9. AFINNÍ PODPROSTORY A SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

V celé kapitole K označuje pevné číselné těleso, m, n jsou kladná celá čísla.

9.1. Podprostor řešení homogenní soustavy a jeho báze

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$. Uvažujme homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

a nehomogenní soustavu s maticí $\mathbf{A}$ a pravou stranou $\mathbf{b}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Množiny jejich řešení označíme

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in K^n :\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\},$$

resp.

$$\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in K^n :\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}\}.$$

Předpisem $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ je definované lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$, přičemž $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathrm{Ker}\varphi$. Z toho okamžitě vyplývá

Tvrzení 1. Pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ množina $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ řešení homogenní soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru K^n.

Každou bázi prostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ nazýváme *fundamentálním systémem řešení* soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Potom každé řešení příslušné homogenní soustavy můžeme jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z fundamentálního systému řešení, a naopak, každá lineární kombinace vektorů fundamentálního systému je řešením příslušné soustavy. Fundamentální systém řešení najdeme následujícím postupem.

Matici $\mathbf{A}$ upravíme pomocí ERO na redukovaný stupňovitý tvar $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$. Množinu $\{1, \ldots, n\}$ rozdělíme na dvě podmnožiny J a J', podle toho, zda se v j-tém sloupci matice $\mathbf{B}$ nachází nebo nenachází vedoucí prvek nějakého jejího řádku. Označme k počet prvků množiny J' a zapišme ji ve tvaru $J' = \{j_1 < j_2 < \ldots < j_k\}$.

Pro každý index $j_l \in J'$ sestrojíme vektor $\mathbf{v}_l = (v_{1l}, \ldots, v_{nl})^T \in K^n$ takto: Zvolíme $v_{j_l l} = 1$ a $v_{j_i l} = 0$ pre $i \neq l$. Pro $j \in J$ vypočítáme hodnoty v_{jl} k uvedeným hodnotám parametrů $v_{j_1 l}, \ldots, v_{j_k l}$ tak, aby celý vektor $\mathbf{v}_l$ vyhovoval podmínce $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_l = \mathbf{0}$. Potom vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ tvoří bázi podprostoru řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A})$. Přitom zřejmě platí $k = n - h(\mathbf{A})$.

Příklad 2. Předpokládejme, že jsme matici $\mathbf{A}$ pomocí ERO už upravili na redukovaný stupňovitý tvar

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vedoucí prvky řádků se nacházejí ve sloupcích 1, 3 a 4. Teda neznámé x_2 a x_5 si zvolíme za parametry a neznámé x_1, x_3 a x_4 si vyjádříme s jejich pomocí.

Naše první volba je $x_2 = 1$, $x_5 = 0$. Tomu zodpovídá vektor $\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)^T$. Druhá volba parametrů je $x_2 = 0$, $x_5 = 1$. Tomu zodpovídá vektor $\mathbf{v}_2 = (1/3, 0, -1/2, 2, 1)^T$. Potom vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ tvoří bázi podprostoru (fundamentální systém) řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B}) \subseteq \mathbb{R}^5$.

Tvrzení 1. Pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ platí

$$\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}) = n - h(\mathbf{A}).$$

9.2. Podprostor řešení nehomogenní soustavy

Tvrzení 1. Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$.

(a) Pokud $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$, pak $\mathbf{y} - \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

(b) Pokud $\mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$, pak $\mathbf{z} + \mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \quad &= \mathbf{z} + \mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{z} + \mathbf{x};\, \mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})\} \\
&= \mathbf{z} + [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n] \\
&= \{\mathbf{z} + c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k;\, c_1, \ldots, c_k \in K\}.
\end{aligned}$$

Tvrzení 2. Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$. Pokud soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má aspoň jedno řešení, tak $\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$ je afinní podprostor v K^n se zaměřením $\mathcal{R}(\mathbf{A})$.

$$\mathrm{Dir}\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{A})$$

a

$$\dim\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = \dim\mathcal{R}(\mathbf{A}) = n - h(\mathbf{A}).$$

9.3. Frobeniova věta a řešení nehomogenní soustavy

Věta 3. (**Frobenius**) Nechť $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$. Potom nehomogenní soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení právě tehdy, když $h(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = h(\mathbf{A})$.

Soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má alespoň jedno řešení $\mathbf{z} \in K^n$ právě tehdy, když $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}\varphi$ (kde $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$). Pak $\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = \mathbf{z} + \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

Frobeniova věta říká: nehomogenní soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nemá řešení právě tehdy, když se při úpravě její rozšířené matice $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$ na redukovaný stupňovitý tvar objeví nějaký řádek tvaru $(0, \ldots, 0 \,|\, d) \in K^{n+1}$, kde $0 \neq d \in K$. Takovýto řádek totiž zodpovídá rovnici $0 = d$.

Pokud upravíme pomocí ERO rozšířenou matici $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b})$ na redukovaný stupňovitý tvar $(\mathbf{B}\,|\,\mathbf{c})$, kde $\mathbf{B} \in K^{m\times n}$ a $\mathbf{c} \in K^m$, tak $\mathbf{B}$ je též v redukovaném stupňovitém tvaru.

Potom $\mathcal{R}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{B}\,|\,\mathbf{c}) \neq \emptyset$ právě tehdy, když sa žádný vedoucí prvek nějakého řádku matice $(\mathbf{B}\,|\,\mathbf{c})$ nenachází v posledním, t. j. $n+1$-ím sloupci.

Bázi prostoru řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$ najdeme postupem popsaným v paragrafu 9.1.

Nech J, J' a k mají dříve uvedený význam. Jedno řešení $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^T$ nehomogenní soustavy dostaneme volbou parametrů $z_{j_1} = \ldots = z_{j_k} = 0$ pro $j_l \in J'$. Zbývající hodnoty z_j potom vypočítáme tak, aby $\mathbf{z}$ vyhovovalo podmínce $\mathbf{B} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{c}$, t. j. $z_j = c_j$ pre $j \in J$.

Příklad 4. Předpokládejme, že jsme matici $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b})$ pomocí ERO už upravili na redukovaný stupňovitý tvar

$$(\mathbf{B}\,|\,\mathbf{c}) = \left(\begin{array}{cccccc||c} 1 & 0 & 0 & 3 & 1/4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 & 6 & -2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vidíme, že $h(\mathbf{B}\,|\,\mathbf{c}) = h(\mathbf{B}) = 3$, tedy $\mathcal{R}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{B}\,|\,\mathbf{c}) \neq \emptyset$. Vedoucí prvky riadkov se nacházejí ve sloupcích 1, 2 a 3. Tedy neznáme x_4, x_5 a x_6 si zvolíme za parametry a neznámé x_1, x_2 a x_3 si vyjádříme pomocí nich. První volbě $x_4 = 1$, $x_5 = x_6 = 0$ zodpovídá vektor $\mathbf{v}_1 = (-3, -4, -1, 1, 0, 0)^T$. Druhá volba $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$ nám dá vektor $\mathbf{v}_2 = (-1/4, -2, 5, 0, 1, 0)^T$. Třetí volbou $x_4 = x_5 = 0$, $x_6 = 1$ získáme vektor $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -6, 0, 0, 1)^T$. Potom vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ tvoří bázi podprostoru řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B}) \subseteq \mathbb{R}^6$ příslušní homogenní soustavy. Konečně volbou parametrů $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ získáme jedno řešení $\mathbf{z} = (2, -1, -2/7, 0, 0, 0)^T$ nehomogenní soustavy.

Výsledek můžeme zapsat do tabulky:

	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{z}$
x_1	-3	$-1/4$	0	2
x_2	-4	-2	1	-1
x_3	-1	5	-6	$-2/7$
x_4	1	0	0	0
x_5	0	1	0	0
x_6	0	0	1	0

9.4. Parametrické a všeobecné rovnice afinních podprostorů

Každý afinní podprostor $M \subseteq K^n$ má tvar

$$M = \mathbf{p} + [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k] = \mathbf{p} + [\alpha]$$

pro nějaký bod $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)^T \in M$ a vhodnou uspořádanou k-tici $\alpha = (\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_k})$ vektorů z K^n, kde $\mathbf{u}_j = (u_{1j}, \ldots, u_{nj})^T$.

To znamená, že pro libovolné $\mathbf{x} \in K^n$ platí $\mathbf{x} \in M$ právě tehdy, když existuje $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k)^T \in K^k$ tak, že

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t},$$

kde jsme uspořádanou k-tici α jako obyčejně ztotožnili s maticí $(u_{ij}) \in K^{n \times k}$ se sloupci $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.

