8. AFINNÍ PODPROSTORY A AFINNÍ ZOBRAZENÍ

V celé kapitole K označuje pevné číselné těleso, m, n jsou kladná celá čísla.

8.1. Body a vektory

Na vektory se díváme jako na orientované úsečky s počátkem v bodě $\mathbf{0}$. Celý prostor chápeme jako *homogenní*, t. j. všechny body považujeme za rovnocenné a nevyčleňujeme v něm žádný privilegovaný bod za počátek.

Afinním prostorem nad číselným tělesem K rozumíme vektorový prostor V nad tímto číselným tělesem (prvky sa z vektorů staly opět body a počátek, t. j. nulový vektor, ztratil svoje výsadní postavení – stal se z něho bod jako každý jiný).

8.2. Afinní podprostory

V celém odstavci V označuje nějaký pevný, ale jinak libovolný, vektorový prostor nad číselným tělesem K.

Písmeny $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ budeme (i s indexy) značit výlučně body, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ označují zase výlučně vektory, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ mohou podle potřeby označovat body i vektory. Rovněž se dohodneme, že rozdíl dvou bodů budeme chápat jako vektor a součet bodu a vektoru jako bod.

Nechť $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$. *Přímkou* procházející nebo též určenou body $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ rozumíme množinu $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, ktorú dostaneme tak, že do bodu $\mathbf{p}$ umístíme všechny možné skalární násobky vektoru $\mathbf{q} - \mathbf{p}$.

Typický bod přímky $\ell(\mathbf{p},\mathbf{q})$ má tedy tvar

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = (1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{q},$$

kde $t \in K$, tj.

$$\ell(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \{s\mathbf{p} + t\mathbf{q};\ s,t \in K\ \&\ s + t = 1\} \subseteq V.$$

Tento výraz má smysl i pro $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, tehdy však nejde o přímku ale o jednobodovou množinu $\ell(\mathbf{p},\mathbf{p}) = \{\mathbf{p}\}$. Z uvedeného tvaru ihned vidíme, že

$$\ell(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \ell(\mathbf{q},\mathbf{p})$$

pro libovolní $\mathbf{p},\mathbf{q} \in V$.

Podmnožinu M vektorového prostoru V nazýváme jeho *afinním podprostorem* nebo též *lineární varietou* ve V, pokud $M \neq \emptyset$ a pre všechny $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in M$ platí $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \subseteq M$.

Lineární kombinaci, t. j. výraz tvaru

$$t_0\mathbf{p}_0 + t_1\mathbf{p}_1 + \ldots + t_n\mathbf{p}_n = \sum_{i=0}^{n} t_i\mathbf{p}_i,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n \in V$, $t_0, t_1, \ldots, t_n \in K$, nazýváme *afinní kombinací* bodů $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$, pokud platí $t_0 + t_1 + \ldots + t_n = 1$. Afinní kombinací bodů budeme chápat jako bod; jiné lineární kombinace bodů než afinní se v našich úvahách nevyskytují. (Každá afinní kombinace je neprázdná, t. j. obsahuje alespoň jeden člen.)

Tvrzení 1. Pro libovolnou neprázdnou množinu $M \subseteq V$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) M je afinní podprostor ve V;

(ii) pro libovolné $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in M$, $s \in K$ platí

$$s\mathbf{p} + (1-s)\mathbf{q} \in M;$$

(iii) pro každé $n \in \mathbb{N}$ a libovolné $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \in M$, $t_0, t_1 \ldots, t_n \in K$ takové, že

$$t_0 + t_1 + \ldots + t_n = 1,$$

platí

$$t_0\mathbf{p}_0 + t_1\mathbf{p}_1 + \ldots + t_n\mathbf{p}_n \in M.$$

Věta 2. Nechť $M \subseteq V$. Potom M je afinní podprostor ve V právě tehdy, když existuje bod $\mathbf{p} \in V$ a lineární podprostor $S \subseteq V$ tak, že

$$M = \mathbf{p} + S = \{\mathbf{p} + \mathbf{u};\ \mathbf{u} \in S\}.$$

V tom případě pro všechny $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in M$, $\mathbf{u} \in S$ platí

$$\mathbf{q} - \mathbf{r} \in S, \qquad \mathbf{q} + \mathbf{u} \in M, \qquad M = \mathbf{q} + S,$$

$$S = \{\mathbf{x} - \mathbf{q};\ \mathbf{x} \in M\} = \{\mathbf{x} - \mathbf{y};\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M\}.$$

Důsledek 3. Každý lineární podprostor S vektorového prostoru V je jeho afinním podprostorom. Afinní podprostor M vektorového prostoru V je jeho lineárním podprostorem právě tehdy, když $\mathbf{0} \in M$.

