7. HODNOST MATICE, INVERZNÍ MATICE A ZMĚNA BÁZE

V celé kapitole K označuje pevné číselné těleso, m, n, p jsou kladná celá čísla.

7.1. Hodnost matice

V této části je potřebné rozlišovat mezi vektorovými prostory řádkových resp. sloupcových vektorů. Prostor řádkových vektorů budeme značit $K^{1\times n}$ a prostor sloupcových vektorů $K^{n\times 1}$.

$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \in K^{1\times n}$ označuje i-tý řádek a $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) \in K^{m\times 1}$ j-tý sloupec matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$. Tuto matici můžeme zapsat blokově jako

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \mathbf{r}_2(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = (\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})).$$

Řádkovou hodností $h_r(\mathbf{A})$ matice $\mathbf{A}$ nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{1\times n}$ generovaného řádky matice $\mathbf{A}$. Podobně, *sloupcovou hodností* $h_s(\mathbf{A})$ matice $\mathbf{A}$ nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{m\times 1}$ generovaného sloupci matice $\mathbf{A}$. Tedy

$$\begin{aligned} h_r(\mathbf{A}) &= \dim[\mathbf{r}_1(\mathbf{A}), \mathbf{r}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{r}_m(\mathbf{A})], \\ h_s(\mathbf{A}) &= \dim[\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})]. \end{aligned}$$

Označme $\varphi : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$ lineární zobrazení dané předpisem $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in K^{n\times 1}$.

Hodností lineárního zobrazení φ nazýváme dimenzi jeho obrazu, t. j. $h(\varphi) = \dim \mathrm{Im}\varphi$. Zřejmě platí $h(\varphi) = h_s(\mathbf{A})$, protože lineární podprostor $\mathrm{Im}\varphi \subseteq K^{m\times 1}$ je generovaný sloupci matice $\mathbf{A}$.

Lemma 1. Nechť $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$.

(a) Nechť matice $\mathbf{B}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ provedením jedné elementární řádkové operace (ERO). Pak $[\mathbf{r}_1(\mathbf{A}), \mathbf{r}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{r}_m(\mathbf{A})] = [\mathbf{r}_1(\mathbf{B}), \mathbf{r}_2(\mathbf{B}), \ldots, \mathbf{r}_m(\mathbf{B})]$.

(b) Nechť matice $\mathbf{C}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ vykonáním jedné elementární sloupcové operace (ESO). Pak $[\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})] = [\mathbf{s}_1(\mathbf{C}), \mathbf{s}_2(\mathbf{C}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{C})]$.

Lemma 2. Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ platí $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A})$.

Společnou hodnotu budeme nyní značit $h(\mathbf{A})$ a nazývat *hodností matice* $\mathbf{A}$. Zřejmě pro $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je $h(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.

Tvrzení 3. Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$. Potom $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T)$.

Tvrzení 4. Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in K^{m \times 1}$ jsou libovolné vektory a $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je matice taková, že $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_j$ pro $1 \leq j \leq n$. Potom

(a) $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = n$;

(b) $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] = K^{m \times 1}$ právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = m$.

Případ (a) může nastat tehdy, když $n \leq m$; naopak, (b) může nastat jedině za předpokladu $m \leq n$.

Tvrzení 5. Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$. Potom

$$h(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \leq \min(h(\mathbf{A}), h(\mathbf{B})).$$

7.2. Inverzní matice a inverzní lineární zobrazení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$, t. j. $\mathbf{A}$ je *čtvercová* matice typu $n\times n$. *Inverzní maticí* k matici $\mathbf{A}$ rozumíme matici $\mathbf{B} \in K^{n\times n}$ tak, že

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Zřejmě k dané čtvercové matici $\mathbf{A}$ existuje nanejvýš jedna inverzní matice. Tuto jednoznačně určenou matici (pokud existuje) budeme značit $\mathbf{A}^{-1}$.

Věta 6. Nechť U, V jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K a $\dim U = \dim V = n$. Nechť dále α, β jsou nějaké báze v U, resp. ve V a $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha,\beta}$ je matice lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ vzhledem na báze β, α. Potom k matici $\mathbf{A}$ existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ právě tehdy, když k zobrazení φ existuje inverzní zobrazení φ^{-1}. V tomto případě $\mathbf{A}^{-1}$ je maticí lineárního zobrazení $\varphi^{-1} : U \to V$ vzhledem na báze α, β, t. j.

$$\mathbf{A}^{-1} = ((\varphi)_{\alpha,\beta})^{-1} = (\varphi^{-1})_{\beta,\alpha}.$$

Říkáme, že čtvercová matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je *regulární*, pokud k ní existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$; v opačném případě $\mathbf{A}$ je *singulární*.