Rovnost $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t}$ je maticovým zápisem *parametrických rovnic* afinního podprostoru $M \subseteq K^n$. Vektor $\mathbf{t} \in K^n$ nazýváme *vektorem parametrů* a jeho složky $t_1, \ldots, t_k \in K$ *parametry*. Po rozepsání do složek

$$\begin{aligned}
x_1 \quad &= p_1 + u_{11}t_1 + u_{12}t_2 + \ldots + u_{1k}t_k \\
x_2 \quad &= p_2 + u_{21}t_1 + u_{22}t_2 + \ldots + u_{2k}t_k \\
\\
x_n \quad &= p_n + u_{n1}t_1 + u_{n2}t_n + \ldots + u_{nk}t_k
\end{aligned}$$

dostaneme obvyklejší tvar, se kterým jsme sa v dimenzii $n = 2$ resp. $n = 3$ už potkali v středoškolské analytické geometrii.

Jsou-li navíc vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineárně nezávislé, což můžeme vždy dosáhnout vynecháním „nadbytočných vektorů“, pak parametrické rovnice podprostoru M nám přímo ukáží jeho dimenzi: dim$M = k$.

Zápis afinního podprostoru $M \subseteq K^n$ ve tvareu $M = \mathbf{p} + [\alpha]$, kde $\mathbf{p} \in M$ a α je nejaká usporiadaná k-tice, která generuje jeho zaměření Dir$M$ (můžeme si dovolit předpokládat, že α je dokonce báze v Dir$M$), budeme nazývat jeho *parametrickým vyjádřením*.

Parametrické vyjádření $M = \mathbf{p} + [\alpha]$ afinního podprostoru můžemo přímo přepsat do jeho parametrických rovnic $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t}$, $(\mathbf{t} \in K^k)$. Taktéž naopak, z jeho parametrických rovnic můžeme okamžitě získat jeho parametrické vyjádření.

Každá soustava lineárních rovnic $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s rozšířenou maticí $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \in K^{m\times(n+1)}$ (pokud má řešení), popisuje afinní podprostor $\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \subseteq K^n$.

Vyřešit soustavu lineárních rovnic $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ znamená vlastne najít nějaké pěkné parametrické rovnice afinního podprostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$.

Nechť tedy $M = \mathbf{p} + [\alpha]$ je afinní podprostor v K^n, daný bodom $\mathbf{p} \in K^n$ a uspořádanou k-ticí $\alpha = (\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_k})$ vektorů z K^n, kterou ztotožníme s maticí $\alpha = (\mathbf{u_{ij}}) \in \mathbf{K^{n \times k}}$ se sloupci $\mathbf{u}_j$.

Parametrické rovnice $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t}$ podprostoru M, kde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, \mathbf{x}_n)^T \in K^n$ je vektor neznámých a $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k)^T \in K^k$ je vektor parametrů, můžeme přepsat do tvaru

$$\mathbf{I}_n \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{t} \, + \, \mathbf{p},$$

ktorý lze reprezentovat pomocí blokové matice

$$(\mathbf{I}_n \,|\, \alpha \,|\, \mathbf{p}).$$

Naše metoda bude založená na *eliminaci parametrů* $t_1, \ldots, t_k$ úpravou této matice pomocí ERO.

Matici $(\mathbf{I}_n \,|\, \alpha \,|\, \mathbf{p})$ budeme upravovat na řádkově ekvivalentní matici tak, aby prostřední blok vo výsledné matici byl ve stupňovitém tvaru. Mohou pak nastat dvě možnosti

(1) $h(\alpha) = \mathbf{n}$, což poznáme podle toho, že všechny řádky prostředního bloku výsledné matice jsou nenulové. V tomto případě $M = V$ a všeobecné rovnice tohoto podprostoru tvoří prázdná soustava (t. j. soustava, která neobsahuje žádnou rovnici).

(2) $h(\alpha) < \mathbf{n}$. Pak můžeme prostřední blok výsledné matice rozdělit do dvou pod sebou umístěných bloků $\left(\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{0}}\right)$, kde horní blok $\mathbf{D}$ je stupňovitá matice typu $h(\alpha) \times \mathbf{k}$, která má všechny řádky nenulové, tedy dolní nulový blok má rozměr $(n - h(\alpha)) \times \mathbf{k}$. Toto rozdělení prostředního bloku indukuje rozdělení celé výsledné matice do bloků

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array}\right).$$

Potom $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ jsou všeobecné rovnice afinního podprostoru M, t. j. platí $M = \mathbf{p} + [\alpha] = \mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$.