Zaměřením nebo též *směrovým podprostorem* afinního podprostoru $M \subseteq V$ nazýváme lineární podprostor

$$\mathrm{Dir} M = \{\mathbf{x} - \mathbf{y};\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M\} \subseteq V.$$

(*direction*).

Dir$M$ je jediný lineární podprostor ve V takový, že $M = \mathbf{p} + \mathrm{Dir} M$ pro nějaké (pro každé) $\mathbf{p} \in M$. Pro každé $\mathbf{p} \in M$ platí

$$\mathrm{Dir} M = \{\mathbf{x} - \mathbf{p};\, \mathbf{x} \in M\}.$$

Pro libovolnou uspořádanou $(n+1)$-tici bodů $(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n)$, vektorového prostoru V, případně pro jeho konečnou podmnožinu $\{\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n\} \neq \emptyset$, označme

$$\ell(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n) = \{t_0\mathbf{p}_0 + \ldots + t_n\mathbf{p}_n;\ t_0, \ldots, t_n \in K \ \&\ t_0 + \ldots + t_n = 1\}$$

množinu všech afinních kombinací bodů $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$. Z právě dokázaného tvrzení vyplývá, že $\ell(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n)$ je nejmenší afinní podprostor ve V, který obsahuje všechy body $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$; nazýváme ho *afinní obal* bodů nebo i afinní podprostor *generovaný* body $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$.

Pro každou neprázdnou množinu $X \subseteq V$ mžeme definovat její *afinní obal* $\ell(X)$, nazývaný tiež afinní podprostor *generovaný* množinou X, jako množinu všech (konečných) afinních kombinací bodů z X. Opět platí, že $\ell(X)$ je nejmenší afinní podprostor ve V tak, že $X \subseteq \ell(X)$.

Tvrzení 4. Nechť $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \in V$. Potom

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) &= \mathbf{p}_0 + [\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0], \\ \mathrm{Dir}\,\ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) &= [\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0]. \end{aligned}$$

Dimenzí nebo též *rozměrem* afinního podprostoru $M \subseteq V$, píšeme $\dim M$, nazýváme dimenzi jeho zameření, tedy

$$\dim M = \dim \mathrm{Dir} M.$$

Body $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ vektorového prostoru V nazýváme *afinně nezávislé*, pokud vektory $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0$ jsou lineárně nezávislé.

Z následujícího očividného tvrzení vyplývá, že body $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \in V$ jsou afinně nezávislé právě tehdy, když pro nějaké (pro každé) $0 \leq k \leq n$ vektory $\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_k$, kde $0 \leq j \leq n$ a $j \neq k$, jsou lineárně nezávislé.

Tvrzení 5. Body $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \in V$ jsou afinně nezávislé právě tehdy, když

$$\dim \ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) = n.$$

Zřejmě 0-rozměrné afinní podprostory ve V jsou právě všechny body $\mathbf{p} \in V$ (přesněji, všechny jednobodové podmnožiny ve V). Tyto afinní podprostory nazýváme též *triviální*.

Jednorozměrné afinní podprostory ve V nazýváme *přímkami*. Každá přímka má skutečně tvar $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ pro nějaké afinně nezávislé (t. j. různé) body $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V$.

Dvojrozměrné afinní podprostory vo V nazýváme *rovinami*.

Samotný prostor V je svým *nevlastním* afinním podprostorem.

Pokud $\dim V = n$, tak $(n-1)$-rozměrné afinní podprostory ve V nazýváme *nadrovinami*.

Pojmy „bod“, „přímka“ a „rovina“ jsou absolutní v tom smyslu, že závisí jen na dimenzi příslušného afinního podprostoru. Pojem nadroviny je relativní, protože závisí na vztahu dimenzí afinního podprostoru a celého prostoru.

Pokud $\dim V = 1$ (t. j. pokud samotné V je přímka), tak každý bod ve V je zároveň nadrovinou.

Nadrovinami v dvojrozměrném prostoru (t. j. v rovině) jsou zase všechny přímky.

