6. LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

6.1. Lineární zobrazení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K. Říkáme, že $\varphi : V \to U$ je *lineární zobrazení*, pokud φ zachovává operace vektorového součtu a skalárního násobku, t. j. pokud pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $c \in K$ platí

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}), \\ \varphi(c\mathbf{x}) &= c\varphi(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Lineární zobrazení zachovávají nulový vektor a opačné vektory,

t. j. pro lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ a $\mathbf{x} \in V$ platí

$$\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \qquad \varphi(-\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x}).$$

Pro každý vektorový prostor V identické zobrazení $\mathrm{id}_V : V \to V$, $x \mapsto x$ je lineární zobrazení.

Pro libovolné vektorové prostory U, V nad číselným tělesem K zobrazení $\mathbf{0} : V \to U$, které každému vektoru $\mathbf{x} \in V$ přiřadí nulový vektor $\mathbf{0} \in U$, je lineární.

Komutativita operace součinu v číselném tělese a jeho distributivita vzhledem na sčítaní znamená, že pro libovolný pevný skalár $a \in K$ je přiřazením $x \mapsto ax$ definované lineární zobrazení $K \to K$.

Lineární zobrazení můžeme charakterizova jako zobrazení mezi vektorovými prostory (nad tím stejným číselným tělesem), které zachovávají lineární kombinace.

Tvrzení 1. Nechť U, V jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K a $\varphi : V \to U$ je libovolné zobrazenie. Nasledující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) φ je lineární zobrazení;

(ii) pre všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $a, b \in K$ platí

$$\varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\varphi(\mathbf{x}) + b\varphi(\mathbf{y});$$

(iii) pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a všechna $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$, $c_1, \ldots, c_n \in K$ platí

$$\varphi(c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n) = c_1\varphi(\mathbf{x}_1) + \ldots + c_n\varphi(\mathbf{x}_n).$$

Významné vlastnosti lineárních zobrazení jsou: kompozice (složení) lineárních zobrazení je opět lineární zobrazení a obrazy i vzory lineárních podprostorů v lineárních zobrazeních jsou též lineární podprostory.

Tvrzení 2. Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K a $\psi : W \to V$, $\varphi : V \to U$ jsou lineární zobrazení. Potom i jejich složení $\varphi \circ \psi : W \to U$ je lineární zobrazení.

Tvrzení 3. Nechť U, V jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K a $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení.

(a) Je-li S lineární podprostor prostoru V, tak i $\varphi(S)$ je lineární podprostor prostoru U.

(b) Je-li T lineární podprostor prostoru U, tak $\varphi^{-1}(T)$ je lineární podprostor prostoru V.

Příklad 4. Nechť K je číselné těleso. Distributivita součinu matic vzhledem k jejich součtu a jeho zaměnitelnosti s operací skalárního násobku říká, že pro pevn $m, n, p \in \mathbb{N}$ a libovolnou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je přiřazením $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ definované lineární zobrazení mezi vektorovými prostory matic $K^{n \times p} \to K^{m \times p}$.

Podobně je přiřazením $\mathbf{Y} \mapsto \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}$ definované lineární zobrazení $K^{p \times m} \to K^{p \times n}$. Speciálně pro $p = 1$ je takto definované lineární zobrazení $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ mezi sloupcovými vektorovými prostory $K^n \to K^m$, resp. lineární zobrazení $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{y} \cdot \mathbf{A}$ mezi řádkovými vektorovými prostory $K^m \to K^n$.

Každé lineární zobrazení mezi *konečně rozměrnými* vektorovými prostory nad K má v podstatě takovýto tvar.

Příklad 5. Nechť K je číselné těleso. Pro $m, n \in \mathbb{N}$ a pevné $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ jsou předpisy $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{r}_i(\mathbf{A})$, $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{s}_j(\mathbf{A})$ definované lineární zobrazení $K^{m\times n} \to K^{1\times n}$ resp. $K^{m\times n} \to K^{m\times 1}$. Rovněž $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}^T$ je lineární zobrazení $K^{m\times n} \to K^{n\times m}$.

Příklad 6. Nechť V je vektorový prostor nad číselným tělesem K, X je množina a $x \in X$ je pevně zvolený prvek. Připomeňme, že V^X je vektorový prostor všech funkcí $f : X \to V$. Dosazení prvku x do funkcie f, t. j. přiřazení $f \mapsto f(x)$, je lineární zobrazení $V^X \to V$. Podobně, pro libovolnou podmnožinu $Y \subseteq X$ je zúžení $f \mapsto f \restriction Y$ lineární zobrazení $V^X \to V^Y$.