Popsaný algoritmus můžeme stručně shrnout do následujícího schématu

$$(\mathbf{I}_n \,|\, \alpha \,|\, \mathbf{p}) \xrightarrow{\mathbf{ERO}} \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array}\right),$$

kde $\mathbf{D}$ je matice v stupňovitém tvaru s nenulovými řádky (jejichž počet je tedy nutně $h(\mathbf{D}) = h(\alpha)$).

Jako vedlejší produkt takovéhoto výpočtu můžeme z k-tice α vybrat bázi zaměření Dir$M = [\alpha]$: je tvořená vektory $\mathbf{u}_{j_1}, \ldots, \mathbf{u}_{j_l}$, kde $1 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq k$ jsou indexy těchto sloupců matice $\mathbf{D}$, ve kterých se nacházejí vedoucí prvky jejich řádků.

Tvrzení 5. Nechť $\mathbf{B} \in K^{n\times m}$, $\mathbf{C} \in K^{n\times k}$ a $\mathbf{p} \in K^n$. Pokud bloková matice $(\mathbf{B}\,|\,\mathbf{C}\,|\,\mathbf{p})$ je řádkově ekvivalentní s blokovou maticí

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array}\right).$$

kde $\mathbf{D}$ je matice v stupňovitém tvaru s nenulovými řádky, tak

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in K^m;\ (\exists\,\mathbf{t} \in K^k)(\mathbf{B}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{t} + \mathbf{p})\}.$$

9.5. Rovnice průniku a spojení afinních podprostorů

Uvažujme tři možnosti zadání původních podprostorů:

(1) Oba podprostory jsou zadané všeobecnými rovnicemi.

(2) Oba podprostory jsou zadané parametricky.

(3) Jeden podprostor je zadaný pomocí všeobecných rovnic a druhý parametricky.

(1) Nechť afinní podprostory M, $N \subseteq K^n$ mají všeobecné rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ resp. $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$, kde $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$, $\mathbf{B} \in K^{l \times n}$, $\mathbf{c} \in K^l$. Potom všeobecnými rovnicemi průniku $M \cap N$ je soustava

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{c} \end{aligned}$$

s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{B} & \mathbf{c} \end{array} \right).$$

Parametrické vyjádření průniku $M \cap N$ můžeme získat vyřešením této soustavy. Parametrické vyjádření podprostoru $M \sqcup N$ můžeme získat tak, že nejprve najdeme parametrická vyjádření podprostorů M a N a použijeme úvahy z předchozí kapitoly. Následně pak můžeme odvodit všeobecné rovnice podprostoru $M \sqcup N$.

Příklad 6. Afinní podprostory M, N vektorového prostoru $\mathbb{Q}^4$ jsou dané soustavami

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -3 \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 6\,. \end{aligned}$$

Upravme rozšířené matice původních soustav:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & -1 \end{array}\right).$$

Z upravených matic okamžitě dostáváme parametrické vyjádření původních podprostorů (matice v hranatých závorkách označuje lineární podprostor generovaný jejími sloupci)

$$M = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pokud napíšeme obě upravené rozšírené matice všeobecných rovnic podprostorů M a N do bloků pod sebe, dostaneme rozšířenou matici všeobecných rovníc podprostoru $M \cap N$. Její úpravou na redukovaný stupňovitý tvar vyjde

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 9/5 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & -21/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Odtud už přímo vyplývá parametrické vyjádření

$$M \cap N = \begin{pmatrix} 3 \\ 9/5 \\ -21/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Zjistili sme, že dvojrozměrné afinní podprostory M, N mají jednorozměrný průnik, tedy jsou *různoběžné*. Preto též dim$(M \sqcup N) = 2+2-1 = 3$.

Dáme-li vedle sebe generátory směrových podprostorů Dir$M$ a Dir$N$, úpravou příslušné matice zjistíme, že první tři jsou lineárně nezávislé a poslední z nich je lineární kombinací předcházejících. Tedy sloupce matice

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tvoří bázi zaměření afinního podprostoru $M \sqcup N$.