V trojrozměrném prostoru V pojmy roviny a nadroviny splývají.

V čtyřrozměrném prostoru jsou nadrovinami trojrozměrné podprostory; atd.

V 0-rozměrném (t. j. jednobodovém) prostoru V nejsou přímky, roviny ani nadroviny.

8.3. Průnik a spojení afinních podprostorů

Tvrzení 6. Nechť $M, N \subseteq V$ jsou afinní podprostory. Potom $M \cap N$ je afinní podprostor ve V právě tehdy, když $M \cap N \neq \emptyset$. V tomto případě

$$\mathrm{Dir}(M \cap N) = \mathrm{Dir}M \cap \mathrm{Dir}N.$$

Neprázdnost průniku $M \cap N$ můžeme zaručit za předpokladu, že lineární prostor $\mathrm{Dir}M + \mathrm{Dir}N$ je dostatečně velký.

Tvrzení 7. Nechť $M, N \subseteq V$ jsou afinní podprostory. Potom

$$\mathrm{Dir}M + \mathrm{Dir}N = V \;\Rightarrow\; M \cap N \neq \emptyset.$$

Spojením afinních podprostorů M, $N \subseteq V$, píšeme $M \sqcup N$, nazýváme afinní obal jejich sjednocení. Tedy

$$M \sqcup N = \ell(M \cup N).$$

Zřejmě $M \sqcup N$ je nejmenší afinní podprostor ve V, který obsahuje M i N, a pro lineární podprostory S, $T \subseteq V$ platí $S \sqcup T = S + T$.

Tvrzení 8. Nechť $M, N \subseteq V$ jsou afinní podprostory.

(a) Pokud $M \cap N \neq \emptyset$, tak

$$\mathsf{Dir}(M \sqcup N) = \mathsf{Dir}M + \mathsf{Dir}N,$$

$$M \sqcup N = M + \mathsf{Dir}N = N + \mathsf{Dir}M.$$

(b) Pokud $M \cap N = \emptyset$, tak pro libovolné $\mathbf{p} \in M$, $\mathbf{q} \in N$ platí

$$\mathsf{Dir}(M \sqcup N) = [\mathbf{q} - \mathbf{p}] + \mathsf{Dir}M + \mathsf{Dir}N,$$

$$M \sqcup N = M + ([\mathbf{q} - \mathbf{p}] + \mathsf{Dir}N) = N + ([\mathbf{q} - \mathbf{p}] + \mathsf{Dir}M).$$

Poznámka 9. Obě rovnosti z (b) jsou splněné i za předpokladu $M \cap N \neq \emptyset$. V tomto případě však pre libovolné $\mathbf{r} \in M \cap N$ platí

$$\mathbf{q} - \mathbf{p} = (\mathbf{r} - \mathbf{p}) + (\mathbf{q} - \mathbf{r}) \in \mathsf{Dir}M + \mathsf{Dir}N,$$

takže vektor $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ můžeme vynechat.

Důsledek 10. Nechť M, $N \subseteq V$ jsou konečně rozměrné afinní podprostory. Potom

$$\dim(M \sqcup N) = \begin{cases} \dim M + \dim N - \dim(M \cap N), & \text{pro } M \cap N \neq \emptyset, \\ \dim M + \dim N - \dim(\mathsf{Dir}M \cap \mathsf{Dir}N) + 1, & \text{pro } M \cap N = \emptyset. \end{cases}$$

Příklad 11. Ve vektorovém prostoru V uvažujme konečně rozměrné afinní podprostory

$$M = \mathbf{p} + [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m], \qquad N = \mathbf{q} + [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n].$$

Potom

$$M \sqcup N = \begin{cases} \mathbf{p} + [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n], \\ \text{pro } M \cap N \neq \emptyset, \\ \mathbf{p} + [\mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n], \\ \text{pro } M \cap N = \emptyset, \end{cases}$$

$$\dim(M \sqcup N) = \begin{cases} \dim[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n], \\ \text{pro } M \cap N \neq \emptyset, \\ \dim[\mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n], \\ \text{pro } M \cap N = \emptyset. \end{cases}$$

Pokud předpokládáme, že jak vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ tak vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ jsou lineárně nezávislé, pak

$$\dim(M \sqcup N) = \begin{cases} m + n - k, & \text{pro } M \cap N \neq \emptyset, \\ m + n - k + 1, & \text{pro } M \cap N = \emptyset, \end{cases}$$

kde $k = \dim([\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m] \cap [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n])$.