Příklad 7. Označme V množinu všetch konvergentních posloupností reálných čísel. Zřejmě V je lineární podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ všech posloupností reálných čísel. Pak zobrazení $V \to \mathbb{R}$, které posloupnosti $\mathbf{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty} \in V$ přiřadí její limitu $\lim_{n\to\infty} a_n$, je lineární.

6.2. Jádro a obraz lineárního zobrazení

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad číselným tělesem K. Jeho *jádrem* nazýváme množinu

$$\text{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in V;\ \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Obrazem lineárního zobrazení φ nazývame množinu

$$\text{Im}\varphi = \varphi(V) = \{\varphi(\mathbf{x});\ \mathbf{x} \in V\}.$$

(Označení pochází z anglických slov *kernel* a *image*.)

Protože $\{\mathbf{0}\}$ je lineární podprostor prostoru U a V je lineární podprostor prostoru V, jako speciální případ tvrzení 3 dostáváme následující výsledek.

Tvrzení 8. Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad číselným tělesem K. Potom Kerφ je lineární podprostor prostoru V a Imφ je lineární podprostor prostoru U.

Pomocí pojmů jádra a obrazu můžeme charakterizovat injektivní resp. surjektivní lineární zobrazení.

Věta 9. Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení. Potom

(a) φ je injektivní právě tehdy, když $\mathsf{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$;

(b) φ je surjektivní právě tehdy, když $\mathsf{Im}\varphi = U$.

Věta 10. Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení, pričemž vektorový prostor V je konečně rozměrný. Potom i $\mathsf{Ker}\varphi$ a $\mathsf{Im}\varphi$ jsou konečně rozměrné prostory a platí

$$\dim V = \dim \mathsf{Ker}\varphi + \dim \mathsf{Im}\varphi.$$

Dimenzi obrazu Imφ nazýváme *hodností* lineárního zobrazení φ a značíme ji

$$h(\varphi) = \dim \mathsf{Im}\varphi.$$

Lineární zobrazení $\varphi : V \to V$ vektorového prostoru V do sebe nazýváme *lineárním operátorem* neboli *lineární transformací*.

Důsledek 11. Nechť $\varphi : V \to V$ je lineární transformace konečně rozměrného vektorového prostoru V. Potom φ je injektivní právě tehdy, když je surjektivní.

6.3. Lineární izomorfismy

Bijektivní lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ mezi vektorovými prostory V, U nad tímž číselným tělesem K nazýváme *lineární izomorfismus*. Říkáme, že vektorové prostory V, U jsou *lineárně izomorfní* nebo jen krátce *izomorfní* a píšeme $V \cong U$, pokud existuje nějaký lineární izomorfismus $\varphi : V \to U$.

Tvrzení 12. Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K.

(a) $\mathrm{id}_V : V \to V$ je lineární izomorfismus.

(b) Je-li $\varphi : V \to U$ lineární izomorfismus, pak i $\varphi^{-1} : U \to V$ je lineární izomorfismus.

(c) Jsou-li $\psi : W \to V$, $\varphi : V \to U$ lineární izomorfismy, pak i $\varphi \circ \psi\, W \to U$ je lineární izomorfismus.

Z právě dokázaného tvrzení okamžitě vyplývá následující důsledek.

Důsledek 13. Pro libovolné vektorové prostory U, V, W nad tímž číselným tělesem K platí:

(a) $V \cong V$;

(b) $V \cong U \Rightarrow U \cong V$;

(c) $W \cong V \ \&\ V \cong U \Rightarrow W \cong U$.

Říkáme, že vztah izomorfnosti $\cong$ je *reflexivní*, *symetrický* a *tranzitivní*, t. j. je vztahem *ekvivalence*. Z formálního hlediska s ním můžeme pracovat podobně jako se vztahem rovnosti $=$.

Příklad 14. Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor nad číselným tělesem K, $\dim V = n$ a $\beta = (\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n})$ je nějaká jeho báze. Potom souřadnicové zobrazení $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\beta$ je lineární izomorfizmus $V \to K^n$.

Platí, že typ izomorfismu daného konečně rozměrného prostoru je jednoznačně určený jeho dimenzí.

Věta 15. Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad číselným tělesem K. Potom

$$V \cong U \iff \dim V = \dim U.$$

Tedy konečně rozměrný vektorový prostor V nad číselným tělesem K je izomorfní se sloupcovým (řádkovým) vektorovým prostorem K^n právě tehdy, když $n = \dim V$. Přitom každá báze β prostoru V určuje jeden takovýto izomorfismus $V \to K^n$ – je jím souřadnicové zobrazení $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\beta$.