Věta 7. Matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je regulární právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = n$.

Tvrzení 8. Pro libovolné $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n$ právě tehdy, když $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Tvrzení 9. Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ jsou regulární matice. Potom i matice $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a $\mathbf{A}^T$ jsou regulární a platí:

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}, \qquad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}, \qquad (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T.$$

7.3. Realizace ERO a ESO pomocí násobení matic

Tvrzení 10. Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

(a) Nechť $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$ vznikne z $\mathbf{A}$ provedením jedné ERO. Označme $\mathbf{E}$ matici, která vznikne z matice $\mathbf{I}_m$ provedením stejné ERO. Potom $\mathbf{B} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$.

(b) Nechť $\mathbf{C} \in K^{m \times n}$ vznikne z $\mathbf{A}$ provedením jedné ESO. Označme $\mathbf{F}$ matici, která vznikne z matice $\mathbf{I}_n$ provedením stejné ESO. Potom $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}$.

Čtvercové matice $\mathbf{E} \in K^{n \times n}$, které vzniknou z jednotkové matice $\mathbf{I}_n$ provedením jediné ERO nebo ESO, nazýváme *elementární matice*.

Libovolnou ERO (ESO) na matici $\mathbf{A}$ můžeme realizovat vynásobením matice $\mathbf{A}$ vhodnou elementární maticí $\mathbf{E}$ (F) zleva (zprava).

7.4. Výpočet inverzní matice

Návod na výpočet inverzní matice k dané čtvercové matici $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$:

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{I}_n) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \,|\, \mathbf{A}^{-1}).$$

Tvrzení 11. Nechť $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ a $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_k \in K^{n\times n}$ jsou elementární matice tak, že $\mathbf{E}_k \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Potom $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_k \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1$.

K stejnému cíli vede též postup reprezentovaný schématem:

$$\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}_n}\right) \xrightarrow{\text{ESO}} \left(\frac{\mathbf{I}_n}{\mathbf{A}^{-1}}\right).$$

Tvrzení 12. Matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$je regulární právě tehdy, když ji můžeme rozložit na součin $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_k$ konečného počtu elementárních matic $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_k \in K^{n\times n}$.

Tvrzení 13. Pro libovolné $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m\times n}$ platí:

(a) $\mathbf{A}$ je řádkově ekvivalentní s $\mathbf{B}$ právě tehdy, když existuje regulární matice $\mathbf{P} \in K^{m\times m}$ tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}$;

(b) $\mathbf{A}$ je sloupcově ekvivalentní s $\mathbf{B}$ právě tehdy, když existuje regulární matice $\mathbf{Q} \in K^{n\times n}$ tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}$.

Tvrzení 14. Nechť $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{P} \in K^{m\times m}$, $\mathbf{Q} \in K^{n\times n}$, přičemž $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ jsou regulární matice. Potom

$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}) = h(\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}).$$

Násobení libovolné matice vhodného rozměru maticí $\mathbf{A}^{-1}$ (pokud existuje) zleva resp. zprava

Buď $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ regulární a $\mathbf{B} \in K^{n\times m}$, $\mathbf{C} \in K^{m\times n}$ libovolné. Pak

$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n\,|\,\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}),$$

a

$$\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{C}}\right) \xrightarrow{\text{ESO}} \left(\frac{\mathbf{I}_n}{\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}^{-1}}\right).$$

Řešení soustavy lineárních rovnic

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{B} \,|\, \mathbf{c}),$$

která má pro regulární $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ tvar

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \,|\, \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}).$$

Věta 15. Nechť $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in K^n$. Je-li $\mathbf{A}$ regulární, tak soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má jediné řešení $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$.

7.5. Matice přechodu

Nechť V je vektorový prostor nad číselným tělesem K a $\alpha = (\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_n})$, $\beta = (\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n})$ jsou jeho dvě báze. *Maticí přechodu* z báze β do báze α nazýváme matici identického zobrazení $\mathrm{id}_V\, V \to V$ vzhledem na bázi β, α, kterou značíme $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$. Tedy

$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} = (\mathrm{id}_V)_{\alpha,\beta}.$$

Sloupce matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ jsou tvořeny souřadnicemi vektorů báze β vzhledem na bázi α, t. j. $\mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = (\mathbf{v}_j)_\alpha$ pro $1 \leq j \leq n$. Tedy

$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} = ((\mathbf{v}_1)_\alpha, (\mathbf{v}_2)_\alpha, \dots, (\mathbf{v}_n)_\alpha),$$

a tato matice je jednoznačně určená podmínkou transformace souřadnic

$$(\mathbf{x})_\alpha = \mathbf{P}_{\alpha,\beta} \cdot (\mathbf{x})_\beta$$

pro libovolné $\mathbf{x} \in V$.