Příklad 12.

V sloupcovém prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou dané vektory $\mathbf{x} = (1, 2, 3, 4)^T$, $\mathbf{y} = (0, -3, 1, -1)^T$, $\mathbf{z} = (1, 1, 0, 0)^T$, $\mathbf{u} = (0, -2, 4, 3)^T$, $\mathbf{v} = (2, 6, 2, 5)^T$, $\mathbf{w} = (0, 0, 1, 1)^T$ a blíže neurčené body $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$. Potom $S = [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$, $T = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ jsou lineární podprostory a $M = \mathbf{p} + S$, $N = \mathbf{q} + N$ jsou afinní podprostory v $\mathbb{R}^4$. Najdeme dimenze lineárních podprostorů $S+T$, $S \cap T$ a afinních podprostorů $M \cap N$, $M \sqcup N$ v závislosti na $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$.

Lineární podprostor $S+T$ je generovaný sloupci blokové matice

$$\left(\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right),$$

přičemž sloupce levého bloku generují lineární podprostor S a sloupce pravého bloku lineární podprostor T. Tato matica je řádkově ekvivalentní s následující blokovou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ve stupňovitém tvaru, jejíž řádky mají vedoucí prvky ve sloupcích 1, 2, 3 a 6. Vidíme, že vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ tvoří bázi S a vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}$ bázi $S + T$. Doupravovaním pravého bloku na řádkově ekvivalentní stupňovitý tvar

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se můžeme přesvědčit, že i vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou lineárně nezávislé, tedy tvoří bázi T.

Celkem $\dim S = \dim T = 3$, $\dim(S+T) = 4$. Odtud dle věty o dimenzi součtu a průniku vyplýva $\dim(S \cap T) = 3 + 3 - 4 = 2$.

Tedy $S + T = \mathbb{R}^4$. Odtud pak $M \cap N \neq \emptyset$. Proto $\dim(M \cap N) = \dim(S \cap T) = 2$. Odtud $\dim(M \sqcup N) = \dim(S + T) = 4$.

8.4. Vzájemná poloha afinních podprostorů

Polohu netriviálních vlastních afinních podprostorů (lineárních variet) M, $N \subseteq V$ budeme klasifikovat na základě dvou kritérií:

(A) Pokud platí Dir$M \subseteq$ Dir$N \vee$ Dir$N \subseteq$ Dir$M$, říkáme, že M, N jsou *rovnoběžné* a píšeme $M \parallel N$.

V opačném případě, t. j. pokud platí Dir$M \not\subseteq$ Dir$N$ $\&$ Dir$N \not\subseteq$ Dir$M$, říkáme, že M, N *nejsou rovnoběžné*, a píšeme $M \nparallel N$.

(B) Pokud platí $M \cap N \neq \emptyset$, říkáme, že M, N *se pretínajú*.

V opačném případě, t. j. pokud $M \cap N = \emptyset$, říkáme, že M, N *se neprotínají*, neboli, že jsou *disjunktní*.

Celkově tedy dostáváme čtyři možnosti:

(1) $M \parallel N$ & $M \cap N \neq \emptyset$, tj. M, N jsou rovnoběžné a protínají se.

V tomto případě platí Dir$M \subseteq$ Dir$N \Leftrightarrow M \subseteq N$ a Dir$N \subseteq$ Dir$M \Leftrightarrow N \subseteq M$.

Tedy $M \subseteq N$ nebo $M \subseteq N$. Říkáme, že jedna z lineárních variet M, N je *podvarietou* druhé, neboli, že M, N jsou ve vztahu *inkluze*.

(2) $M \parallel N$ & $M \cap N = \emptyset$, tj. M, N jsou rovnoběžné a neprotínají se.

Tento případ nazýváme vztahem *pravé rovnoběžnosti*.

(3) $M \not\parallel N$ & $M \cap N \neq \emptyset$, tj. M, N nejsou rovnoběžné a protínají se.

Říkáme, že M, N jsou *různoběžné*.

(4) $M \not\parallel N$ & $M \cap N = \emptyset$, tj. M, N nejsou rovnoběžné a neprotínají se.