6.4. Matice lineárního zobrazení

Uvažujme nějaké lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$. V prostoru K^n máme kanonickou bázu $\varepsilon^{(\mathbf{n})} = (\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n})$. Protože obrazy $\varphi(\mathbf{e}_j)$ vektorů této báze jsou sloupcové vektory z prostoru K^m, můžeme vytvořit matici

$$\mathbf{A} = (\varphi(\mathbf{e}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{e}_n)) \in K^{m\times n},$$

jejímiž sloupci jsou právě tyto vektory, t. j. platí $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{e}_j)$ pre $1 \le j \le n$.

Ukážeme, jak můžeme obraz $\varphi(\mathbf{x})$ libovolného vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n$ vypočítat pouze ze znalosti této matice. Uvědomme si, že $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$, a počítejme

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{x}) &= \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) \\
&= x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \ldots + x_n\varphi(\mathbf{e}_n) \\
&= (\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \cdot (x_1, \ldots, x_n)^T \\
&= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}
\end{aligned}$$

Tedy *každé* lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$ má tvar $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro vhodnou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$. Protože každý konečně rozměrný vektorový prostor nad číselným tělesem K je izomorfní s prostorom K^n pro $n = \dim V$, při volbě pevných bazí v konečně rozměrných prostoroch U, V, bude možné libovolné lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ zakódovat pomocí vhodné matice $\mathbf{A}$.

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad číselným tělesem K, $\dim U = m$, $\dim V = n$ a $\alpha = (\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_m})$, $\beta = (\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n})$ jsou báze v U, resp. vo V.

Maticí lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ *vzhledem na báze* β, α nazýváme matici

$$\mathbf{A} = ((\varphi \mathbf{v}_1)_\alpha, \ldots, (\varphi \mathbf{v}_n)_\alpha) \in K^{m \times n},$$

jejíž sloupce jsou tvořeny souřadnicemi obrazů $\varphi(\mathbf{v}_j)$ vektorů báze β vzhledem na bázi α, t. j. platí $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = (\varphi \mathbf{v}_j)_\alpha$ pro $1 \leq j \leq n$. Tuto matici značíme též

$$\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha,\beta}.$$

(Všimněme si obrácené pořadí znaků báz vůči pořadí vektorových prostorů v označení zobrazení $\varphi : V \to U$.)

Matici $\mathbf{A}$ ze začátku tohoto paragrafu můžeme nazvat *maticí lineárního zobrazení* $\varphi : K^n \to K^m$ *vzhledem na kanonickou bázi* $\varepsilon^{(\mathbf{n})}$, $\varepsilon^{(\mathbf{m})}$.

Pokud neřekneme jinak, budeme pod maticí lineárního zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$ mezi sloupcovými vektorovými prostory vždy rozumět matici $(\varphi)_{\varepsilon(\mathbf{m}),\varepsilon(\mathbf{n})}$ zobrazení φ vzhledem na kanonické báze.

Maticí lineární transformace $\varphi : V \to V$ vzhledem na bázi α prostoru V tedy rozumíme matici $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$.

Přitom platí $(\mathbf{v}_j)_\beta = \mathbf{e}_j^{(n)}$ pro libovolný vektor $\mathbf{v}_j$ báze $\beta = (\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n})$ prostoru V. Z toho je zřejmé, že pro každdoú bázi β n-rozměrného vektorového prostoru V platí

$$(\mathsf{id}_V)_{\beta,\beta} = \mathbf{I}_n.$$

Věta 16. Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad číselným tělesem K, $\dim V = n$, $\dim U = m$ a α, β jsou báze prostorů U resp. V. Potom pre všechna $\mathbf{x} \in V$ platí

$$(\varphi \mathbf{x})_\alpha = (\varphi)_{\alpha,\beta} \cdot (\mathbf{x})_\beta$$

a $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha,\beta}$ je jediná matica s touto vlastností.

Věta 17.

Matice $(\varphi)_{\alpha,\beta}$ lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ z n-rozměrného vektorového prostoru V do m-rozměrného vektorového prostoru U nad číselným tělesem K; vzhledem na báze β, α je tedy mezi všemi maticemi $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ jednoznačně určená podmínkou

$$(\varphi \mathbf{x})_\alpha = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x})_\beta$$

pro každé $\mathbf{x} \in V$.

Skládání lineárních zobrazení zodpovídá násobení matic.

Věta 18. Nechť U, V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad číselným tělesem K, α je báze U, β je báze V a γ je báze W. Potom pro libovolné lineární zobrazení $\psi : W \to V$, $\varphi : V \to U$ platí

$$(\varphi \circ \psi)_{\alpha,\gamma} = (\varphi)_{\alpha,\beta} \cdot (\psi)_{\beta,\gamma}.$$

Věta 19. Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad číselným tělesem K, $\dim V = n$, $\dim U = m$ a α, β jsou báze prostorů U resp. V. Potom pre všechna $\mathbf{x} \in V$ platí

$$(\varphi(\mathbf{x}))_\alpha = (\varphi)_{\alpha,\beta} \cdot (\mathbf{x})_\beta$$

a $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha,\beta}$ je jediná matica touto vlastností.