Jeho parametrické vyjádření je

$$M \sqcup N = \mathbf{p} + [\beta],$$

kde $\mathbf{p} = (3, 9/5, -21/5, 0)^T$. Úpravou blokové matice $(\mathbf{I}_4 \,|\, \beta \,|\, \mathbf{p})$ podle algoritmu z druhé části paragrafu 9.4., výměnou prvého a posledního řádku dostaneme všeobecné rovnice podprostoru $M \sqcup N$:

$$x_1 = 3\,.$$

(2) Nechť $M = \mathbf{p}+[\alpha]$, $N = \mathbf{q}+[\beta]$ jsou parametrické vyjádření dvou afinních podprostorů v K^n. Potom $M \sqcup N = \mathbf{p} + [\mathbf{q} - \mathbf{p}, \alpha, \beta]$ a vynecháním vhodných sloupců z blokové matice $(\mathbf{q}-\mathbf{p}, \alpha, \beta)$ můžeme dostat bázi zaměření Dir$(M \sqcup N)$. Všeobecné rovnice podprostoru $M \sqcup N$ dostaneme úpravou blokové matice $(\mathbf{I}_n \,|\, \mathbf{q} - \mathbf{p}, \alpha, \beta \,|\, \mathbf{p})$, případně matice, v které je prostřední blok nahrazený bází zaměření Dir$(M \sqcup N)$ podle algoritmu z paragrafu 9.4.

Všeobecné rovnice průniku $M \cap N$, získáme tak, že parametrické rovnice každého z podprostorů M, N převedeme na všeobecné rovnice a ty pak spojíme dohromady.

Parametrické vyjádření průniku $M \cap N$ dostaneme vyřešením jeho všeobecných rovnic.

Jiná cesta k parametrickým rovnicím průniku $M \cap N$: lze při ní jako vedlejší produkt získat báze zaměření Dir$M$, Dir$N$, Dir$(M \sqcup N)$, tedy i parametrické rovnice spojení $M \sqcup N$.

Metoda: blokovou matici $(\alpha \,|\, \beta \,|\, \mathbf{q} - \mathbf{p})$ upravujeme pomocí ERO na stupňovitý tvar

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' & \mathbf{c}' \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{c} \end{array}\right),$$

kde matice $\mathbf{A}'$ má všechny řádky nenulové (tedy lineárně nezávislé a jejich počet je $h(\mathbf{A}') = h(\alpha) =$ dim$\mathbf{M}$).

Průnik $M \cap N$ je tvořený všemi $\mathbf{x} = \mathbf{q} + \beta \cdot \mathbf{t} \in \mathbf{N}$, které patří zároveň do M, t. j. existuje vektor parametrů $\mathbf{s}$ tak, že $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{s}$. Hledáme tedy všechny vektory parametrů $\mathbf{t}$, ke kterým existuje nějaký vektor parametrů $\mathbf{s}$ tak, že platí

$$\alpha \cdot \mathbf{s} = \beta \cdot \mathbf{t} + (\mathbf{q} - \mathbf{p}).$$

K danému $\mathbf{t}$ existuje takovéto $\mathbf{s}$ právě tehdy, když $\mathbf{B} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{c}$.

Vyřešením této soustavy dostaneme parametrické vyjádření

$$\mathbf{t} = \mathbf{r} + \gamma \cdot \mathbf{z},$$

které dosadíme do parametrických rovnic podprostoru N. Dostaneme tak parametrické rovnice

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \beta \cdot (\mathbf{r} + \gamma \cdot \mathbf{z}) = (\mathbf{q} + \beta \cdot \mathbf{r}) + (\beta \cdot \gamma) \cdot \mathbf{z}$$

podprostoru $M \cap N$.

Příklad 7. Nechť

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \\ 5 & 0 & 9 \\ 3 & 4 & 11 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \\ 5 & 0 & 9 \\ 3 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

jsou afinní podprostory v $\mathbb{R}^4$. Zřejmě $\mathrm{Dir} N_1 = \mathrm{Dir} N_2$; označme tento lineární podprostor D. Obě úlohy o dvojicích podprostorů M, N_1 i M, N_2 budeme řešit současně. Platí

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 8 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 9 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 11 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Pokud si z matice na pravé straně odmyslíme krajní pravý blok, po vynechání rovnice $0 = 0$ z ní dostaneme soustavu

$$4t_1 - 2t_2 + 6t_3 = 0.$$

Lineární podprostor Dir$M \cap D$ je tvořený právě všemi lineárními kombinacemi $\beta \cdot \mathfrak{t}$, kde β je matice generátorů D (a jeho báze) a $\mathfrak{t}$ vyhovuje uvedené homogenní rovnici. Tedy dim(Dir$M \cap D$) = dimDir$M = 2$. Proto Dir$M \subseteq D$ a platí $M \parallel N_1$ a $M \parallel N_2$.