Pokud do rovnosti $\mathbf{x} = \alpha \cdot (\mathbf{x})_\alpha$ budeme za $\mathbf{x}$ postupně dosazovat vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ báze β, s využitím vzťahu pre sloupce součinu matic dostaneme

$$\mathbf{v}_j = \alpha \cdot (\mathbf{v}_\mathbf{j})_\alpha = \alpha \cdot \mathbf{s}_\mathbf{j}(\mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = \mathbf{s}_\mathbf{j}(\alpha \cdot \mathbf{P}_{\alpha,\beta})$$

pro každé $1 \leq j \leq n$. Tedy

$$\alpha \cdot \mathbf{P}_{\alpha,\beta} = \beta.$$

Tvrzení 16. Nech α, β jsou báze n-rozměrného vektorového prostoru V nad číselným tělesem K. Potom pro libovolnou matici $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\mathbf{P} = (\mathrm{id}_V)_{\alpha,\beta}$, t. j. $\mathbf{P}$ je matice přechodu z báze β do báze α;

(ii) $(\mathbf{x})_\alpha = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{x})_\beta$ pro každé $\mathbf{x} \in V$;

(iii) $\alpha \cdot \mathbf{P} = \beta$.

Tvrzení 17. Nechť α, β, γ jsou báze konečně rozměrného vektorového priestoru V nad číselným tělesem K. Potom

$$\mathbf{P}_{\alpha,\alpha} = \mathbf{I}_n, \qquad \mathbf{P}_{\beta,\alpha} = {\mathbf{P}_{\alpha,\beta}}^{-1},$$

$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{P}_{\beta,\gamma} = \mathbf{P}_{\alpha,\gamma},$$

Z druhé z uvedených podmínek vidíme, že matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ je vždy *regulární*. Naopak, každá regulární matice $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ je maticí přechodu mezi vhodnou dvojicí bazí.

Tvrzení 18. Nech V je n-rozměrný vektorový prostor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ je libovolná regulární matice. Nechť $\alpha = (\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n})$ je nějaká báze ve V. Položme $\mathbf{v}_j = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_j$, $\mathbf{w}_j = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{u}_j$ pro $1 \leq j \leq n$, a dále

$$\beta = (\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}) = \alpha{\cdot}\mathbf{P}, \quad \gamma = (\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_n}) = \alpha{\cdot}\mathbf{P^{-1}}.$$

Potom $\mathbf{P}$ je maticí přechodu z báze β do báze α a zároveň z báze α do báze γ, t. j.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\alpha,\beta} = \mathbf{P}_{\gamma,\alpha}.$$

Speciálně, $\mathbf{P}$ je maticí přechodu z báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}))$ do báze $\varepsilon = (\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n})$ v K^n a taktéž z báze ε do báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}^{-1}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}^{-1}))$.

Tvrzení 19. Nechť $\alpha = (\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n})$, $\beta = (\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n})$ jsou dvě báze sloupcového vektorového prostoru K^n. Potom $\mathbf{P}_{\alpha,\beta} = \alpha^{\mathbf{-1}} \cdot \beta$.

Návod na výpočet matice přechodu pro báze α, β vektorového prostoru K^n

$$(\alpha \,|\, \beta) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I_n} \,|\, \mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = (\varepsilon \,|\, \alpha^{\mathbf{-1}} \cdot \beta).$$

7.6. Matice lineárního zobrazení vzhledem na různé báze

Věta 20. Nechť V_1, V_2 jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad číselným tělesem K, $\varphi : V_1 \to V_2$ je lineární zobrazení, $\alpha_{\mathbf{1}}$, $\beta_{\mathbf{1}}$ jsou dvě báze prostoru V_1 a $\alpha_{\mathbf{2}}$, $\beta_{\mathbf{2}}$ jsou dvě báze prostoru V_2. Potom

$$(\varphi)_{\beta_{\mathbf{2}},\beta_{\mathbf{1}}} = \mathbf{P}_{\beta_{\mathbf{2}},\alpha_{\mathbf{2}}} \cdot (\varphi)_{\alpha_{\mathbf{2}},\alpha_{\mathbf{1}}} \cdot \mathbf{P}_{\alpha_{\mathbf{1}},\beta_{\mathbf{1}}}.$$