Věta 20. Nechť U, V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad číselným tělesem K, α je báze U, β je báze V a γ je báze W. Potom pro libovolné lineární zobrazení $\psi : W \to V$, $\varphi : V \to U$ platí

$$(\varphi \circ \psi)_{\alpha,\gamma} = (\varphi)_{\alpha,\beta} \cdot (\psi)_{\beta,\gamma}.$$

Příklad 21. *Otočení* roviny okolo počátku o úhel $\alpha \in \mathbb{R}$ je lineární zobrazení $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Matici tohoto lineárního zobrazení vzhledem na kanonickou bázi ε budeme značiť rovněž $\mathbf{R}_\alpha$, tedy pre $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ budeme psát $\mathbf{R}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}$. Její sloupce získáme otočením vektorů $\mathbf{e}_1 = (1,0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)^T$ o úhel α. Z definice goniometrických funkcí sinus a cosinus pomocí jednotkové kružnice dostáváme

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

To znamená, že

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

a obrazem libovolného vektoru $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ v otočení $\mathbf{R}_\alpha$ je vektor

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

6.5. Prostory lineárních zobrazení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K. Uvažme vektorový prostor U^V *všech* zobrazení $f : V \to U$ s operacemi součtu a skalárního násobku definovanými po složkách. Pak pro množinu $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{U})$ všech *lineárních* zobrazení $\varphi : V \to U$ platí $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}^{\mathcal{V}}$.

Tvrzení 22. Nechť U, V jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K. Potom $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{U})$ je lineární podprostor vektorového prostoru U^V. Tedy $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{U})$ je vektorový prostor nad číselným tělesm K.

Tvrzení 23. Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad číselným tělesem K a $\dim U = m$, $\dim V = n$. Potom

$$\mathcal{L}(V,U) \cong K^{m\times n},$$

tedy $\dim \mathcal{L}(V,U) = mn$.

Zvolme bázi α v prostoru U a β v prostoru V. Na matici $(\varphi)_{\alpha,\beta}$ se můžeme dívat jako na souřadnice vektoru $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{U})$ v prostoru $K^{m\times n}$, vzhledem na dvojici bazí β, α. Lineární zobrazení $\varphi : V \to K$ z vektorového prostoru V do číselného tělesa K se nazývá *lineární funkcionál* nebo též *lineární forma* na V. Vektorový prostor $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{K})$ všech lineárních forem na V se nazývá *duální prostor* nebo jen krátce *duál* vektorového prostoru V. Budeme používat označení $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{K}) = \mathcal{V}^*$.

Pokud v číselném tělese K budeme vždy uvažovat pouze kanonickou bázi sestávající z jediného vektoru $1 \in K$, libovolná báze β v konečně rozměrném prostoru V určuje lineární izomorfismus $V^* \to V$ daný předpisem $\varphi \mapsto (\varphi)_{1,\beta}$. Platí tedy

Tvrzení 24. Pro libovolný konečně rozměrný vektorový prostor V nad číselným tělesem K platí $V^* \cong V$.

Matice $(\varphi)_{1,\beta}$ lineárního funkcionálu $\varphi : V \to K$ je řádkový vektor z prostoru $K^{1\times n}$. Při volbě kanonické báze ε v sloupcovém prostoru $K^{n\times 1}$ můžeme řádkový prostor $K^{1\times n}$ ztotožnit s duálem $(K^{n\times 1})^*$ sloupcového prostoru $K^{n\times 1}$.

Izomorfismus konečně rozměrného prostoru V a jeho duálu V^* závisí od výběru báze ve V. Z druhé strany, pro libovolný vektorový prostor V můžeme definovat kanonické, t. j. od výběru báze nezávislé zobrazení z prostoru V do jeho *druhého duálu* V^{**} dané předpisem $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$, kde

$$\widehat{\mathbf{x}}(\varphi) = \varphi(\mathbf{x})$$

pro $\mathbf{x} \in V$, $\varphi \in V^*$.

Věta 25. Nech V je vektorový prostor nad číselným tělesem K. Potom

(a) $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ je injektivní lineární zobrazení $V \to V^{**}$;

(b) pokud je V konečně rozměrný, pak $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ je lineární izomorfismus $V \to V^{**}$.

Každý vektor $\mathbf{x} \in V$ definuje lineární funkcionál $\widehat{\mathbf{x}}$ na duálním prostoru V^*. Konečně rozměrný vektorový priestor V můžeme přiřazením $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ *přirozeně* ztotožnit s duálem prostoru V^*.