V tomto případě ještě rozlišujeme dvě další možnosti:

(4a) Ak $\mathrm{Dir}M \cap \mathrm{Dir}N = \{\mathbf{0}\}$, říkáme, že M, N jsou *mimoběžné*.

(4b) Pokud $\mathrm{Dir}M \cap \mathrm{Dir}N \neq \{\mathbf{0}\}$, říkáme, že M, N jsou *částečně rovnoběžné*.

Tvrzení 13. Nechť M, $N \subseteq V$ jsou částečně rovnoběžné lineární variety. Potom $\dim M \geq 2$, $\dim N \geq 2$ a $\dim V \geq 4$.

Na druhé straně v libovolném vektorovém prostoru V dimenze ≥ 4 není těžké najít příklady částečne rovnobežných lineárních variet. Např.

$$M = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], \qquad N = \mathbf{e}_4 + [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$$

jsou částečně rovnoběžné roviny v K^4.

8.5. Afinní zobrazení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad týmž číselným tělesem K. Říkáme, že $f\,V \to U$ je *afinní zobrazení*, pokud pro libovolné body $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V$ a skalár $s \in V$ platí

$$f(s\mathbf{p} + (1-s)\mathbf{q}) = sf(\mathbf{p}) + (1-s)f(\mathbf{q}).$$

Tvrzení 14. Nechť U, V jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K. Potom zobrazení $f\,V \to U$ je afinní právě tehdy, když pro každé $n \in \mathbb{N}$, všechny body $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n \in V$ a skaláry $t_0, \ldots, t_n \in K$ takové, že $t_0 + \ldots + t_n = 1$, platí

$$f(t_0\mathbf{p}_0 + \ldots + t_n\mathbf{p}_n) = t_0 f(\mathbf{p}_0) + \ldots + t_n f(\mathbf{p}_n).$$

Posunutím neboli *translací* vektorového prostoru V o vektor $\mathbf{u} \in V$ nazýváme zobrazení $V \to V$ dané předpisem $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{u}$.

Zřejmě kompozicí posunutí o vektor $\mathbf{u} \in V$ a posunutí o vektor $\mathbf{v} \in V$ je posunutí o vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Každé posunutí je bijektivní zobrazení; inverzní zobrazení k posunutí o vektor $\mathbf{u}$ je posunutí o opačný vektor $-\mathbf{u}$.

Věta 15. Nechť U, V jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K. Potom zobrazení $f : V \to U$ je afinní právě tehdy, když existuje vektor $\mathbf{u} \in U$ a lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in V$ platí

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{u}.$$

Důsledek 16. Nechť U, V jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K. Potom

(a) Libovolná translace prostoru V je afinní zobrazení;

(b) libovolné lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ je afinné;

(c) afinní zobrazení $f\ V \to U$ je lineární právě tehdy, když $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Zřejmě vektor $\mathbf{u} \in U$ a lineární zobrazení φ jsou podmínkou věty určené jednoznačně. Zobrazení $\varphi = f - f(\mathbf{0})$ nazývame *lineární částí* a vektor $\mathbf{u} = f(\mathbf{0})$ *absolutním členem* afinního zobrazení f. Píšeme též $f = \varphi + \mathbf{u}$.

Afinní zobrazení jsou zevšeobecněním funkcí $f\ K \to K$ tvaru $f(x) = ax + b$, kde $a, b \in K$, které (v případě $K = \mathbb{R}$) v matematické analýze nazýváme lineárními.

Tvrzení 17. Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K a $g : W \to V$, $f : V \to U$ jsou afinní zobrazení. Potom i jejich kompozice $f \circ g : W \to U$ je afinní zobrazení.

$(f \circ g)(\mathbf{z}) = \varphi(\psi(\mathbf{z}) + \mathbf{v}) + \mathbf{u} = (\varphi \circ \psi)(\mathbf{z}) + \varphi(\mathbf{v}) + \mathbf{u}.$

Pro lineární zobrazení $\psi : W \to V$, $\varphi : V \to U$ a vektory $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{u} \in U$ platí

$$(\varphi + \mathbf{u}) \circ (\psi + \mathbf{v}) = (\varphi \circ \psi) + (\varphi(\mathbf{v}) + \mathbf{u}).$$

Tvrzení 18. Nechť U, V jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K, $f\, V \to U$ je afinní zobrazení a $M \subseteq V$, $N \subseteq U$ jsou afinní podprostory. Potom $f(M)$ je afinní podprostor v U a $f^{-1}(N)$ je afinní podprostor ve V nebo prázdná množina.

