp. Grupa izometrií euklidovského priestoru. Izometrie v rovine a v trojrozmernom priestore. Lorentzove grupy $\mathrm{O}(k,n)$, $\mathrm{SO}(k,n)$ a Poincarého grupa.

Literatúra

[1] J. Bečvář, *Lineární algebra I, II*, skriptá MFF UK, Praha, 1980.
[2] L. Bican, *Lineární algebra*, Matematický seminář, SPN, Praha, 1979.
[3] G. Birkhoff, S. Mac Lane, *Prehľad modernej algebry*, Alfa, Bratislava, 1979.
[4] A. K. Faddejev, J. S. Sominskij, *Zbierka úloh z vyššej algebry*, Alfa, Bratislava, 1968.
[5] P. Goralčík, *Úvod do lineární algebry*, skriptá MFF UK, Praha, 1978.
[6] P. Horák, *Lineární algebra*, skriptá PřF UJEP, Brno, 1975.
[7] P. Kaprálik, J. Tvarožek, *Zbierka riešených príkladov z lineárnej algebry a analytickej geometrie*, Alfa, Bratislav, 1987.
[8] T. Katriňák a kol., *Algebra a teoretická aritmetika I*, Alfa, Bratislava, 1985, (2. vydanie: Univerzita Komenského, Bratislava, 1995).
[9] S. Mac Lane, G. Birkhoff, *Algebra*, Alfa, Bratislava, 1973, (2. vydanie: 1978).
[10] L. Motl, M. Zahradník, *Pěstujeme lineární algebru*, Univerzita Karlova, vydavatelství Karolinum, Praha, 1995.
[11] J. Slovák, *Lineární algebra*, skriptá PřF MU, Brno, 1995, elektronický učebný text dostupný na sieti, `http://www.math.muni.cz/~slovak`.
[12] J. Smítal a kol., *Úvod do lineárnej algebry*, skriptá PF UK, Bratislava, 1978.
[13] J. Smítal, E. Gedeonová, *Lineárna algebra*, skriptá MFF UK, Bratislava, 1981.
[14] B. Šmarda, *Lineární algebra*, skriptá PřF UJEP, Brno, 1982.
[15] Š. Znám, *Lineárna algebra*, skriptá PF UK, Bratislava, 1975.