Důkaz Označme $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha_{\mathbf{2}},\alpha_{\mathbf{1}}}$, $\mathbf{B} = (\varphi)_{\beta_{\mathbf{2}},\beta_{\mathbf{1}}}$ matice lineárního zobrazení φ vzhledem na báze $\alpha_{\mathbf{1}}$, $\alpha_{\mathbf{2}}$, resp. báze $\beta_{\mathbf{1}}$, $\beta_{\mathbf{2}}$. Pro libovolné $\mathbf{x} \in V_1$ platí:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} \cdot (\mathbf{x})_{\beta_{\mathbf{1}}} &= (\varphi\mathbf{x})_{\beta_{\mathbf{2}}} = \mathbf{P}_{\beta_{\mathbf{2}},\alpha_{\mathbf{2}}} \cdot (\varphi\mathbf{x})_{\alpha_{\mathbf{2}}} \\
&= \mathbf{P}_{\beta_{\mathbf{2}},\alpha_{\mathbf{2}}} \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x})_{\alpha_{\mathbf{1}}} \\
&= \mathbf{P}_{\beta_{\mathbf{2}},\alpha_{\mathbf{2}}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{\alpha_{\mathbf{1}},\beta_{\mathbf{1}}} \cdot (\mathbf{x})_{\beta_{\mathbf{1}}}.
\end{aligned}$$

Pak

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}_{\beta_{\mathbf{2}},\alpha_{\mathbf{2}}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{\alpha_{\mathbf{1}},\beta_{\mathbf{1}}}.$$

Poslední transformační formuli si můžeme zapamatovat pomocí následujícího diagramu:

$$\begin{tikzcd}
(V_1, \alpha_{\mathbf{1}}) \arrow[r, "\mathbf{A}"] & (V_2, \alpha_{\mathbf{2}}) \arrow[d, "\mathbf{P}_{\beta_{\mathbf{2}},\alpha_{\mathbf{2}}}"] \\
(V_1, \beta_{\mathbf{1}}) \arrow[u, "\mathbf{P}_{\alpha_{\mathbf{1}},\beta_{\mathbf{1}}}"'] \arrow[r, "\mathbf{B}"] & (V_2, \beta_{\mathbf{2}})
\end{tikzcd}$$

Příklad 21. Nechť $\varphi : K^n \to K^m$ je lineární zobrazení a α, β jsou nějaké báze prostorů K^m resp. K^n. Označme $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha,\beta}$, $\mathbf{M} = (\varphi)_{\varepsilon^{(\mathbf{m})},\varepsilon^{(\mathbf{n})}}$ matice zobrazení φ vzhledem na bázi β, α resp. vzhledem na kanonické báze $\varepsilon^{(\mathbf{n})}$, $\varepsilon^{(\mathbf{m})}$. Pak platí:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_{\alpha,\varepsilon^{(\mathbf{m})}} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}_{\varepsilon^{(\mathbf{n})},\beta}$$

a

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}_{\varepsilon^{(\mathbf{m})},\alpha} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{\beta,\varepsilon^{(\mathbf{n})}}.$$

Pokud ztotožníme každou bázi s regulární maticí, jejichž sloupce jsou vektory této báze, tak uvedené rovnosti nabudou tvaru

$$\mathbf{A} = \alpha^{-\mathbf{1}} \cdot \mathbf{I_m} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{I_n^{-1}} \cdot \beta = \alpha^{-\mathbf{1}} \cdot \mathbf{M} \cdot \beta,$$

a

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}_m^{-1} \cdot \alpha \cdot \mathbf{A} \cdot \beta^{-\mathbf{1}} \cdot \mathbf{I_n} = \alpha \cdot \mathbf{A} \cdot \beta^{-\mathbf{1}}.$$

Věta 22. Nechť U je m-rozměrný a V je n-rozměrný vektorový prostor nad číselným tělesem K. Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou matice toho stejného lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ vzhledem na nějaké dvě dvojice bazí prostorů U, V;

(ii) existují regulární matice $\mathbf{P} \in K^{m \times m}$, $\mathbf{Q} \in K^{n \times n}$ tak, že $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$;

(iii) $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$.

Věta 23. Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad číselným tělesem K můžeme zvolit bázi β prostoru V a bázi α prostoru U tak, že φ má vzhledem na bázi β, α matici v blokovém tvaru

$$(\varphi)_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_h & \mathbf{0}_{h,n-h} \\ \mathbf{0}_{m-h,h} & \mathbf{0}_{m-h,n-h} \end{pmatrix},$$

kde $n = \dim V$, $m = \dim U$ a $h = h(\varphi)$.