Protože každé posunutí je bijekce, afinní zobrazení $f = \varphi + \mathbf{u} : V \to U$ s lineární částí φ je injektivní právě tehdy, když φ je injektivní. Podobně, f je surjektivní právě tehdy, když φ je surjektivní.

Věta 19. Nechť $f : V \to U$ je afinní zobrazení, přičemž V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom pro libovolné $\mathbf{y} \in \mathrm{Im} f$ platí

$$\dim V = \dim f^{-1}(\mathbf{y}) + \dim \mathrm{Im} f.$$

Afinní transformací vektorového prostoru V nazýváme libovolné afinní zobrazení $f : V \to V$.

Důsledek 20. Nechť $f : V \to V$ je afinní transformace konečně rozměrného vektorového prostoru V. Potom f je injektívní právě tehdy, když je surjektivní.

Důsledek 21. Nechť $f : V \to U$ je afinní zobrazení s lineární částí φ a $\mathbf{u} = f(\mathbf{0})$. Potom f je bijektivní právě tehdy, když φ je bijektívní. V tomto případě i inverzní zobrazení $f^{-1} U \to V$ je afinní a platí

$$f^{-1} = \varphi^{-1} - \varphi^{-1}(\mathbf{u}).$$

Tedy f^{-1} je kompozicí lineárního zobrazení φ^{-1} a posunutí o vektor $-\varphi^{-1}(\mathbf{u})$.

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory a α, β jsou báze v U resp. ve V. *Rozšířenou maticí* afinního zobrazení $f : V \to U$ s lineární částí φ a absolutním členem $\mathbf{u}$ vzhledem na báze β, α nazýváme blokovou matici

$$(f)_{\alpha,\beta} = ((\varphi)_{\alpha,\beta} \,|\, (\mathbf{u})_\alpha).$$

Pokud $\dim U = m$, $\dim V = n$, $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha,\beta}$ je matice lineárního zobrazení φ v bazích $\beta = (\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n})$, α a $\mathbf{a} = (\mathbf{u})_\alpha$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{u}$ v bázi α, tak rozšířenou maticí afinního zobrazení f v bazích β, α je bloková matica

$$(f)_{\alpha,\beta} = ((\varphi(\mathbf{v}_1))_\alpha, \dots, (\varphi(\mathbf{v}_n))_\alpha \,|\, (\mathbf{u})_\alpha) = (\mathbf{A} \,|\, \mathbf{a}).$$

Souřadnice bodu $\mathbf{x} \in V$ v bázi β a souřadnice jeho obrazu $f(\mathbf{x}) \in U$ v bázi α jsou tak spojené rovností

$$(f(\mathbf{x}))_\alpha = (\varphi)_{\alpha,\beta} \cdot (\mathbf{x})_\beta + (\mathbf{u})_\alpha = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x})_\beta + \mathbf{a}.$$

Je-li f lineární zobrazení, t. j. pokud $f = \varphi$ a $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, nemá význam rozšiřovat matici $(\varphi)_{\alpha,\beta}$ o nulový sloupec.

Tvrzení. 22. Nechť U, V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad číselným tělesem K a α, β, γ jsou nějaké báze prostorů U, V, resp. W.

(a) Jsou-li $g : W \to V$, $f : V \to U$ afinní zobrazení, které mají v příslušných bazích rozšířené matice $(g)_{\beta,\gamma} = (\mathbf{B} \,|\, \mathbf{b})$, $(f)_{\alpha,\beta} = (\mathbf{A} \,|\, \mathbf{a})$, tak jejich kompozice $f \circ g : W \to U$ má v bazích γ, α rozšířenou matici

$$(f \circ g)_{\alpha,\gamma} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \,|\, \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}).$$

(b) Je-li $f : V \to U$ afinní bijekce s rozšířenou maticí $(f)_{\alpha,\beta} = (\mathbf{A} \,|\, \mathbf{a})$ v bazích β, α, tak k ní inverzní zobrazení je afinní bijekce $f^{-1} : U \to V$, která má v bazích α, β rozšířenou matici

$$(f^{-1})_{\beta,\alpha} = (\mathbf{A}^{-1} \,|\, -\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{a}).$$