Soustava

$$\begin{aligned} 4t_1 - 2t_2 + 6t_3 &= 2 \\ 0 &= 1, \end{aligned}$$

které musí vyhovovat vektor parametrů $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)^T$, aby jím určený bod z N_1 patřil i do M, nemá řešení. Proto $M \cap N_1 = \emptyset$ a M, N_1 jsou *pravé rovnobežky*.

Naopak, analogická soustava pro dvojici M, N_2 vede na jedinou, očividně řešitelnou rovnici

$$4t_1 - 2t_2 + 6t_3 = 1.$$

Tedy $M \subseteq N_2$.

(3) Nechť afinní podprostor $M \subseteq K^n$ je daný všeobecnými rovnicemi $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a afinní podprostor $N = \mathbf{q} + [\beta] \subseteq \mathbf{K^n}$ je daný parametricky. Pokud hledáme všeobecné rovnice průniku $M \cap N$, stačí najít všeobecné rovnice podprostoru N a přidat je k soustavě $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Jejich vyřešením potom můžeme obdržet i parametrické vyjádření $M \cap N$.

Pokud hledáme popis spojení $M \sqcup N$, nejvýhodnější je vyřešit všeobecné rovnice podprostoru M a z parametrických vyjádření obou podprostorů M, N sestavit parametrické vyjádření $M \sqcup N$. Eliminací parametrů dostaneme všeobecné rovnice podpriestoru $M \sqcup N$.

Jiná metoda, jak najít parametrické vyjádření průniku $M \cap N$ spočívá v dosazení parametrického vyjádření podprostoru N do všeobecných rovnic podprostoru M. Tím dostaneme soustavu

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{q} + \beta \cdot \mathbf{t}) = \mathbf{b},$$

nebo po úpravě s ní ekvivalentní soustavu

$$(\mathbf{A} \cdot \beta) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{q},$$

které musí vyhovovat vektor parametrů $\mathbf{t}$, aby jím určený bod $\mathbf{x} = \mathbf{q} + \beta \cdot \mathbf{t} \in \mathbf{N}$ patřil i do podprostoru M, tedy do průniku $M \cap N$.

Uvedenou soustavu vyřešíme úpravou její rozšířené matice $(\mathbf{A} \cdot \beta \,|\, \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{q})$.

Podobně jako v případě (2) řešení dostaneme v parametrickém tvaru

$$\mathbf{t} = \mathbf{r} + \gamma \cdot \mathbf{z}$$

a dosadíme ho do parametrických rovnic podprostoru N.

Tak získáme parametrické rovnice

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \beta \cdot (\mathbf{r} + \gamma \cdot \mathbf{z}) = (\mathbf{q} + \beta \cdot \mathbf{r}) + (\beta \cdot \gamma) \cdot \mathbf{z}$$

podprostoru $M \cap N$.

Příklad 8.

Afinní podprostor $M \subseteq \mathbb{R}^4$ má všeobecné rovnice

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Afinní podprostor $N \subseteq \mathbb{R}^4$ je určený jako afinní obal $N = \ell(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ bodů $\mathbf{p} = (3,0,1,1)^T$, $\mathbf{q} = (4,-1,2,2)^T$, $\mathbf{r} = (4,1,2,0)^T$ a $\mathbf{s} = (7,3,4,5)^T$. Jeho parametrické vyjádření potom je

$$\begin{aligned} N &= \mathbf{p} + [\mathbf{q}-\mathbf{p}, \mathbf{r}-\mathbf{p}, \mathbf{s}-\mathbf{p}] \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Protože

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

bod tvaru $\mathbf{p} + t_1(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + t_2(\mathbf{r} - \mathbf{p}) + t_3(\mathbf{s} - \mathbf{p}) \in N$ patří do průniku $M \cap N$ právě tehdy, když příslušný vektor parametrů $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)^T$ vyhovuje soustavě s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Podprostor řešení této soustavy má parametrické vyjádření

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right].$$

Dosazením do parametrického vyjádření N dostaneme

$$\begin{aligned} M \cap N &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

a $\dim(M \cap N) = 1$.

Hodnost matice soustavy podprostoru M je 2, proto dim$M = 4 - 2 = 2$, a dim$N = 3$. Z tohoto důvodu $M \cap N$ je vlastní podprostor jak v M tak v N, tj. M, N jsou *různoběžné*.